T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KONVEKS OLMAYAN FONKSİYONLAR İÇİN HERMİTE-HADAMARD EŞİTSİZLİĞİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAKAN BOZKURT

HAZİRAN 2013

DÜZCE

KABUL VE ONAY BELGESİ

Hakan BOZKURT tarafından hazırlanan Konveks Olmayan Fonksiyonlar için Hermite Hadamard Eşitsizliği isimli lisansüstü tez çalışması, Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 14/06/2013 tarih ve 2012/221 sayılı kararı ile oluşturulan jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Üye
(Tez Danışmanı)
Doç. Dr. Mehmet Zeki Sarıkaya
Düzce Üniversitesi

Üye
Prof. Dr. Kazım İlarslan
Düzce Üniversitesi

Üye
Doç. Dr. Nesip Aktan
Düzce Üniversitesi

Tezin Savunulduğu Tarih : 14/06/2013

ONAY

Bu tez ile Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Hakan Bozkurt'un Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans derecesini almasını onamıştır.

Prof. Dr. Haldun MÜDERRİSOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

13 Haziran 2013

Hakan Bozkurt

Sevgili Aileme

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim ve bu tezin hazırlanmasında süresince gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Doç. Dr. Mehmet Zeki Sarıkaya'ya en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme ve çalışma arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

13 Haziran 2013 **Hakan Bozkurt**

İÇİNDEKİLER **Sayfa**

SİMGELER

N	Doğal Sayılar Kümesi
R	Reel Sayılar Kümesi
R^n	n-boyutlu Öklit Uzayı
Γ	Gama Fonksiyonu
β	Beta Fonksiyonu
I	R nin içinde bir aralık
I^O	I nın içi
f'	f in birinci türevi
f''	f in ikinci türevi
$L(.,.)$	Logaritmik Ortalama
$A(.,.)$	Aritmetik Ortalama
$G(.,.)$	Geometrik Ortalama

ÖZET

KONVEKS OLMAYAN FONKSİYONLAR İÇİN HERMİTE HADAMARD EŞİTSİZLİĞİ

Hakan BOZKURT
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Haziran 2013, 73 sayfa

Konvekslik, geometri, analiz, lineer cebir ve topolojide kullanılır ve sayı teorisi, klasik ekstremum problemleri, lineer programlama, oyun teorisi ve eşitsizlikler teorisi(lineer, klasik ve matris) gibi çeşitli konularda önemli rol oynar. Son yüzyılda klasik konvekslik tanımından daha genel konveks fonksiyon çeşitleri ortaya atılmıştır. Bunlardan biriside 2006 da Noor tarafından tanıtılan ve konveks fonksiyon tanımını kapsayan φ-konveks fonksiyonlardır. Noor bu fonksiyonların optimizasyon, varyasyonel eşitsizlikler ve denge problemlerinde uygulamalarını yapmıştır. Çalışmada Noor tarafından tanıtılan φ-konveks fonksiyonları kullanarak konveks fonksiyonlar teorisinin en temel teoremi olan ve 132 yıldır matematikçiler tarafından araştırılan Hermite Hadamard Eşitsizliği tipinde midpoint ve trapezoid eşitsizlikler kurulmuştur. Bunu yaparkende fonksiyonu bazen bir kez bazende iki kez diferansiyellenebilir olmasına dikkat edilmiştir.

Anahtar sözcükler: Konveks olmayan fonksiyon, Hermite Hadamard Eşitsizliği, Midpoint ve trapezoid eşitsizlikler

ABSTRACT

THE HERMİTE HADAMARD INEQUALITY
FOR NONCONVEX FUNCTIONS

Hakan BOZKURT
Duzce University
Institute of Science and Technology, Departmant of Mathematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. M. Zeki SARIKAYA
June 2013, 73 pages

The convexity is used in the geometry, calculus, linear algebra, and topology, moreover, it plays an important role in the number theory, classical extremum problems, linear programming, game theory and inequalities theory. In the last century, many convex function types more generally than the classical convexity definition were introduced. One of which is the φ-convex functions which were introduced by Noor in 2006. Noor have applications of this functions in the optimization, variational inequalities, and equlibrium problems. In this study, it is created midpoint and trapezoid inequlities in type of Hermite Hadamard inequality, which is the basic theorem of the convex functions theory.

Keywords: Nonconvex functions, Hermite Hadamard inequality, Midpoint and trapezoid inequality

EXTENDED ABSTRACT

THE HERMİTE HADAMARD INEQUALITY FOR NONCONVEX FUNCTIONS

Hakan BOZKURT
Duzce University
Institute of Science and Technology, Departmant of Mathematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. M. Zeki SARIKAYA
June 2013, 73 pages

1. INTRODUCTION:

The convexity is used in the geometry, calculus, linear algebra, and topology, moreever it plays an important role in the number theory, classical extremum problems, linear programming, game theory and inequalities theory. In the last century, many convex function types more generally than the classical convexity definition were introduced. One of which is the φ-convex functions which were introduced by Noor in 2006. Noor have applications of this functions in optimization, variational inequalities, and equlibrium problems. In this study, we is created midpoint and trapezoid inequalities in type of Hermite Hadamard inequality, which is the most basic theorem of the convex functions theory.

This thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction section and provide a generel knowledge of literature. In the second chapter, we have given about the basic concepts needed. In the third chapter, we have given the Hermite-Hadamard type integral inequalities for nonconvex functions whose absolute values of first derivatives. In the fourth chapter, we have given the Hermite-Hadamard type integral inequalities for nonconvex functions whose absolute values of second derivatives. The last chapter is devoted into results and recommondatitons.

1. GİRİŞ

1.1. AMAÇ VE KAPSAM

Bu tezin amacı Noor tarafından tanıtılan φ-konveks fonsiyonlar kullanılarak Hermite Hadamard tipinde midpoint ve trapezoid eşitsizlikler kurmaktır. Bunu başarmak için ilk başta konveks fonksiyonların ne tür özelliklere sahip olduğunu tarihten bugüne ne tür değişiklikler geçirdiğini açıklayalım.

Konveks fonksiyonların sistematik araştırmasına ilk olarak 19. Yüzyılın sonlarında rastlanmasına rağmen, 20. Yüzyılın ortalarında matematiğin önemli bir alanı olarak görülmeye başlanmıştır. Konveks kümeler ve ilgili geometrik konular matematikçiler tarafından kullanılan 95 ana konudan biridir. Son yüzyılda gelişen disiplini ve artan uygulamalarıyla matematiksel analizin merkezi alanlarından biri olarak yerini almıştır.

Konveks terimine ilk olarak, 1881 de Ch. Hermite(1822-1901) Mathesis 3 (1883, s.82) dergisine gönderdiği mektupta rastlanmıştır. Mektupta,

Sur deux limites d'une intégrale définie. Soit $f(x)$ une fonction qui varie toujours dans le même sens de $x = a$, á $x = b$. On aura les relations

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \int_a^b f(x)dx < (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

ou bien

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \int_a^b f(x)dx > (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

suivant que la courbe $y = f(x)$ tourne sa convexit´e ou sa concavit´e vers l'axe desabcisses.

En faisant dans ces formules $f(x) = 1/(1+x), a = 0, b = x$ il vient

$$x-\frac{x^2}{2+x}<\log(1+x)<x-\frac{x^2}{2(1+x)}$$

yazılıydı. Eşitsizlikler alanında daha fazla dikkate alınan, daha az önemli sonuçlar vardır ama maalesef Hermit'in temel çalşmaları sık sık onun orjinal yazar kimliği verilmeden belirtilmiştir. Bu bağlamda temel matematikte ilgi çeken/çekmekte olan Hermite-Hadamard Eşitsizliğinin geometrik yorumu ve çoğu uygulamasyla konveks fonksiyonun ilk temel sonucu olduğunu söyleyebiliriz. Çoğu matematikçi farklı konveks fonksiyon sınıfları(quasi-convex fonksiyonlar, fonksiyonların Godunova-Levin sınıfı, log-convex ve r-convex fonksiyonlar, p-convex fonksiyonlar, vb.) ve özel ortalamalar(p-logarithmic ortalamalar, identric ortalama, Stolarsky ortalamalar, vb.) için onu uygulamaya, genişletmeye, sadeleştirmeye ve genelleştirmeye çalşmaktadır.

O. Hölder(1889), eğer $f''(x)>0$ ise daha sonralar Jensen eşitsizliği olarak bilinen eşitsizliği f in sağladığını ispatladı. O. Stolz(1893), eğer f , $[a,b]$ de sürekliyse ve

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq\frac{1}{2}[f(x)+f(y)]$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, bu takdirde (a,b) nin her noktasında sağ ve sol türevlere sahip olduğunu gösterdi. J. Hadamard(1893), $[a,b]$ de artan türevlere sahip olan fonksiyonlar için temel integral eşitsizlikleri oluşturdu. Son yüzyılda ilk kez J. L. W. V. Jensen(1905,1906) konveks fonksiyonların sistematik araştırmasının öneminin farkına vardı. Jensen yukarıdaki eşitsizliği kullanarak konveksliği tanmladı ve f in sürekliliğini dolaylı olarak gösteren ve yukarıdaki eşitsizliği de içine alan uzun seriler üretti. AG eşitsizlik, Young Eşitsizliği, Hölder eşitsizliği ve Minkowski eşitsizliği gibi önemli eşitsizliklerin çoğu konveks fonksiyonlar için Jensen eşitsizliğinin sonuçlarıdır.

Hardy, Littlewood ve Polya tarafından 1934 yılında yazılan "Inequalities" adlı eser eşitsizlikler teorisi için temel başvuru kaynağıdır. Okuyucu bu eserde konveks fonksiyonlarla ilgili klasik ve yeni eşitsizlikleri, problemleri, ispat yöntemlerini veya sonuçları bulabilir. Buna ek olarak Beckenbach ve Bellman'ın 1965 de yazdığı

"Inequalities" adlı eser ve Mitrinovic'in 1970 de yazdığı "Analytic Inequalities" adlı eseride söyleyebiliriz. Bu kaynaklar eşitsizlikler teorisini araştırmak isteyen okuyucu için el altında bulunması gereken kaynaklardır.
Daha sonra konveks fonksiyonların daha kapsamlı bir şekilde araştırması A. W. Roberts ve D. E. Varberg tarafından "Convex Functions" adlı eserde kaleme alındı. Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler hakkında Pearić 1987 yılında "Convex Functions: Inequalities" adlı eseri yayınlamıştır. Ayrıca okuyucu çeşitli konveks fonksiyon sınıfları için, Hermite-Hadamard eşitsizliğinin detaylı anlatımını S.S. Dragomir ve C.E.M Pearce tarafından "Selected Topics on Hermite Hadamard Inequalities and Applications" adlı eserde bulabilir.

Son yılllarda klasik konvekslik tanımından daha genel konveks fonksiyon çeşitleri oluşturulmaktadır. Bunlardan birisi de 2006 yılında Noor tarafından tanıtılan φ-konveks fonksiyonlardır. Ayrıca Noor bu tür fonksiyonların optimizasyon , varyasyonel eşitsizlikler ve denge problemlerinde uygulamalarını yapmıştır. Her konveks fonksiyonun(kümenin) aynı zamanda φ-konveks fonksiyon(küme) olduğu ancak bunun tersinin doğru olmayacağı tezin ilerki bölümlerinde açıklanacakdır. Bu şekilde ifade edilebilen fonksiyonlara ayrıca konveks olmayan fonksiyonlar diyeceğiz.

Bu çalışmada Noor tarafından tanıtılan nonkonveks fonksiyonlar kullanarak birinci ve ikinci mertebeden türevlerinin mutlak değerleri için Hermite - Hadamard tipinde trapezoid ve midpoint eşitsizlikler oluşturacağız.

2. KURAMSAL KAVRAMLAR

2.1. GENEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmamız için gerekli olan tanım, teorem, bazı eşitsizlikler ve temel özellikler verilecektir. Gerekli görülenler için ispatlar yapılarak birer örnek verilecektir.

Tanım 2.1.1. Lineer uzaydan reel(kompleks) uzaya olan dönüşümlere fonksiyonel denir.

Tanım 2.1.2. Fonksiyonlar cümlesini fonksiyonlar cümlesine dönüştüren dönüşüme *operatör* denir.

Tanım 2.1.3. (Gamma Fonksiyonu) Gamma fonksiyonu, $n > 0$ için

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

ile tanımlanr. Bu integral $n > 0$ için yakınsaktır. Gamma fonksiyonun bazı önemli özelliklerini şöyle sıralayabiliriz.

i. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$

ii. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

iii. $\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x} dx = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \quad 0 < p < 1$

iv. $2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\Gamma(2n).$

Tanım 2.1.4. $I \subset \mathrm{R}$, $f : I \to \mathrm{R}$ bir fonksiyon ve $\forall x \in I$ için $|f(x)| \le K$ olacak şekilde bir K pozitif reel sayısı varsa f fonksiyonuna sınırlı fonksiyon denir.

Tanım 2.1.5. (Lipschitz Şartı) $[a,b]$ kapalı aralığında her x ve y noktaları için,

$$|f(x)-f(y)|\leq K|x-y|$$

şartını sağlayan bir K sabiti varsa f , $[a,b]$ aralığında *Lipchitz şartını sağlıyor* denir.

Tanım 2.1.6. (Mutlak Süreklilik) $[a,b]$ nin ayrık açık alt aralıklarının birikimi $\{(a_i,b_i)\}_1^n$ için

$$\sum_1^n (b_i-a_i)<\delta$$

olduğunda,

$$\sum_1^n |f(b_i)-f(a_i)|<\varepsilon$$

olacak şekilde herhangi bir $\varepsilon>0$ sayısına karşılık, bir $\delta>0$ bulunabiliyorsa, f , $[a,b]$ de mutlak süreklidir denir.

Tanım 2.1.7. (Konveks Fonksiyon) Her $x,y\in I$ ve $\lambda\in[0,1]$ için,

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

eşitsizliğini sağlayan $f : I\subset \mathrm{R}\to \mathrm{R}$ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir(eşdeğer olarak λ, $(0,1)$ aralığında da seçilebilir). Geometrik olarak bu eşitsizlik, f fonksiyonunun grafiği kirişlerinin altından geçer anlamındadır.

Aşağıdaki kriterler konveks fonksiyon tanımına eşdeğerdir.

(a) I aralığı üzerinde f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart herhangi bir $c\in I$ noktası için, $f(x)-f(c)/(x-c)$ fonksiyonunun I aralığında artan olmasıdır.

(b) $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonununun konveks olması için gerek ve yeter şart her $c, x \in (a,b)$ için,

$$f(x) - f(c) = \int_c^x g(t)dt$$

olacak şekilde $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ artan fonksiyonun olmasıdır.

(c) f diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere, f in konveks olması için gerek ve yeter şart f' fonksiyonununun artan olmasıdır.

(d) f'' , (a,b) de mevcut olsun. Bu durumda f in konveks olması için gerek ve yeter şart $f''(x) \geq 0$ olmasıdır.

(e) $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonununun konveks olması için gerek ve yeter şart her $x_0 \in (a,b)$ için f fonksiyonun en az bir support doğrusuna sahip olmasıdır. Yani

$$f(x) \geq f(x_0) + \lambda(x - x_0) \qquad \forall x \in (a,b)$$

eşitsizliğini sağlamasıdır. Burada λ , x_0 a bağlıdır ve eğer f' varsa o zaman $\lambda = f'(x_0)$ ya da $f_-'(x_0) \neq f_+'(x_0)$ ise $\lambda \in [f_-'(x_0), f_+'(x_0)]$ dir.

(f) $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonununun konveks olması için gerek ve yeter şart P, Q ve R noktaları f fonksiyonun grafiği üzerinde herhangi üç nokta olmak üzere,

$$eğimPQ \leq eğimPR \leq eğimQR$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Konveks Fonksiyonun Özellikleri

i. Kapalı aralıkta tanımlı konveks fonksiyon sınırlıdır.

ii. $f : I \to \mathrm{R}$ konveks fonksiyon ise, I^0 (I nın içi) inde herhangi bir $[a,b]$ kapalı aralığında Lipschitz şartını sağlar. Bu nedenle f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında de mutlak sürekli ve I^0 de süreklidir.

iii. $f : I \to \mathrm{R}$ konveks fonksiyon ise, I^0 de $f'_-(x)$ ve $f'_+(x)$ vardır ve artandır.

iv. $f : I \to \mathrm{R}$ fonksiyonu I açık aralığında konveks ise, sayılabilir bir E kümesi haricinde f' mevcuttur ve süreklidir.

v. k tane fonksiyon $\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ ye konveks fonksiyonlar olsun. Bu takdirde;

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} a_j f_j(k), a_j > 0; (j = 1,2,3,...,k)$$

fonksiyonuda konvekstir.

vi. $g : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ azalmayan ve konveks fonksiyon ayrıca $h : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ konveks olsun. Bu takdirde; $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$, $f(x) = (g \circ h)(x)$ olarak tanımlanan f bileşke fonksiyonu da konvekstir.

vii. $g : \mathrm{R}^m \to \mathrm{R}$ konveks ve h, $h(x) = Ax + B$ formunda $h : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ konveks olmak üzere (burada A uygun matristir).

$$f(x) = g(h(x))$$

fonksiyonu konveks fonksiyondur.

Teorem 2.1.1. (Hermite Hadamard Eşitsizliği) $f : I \to \mathrm{R}$ konveks fonksiyon olmak üzere, her $a,b \in I$ ve $a < b$ için,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliğine Hermite Hadamard Eşitsizliği denir. Burada f fonksiyonunun konkav olması eşitsizliği tersine çevirir.

İspat. f fonksiyonu sürekli ve sınırlı olduğundan dolayı $[a,b]$ aralığında integrallenebilirdir. Konvekslik tanımından,

$$f(ta+(1-t)b) \leq tf(a)+(1-t)f(b)$$

eşitsizliği sağlanr. Bu eşitsizliğin her iki tarafının $[0,1]$ aralığında t ye göre integrali alınırsa,

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b) \leq \int_0^1 tf(a)+\int_0^1 (1-t)f(b)$$

$$= \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

elde edilip soldaki eşitsizlikte $x = ta+(1-t)b,\ t\in[0,1]$ dönüşümü uygulanırsa $H.-H.$ eşitsizliğinin sağ tarafı elde edilir. Sol tarafını ispat etmek için,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{b-a}\left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx\right]$$

eşitliğinin sağndaki integrandlara sırasıyla $x = a+t(b-a)/2$ ve $x = b-t(b-a)/2$ değişken değişimi uygulanırsa,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1\left[f\left(a+\frac{t(b-a)}{2}\right)+f\left(b-\frac{t(b-a)}{2}\right)\right]dt$$

$$\geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

elde edilip $H.-H.$ eşitsizliğinin sol tarafı ispatlanmış olur.

Tanım 2.1.8. (Logaritmik Konveks Fonksiyon) $f : I \to [0,\infty)$ fonksiyonu,

i. Her $x, y \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için,

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq [f(x)]^{\lambda}[f(y)]^{1-\lambda}$$

ii. $\log f$ konveks

şartlarından birini sağlıyorsa f fonksiyonuna *logaritmik konveks fonksiyon* denir.

Teorem 2.1.2 $f : I \to [0,\infty)$ fonksiyonu logaritmik konveks ise konvekstir.

İspat. f fonksiyonu logaritmik konveks fonksiyon olduğundan, $\log f$ fonksiyonu I aralığında konvekstir ve $g(x)=e^{x}$ fonksiyonu tüm reel sayılar kümesinde artan ve konveks bir fonksiyon olduğundan, özellik (vi) den dolayı,

$$f=\exp(\log f)$$

olup f fonksiyonu konveks olur. Diğer yoldan direk olarak konveksliğin ve logaritmik konveksliğin tanımı kullanlarak AO-GO eşitsizliğinden de benzer sonuç elde edilebilir.

Teorem 2.1.3 $f : I \to \mathrm{R}$ logaritmik konveks fonksiyon, $a,b \in I$ ve $a<b$ olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\le \exp\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx\right] \\
&\le \frac{1}{b-a}\int_a^b G\big(f(x), f(a+b-x)\big)dx \\
&\le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \\
&\le L\big(f(a), f(b)\big)
\end{aligned}
$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Burada $G(a,b)$ pozitif reel sayılar için geometrik ortalama ve $L(p,q)$ ayrık pozitif reel saylar için logaritmik ortalama anlamındadır.

Tanım 2.1.9. (Quasi Konveks Fonksiyon) Her $x, y \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için,

$$
f(\lambda x+(1-\lambda)y) \le \max\{f(x), f(y)\}
$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna *quasi konveks fonksiyon* denir.

Yukardaki tanımlardan dolayı

$$
\begin{aligned}
f(\lambda x+(1-\lambda)y) &\le [f(x)]^{\lambda}[f(y)]^{1-\lambda} \\
&\le \lambda f(x)+(1-\lambda) f(y) \\
&\le \max\{f(x), f(y)\}
\end{aligned}
$$

eşitsizliklerine sahip olabiliriz. Yani quasi-konveks fonksiyon ailesi log-konveks fonksiyon ailesini, log-konveks fonksiyon aileside konveks fonksiyon ailesini kapsar.

Tanım 2.1.10. (Özel Ortalamalar) α, β reel saylar ve $\alpha \neq \beta$ olmak üzere,

$$
\begin{array}{lll}
G(\alpha,\beta)=\sqrt{\alpha\beta}, & \alpha,\beta \in \mathbb{R}/\{0\} & \textit{Harmonik Ortalama} \\
A(\alpha,\beta)=\frac{\alpha+\beta}{2}, & \alpha,\beta \in \mathbb{R} & \textit{Aritmetik Ortalama} \\
\overline{L}(\alpha,\beta)=\frac{\beta-\alpha}{\ln|\beta|-\ln|\alpha|} & \alpha,\beta \in \mathbb{R}/\{0\} & \textit{Logaritmik Ortalama}
\end{array}
$$

şeklindedir.

Teorem 2.1.4 (Jensen Eşitsizliği) f fonksiyonu (a,b) aralığında konveks ve

$x_i \in (a,b)$ olsun. Bu durumda $\alpha_i > 0$ ve $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ ise,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat.

(a) Aksiyom (e) den dolayı f fonksiyonu her $x_0 \in (a,b)$ için bir suport doğruya sahiptir. Yani her x_0 noktası için $f(x) \geq f(x_0) + m(x - x_0)$ olacak şekilde x_0 a bağlı bir m noktası vardır. Bu eşitsizlikte özel olarak $i = 1,2,...,n$ için $x_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ seçilirse,

$$f(x_i) \geq f(x_0) + m(x_i - x_0)$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu eşitsizlikler α_i ile çarpılır, taraf tarafa toplanır ve düzenlenirse Jensen Eşitsizliği elde edilir.

(b) *1. Durum*: $n = 2$ ve $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$ için, konveks fonksiyon tanımında $\lambda = \frac{1}{2}$ seçilerek elde edilebilen $J - konveks$ fonksiyonun tanımını elde ederiz. İlk olarak Pearić'in [Pecarić, J. E., Proschan, F. & Tong, Y. L. 1992] de kullandığı tümevarım yöntemiyle $\alpha_i = 1/n, i = 1,...,n$ için,

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \tag{2.1}$$

eşitsizliğini ispatlayalım.

Varsayalm ki $2 \leq k \leq n$ için yukardaki eşitsizlik geçerli olsun. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
&f\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}x_i\right)\\
&= f\left(\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{n-1}{n}.\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}x_i+\frac{1}{n}x_{n+1}\right]\right)\\
&\le \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)+f\left(\frac{n-1}{n}.\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}x_i+\frac{1}{n}x_{n+1}\right)\right]\\
&\le \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)+\frac{1}{n}\left\{(n-1)f\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}x_i\right)+f(x_{n+1})\right\}\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Sondaki eşitsizlite $f\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}x_i\right)$ terimli ifadeler eşitsizliğin sol tarafında toplanırsa,

$$
f\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}x_i\right)\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i) \tag{2.2}
$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu ise bizlere $k=n+1$ içinde eşitsizliğinin geçerli olduğunu gösterir. O halde tümevarm aksiyomundan dolayı (2.1) eşitsizliği bütün n doğal sayıları için geçerlidir.

2. Durum: $\alpha_1,...,\alpha_n$ negatif olmayan rasyonel saylar için $\alpha_i=\frac{p_i}{m}, i=1,...,n$ şartını sağlayan $m=p_1+...+p_n$ $\left(p_1,...,p_n\in Z^+\cup\{0\}\right)$ olacak şekilde m doğal sayısı bulunabilir. Bu durumda (2.2) eşitsizliğinden,

$$
\begin{aligned}
&f\left(\frac{(x_1+...+x_1)+...+(x_n+...+x_n)}{m}\right)\\
&\le\frac{(f(x_1)+...+f(x_1))+...+(f(x_n)+...+f(x_n))}{m}
\end{aligned}
$$

eşitsizliğinin geçerli olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Burada ilk parantezde p_1 tane ve son parantezde p_n tane terim olduğuna dikkat edin. Böylece (1) eşitsizliğine eşdeğer olan,

$$f\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{m} f(x_i)$$

eşitsizliğini elde ederiz ve $\alpha_i = \frac{p_i}{m}, i = 1,...,n$ seçilirse, Teorem 2.4 ün ispat tamamlanır.

Teorem 2.1.5 (İntegraller için Jensen Eşitsizliği) $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon, $h : I \to (0,\infty)$ ve $u : I \to \mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ integrallenebilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$f\left(\frac{\int_a^b h(t)u(t)dt}{\int_a^b h(t)dt}\right) \le \frac{\int_a^b h(t) f(u(t))dt}{\int_a^b h(t)dt}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. f fonksiyonu konveks olduğundan dolayı, bir support doğruya sahiptir. Yani $\gamma > 0$ için,

$$f(t) - f(\gamma) \ge \lambda(t-\gamma), \ \forall t \ge 0$$

olacak şekilde bir λ sabiti vardr. Burada $t = u(t)$ seçilir ve eşitsizliğin her iki taraf $h(t)$ ile çarpılıp $[a,b]$ aralğında t ye göre integral alınırsa,

$$\begin{aligned}&\int_a^b h(t) f(u(t))dt - f(\gamma)\int_a^b h(t)dt \\ &\ge \lambda\left\{\int_a^b h(t)u(t)dt - \gamma\int_a^b h(t)dt\right\}\end{aligned}$$

elde edilir. Son bulunan eşitsizlikte,

$$\gamma = \frac{\int_a^b h(t)u(t)dt}{\int_a^b h(t)dt}$$

yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 2.1.6 (AO-GO Eşitsizliği) Eğer her $i = 1,2,...,n$ için $x_i \geq 0$, $\alpha_i > 0$ ve $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ ise,

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. en az bir i için $x_i = 0$ ise ispat aşikardır. $x_i > 0$ durumunda, $y_i = \log x_i$ seçilirse,

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \right)$$

olup $f(t) = e^t$ fonksiyonu R de konveks olduğundan Jensen Eşitsizliğini uygularsak,

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} &= f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(y_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \end{aligned}$$

elde edilip ispat tamamlanmış olur. Özel olarak $n = 2$, $\alpha_1 = \frac{1}{p}$, $\alpha_2 = \frac{1}{q}$, $x_1 = x^p$ ve $x_2 = y^q$ seçilirse Young Eşitsizliği olarak bilinen,

$$xy \leq \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 2.1.7 (Hölder Eşitsizliği) $x_1,...,x_n, y_1,...,y_n > 0$, $p,q > 1$ öyleki $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} . \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsiliğine Hölder Eşitsilizliği denir. Özel olarak $p = q = 2$ seçilirse yukardaki eşitsizlik Cauchy-Buniakowsky-Schwartz eşitsizliği elde edilir.

İspat. Yukardaki eşitsizlikte x_i ve y_i lerden en az birinin sıfırdan farklı olduğunu düşünebiliriz. O halde $u = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$ ve $v = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$ her ikiside pozitiftir, Young Eşitsizliğinde $x = x_i / u$ ve $y = y_i / v$ seçersek,

$$\frac{x_i}{u} \cdot \frac{y_i}{v} \leq \frac{1}{p}\left(\frac{x_i}{u}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{y_i}{v}\right)^q$$

elde edilip bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanrsa,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{uv} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

olup Hölder Eşitsizliği elde edilir.

Tanım 2.1.11. (İntegraller İçin Hölder Eşitsizliği) $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g , $[a,b]$ aralığında tanml reel fonksiyonlar, $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde farklı konvekslik türleri için elde edilen Hermite - Hadamard tipinde trapezoid ve midpoint eşitsizlikler verilip. Noor tarafından belirtilen $\varphi - konveks$ fonksiyon kavramı tanıtılacakdır. Bu konvekslik türü için Hermite - Hadamard tipinde eşitsizlik oluşturulacakdır.

3.1. HERMİTE HADAMARD TİPİNDE EŞİTSİZLİKLER

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığında iki kez diferansiyellenebilir ve f'' fonksiyonu (a,b) aralığında tanmlı olmak üzere,

$$\left| \int_a^b f(x)dx - (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \le \frac{(b-a)^3}{24} \| f'' \|_\infty \tag{MPE}$$

ve

$$\left| \int_a^b f(x)dx - (b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2} \right| \le \frac{(b-a)^3}{12} \| f'' \|_\infty \tag{TE}$$

eşitsizlikleri literatürde sırasıyla *midpoint eşitsizlik* ve *trapezoid eşitsizlik* olarak bilinir. Burada $\| f'' \|_\infty = \sup_{x\in(a,b)} |f''(x)| < \infty$ anlamındadır. Böylece $\int_a^b f(x)dx$ integraline

$$\int_a^b f(x)dx \cong (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

ve

$$\int_a^b f(x)dx \cong (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

şeklinde de görüldüğü gibi midpoint ve trapezoidal kurallar doğrultusunda yaklaşabiliriz. Bu yaklaşım bizi tüm konveks fonksiyonlar için geçerli olan

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

biçiminde ifade edilen Hermite - Hadamard eşitsizliğine götürür. Mitrinović ve Laković (1985) de belirttiğine göre bu eşitsizliği Hermite 1893 de Hadamard'dan on yıl önce bulmuştur. Ancak f fonksiyonunun iki kez diferansiyellenebilir olmaması ya da ikinci türevinin (a,b) aralığında tanmlı olmaması (MPE) ve (TE) yi geçersiz kılar. Bu yüzden birçok matematikçi Montgomery özdeşliği ve Peano kernelin birkaç tipini kullanarak konveks fonksiyonların farklı türleri için çoğunlukla birinci türevleri içeren alternatif sonuçlar bulmaya yönelmiştir.

1998 de Dragomir ve Agarwal diferansiyellenebilir konveks fonksiyonlar için Hermite Hadamard trapezoid eşitsizliğinin sağ tarafı ile ilgili sonucu ispatlamak için aşağıdaki lemmayı kullandılar.

Lemma 3.1.1 $f : I \subset \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ fonksiyonu I de diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a<b$ ($a,b \in I$) olmak üzere, eğer f' fonksiyonu $[a,b]$ aralğında integrallenebilir ise,

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_0^1 (1-2t)\, f'(ta+(1-t)b)dt$$

eşitliği sağlanır.

Böylece bu lemma kullanlarak aşağdaki teorem ispatlandı.

Teorem 3.1.1 $f : I \subset \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ fonksiyonu I de diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a<b$ ($a,b \in I$) olmak üzere, eğer $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks ise,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\leq\frac{b-a}{8}\left[\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right]$$

eşitsizliği geçerlidir.

2000 yılında Pearce ve Pearić Teorem 3.1.1 in genelleştirmesi olan aşağıdaki sonucu ispatladı.

Teorem 3.1.2 $f\ :\ I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I de diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a<b$ ($a,b\in I$) olmak üzere, eğer $q\geq 1$ için $|f'|^p$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks ise,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\leq\frac{b-a}{4}\left[\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}}$$

ve

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\leq\frac{b-a}{4}\left[\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Eğer $q\geq 1$ için $|f'|^p$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konkav ise bu takdirde

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\leq\frac{b-a}{4}\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

ve

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\leq\frac{b-a}{4}\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Aşağıda 2004 yılında Kırmacı tarafından ispatlanan diferansiyellenebilen konveks fonksiyonlar için Hermite Hadamard (midpoint) eşitsizliğinin sol tarafı ile ilgili sonuçlar verilmiştir.

Lemma 3.1.2 $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I de diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a < b$ ($a, b \in I$) olmak üzere, eğer f' fonksiyonu $[a,b]$ aralığında integrallenebilir ise

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = (b-a)\int_0^1 K(t) f'(ta + (1-t)b)dt$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada

$$K(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ 1-t, & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

şeklinde verilir. Bu Lemmayı kullanarak Kırmacı aşağıdaki teoremi ispatladı.

Teorem 3.1.3 $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I de diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a < b$ ($a, b \in I$) olmak üzere, eğer $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks ise

$$\left| \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \le \frac{b-a}{8}\left[|f'(a)| + |f'(b)| \right]$$

eşitsizliği geçerlidir.

2004 yılında Yang diferansiyellenebilir konveks ve konkav fonksiyonlar için Hermite Hadamard eşitsizliğinin her iki taraf içinde bazı sonuçlar verdi.

Teorem 3.1.4 $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I de diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a < b$ ($a, b \in I$) olmak üzere, eğer $q \ge 1$ için $|f'|^q$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{12}\left[|f'(a)|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+|f'(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

ve

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{24}\left[|f'(a)|^q+4\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+|f'(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

eğer $|f'|^q$ konkav ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{8}\left[\left|f'\left(\frac{5a+b}{6}\right)\right|+\left|f'\left(\frac{a+5b}{6}\right)\right|\right]$$

ve

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{8}\left[\left|f'\left(\frac{2a+b}{3}\right)\right|+\left|f'\left(\frac{a+2b}{3}\right)\right|\right]$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

1997 de Gill konveksliğin farklı bir türü olan log-konveks fonksiyonlar için Hermite Hadamard Eşitsizliğinin sağ tarafı ile ilgili sonuçlar verdi.

Teorem 3.1.5 f $[a,b]$ aralğında pozitif log-konveks fonksiyon olmak üzere,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le L(f(a), f(b))$$

eşitsizliği sağlanr. Burada $L(.,.)$ logaritmik ortalama anlamndadr.

2007 ylnda Ion mutlak değerlerinin türevleri quasi-konveks olan fonksiyonlar için Hermite Hadamard tipinde eşitsizlikler oluşturdu.

Teorem 3.1.6 $f : I \subset \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ fonksiyonu I de diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a<b$ ($a,b\in I$) olmak üzere, eğer $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında quasi-konveks ise,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{b-a}{4}\max\{|f'(a)|,|f'(b)|\}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 3.1.7 $f : I \subset \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ fonksiyonu I de diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a<b$ ($a,b\in I$) olmak üzere, eğer $p>1$ için $|f'|^{p/(p-1)}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralğında quasi-konveks ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{b-a}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\max\left\{|f'(a)|^{\frac{p}{p-1}},|f'(b)|^{\frac{p}{p-1}}\right\}\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Şimdi ikinci mertebeden türevleri için Hermite - Hadamard eşitsizliği ile ilgili bulunan sonuçları verelim.

2009 da Hussain, Bhatti ve Iqbal ikinci mertebeden türevlerinin mutlak değerleri s-konveks olan fonksiyonlar için Hermite - Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı ile ilgili sonuçlar vermiştir.

Teorem 3.1.8 $f : I \subset [0,\infty] \to \mathrm{R}$ fonksiyonu I de iki kez diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a<b$ ($a,b \in I$) olmak üzere, eğer f'' fonksiyonu $[a,b]$ aralığında integrallenebilir ve $|f''|$ fonksiyonu $[a,b]$ aralğında $s \in [0,1]$ ve $q \geq 1$ için s-konveks ise,

$$\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2\times 6^{\frac{1}{p}}} \left[\frac{|f''(a)|^q + |f''(a)|^q}{(s+2)(s+3)} \right]^{\frac{1}{q}} \tag{3.1}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ dir.

Hatırlatma 3.1.1 Eğer eşitsizlik (3.1) de $s=1$ seçilirse,

$$\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{(b-a)^2}{12} \left[\frac{|f''(a)|^q + |f''(a)|^q}{2} \right]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği sağlanır.

2010 da Alomari, Darus ve Dragomir ikinci mertebenden türevleri konveks olan fonksiyonlar için Hermite - Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı ile ilgili sonuçlar vermiştir.

Lemma 3.1.4 $f : I \subset \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ fonksiyonu I de iki kez diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a<b$ ($a,b \in I$) olmak üzere, eğer f'' fonksiyonu $[a,b]$ aralığında integrallenebilir ise,

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\frac{(b-a)^2}{2}\int_0^1 t(1-t)\,f''(ta+(1-t)b)dt$$

eşitliği geçerlidir.

Bu lemma dan yararlanarak aşağıdaki teoremler ispatlandı.

Teorem 3.1.9 $f : I\subset \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I de iki kez diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a<b$ ($a,b\in I$) olmak üzere, eğer f'' fonksiyonu $[a,b]$ aralığnda integrallenebilir ve $|f''|$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında quasi-konveks ise,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\le\frac{(b-a)^2}{12}\max\{|f''(a)|,|f''(b)|\}$$

eşitsizliği geçerlidir. Aşağıda bu teoremin genelleştirmesi verildi.

Teorem 3.1.10 $f : I\subset \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I de iki kez diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a<b$ ($a,b\in I$) olmak üzere, eğer f'' fonksiyonu $[a,b]$ aralığında integrallenebilir ve $p>0$ için $|f''|^{p/(p-1)}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında quasi-konveks ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\le\frac{(b-a)^2}{8}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(\frac{3}{2}+p)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\max\{|f''(a)|^q,|f''(b)|^q\}\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

3.1. KONVEKS OLMAYAN FONKSİYONLAR

$\mathbb{R}^n$ de boş olmayan bir K kümesi ve $f,\varphi : K\to\mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar olsun. Bu tez boyunca $\varphi : K \to \mathrm{R}$ fonksiyonu $0 < \varphi < \frac{1}{2}$ aralığında tanımlanacaktır. İlk olarak Noor and Noor ve Noor[tarafından verilen kavramları hatırlatalım. Konveks fonksiyonların kayda değer bir genelleştirmesi Noor tarafndan tanıtılan $\varphi - konveks$ fonksiyonlardır. Noor and Noor ve Noor $\varphi - konveks$ fonksiyonların temel özelliklerini öğretmekteler. Bu bölümde quasi-$\varphi - konveks$, log-$\varphi - konveks$, $\varphi - konveks$ gibi konveks olmayan fonksiyonların tanmlarını verip, bunlarla Hermite - Hadamard eşitsizliğini ve bununla ilgili teoremleri vereceğiz.

Tanım 3.2.1 Her $u, v \in K$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$u + te^{i\varphi}(v-u) \in K$$

ise K kümesine $\varphi - konveks$ kümedir denir. Geometrik olarak, K nn içinde u noktasından başlayan bir yolun varlığından bahseder. Ancak bu yolun bitiş noktasının v noktası olması gerekmez. Bu ifade analizde önemli bir rol oynar. $\varphi = 0$ seçildiğinde tanım konveksliğin tanımına indirgenir. Yani her $\varphi - konveks$ küme aynı zamanda $konveks$ kümedir. Ancak tersi doğru değildir.

Tanım 3.2.2 f fonksiyonu K $\varphi - konvek$ kümesi üzerinde tanımlı olmak üzere her $u, v \in K$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$f\left(u + te^{i\varphi}(v-u)\right) \leq (1-t)\, f(u) + tf(v)$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonuna $\varphi - konveks$ fonksiyon denir. Eğer eşitsizliğin tersi geçerliyse bu durumda f fonksiyonuna $\varphi - konkav$ fonksiyon denir.

Tanım 3.2.3 f fonksiyonu K $\varphi - konve$ kümesi üzerinde tanımlı pozitif fonksiyon olmak üzere her $u, v \in K$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$f\left(u+te^{i\varphi}(v-u)\right)\leq\left(f(u)\right)^{1-t}\left(f(v)\right)^{t}$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonuna logaritmik-$\varphi-konveks$ fonksiyon denir.

Tanm 3.2.4 f fonksiyonu K $\varphi-konve$ kümesi üzerinde tanımlı pozitif fonksiyon olmak üzere her $u,v\in K$ ve $t\in[0,1]$ için,

$$f\left(u+te^{i\varphi}(v-u)\right)\leq\max\{f(u),f(v)\}$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonuna quasi-$\varphi-konveks$ fonksiyon denir.
Yukardaki tanımlardan,

$$\begin{aligned}f\left(u+te^{i\varphi}(v-u)\right)&\leq\left(f(u)\right)^{1-t}\left(f(v)\right)^{t}\\&\leq(1-t)f(u)+tf(v)\\&\leq\max\{f(u),f(v)\}\end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Yani f fonksiyonu, logaritmik-$\varphi-konveks$ ise $\varphi-konveks$ ve $\varphi-konveks$ ise quasi-$\varphi-konveks$ fonksiyondur.

Teorem 3.2.1 $f\ :\ K=\left[a,a+e^{i\varphi}(b-a)\right]\rightarrow(0,\infty)$ fonksiyonu $K^{0}(\text{K nıniçi})$ aralığında $\varphi-konveks$ fonksiyon ve $0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$ olmak üzere,

$$f\left(\frac{2a+e^{i\varphi}(b-a)}{2}\right)\leq\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_{a}^{a+e^{i\varphi}(b-a)}f(x)dx\leq\frac{f(a)+f\left(a+e^{i\varphi}(b-a)\right)}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. f fonksiyonu $\varphi-konveks$ fonksiyon olduğundan,

$$\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx \le e^{i\varphi}(b-a)\int_0^1 f\left((1-t)a + t\left(e^{i\varphi}(b-a)\right)\right)dt$$

$$\le e^{i\varphi}(b-a)\int_0^1 \left[(1-t)f(a) + tf\left(e^{i\varphi}(b-a)\right)\right]dt$$

$$= e^{i\varphi}(b-a)\frac{f(a) + f\left(e^{i\varphi}(b-a)\right)}{2}$$

eşitsizliğinin sağ tarafı ispatlanır. Sol tarafını ispatlamak için,

$$\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx = \frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\left[\int_a^{\frac{2a+e^{i\varphi}(b-a)}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{2a+e^{i\varphi}(b-a)}{2}}^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx\right]$$

eşitliğinin sağındaki integrandlara sırasıyla $x = \left(2a + te^{i\varphi}(b-a)\right)/2$ ve $x = a + e^{i\varphi}(b-a) - te^{i\varphi}(b-a)/2$ değişken değişimi uygulanırsa,

$$\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1\left[f\left(\frac{2a + te^{i\varphi}(b-a)}{2}\right)\right.$$

$$\left. + f\left(a + e^{i\varphi}(b-a) - \frac{te^{i\varphi}(b-a)}{2}\right)\right]$$

$$\ge f\left(\frac{2a + e^{i\varphi}(b-a)}{2}\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise $\varphi - konveks$ fonksiyonlar için Hermite Hadamard integral eşitsizliğinin sol tarafnın ispatıdır.

Teorem 3.2.2 $f : K = \left[a, a + e^{i\varphi}(b-a)\right] \to (0,\infty)$ fonksiyonu $K^0(\text{K nıniçi})$ aralığında log- $\varphi - konveks$ fonksiyon ve $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ olmak üzere,

$$\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx \le L(f(a), f(b))$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $L(.,.)$ logaritmik ortalama anlamındadır.

İspat. f fonksiyonu log-$\varphi - konveks$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx &= \int_0^1 f\left(a+te^{i\varphi}(b-a)\right)dt \\
&\le \int_0^1 \left(f(a)\right)^{1-t}\left(f(b)\right)^t dt \\
&= f(a)\int_0^1 \left[\frac{f(b)}{f(a)}\right]^t dt \\
&= \frac{f(a)}{\log f(b) - f(a)}\left[\frac{f(b)}{f(a)}-1\right] \\
&= L\left(f(a), f(b)\right)
\end{aligned}$$

elde edilip ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.3 $f \ : \ K = \left[a, a+e^{i\varphi}(b-a)\right] \to (0,\infty)$ fonksiyonu K^0(K nıniçi) aralığında quasi-$\varphi - konveks$ fonksiyon ve $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ olmak üzere,

$$\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx \le \max\{f(a), f(b)\}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. f fonksiyonu quasi- $\varphi - konveks$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx &= \int_0^1 f\left(a+te^{i\varphi}(b-a)\right)dt \\
&\le \int_0^1 \max\{f(a), f(b)\}dt \\
&= \max\{f(a), f(b)\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır ve ispat tamalanır.

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde birinci ve ikinci mertebeden türevlerinin mutlak değerleri φ-konveks, log-φ-konveks, quasi-φ-konveks olan fonksiyonlar kullanarak Hermite - Hadamard eşitsizliği ile ilgili sonuçlar vereceğiz.

3. 1 . KONVEKS OLMAYAN FONKSİYONLARIN BİRİNCİ MERTEBEDEN TÜREVLERİ İÇİN HERMİTE HADAMARD EŞİTSİZLİĞİ

Lemma 4.1.1 $f : K \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, K, $\varphi - konveks$ kümesinde diferansiyellenebilir olsun. Her $a < b$ ($a,b \in K$) için,

$$\left| \frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)} \int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx - \frac{f(a) + f\left(a + e^{i\varphi}(b-a)\right)}{2} \right|$$

$$= \frac{e^{i\varphi}(b-a)}{2} \left| \int_0^1 (1-2t)\, f'\left(a + te^{i\varphi}(b-a)\right)dt \right|$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. Varsayalım ki $a, a + e^{i\varphi}(b-a) \in K$ olsun. O halde K, $\varphi - konveks$ küme olduğundan, her $t \in [0,1]$ için, $a + te^{i\varphi}(b-a) \in K^0$ dır. Kısmi integrasyon yöntemini kullanarak,

$$\int_0^1 (1-2t)\, f'\left(a + te^{i\varphi}(b-a)\right)dt$$

$$= \left[\frac{(1-2t)\, f(a + te^{i\varphi}(b-a))}{e^{i\varphi}(b-a)} \right]_0^1 + \frac{2}{e^{i\varphi}(b-a)} \int_0^1 f(a + te^{i\varphi}(b-a))dt$$

$$= -\frac{f(a) + f(a + e^{i\varphi}(b-a))}{e^{i\varphi}(b-a)} + \frac{2}{e^{2i\varphi}(b-a)^2} \int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx$$

eşitliğini buluruz. Bu eşitlikte önce her iki taraf $e^{i\varphi}(b-a)/2$ ile çarpar sonra her iki tarafın mutlak değerini alırsak istenen sonucu elde ederiz.

Teorem 4.1.1. $f : K \subset \mathrm{R} \to (0,\infty)$ fonksiyonu K, $\varphi - konveks$ kümesinde diferansiyellenebilir ve $|f'|$, $\varphi - konveks$ fonksiyon olmak üzere her $a<b$ ($a,b \in K$) için,

$$\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx - \frac{f(a)+f\left(a+e^{i\varphi}(b-a)\right)}{2}\right|$$

$$\le \frac{e^{i\varphi}(b-a)}{8}\left[|f'(a)|+|f'(b)|\right]$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma (4.1.1) eşitliğinde $|f'|$ in $\varphi - konvekslik$ tanımını kullanırsak,

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx - \frac{f(a)+f\left(a+e^{i\varphi}(b-a)\right)}{2}\right| \\
&= \frac{e^{i\varphi}(b-a)}{2}\left|\int_0^1 (1-2t)\, f'\left(a+te^{i\varphi}(b-a)\right)dt\right| \\
&\le \frac{e^{i\varphi}(b-a)}{2}\int_0^1 \left|(1-2t)\, f'\left(a+te^{i\varphi}(b-a)\right)\right| dt \\
&\le \frac{e^{i\varphi}(b-a)}{2}\int_0^1 |1-2t|\left[(1-t)|f'(a)|+t|f'(b)|\right]dt \\
&= \frac{e^{i\varphi}(b-a)}{8}\left[|f'(a)|+|f'(b)|\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Üçgen eşitsizliğinden mutlak değer fonksiyonu tüm reel saylarda konveks fonksiyon olduğundan $(-\infty,\infty)$ aralığında $f(x)=|x|$ konveks fonksiyonu, $[0,1]$ aralığında $u(t)=\left|(1-2t)\, f'\left(a+te^{i\varphi}(b-a)\right)\right|$ pozitif fonksiyonu ve $h(t)=1$ sabit fonksiyonu Teorem 2.5 de yerine yazılırsa yukarıda kullandığımız,

$$\left|\int_0^1 (1-2t)\, f'\left(a+te^{i\varphi}(b-a)\right)dt\right| \le \int_0^1 \left|(1-2t)\, f'\left(a+te^{i\varphi}(b-a)\right)\right| dt$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülebilir. Teoremde mutlak değer almamızın sebebi $t \in [0,1]$ için $(1-2t)$ teriminin pozitif ve negatif değerler almasından kaynaklanmaktadır. Aşağıda Hölder integral eşitsizliği kullanlarak Teorem 3.2.1 in genelleştirmesi yapıldı.

Teorem 4.1.2 $f : K \subset \mathrm{R} \to (0,\infty)$ fonksiyonu K aralığında diferansiyellenebilir ve bu aralıkta $p > 1$ ($p \in \mathrm{R}$) için $|f'|^{p/p-1}$ fonksiyonu $\varphi - konveks$ olsun. Bu durumda her $a < b$ ($a, b \in K$) için,

$$\left| \frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)} \int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx - \frac{f(a) + f(a+e^{i\varphi}(b-a))}{2} \right|$$

$$\le \frac{e^{i\varphi}(b-a)}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left(\frac{|f'(a)|^{\frac{p}{p-1}} + |f'(b)|^{\frac{p}{p-1}}}{2} \right)^{\frac{p-1}{p}}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Lemma 4.1.1'i, Hölder eşitsizliğini ve $|f'|^{p/p-1}$ fonksiyonunun $\varphi - konveksliğini$ kullanırsak,

$$\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x))dx - \frac{f(a)+f(a+e^{i\varphi}(b-a))}{2}\right|$$

$$\leq \frac{e^{i\varphi}(b-a)}{2}\int_0^1 |1-2t|\left|f'(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|dt$$

$$\leq \frac{e^{i\varphi}(b-a)}{2}\left(\int_0^1 |1-2t|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left|f'(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|^{\frac{p}{p-1}} dt\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\leq \frac{e^{i\varphi}(b-a)}{2}\left(\int_0^1 |1-2t|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left[(1-t)\left|f'(a)\right|^{\frac{p}{p-1}} + t\left|f'(b)\right|^{\frac{p}{p-1}}\right]dt\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$= \frac{e^{i\varphi}(b-a)}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{\left|f'(a)\right|^{\frac{p}{p-1}} + \left|f'(b)\right|^{\frac{p}{p-1}}}{2}\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

eşitisizliği geçerlidir. Burada

$$\left(\int_0^1 |1-2t|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}$$

ve

$$\int_0^1 (1-t)dt = \int_0^1 tdt = \frac{1}{2}$$

dir. Şimdi birinci mertebeden türevlerinin mutlak değerleri $\varphi - konveks$ olan fonksiyonlar için Hermite - Hadamard eşitisizliğinin sol tarafı ile ilgili sonucu verelim.

Lemma 4.1.2. $f : K \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, K , $\varphi - konveks$ kümesinde diferansiyellenebilir olsun. Her $a < b$ ($a, b \in K$) için,

$$\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx - f\left(\frac{2a+e^{i\varphi}(b-a)}{2}\right)\right|$$

$$= e^{i\varphi}(b-a)\left|\int_0^{\frac{1}{2}} tf'(a+te^{i\varphi}(b-a))dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (t-1)f'(a+te^{i\varphi}(b-a))dt\right|$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. Varsayalm ki $a, a+e^{i\varphi}(b-a)\in K$ olsun. O halde K , $\varphi-konveks$ küme olduğundan, her $t\in[0,1]$ için, $a+te^{i\varphi}(b-a)\in K^0$ dır. Kısmi integrasyon yöntemini kullanarak,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} tf'(a+te^{i\varphi}(b-a))dt+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(t-1)f'(a+te^{i\varphi}(b-a))dt$$

$$=\left[\frac{tf(a+te^{i\varphi}(b-a))}{e^{i\varphi}(b-a)}\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{(t-1)f(a+te^{i\varphi}(b-a))}{e^{i\varphi}(b-a)}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$
$$-\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_0^1 f(a+te^{i\varphi}(b-a))dt$$

$$=\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}f\left(\frac{2a+e^{i\varphi}(b-a)}{2}\right)-\frac{1}{e^{2i\varphi}(b-a)^2}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)}f(x)dt$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitlikte her iki taraf önce $e^{i\varphi}(b-a)$ ile çarpılır sonra mutlak değer alınırsa istenen sonuç elde edilir.

Teorem 4.1.3. Teorem 4.1.2 deki şartlar sağlansın. Bu durumda,

$$\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)}f(x)dx-f\left(\frac{2a+e^{i\varphi}(b-a)}{2}\right)\right|$$

$$\leq\frac{e^{i\varphi}(b-a)}{8}\left[|f'(a)|+|f'(b)|\right]$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 4.1.2 de $|f'|$ in $\varphi-konveksliğini$ kullanırsak,

$$\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx - f\left(\frac{2a+e^{i\varphi}(b-a)}{2}\right)\right|$$
$$\leq e^{i\varphi}(b-a)\left[\int_0^{\frac{1}{2}} t\left|f'(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)\left|f'(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|dt\right]$$
$$\leq e^{i\varphi}(b-a)\left[\int_0^{\frac{1}{2}} t\left[(1-t)\left|f'(a)\right|+t\left|f'(b)\right|\right]dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)\left[(1-t)\left|f'(a)\right|+t\left|f'(b)\right|\right]dt\right]$$
$$\leq \frac{e^{i\varphi}(b-a)}{8}\left[\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right]$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Aşağıda Hölder eşitsizliği kullanılarak Teorem 4.1.3 ün genelleştimesi verilmiştir.

Teorem 4.1.4 Teorem 3.2.2 nin şartlar altında,

$$\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx - f\left(\frac{2a+e^{i\varphi}(b-a)}{2}\right)\right|$$
$$\leq \frac{e^{i\varphi}(b-a)}{16}\left(\frac{4}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(3\left|f'(a)\right|^{\frac{p}{p-1}}+\left|f'(b)\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right.$$
$$\left.+\left(\left|f'(a)\right|^{\frac{p}{p-1}}+3\left|f'(b)\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right]$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 4.1.2, Teorem 4.1.3 ve Hölder eşitisizliğinden dolayı,

$$\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx - f\left(\frac{2a+e^{i\varphi}(b-a)}{2}\right)\right|$$

$$\leq e^{i\varphi}(b-a)\left[\int_0^{\frac{1}{2}} t\left|f'(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)\left|f'(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|dt\right]$$

$$\leq e^{i\varphi}(b-a)\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left|f'(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|^{\frac{p}{p-1}}dt\right)^{\frac{p-1}{p}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^1\left|f'(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|^{\frac{p}{p-1}}dt\right)^{\frac{p-1}{p}}\right]$$

$$\leq \frac{e^{i\varphi}(b-a)}{2^{1+\frac{1}{p}}(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left[(1-t)\left|f'(a)\right|^{\frac{p}{p-1}}+t\left|f'(b)\right|^{\frac{p}{p-1}}\right]dt\right)^{\frac{p-1}{p}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_{\frac{1}{2}}^1\left[(1-t)\left|f'(a)\right|^{\frac{p}{p-1}}+t\left|f'(b)\right|^{\frac{p}{p-1}}\right]dt\right)^{\frac{p-1}{p}}\right]$$

$$=\frac{e^{i\varphi}(b-a)}{16}\left(\frac{4}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(3\left|f'(a)\right|^{\frac{p}{p-1}}+\left|f'(b)\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right.$$

$$\left.+\left(\left|f'(a)\right|^{\frac{p}{p-1}}+3\left|f'(b)\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right]$$

eşitsizliği sağlanır.

Aşağıda Minkowski eşitsizliği kullanılarak Teorem 3.2.4 ün düzenlenmesi yapılmıştır.

Teorem 4.1.5 $f : K \subset \mathrm{R} \to (0,\infty)$ fonksiyonu K aralığında diferansiyellenebilir ve bu aralıkta $p>1$ ($p\in \mathrm{R}$) için $\left|f'\right|^{p/p-1}$ fonksiyonu $\varphi - konveks$ olsun. Bu durumda her $a<b$ ($a,b\in K$) için,

$$\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx - f\left(\frac{2a+e^{i\varphi}(b-a)}{2}\right)\right|$$
$$\leq \frac{e^{i\varphi}(b-a)}{16}\left(\frac{4}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(3^{\frac{p-1}{p}}+1\right)\left[\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right] \tag{4.1}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $s\in[0,1]$ ve $a_1,a_2,...,a_n\geq 0$, $b_1,b_2,...,b_n\geq 0$ için, Minkowski eşitsizliği,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_k+b_k\right)^s \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^s + \sum_{k=1}^{n} b_k^s$$

şeklinde ifade edilir. Burada, $p>1$ için $0<(p-1)/p<1$ olduğundan,

$$a_1 = 3\left|f'(a)\right|^{\frac{p}{p-1}}$$
$$b_1 = \left|f'(b)\right|^{\frac{p}{p-1}}$$
$$a_2 = \left|f'(a)\right|^{\frac{p}{p-1}}$$
$$b_2 = 3\left|f'(b)\right|^{\frac{p}{p-1}}$$

seçilirse, **(**4.1) eşitsizliği,

$$\frac{e^{i\varphi}(b-a)}{16}\left(\frac{4}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(3\left|f'(a)\right|^{\frac{p}{p-1}}+\left|f'(b)\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right.$$
$$\left.+\left(\left|f'(a)\right|^{\frac{p}{p-1}}+3\left|f'(b)\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right]$$
$$\leq \frac{e^{i\varphi}(b-a)}{16}\left(\frac{4}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(3^{\frac{p-1}{p}}+1\right)\left[\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right]$$

şeklinde düzenlenebilir ve ispat tamamlanır.

Şimdi kuvvet ortalama eşitsizliğini kullanarak Teorem 4.1.3 ün genelleştirmesini verelim.

Teorem 4.1.6. $f : K \subset \mathbb{R} \to (0,\infty)$ fonksiyonu K aralğında diferansiyellenebilir ve $q \geq 1$ ($q \in \mathbb{R}$) için $|f'|^q$ fonksiyonu K^0 de $\varphi - konveks$ olsun. Bu durumda her $a < b$ ($a,b \in K$) için,

$$\left| \frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)} \int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx - f\left(\frac{2a+e^{i\varphi}(b-a)}{2} \right) \right|$$

$$\leq \frac{e^{i\varphi}(b-a)}{8} \left[\left(\frac{2|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{3} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{|f'(a)|^q + 2|f'(b)|^q}{3} \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 4.1.2, $|f'|^q$ fonksiyonunun K^0 de $\varphi - konveksliği$ ve Kuvvet ortalama eşitsizliğinden,

$$\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx - f(\frac{2a+e^{i\varphi}(b-a)}{2})\right|$$

$$\leq e^{i\varphi}(b-a)\left[\int_0^{\frac{1}{2}} t\left|f'(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)\left|f'(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|dt\right]$$

$$\leq e^{i\varphi}(b-a)\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} tdt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t\left|f'(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)\left|f'(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$\leq \frac{e^{i\varphi}(b-a)}{8^{\frac{1}{p}}}\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t\left[(1-t)\left|f'(a)\right|^q + t\left|f'(b)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)\left[(1-t)\left|f'(a)\right|^q + t\left|f'(b)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$= \frac{e^{i\varphi}(b-a)}{8}\left[\left(\frac{2\left|f'(a)\right|^q + \left|f'(b)\right|^q}{3}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{\left|f'(a)\right|^q + 2\left|f'(b)\right|^q}{3}\right)^{\frac{1}{q}}\right].$$

eşitsizliği elde edilir. Burada,

$$\left(\int_0^{\frac{1}{2}} tdt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)dt\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{8^{\frac{1}{p}}}$$

dir.

Aşağıda Minkowski eşitsizliği kullanılarak Teorem 3.2.6 nn düzenlenmesi yapılmıştır.

Teorem 4.1.7 Teorem 4.1.6 nn şartları altında,

$$\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx - f\left(\frac{2a+e^{i\varphi}(b-a)}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{e^{i\varphi}(b-a)}{8}(\frac{2^{\frac{1}{q}}+1}{3^{\frac{1}{q}}})\left[\left|f'(a)\right| + \left|f'(b)\right|\right]$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $s \in [0,1]$ ve $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$, $b_1, b_2, ..., b_n \geq 0$ için, Minkowski eşitsizliği,

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^s \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^s + \sum_{k=1}^{n} b_k^s$$

şeklinde ifade edilir. Burada $q \geq 1$ için $0 < 1/q \leq 1$ olduğundan,

$$\begin{aligned} a_1 &= 2|f'(a)|^q / 3 \\ b_1 &= |f'(b)|^q / 3 \\ a_2 &= |f'(a)|^q / 3 \\ b_2 &= 2|f'(b)|^q / 3 \end{aligned}$$

seçilerek,

$$\frac{e^{i\varphi}(b-a)}{8}\left[\left(\frac{2|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{3}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{|f'(a)|^q + 2|f'(b)|^q}{3}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$\leq \frac{e^{i\varphi}(b-a)}{8}\left(\frac{2^{\frac{1}{q}}+1}{3^{\frac{1}{q}}}\right)\left[|f'(a)| + |f'(b)|\right]$$

elde edilir bu ise istenen sonuçtur.

Birinci mertebeden türevlerinin mutlak değerleri $\varphi - konveks$ olan fonksiyonlar için Hermite - Hadamard eşitsizliği ile ilgili sonuçlar verdik. Şimdi log-$\varphi - konveks$ fonksiyonlar için benzer sonuçlar vereceğiz.

Teorem 4.1.8 $f : K \subset \mathrm{R} \to (0,\infty)$ fonksiyonu K , $\varphi - konveks$ kümesinde diferansiyellenebilir ve $|f'|$, log-$\varphi - konveks$ fonksiyon olmak üzere her $a < b$ ($a, b \in K$) için,

$$\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx-\frac{f(a)+f(a+e^{i\varphi}(b-a))}{2}\right|$$

$$\leq \frac{e^{i\varphi}(b-a)}{2}L(|f'(b)|,|f'(a)|)$$

İspat. Lemma (4.1.1) eşitliğinde $|f'|$ in log- $\varphi-konvekslik$ tanımını kullanırsak,

$$\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx-\frac{f(a)+f(a+e^{i\varphi}(b-a))}{2}\right|$$

$$\leq \frac{e^{i\varphi}(b-a)}{2}\int_0^1\left|(1-2t)\,f'\left(a+te^{i\varphi}(b-a)\right)\right|dt$$

$$\leq \frac{e^{i\varphi}(b-a)}{2}\int_0^1|1-2t|\left[|f'(a)|^{(1-t)}|f'(b)|^t\right]dt$$

$$=\frac{e^{i\varphi}(b-a)\,f'(a)}{2}\int_0^1|1-2t|\left[\frac{|f'(b)|}{|f'(a)|}\right]^t dt$$

$$=\frac{e^{i\varphi}(b-a)}{2}\left[\frac{|f'(b)|-|f'(a)|}{\log|f'(b)|-\log|f'(a)|}-\frac{2\left(|f'(b)|^{\frac{1}{2}}-|f'(a)|^{\frac{1}{2}}\right)^2}{\left(\log|f'(b)|-\log|f'(a)|\right)^2}\right]$$

$$\leq \frac{e^{i\varphi}(b-a)}{2}L(|f'(b)|,|f'(a)|)$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi Hölder eşitsizliğini kullanarak, Teorem 4.1.7 nin genelleştirmesini yapalım.

Teorem 4.1.9 $f\ :\ K\subset \mathrm{R}\to(0,\infty)$ fonksiyonu K aralğında diferansiyellenebilir ve bu aralıkta $p>1$ ($p\in \mathrm{R}$) için $|f'|^{p/p-1}$ fonksiyonu log- $\varphi-konveks$ olsun. Bu durumda her $a<b$ ($a,b\in K$) için,

$$\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx-\frac{f(a)+f(a+e^{i\varphi}(b-a))}{2}\right|$$

$$\leq \frac{e^{i\varphi}(b-a)}{2}\left[\frac{|f'(a)|^{\frac{1}{2}}+|f'(b)|^{\frac{1}{2}}}{2}\left(\frac{|f'(b)|^{\frac{q}{2}}-|f'(a)|^{\frac{q}{2}}}{\log|f'(b)|^{\frac{q}{2}}-\log|f'(a)|^{\frac{q}{2}}}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

İspat. Lemma 4.1.1, Teorem 4.1.7 ve Hölder eşitisizliğinden dolayı,

$$\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx-\frac{f(a)+f(a+e^{i\varphi}(b-a))}{2}\right|$$

$$\leq \frac{e^{i\varphi}(b-a)}{2}\int_0^1\left|(1-2t)\,f'\left(a+te^{i\varphi}(b-a)\right)\right|dt$$

$$\leq \frac{e^{i\varphi}(b-a)}{2}\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2t)^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left|f'\left(a+te^{i\varphi}(b-a)\right)\right|^{\frac{p}{p-1}}dt\right)^{\frac{p-1}{p}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_{\frac{1}{2}}^1(2t-1)^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^1\left|f'\left(a+te^{i\varphi}(b-a)\right)\right|^{\frac{p}{p-1}}dt\right)^{\frac{p-1}{p}}\right]$$

$$\leq \frac{e^{i\varphi}(b-a)}{2}\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2t)^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left[|f'(a)|^{(1-t)}|f'(b)|^{t}\right]^{\frac{p}{p-1}}dt\right)^{\frac{p-1}{p}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_{\frac{1}{2}}^1(2t-1)^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^1\left[|f'(a)|^{(1-t)}|f'(b)|^{t}\right]^{\frac{p}{p-1}}dt\right)^{\frac{p-1}{p}}\right]$$

$$=\frac{e^{i\varphi}(b-a)}{2}\left[\frac{|f'(a)|^{\frac{1}{2}}+|f'(b)|^{\frac{1}{2}}}{(2(p+1))^{\frac{1}{p}}q^{\frac{1}{q}}}\left(\frac{|f'(b)|^{\frac{q}{2}}-|f'(a)|^{\frac{q}{2}}}{\log|f'(b)|-\log|f'(a)|}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$=\frac{e^{i\varphi}(b-a)}{2}\left[\frac{|f'(a)|^{\frac{1}{2}}+|f'(b)|^{\frac{1}{2}}}{2}\left(\frac{|f'(b)|^{\frac{q}{2}}-|f'(a)|^{\frac{q}{2}}}{\log|f'(b)|^{\frac{q}{2}}-\log|f'(a)|^{\frac{q}{2}}}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

eşitsizliği elde edilir. Burada,

$$\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2t)^p\,dt=\int_{\frac{1}{2}}^1(2t-1)^p=\frac{1}{2(p+1)}$$

ve

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

dir. Şimdi türevlerinin mutlak değerleri log- $\varphi - konveks$ fonksiyonlar için Hermite - Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafını oluşturalım.

Teorem 4.1.10 $f : K \subset \mathbb{R} \to (0,\infty)$ fonksiyonu K , $\varphi - konveks$ kümesinde diferansiyellenebilir ve $|f'|$, log- $\varphi - konveks$ fonksiyon olmak üzere her $a<b$ ($a,b \in K$) için,

$$\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx - f\left(\frac{2a+e^{i\varphi}(b-a)}{2}\right)\right|$$

$$\leq e^{i\varphi}(b-a)\left[\frac{|f'(b)|^{\frac{1}{2}}-|f'(a)|^{\frac{1}{2}}}{\log|f'(b)|-\log|f'(a)|}\right]^2$$

İspat. Lemma 4.1.2 de $|f'|$ in log- $\varphi - konveksliğini$ kullanırsak,

$$\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx - f\left(\frac{2a+e^{i\varphi}(b-a)}{2}\right)\right|$$

$$\leq e^{i\varphi}(b-a)\left[\int_0^{\frac{1}{2}} t\left|f'(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)\left|f'(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|dt\right]$$

$$\leq e^{i\varphi}(b-a)\left[\int_0^{\frac{1}{2}} t\left|f'(a)\right|^{1-t}\left|f'(b)\right|^{t}dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)\left|f'(a)\right|^{1-t}\left|f'(b)\right|^{t}dt\right]$$

$$= e^{i\varphi}(b-a)\left[\int_0^{\frac{1}{2}}\left|f'(a)\right|t\left(\frac{\left|f'(b)\right|}{\left|f'(a)\right|}\right)^{t}dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|f'(b)\right|(1-t)\left(\frac{\left|f'(a)\right|}{\left|f'(b)\right|}\right)^{1-t}dt\right]$$

$$= e^{i\varphi}(b-a)\left[-\frac{\left|f'(a)\right|}{\log\left|f'(b)\right|-\log\left|f'(a)\right|}\left[\frac{1}{\log\left|f'(b)\right|-\log\left|f'(a)\right|}\left(\frac{\left|f'(b)\right|}{\left|f'(a)\right|}\right)^{t}\right]_0^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.-\frac{\left|f'(b)\right|}{\log\left|f'(b)\right|-\log\left|f'(a)\right|}\left[\frac{1}{\log\left|f'(b)\right|-\log\left|f'(a)\right|}\left(\frac{\left|f'(a)\right|}{\left|f'(b)\right|}\right)^{1-t}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}\right]$$

$$= e^{i\varphi}(b-a)\left[\frac{-2\left|f'(a)\right|^{\frac{1}{2}}\left|f'(b)\right|^{\frac{1}{2}}}{\left(\log\left|f'(b)\right|-\log\left|f'(a)\right|\right)^2} + \frac{\left|f'(a)\right|}{\left(\log\left|f'(b)\right|-\log\left|f'(a)\right|\right)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{\left|f'(b)\right|}{\left(\log\left|f'(b)\right|-\log\left|f'(a)\right|\right)^2}\right]$$

$$= e^{i\varphi}(b-a)\left[\frac{\left|f'(b)\right|^{\frac{1}{2}}-\left|f'(a)\right|^{\frac{1}{2}}}{\log\left|f'(b)\right|-\log\left|f'(a)\right|}\right]^2$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Şimdi Hölder eşitsizliğini kullanarak Teorem 4.1.9 un genelleştirmesini yapalım.

Teorem 4.1.11 $f : K \subset \mathrm{R} \to (0,\infty)$ fonksiyonu K aralğnda diferansiyellenebilir ve bu aralıkta $p>1$ ($p \in \mathrm{R}$) için $\left|f'\right|^{p/p-1}$ fonksiyonu log- $\varphi - konveks$ olsun. Bu durumda her $a<b$ ($a,b \in K$) için,

$$\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx - f\left(\frac{2a+e^{i\varphi}(b-a)}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{e^{i\varphi}(b-a)}{2}\left[\frac{|f'(b)|^{\frac{1}{2}}+|f'(a)|^{\frac{1}{2}}}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{|f'(b)|^{\frac{q}{2}}-|f'(a)|^{\frac{q}{2}}}{\log|f'(b)|^{\frac{q}{2}}-\log|f'(a)|^{\frac{q}{2}}}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 4.1.2 yi, Teorem 4.1.9 u ve Hölder eşitsizliğini kullanırsak,

$$\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a))}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx - f\left(\frac{2a+e^{i\varphi}(b-a)}{2}\right)\right|$$

$$\leq e^{i\varphi}(b-a)\left[\int_0^{\frac{1}{2}} t\left|f'(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)\left|f'(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|dt\right]$$

$$\leq e^{i\varphi}(b-a)\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left|f'(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} dt\right.$$

$$\left.+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|f'(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$\leq e^{i\varphi}(b-a)\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left(|f'(a)|^{1-t}|f'(b)|^t\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(|f'(a)|^{1-t}|f'(b)|^t\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$= e^{i\varphi}(b-a)\left[\frac{|f'(b)|^{\frac{1}{2}}+|f'(a)|^{\frac{1}{2}}}{2^{1+\frac{1}{p}}(p+1)^{\frac{1}{p}}q^{\frac{1}{q}}}\left(\frac{|f'(b)|^{\frac{q}{2}}-|f'(a)|^{\frac{q}{2}}}{\log|f'(b)|-\log|f'(a)|}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$= \frac{e^{i\varphi}(b-a)}{2}\left[\frac{|f'(b)|^{\frac{1}{2}}+|f'(a)|^{\frac{1}{2}}}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{|f'(b)|^{\frac{q}{2}}-|f'(a)|^{\frac{q}{2}}}{\log|f'(b)|^{\frac{q}{2}}-\log|f'(a)|^{\frac{q}{2}}}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

burada,

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

Ve

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^p dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^p dt = \frac{1}{2^{p+1}\left(p+1\right)}$$

dir. Şimdi mutlak değerlerinin birinci mertebeden türevleri quasi- $\varphi-konveks$ fonksiyonlar için Hermite - Hadamard eşitsizliğini oluşturalım.

Teorem 4.1.12 $f : K \subset \mathrm{R} \to \left(0,\infty\right)$ fonksiyonu K , $\varphi-konveks$ kümesinde diferansiyellenebilir ve $|f'|$, quasi- $\varphi-konveks$ fonksiyon olmak üzere her $a<b$ ($a,b\in K$) için,

$$\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx - \frac{f(a)+f(a+te^{i\varphi}(b-a))}{2}\right|$$

$$\leq \frac{e^{i\varphi}(b-a)}{4}\max\{|f'(a)|,|f'(b)|\}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 4.1.1 de $|f'|$ in quasi- $\varphi-konvekslik$ tanımını kullanırsak,

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx - \frac{f(a)+f(a+te^{i\varphi}(b-a))}{2}\right| \\
&\leq \frac{e^{i\varphi}(b-a)}{2}\int_0^1 |(1-2t)|\left|f'(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|dt \\
&\leq \frac{e^{i\varphi}(b-a)}{2}\max\{|f'(a)|,|f'(b)|\}\int_0^1 |(1-2t)|dt \\
&\leq \frac{e^{i\varphi}(b-a)}{4}\max\{|f'(a)|,|f'(b)|\}
\end{aligned}$$

elde edilir bu da istenen sonuçtur. Şimdi Hölder eşitsizliğini kullanarak, Teorem 4.1.11 in genelleştirmesini yapalım.

Teorem 4.1.13 $f : K \subset \mathbb{R} \to (0,\infty)$ fonksiyonu K aralğnda diferansiyellenebilir ve bu aralıkta $p > 1$ ($p \in \mathbb{R}$) için $|f'|^{p/p-1}$ fonksiyonu quasi- $\varphi - konveks$ olsun. Bu durumda her $a < b$ ($a,b \in K$) için,

$$\left| \frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)} \int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx - \frac{f(a) + f(a+te^{i\varphi}(b-a))}{2} \right|$$

$$\leq \frac{e^{i\varphi}(b-a)}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left[\max\{|f'(a)|^{\frac{p}{p-1}}, |f'(b)|^{\frac{p}{p-1}}\} \right]^{\frac{p-1}{p}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 4.1.1 i, $|f'|^{p/p-1}$ in quasi- $\varphi - konvekslik$ tanımını ve Hölder eşitsizliğini kullanarak,

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)} \int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx - \frac{f(a) + f(a+te^{i\varphi}(b-a))}{2} \right| \\
&\leq \frac{e^{i\varphi}(b-a)}{2} \int_0^1 |(1-2t)| \left| f'(a+te^{i\varphi}(b-a)) \right| dt \\
&\leq \frac{e^{i\varphi}(b-a)}{2} \left(\int_0^1 |(1-2t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| f'(a+te^{i\varphi}(b-a)) \right|^{\frac{p-1}{p}} dt \right)^{\frac{p}{p-1}} \\
&\leq \frac{e^{i\varphi}(b-a)}{2} \left(\int_0^1 |(1-2t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \max\{|f'(a)|^{\frac{p}{p-1}}, |f'(b)|^{\frac{p}{p-1}}\} dt \right)^{\frac{p}{p-1}} \\
&\leq \frac{e^{i\varphi}(b-a)}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left[\max\{|f'(a)|^{\frac{p}{p-1}}, |f'(b)|^{\frac{p}{p-1}}\} \right]^{\frac{p-1}{p}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.Şimdi türevlerinin mutlak değerleri quasi- $\varphi - konveks$ fonksiyonlar için Hermite - Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafını oluşturalım.

Teorem 4.1.14 $f : K \subset \mathbb{R} \to (0,\infty)$ fonksiyonu K, $\varphi - konveks$ kümesinde diferansiyellenebilir ve $|f'|$, quasi- $\varphi - konveks$ fonksiyon olmak üzere her $a < b$ ($a, b \in K$) için,

$$\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx - f(\frac{2a+e^{i\varphi}(b-a)}{2})\right|$$

$$\leq \frac{e^{i\varphi}(b-a)}{4}\max\{|f'(a)|,|f'(b)|\}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Lemma 4.1.2 de $|f'|$ in quasi- $\varphi - konvekslik$ tanımını kullanırsak,

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx - f(\frac{2a+e^{i\varphi}(b-a)}{2})\right| \\
&\leq e^{i\varphi}(b-a)\left[\int_0^{\frac{1}{2}} t\left|f'(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)\left|f'(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|dt\right] \\
&\leq e^{i\varphi}(b-a)\max\{|f'(a)|,|f'(b)|\}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} tdt + \int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)dt\right) \\
&\leq \frac{e^{i\varphi}(b-a)}{4}\max\{|f'(a)|,|f'(b)|\}
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. Şimdi Hölder eşitsizliğini kullanarak Teorem 4.1.13 ün genelleştirmesini yapalım.

Teorem 4.1.15 $f : K \subset \mathbb{R} \to (0,\infty)$ fonksiyonu K aralğında diferansiyellenebilir ve bu aralıkta $p > 1$ ($p \in \mathbb{R}$) için $|f'|^{p/p-1}$ fonksiyonu quasi- $\varphi - konveks$ olsun. Bu durumda her $a < b$ ($a, b \in K$) için,

$$\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx - f(\frac{2a+e^{i\varphi}(b-a)}{2})\right|$$

$$\leq \frac{e^{i\varphi}(b-a)}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\max\{\left|f'(a)\right|^{\frac{p}{p-1}},\left|f'(b)\right|^{\frac{p}{p-1}}\}\right]^{\frac{p-1}{p}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 4.1.2 yi, Teorem 3.2.13 ü ve Hölder eşitsizliğini kullanarak,

$$\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx - f(\frac{2a+e^{i\varphi}(b-a)}{2})\right|$$

$$\leq e^{i\varphi}(b-a)\left[\int_0^{\frac{1}{2}} t\left|f'(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)\left|f'(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|dt\right]$$

$$\leq e^{i\varphi}(b-a)\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left|f'(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|^{\frac{p}{p-1}}dt\right)^{\frac{p-1}{p}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|f'(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|^{\frac{p}{p-1}}dt\right)^{\frac{p-1}{p}}\right]$$

$$\leq \frac{e^{i\varphi}(b-a)}{2^{1+\frac{1}{p}}(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\max\{\left|f'(a)\right|^{\frac{p}{p-1}},\left|f'(b)\right|^{\frac{p}{p-1}}\}dt\right)^{\frac{p-1}{p}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\max\{\left|f'(a)\right|^{\frac{p}{p-1}},\left|f'(b)\right|^{\frac{p}{p-1}}\}dt\right)^{\frac{p-1}{p}}\right]$$

$$= \frac{e^{i\varphi}(b-a)}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\max\{\left|f'(a)\right|^{\frac{p}{p-1}},\left|f'(b)\right|^{\frac{p}{p-1}}\}\right]^{\frac{p-1}{p}}$$

eşitsizliğine sahip oluruz. Bu ise ispat tamamlar.

3. 2 . KONVEKS OLMAYAN FONKSİYONLARIN İKİNCİ MERTEBEDEN TÜREVLERİ İÇİN HERMİTE HADAMARD EŞİTSİZLİĞİ

Bu bölümde ikinci mertebeden türevlerinin mutlak değerleri $\varphi - konveks$, log- $\varphi - konveks$, quasi- $\varphi - konveks$ olan fonksiyonlar kullanarak Hermite - Hadamard eşitsizliği ile ilgili sonuçlar vereceğiz. İlk olarak ikinci mertebeden türevlerinin mutlak değerleri $\varphi-konveks$ olan fonksiyonlar için Hermite - Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafını verelim.

Lemma 4.2.1 $f\ :\ K=\left[a,a+e^{i\varphi}(b-a)\right]\subset \mathrm{R}\to(0,\infty)$ iki kez diferansiyellenebilen bir fonksiyon öyleki f'' integrallenebilir ve her $a<b$ ($a,b\in \mathrm{R}$) için,

$$\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx-\frac{f(a)+f(a+e^{i\varphi}(b-a))}{2}\right|$$

$$=\frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{2}\left|\int_0^1 (t-t^2)f''(a+te^{i\varphi}(b-a))dt\right|$$

eşitliği geçerlidir

.

İspat. Varsayalm ki $a,a+e^{i\varphi}(b-a)\in K$ olsun. O halde K , $\varphi-konveks$ küme olduğundan, her $t\in[0,1]$ için, $a+te^{i\varphi}(b-a)\in K^0$ dr. İki kez kısmi integrasyon yöntemini kullanarak,

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 (t-t^2)f''(a+te^{i\varphi}(b-a))dt\\
&=\left[\frac{(2t-1)f\left(a+te^{i\varphi}(b-a)\right)}{e^{2i\varphi}(b-a)^2}\right]_0^1-\frac{2}{e^{2i\varphi}(b-a)^2}\int_0^1 f\left(a+te^{i\varphi}(b-a)\right)dt\\
&=\frac{f(a)+f\left(a+te^{i\varphi}(b-a)\right)}{e^{2i\varphi}(b-a)^2}-\frac{2}{e^{3i\varphi}(b-a)^3}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx
\end{aligned}$$

elde edilen eşitliğin her iki taraf $e^{2i\varphi}(b-a)^2/2$ ile çarpılıp her iki tarafın mutlak değeri alınırsa istenen sonuca ulaşılır.

Teorem 4.2.1 $f\ :\ K=\left[a,a+e^{i\varphi}(b-a)\right]\subset \mathrm{R}\to(0,\infty)$ iki kez diferansiyellenebilen bir fonksiyon öyleki f'' integrallenebilir ve her $a<b$ ($a,b\in \mathrm{R}$) için, $|f''|$, K kümesinde $\varphi-konveks$ fonksiyon olmak üzere,

$$\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx-\frac{f(a)+f(a+e^{i\varphi}(b-a))}{2}\right|$$

$$\leq \frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{24}\left[\left|f''(a)\right|+\left|f''(b)\right|\right].$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 4.2.1 de $|f''|$ in $\varphi-konveksliğini$ kullanırsak,

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx-\frac{f(a)+f(a+e^{i\varphi}(b-a))}{2}\right| \\
&\leq \frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{2}\left|\int_0^1 (t-t^2)f''(a+te^{i\varphi}(b-a))dt\right| \\
&\leq \frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{2}\int_0^1 (t-t^2)\left[(1-t)\left|f''(a)\right|+t\left|f''(b)\right|\right]dt \\
&\leq \frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{24}\left[\left|f''(a)\right|+\left|f''(b)\right|\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Şimdi Hölder eşitsizliğini kullanarak Teorem 4.2.1 in genelleştirmesini yapalım.

Teorem 4.2.2 $f\ :\ K=\left[a,a+e^{i\varphi}(b-a)\right]\subset \mathrm{R}\to(0,\infty)$ iki kez diferansiyellenebilen bir fonksiyon öyleki her $a<b$ ($a,b\in \mathrm{R}$) için, f'' integrallenebilir ve $p>1$ ($p\in \mathrm{R}$) için, $|f''|^{p/p-1}$, K kümesinde $\varphi-konveks$ fonksiyon olmak üzere,

$$\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx-\frac{f(a)+f(a+e^{i\varphi}(b-a))}{2}\right|$$

$$\leq \frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{8}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\frac{3}{2}+p)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\left|f''(a)\right|^{\frac{p}{p-1}}+\left|f''(b)\right|^{\frac{p}{p-1}}}{2}\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 3.3.1 de $\left|f''\right|^{p/p-1}$ fonksiyonunun $\varphi-konveksliğini$ kullanıp, Hölder eşitsizliğini uygularsak,

$$\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx-\frac{f(a)+f(a+e^{i\varphi}(b-a))}{2}\right|$$

$$\leq \frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{2}\int_0^1\left|t-t^2\right|\left|f''(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|dt$$

$$\leq \frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{2}\left(\int_0^1(t-t^2)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f''(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|^{\frac{p}{p-1}}dt\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\leq \frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{2}\left(\frac{2^{-1-2p}\sqrt{\pi}\,\Gamma(p+1)}{\Gamma(\frac{3}{2}+p)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left[(1-t)\left|f''(a)\right|^{\frac{p}{p-1}}+t\left|f''(b)\right|^{\frac{p}{p-1}}\right]dt\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$=\frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{8}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\frac{3}{2}+p)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\left|f''(a)\right|^{\frac{p}{p-1}}+\left|f''(b)\right|^{\frac{p}{p-1}}}{2}\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

eşitsizliği elde edilir. Burada,

$$\int_0^1(t-t^2)^p dt=\frac{2^{-1-2p}\sqrt{\pi}\,\Gamma(p+1)}{\Gamma(\frac{3}{2}+p)}$$

şeklindedir. Şimdi ikinci mertebeden türevlerinin mutlak değerleri $\varphi-konveks$ olan fonksiyonlar için Hermite - Hadamard eşitsizliğinin sol tarafını verelim.

Lemma 4.2.2 $f : K=\left[a,a+e^{i\varphi}(b-a)\right]\subset \mathbb{R}\to(0,\infty)$ iki kez diferansiyellenebilen bir fonksiyon öyleki f'' integrallenebilir ve her $a<b$ ($a,b\in\mathbb{R}$) için,

$$\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx-f\left(\frac{2a+e^{i\varphi}(b-a)}{2}\right)\right|$$

$$=\frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{2}\left|\int_0^{\frac{1}{2}}t^2 f''(a+te^{i\varphi}(b-a))dt+\int_{\frac{1}{2}}^1(1-t)^2 f''(a+te^{i\varphi}(b-a))dt\right|$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Varsayalım ki $a, a+e^{i\varphi}(b-a) \in K$ olsun. O halde K, $\varphi - konveks$ küme olduğundan, her $t \in [0,1]$ için, $a + te^{i\varphi}(b-a) \in K^0$ dr. İki kez ksmi integrasyon yöntemini kullanarak,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^2 f''(a+te^{i\varphi}(b-a))dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^2 f''(a+te^{i\varphi}(b-a))dt$$

$$= \left[\frac{-2tf'(a+te^{i\varphi}(b-a))}{e^{2i\varphi}(b-a)^2} \right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{2(1-t)f'(a+te^{i\varphi}(b-a))}{e^{2i\varphi}(b-a)^2} \right]_{\frac{1}{2}}^1$$

$$+ \frac{2}{e^{2i\varphi}(b-a)^2} \int_0^1 f'(a+te^{i\varphi}(b-a))dt$$

$$= \frac{-2}{e^{2i\varphi}(b-a)^2} f(\frac{2a+e^{i\varphi}(b-a)}{2}) + \frac{2}{e^{3i\varphi}(b-a)^3} \int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x))dx$$

elde edilen eşitliğin her iki taraf $e^{2i\varphi}(b-a)^2/2$ ile çarpılır sonra her iki tarafın mutlak değeri alnırsa istenen sonuca ulaşılır.

Teorem 4.2.3 $f : K = [a, a+e^{i\varphi}(b-a)] \subset \mathrm{R} \to (0,\infty)$ iki kez diferansiyellenebilen bir fonksiyon öyleki f'' integrallenebilir ve her $a<b$ ($a,b \in \mathrm{R}$) için, $|f''|$, K kümesinde $\varphi - konveks$ fonksiyon olmak üzere,

$$\left| \frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)} \int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx - f\left(\frac{2a+e^{i\varphi}(b-a)}{2} \right) \right|$$

$$\le \frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{24} \left[\frac{|f''(a)| + |f''(b)|}{2} \right]$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 4.2.2 de $|f''|$ fonksiyonunun $\varphi - konveksli\breve{g}i$ kullanılırsa,

$$\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx - f(\frac{2a+e^{i\varphi}(b-a)}{2})\right|$$

$$\leq \frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{2}\left[\int_0^{\frac{1}{2}} t^2\left|f''(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^2\left|f''(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|dt\right]$$

$$\leq \frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{2}\left[\int_0^{\frac{1}{2}} t^2\left[(1-t)\left|f''(a)\right|+t\left|f''(b)\right|\right]dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^2\left[(1-t)\left|f''(a)\right|+t\left|f''(b)\right|\right]dt\right]$$

$$\leq \frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{24}\left[\frac{\left|f''(a)\right|+\left|f''(b)\right|}{2}\right]$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise istenen sonuçtur. Şimdi Hölder eşitsizliğini kullanarak Teorem 4.2.3 ün genelleştirmesini yapalım.

Teorem 4.2.4 $f : K = \left[a, a+e^{i\varphi}(b-a)\right] \subset \mathrm{R} \to (0,\infty)$ iki kez diferansiyellenebilen bir fonksiyon öyleki her $a < b$ ($a, b \in \mathrm{R}$) için, f'' integrallenebilir ve $p > 1$ ($p \in \mathrm{R}$) için, $\left|f''\right|^{p/p-1}$, K kümesinde $\varphi - konveks$ fonksiyon olmak üzere,

$$\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx - \frac{f(a)+f(a+e^{i\varphi}(b-a))}{2}\right|$$

$$\leq \frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{16(2p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\left(\frac{\left|f''(a)\right|^{\frac{p}{p-1}}+3\left|f''(b)\right|^{\frac{p}{p-1}}}{4}\right)^{\frac{p-1}{p}} + \left(\frac{3\left|f''(a)\right|^{\frac{p}{p-1}}+\left|f''(b)\right|^{\frac{p}{p-1}}}{4}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right]$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 4.2.2 de $\left|f''\right|^{p/p-1}$ fonksiyonunun $\varphi - konveksli\breve{g}ini$ kullanıp, Hölder eşitsizliğini uygularsak,

$$\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx - f(\frac{2a+e^{i\varphi}(b-a)}{2})\right|$$

$$\leq \frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{2}\left[\int_0^{\frac{1}{2}} t^2\left|f''(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^2\left|f''(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|dt\right]$$

$$\leq \frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{2}\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}}(t^2)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left|f''(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|^{\frac{p}{p-1}}dt\right)^{\frac{p-1}{p}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^{2p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^1\left|f''(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|^{\frac{p}{p-1}}dt\right)^{\frac{p-1}{p}}\right]$$

$$\leq \frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{2}\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}}(t^2)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left(t\left|f''(a)\right|^{\frac{p}{p-1}} + (1-t)\left|f''(b)\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)dt\right)^{\frac{p-1}{p}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^{2p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^1\left(t\left|f''(a)\right|^{\frac{p}{p-1}} + (1-t)\left|f''(b)\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)dt\right)^{\frac{p-1}{p}}\right]$$

$$= \frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{16(2p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\left(\frac{\left|f''(a)\right|^{\frac{p}{p-1}} + 3\left|f''(b)\right|^{\frac{p}{p-1}}}{4}\right)^{\frac{p-1}{p}} + \left(\frac{3\left|f''(a)\right|^{\frac{p}{p-1}} + \left|f''(b)\right|^{\frac{p}{p-1}}}{4}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right]$$

eşitsizliğine sahip oluruz. Bu ise istenen sonuçtur. Şimdi Minkowski eşitsizliğini kullanarak Teorem 3.3.4 ün düzenlemesini yapalım.

Teorem 4.2.5 Teorem 4.2.4 deki şartlar geçerli olsun. Bu durumda,

$$\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx - f(\frac{2a+e^{i\varphi}(b-a)}{2})\right|$$

$$\leq \frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{16(2p+1)^{\frac{1}{p}}}\frac{3^{\frac{p-1}{p}}+1}{4^{\frac{p-1}{p}}}\left(\left|f''(a)\right|+\left|f''(b)\right|\right)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $s\in[0,1]$ ve $a_1,a_2,...,a_n\geq 0$, $b_1,b_2,...,b_n\geq 0$ için, Minkowski eşitsizliği,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_k+b_k\right)^s \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^s+\sum_{k=1}^{n} b_k^s$$

şeklinde ifade edilir. Burada $q \geq 1$ için $0<1/q \leq 1$ olduğundan,

$$\begin{aligned} a_1 &= \left|f''(a)\right|^{\frac{p}{p-1}} \\ b_1 &= 3\left|f''(b)\right|^{\frac{p}{p-1}} \\ a_2 &= 3\left|f''(a)\right|^{\frac{p}{p-1}} \\ b_2 &= \left|f''(b)\right|^{\frac{p}{p-1}} \end{aligned}$$

seçilerek,

$$\frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{16(2p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\left(\frac{\left|f''(a)\right|^{\frac{p}{p-1}}+3\left|f''(b)\right|^{\frac{p}{p-1}}}{4}\right)^{\frac{p-1}{p}}+\left(\frac{3\left|f''(a)\right|^{\frac{p}{p-1}}+\left|f''(b)\right|^{\frac{p}{p-1}}}{4}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right]$$

$$\leq \frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{16(2p+1)^{\frac{1}{p}}}\frac{3^{\frac{p-1}{p}}+1}{4^{\frac{p-1}{p}}}\left(\left|f''(a)\right|+\left|f''(b)\right|\right)$$

elde edilir bu ise istenen sonuçtur. Şimdi ikinci merteben türevlerinin mutlak değeri log- $\varphi-konveks$ olan fonksiyonlar için Hermite - Hadamard eşitsizliğini oluşturacağız. İlk olarak bu tür fonksiyonlar için Hermite - Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafını verelim.

Teorem 4.2.6 $f : K=\left[a, a+e^{i\varphi}(b-a)\right] \subset \mathrm{R} \rightarrow (0,\infty)$ iki kez diferansiyellenebilen bir fonksiyon öyleki f'' integrallenebilir ve her $a<b$ ($a,b \in \mathrm{R}$) için, $\left|f''\right|$, K kümesinde log- $\varphi-konveks$ fonksiyon olmak üzere,

$$\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx-\frac{f(a)+f(a+e^{i\varphi}(b-a))}{2}\right|$$

$$\leq \left(\frac{e^{i\varphi}(b-a)}{\log\left|f''(b)\right|-\log\left|f''(a)\right|}\right)^2\left[A\left(\left|f''(b)\right|,\left|f''(a)\right|\right)-L\left(\left|f''(b)\right|,\left|f''(a)\right|\right)\right]$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $A(.,.)$ pozitif reel saylar için aritmetik ortalamay ve $L(.,.)$ aynı sayılar için logaritmik ortalamayı ifade etmektedir.

İspat. Lemma 4.2.1 de $|f''|$ fonksiyonunun log- $\varphi-konveksl\breve{i}gini$ kullanarak,

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx-\frac{f(a)+f(a+te^{i\varphi}(b-a))}{2}\right| \\
&\leq \frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{2}\int_0^1 (t-t^2)\left|f''(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|dt \\
&\leq \frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{2}\int_0^1 (t-t^2)\left(\left|f''(a)\right|^{1-t}\left|f''(b)\right|^{t}\right)dt \\
&= \frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{2}\left[\frac{|f''(b)|+|f''(a)|}{\left(\log|f''(b)|-\log|f''(a)|\right)^2}-\frac{2\left(|f''(b)|-|f''(a)|\right)}{\left(\log|f''(b)|-\log|f''(a)|\right)^3}\right] \\
&= \left(\frac{e^{i\varphi}(b-a)}{\log|f''(b)|-\log|f''(a)|}\right)^2\left[A\left(|f''(b)|,|f''(a)|\right)-L\left(|f''(b)|,|f''(a)|\right)\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır. Şimdi Hölder eşitsizliğini kullanarak, Teorem 4.2.6 nn genelleştirmesini verelim.

Teorem 4.2.7 $f : K=\left[a,a+e^{i\varphi}(b-a)\right]\subset \mathrm{R}\rightarrow(0,\infty)$ iki kez diferansiyellenebilen bir fonksiyon öyleki her $a<b$ ($a,b\in \mathrm{R}$) için, f'' integrallenebilir ve $p>1$ ($p\in \mathrm{R}$) için, $|f''|^{p/p-1}$, K kümesinde log- $\varphi-konveks$ fonksiyon olmak üzere,

$$\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx-\frac{f(a)+f(a+e^{i\varphi}(b-a))}{2}\right|$$

$$\leq \frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{8}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\frac{3}{2}+p)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\frac{|f''(a)|^{\frac{p}{p-1}}-|f''(b)|^{\frac{p}{p-1}}}{\log|f''(b)|-\log|f''(a)|}\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 3.3.1 de $|f''|$ fonksiyonunun log- $\varphi - konveksli\breve{g}ini$ kullanıp, Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx - \frac{f(a)+f(a+e^{i\varphi}(b-a))}{2}\right|$$

$$\leq \frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{2}\int_0^1 (t-t^2)\left|f''(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|dt$$

$$\leq \frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{2}\left(\int_0^1 (t-t^2)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left|f''(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|^{\frac{p}{p-1}}dt\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\leq \frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{2}\left(\frac{2^{-1-2p}\sqrt{\pi}\,\Gamma(p+1)}{\Gamma(\frac{3}{2}+p)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left|f''(a)\right|^{\frac{p}{p-1}(1-t)}\left|f''(b)\right|^{\frac{p}{p-1}t}dt\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$= \frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{8}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\frac{3}{2}+p)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\frac{\left|f''(a)\right|^{\frac{p}{p-1}}-\left|f''(b)\right|^{\frac{p}{p-1}}}{\log\left|f''(b)\right|-\log\left|f''(a)\right|}\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

eşitsizliği elde edilip istenen sonuca ulaşılmış olur. Şimdi benzer sonuçlar Hermite - Hadamard eşitsizliğinin sol tarafı içinde verelim.

Teorem 4.2.8 $f\ :\ K=\left[a,a+e^{i\varphi}(b-a)\right]\subset \mathrm{R}\to(0,\infty)$ iki kez diferansiyellenebilen bir fonksiyon öyleki f'' integrallenebilir ve her $a<b$ ($a,b\in \mathrm{R}$) için, $|f''|$, K kümesinde log- $\varphi - konveks$ fonksiyon olmak üzere,

$$\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx - f\left(\frac{2a+e^{i\varphi}(b-a)}{2}\right)\right|$$

$$\leq \left(\frac{e^{i\varphi}(b-a)}{\log\left|f''(b)\right|-\log\left|f''(a)\right|}\right)^2\left[L\left(\left|f''(b)\right|,\left|f''(a)\right|\right)-G\left(\left|f''(b)\right|,\left|f''(a)\right|\right)\right]$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 4.2.2 de $|f''|$ in log- $\varphi - konveks$ fonksiyon tanım uygulanırsa,

$$\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx - f(\frac{2a+e^{i\varphi}(b-a)}{2})\right|$$

$$\leq \frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{2}\left[\int_0^{\frac{1}{2}} t^2\left|f''(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^2\left|f''(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|dt\right]$$

$$\leq \frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} t^2\left|f''(a)\right|^{1-t}\left|f''(b)\right|^t dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^2\left|f''(a)\right|^{1-t}\left|f''(b)\right|^t dt$$

$$= \left(\frac{e^{i\varphi}(b-a)}{\log\left|f''(b)\right| - \log\left|f''(a)\right|}\right)^2\left[L\left(\left|f''(b)\right|,\left|f''(a)\right|\right) - G\left(\left|f''(b)\right|,\left|f''(a)\right|\right)\right]$$

eşitsizliği elde edilip ispat tamamlanır. Şimdi Hölder eşitsizliğini kullanarak, Teorem 4.2.8 in genelleştirmesini yapalım.

Teorem 4.2.9 $f : K = \left[a, a+e^{i\varphi}(b-a)\right] \subset \mathrm{R} \to (0,\infty)$ iki kez diferansiyellenebilen bir fonksiyon öyleki her $a < b$ ($a,b \in \mathrm{R}$) için, f'' integrallenebilir ve $p > 1$ ($p \in \mathrm{R}$) için, $\left|f''\right|^{p/p-1}$, K kümesinde log- $\varphi - konveks$ fonksiyon olmak üzere,

$$\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx - f(\frac{2a+e^{i\varphi}(b-a)}{2})\right|$$

$$\leq \left(\frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{8}\right)\left(\frac{\left|f''(a)\right|^{\frac{1}{2}} + \left|f''(b)\right|^{\frac{1}{2}}}{(4p+2)^{\frac{1}{p}}}\right)\left(\frac{\left|f''(b)\right|^{\frac{p}{p-1}} - \left|f''(a)\right|^{\frac{p}{p-1}}}{\left(\frac{p}{p-1}\right)\left(\log\left|f''(b)\right| - \log\left|f''(a)\right|\right)}\right)^{\frac{p-1}{p}} ..$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 4.2.2 de $\left|f''\right|^{p/p-1}$ fonksiyonunun log- $\varphi - konveksliği$ kullanılıp, Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx - f\left(\frac{2a+e^{i\varphi}(b-a)}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{2}\left[\int_0^{\frac{1}{2}} t^2\left|f''(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^2\left|f''(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|dt\right]$$

$$\leq \frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{2}\left[\left(\int_0^1 (t^2)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left|f''(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|^{\frac{p}{p-1}}dt\right)^{\frac{p-1}{p}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_0^1 (1-t)^{2p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^1\left|f''(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|^{\frac{p}{p-1}}dt\right)\right]$$

$$\leq \frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{2}\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} (t^2)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left|f''(a)\right|^{\frac{p}{p-1}(1-t)}\left|f''(b)\right|^{\frac{p}{p-1}t}dt\right)^{\frac{p-1}{p}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^{2p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^1\left|f''(a)\right|^{\frac{p}{p-1}(1-t)}\left|f''(b)\right|^{\frac{p}{p-1}t}dt\right)^{\frac{p-1}{p}}\right]$$

$$=\left(\frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{8}\right)\left(\frac{\left|f''(a)\right|^{\frac{1}{2}}+\left|f''(b)\right|^{\frac{1}{2}}}{(4p+2)^{\frac{1}{p}}}\right)\left(\frac{\left|f''(b)\right|^{\frac{p}{p-1}}-\left|f''(a)\right|^{\frac{p}{p-1}}}{\left(\frac{p}{p-1}\right)\left(\log\left|f''(b)\right|-\log\left|f''(a)\right|\right)}\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

eşitsizliği elde edilip ispat tamamlanır. Şimdi ikinci mertebeden türevlenin mutlak değerleri quasi- $\varphi - konveks$ olan fonksiyonlar için Hermite - Hadamard eşitsizliğini vereceğiz. İlk olarak bu tür fonsiyonlar için Hermite - Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafını verelim.

Teorem 4.2.10 $f\ :\ K=\left[a,a+e^{i\varphi}(b-a)\right]\subset \mathbb{R}\rightarrow(0,\infty)$ iki kez diferansiyellenebilen bir fonksiyon öyleki f'' integrallenebilir ve her $a<b$ ($a,b\in\mathbb{R}$) için, $\left|f''\right|$, K kümesinde quasi- $\varphi - konveks$ fonksiyon olmak üzere,

$$\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx - \frac{f(a)+f(a+te^{i\varphi}(b-a))}{2}\right|$$

$$\leq \frac{e^{i\varphi}(b-a)}{4}\max\{\left|f'(a)\right|,\left|f'(b)\right|\}.$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 4.2.1 de $|f''|$ in quasi- $\varphi - konveks$ fonksiyon tanımını uygularsak,

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx - \frac{f(a)+f(a+te^{i\varphi}(b-a))}{2}\right| \\
&\leq \frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{2}\int_0^1 (t-t^2)\left|f''(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|dt \\
&\leq \frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{2}\max\{|f''(a)|,|f''(b)|\}\int_0^1 (t-t^2)dt \\
&\leq \frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{24}\max\{|f''(a)|,|f''(b)|\}.
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır ve ispat tamamlanır. Şimdi Hölder eşitsizliğini kullanarak Teorem 4.2.10 un genelleştirmesini verelim.

Teorem 4.2.11 $f : K = \left[a, a+e^{i\varphi}(b-a)\right] \subset \mathrm{R} \to (0,\infty)$ iki kez diferansiyellenebilen bir fonksiyon öyleki her $a < b$ ($a,b \in \mathrm{R}$) için, f'' integrallenebilir ve $p > 1$ ($p \in \mathrm{R}$) için, $|f''|^{p/p-1}$, K kümesinde quasi- $\varphi - konveks$ fonksiyon olmak üzere,

$$\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx - \frac{f(a)+f(a+te^{i\varphi}(b-a))}{2}\right|$$

$$\leq \frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{8}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\frac{3}{2}+p)}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\max\{|f''(a)|^{\frac{p}{p-1}},|f''(b)|^{\frac{p}{p-1}}\}\right]^{\frac{p-1}{p}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 4.2.1 de $|f''|^{p/p-1}$ nin quasi- $\varphi - konveksliği$ kullanılıp, Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx-\frac{f(a)+f(a+te^{i\varphi}(b-a))}{2}\right|$$

$$\leq\frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{2}\int_0^1 (t-t^2)\left|f''(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|dt$$

$$\leq\frac{e^{i\varphi}(b-a)}{2}\left(\int_0^1 (t-t^2)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f'(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|^{\frac{p-1}{p}} dt\right)^{\frac{p}{p-1}}$$

$$\leq\frac{e^{i\varphi}(b-a)}{2}\left(\frac{2^{-1-2p}\sqrt{\pi}\Gamma(p+1)}{\Gamma(\frac{3}{2}+p)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \max\{\left|f'(a)\right|^{\frac{p}{p-1}},\left|f'(b)\right|^{\frac{p}{p-1}}\}dt\right)^{\frac{p}{p-1}}$$

$$\leq\frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{8}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\frac{3}{2}+p)}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\max\{\left|f''(a)\right|^{\frac{p}{p-1}},\left|f''(b)\right|^{\frac{p}{p-1}}\}\right]^{\frac{p-1}{p}}.$$

eşitsizliği sağlanıp ispat tamamlanır. Kuvvet ortalama eşitsizliğini kullanarak Teorem 4.2.11 in bir başka çeşitini verelim.

Teorem 4.2.12 $f\ :\ K=\left[a,a+e^{i\varphi}(b-a)\right]\subset \mathrm{R}\to(0,\infty)$ iki kez diferansiyellenebilen bir fonksiyon öyleki her $a<b$ ($a,b\in\mathrm{R}$) için, f'' integrallenebilir ve $q\geq 1$ ($q\in\mathrm{R}$) için, $\left|f''\right|^{p/p-1}$, K kümesinde quasi- $\varphi-konveks$ fonksiyon olmak üzere,

$$\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx-\frac{f(a)+f(a+te^{i\varphi}(b-a))}{2}\right|$$

$$\leq\frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{12}\left[\max\{\left|f''(a)\right|^q,\left|f''(b)\right|^q\}\right]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerledir.

İspat. Lemma 4.2.1 de $\left|f''\right|^{p/p-1}$ nin quasi- $\varphi-konveksl\breve{g}i$ kullanlp, Kuvvet ortalama eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx - \frac{f(a)+f(a+te^{i\varphi}(b-a))}{2}\right|$$

$$\leq \frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{2}\int_0^1 (t-t^2)\left|f''(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|dt$$

$$\leq \frac{e^{i\varphi}(b-a)}{2}\left(\int_0^1 (t-t^2)dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 (t-t^2)\left|f'(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{e^{i\varphi}(b-a)}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\max\{\left|f'(a)\right|^q,\left|f'(b)\right|^q\}\int_0^1 (t-t^2)dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{12}\left[\max\{\left|f''(a)\right|^q,\left|f''(b)\right|^q\}\right]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ dir. Şimdi ikinci mertebeden türevlerinin mutlak değerleri quasi- $\varphi - konveks$ olan fonksiyonlar için Hermite - Hadamard eşitsizliğinin sol tarafını verelim.

Teorem 4.2.13 $f\ :\ K=\left[a,a+e^{i\varphi}(b-a)\right]\subset \mathrm{R}\rightarrow(0,\infty)$ iki kez diferansiyellenebilen bir fonksiyon öyleki f'' integrallenebilir ve her $a<b$ ($a,b\in\mathrm{R}$) için, $|f''|$, K kümesinde quasi- $\varphi - konveks$ fonksiyon olmak üzere,

$$\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx - f(\frac{2a+e^{i\varphi}(b-a)}{2})\right|$$

$$\leq \frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{8}\max\{\left|f''(a)\right|,\left|f''(b)\right|\}\}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 4.2.2 de $|f''|$ in quasi- $\varphi - konveksliğini$ kullanırsak,

$$\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx - f(\frac{2a+e^{i\varphi}(b-a)}{2})\right|$$

$$\leq \frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{2}\left[\int_0^{\frac{1}{2}} t^2\left|f''(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^2\left|f''(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|dt\right]$$

$$\leq \frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{2}\max\{\left|f''(a)\right|,\left|f''(b)\right|\}\left[\int_0^{\frac{1}{2}} t^2 dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^2 dt\right]$$

$$\leq \frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{8}\max\{\left|f''(a)\right|,\left|f''(b)\right|\}$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi Hölder eşitsizliğini kullanarak Teorem 4.2.13 ün genelleştirmesini verelim.

Teorem 4.2.14 $f \; : \; K = \left[a, a+e^{i\varphi}(b-a)\right] \subset \mathrm{R} \to (0,\infty)$ iki kez diferansiyellenebilen bir fonksiyon öyleki her $a<b$ ($a,b \in \mathrm{R}$) için, f'' integrallenebilir ve $p>1$ ($p \in \mathrm{R}$) için, $\left|f''\right|^{p/p-1}$, K kümesinde quasi- $\varphi-konveks$ fonksiyon olmak üzere,

$$\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx - f(\frac{2a+e^{i\varphi}(b-a)}{2})\right|$$

$$\leq \frac{e^{i\varphi}(b-a)}{8(4p+2)^{\frac{1}{p}}}\left[\max\{\left|f''(a)\right|^{\frac{p}{p-1}},\left|f''(b)\right|^{\frac{p}{p-1}}\}\right]^{\frac{p-1}{p}}$$

eşitsizliği geçrelidir.

İspat. Lemma 4.2.2 de $\left|f''\right|^{p/p-1}$ nin quasi- $\varphi-konveksliği$ kullanılıp, Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{e^{i\varphi}(b-a)}\int_a^{a+e^{i\varphi}(b-a)} f(x)dx - f\left(\frac{2a+e^{i\varphi}(b-a)}{2}\right)\right| \\
&\le \frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{2}\left[\int_0^{\frac{1}{2}} t^2\left|f''(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^2\left|f''(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|dt\right] \\
&\le \frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{2}\int_0^1 (t-t^2)\left|f''(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|dt \\
&\le \frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{2}\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^{2p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left|f''(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|^{\frac{p}{p-1}}dt\right)^{\frac{p-1}{p}}\right. \\
&\quad \left. +\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^{2p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|f''(a+te^{i\varphi}(b-a))\right|^{\frac{p}{p-1}}dt\right)^{\frac{p-1}{p}}\right] \\
&\le \frac{e^{2i\varphi}(b-a)^2}{2}\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^{2p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\max\{\left|f'(a)\right|^{\frac{p}{p-1}},\left|f'(b)\right|^{\frac{p}{p-1}}\}dt\right)^{\frac{p-1}{p}}\right. \\
&\quad \left. +\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^{2p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\max\{\left|f'(a)\right|^{\frac{p}{p-1}},\left|f'(b)\right|^{\frac{p}{p-1}}\}dt\right)^{\frac{p-1}{p}}\right] \\
&\le \frac{e^{i\varphi}(b-a)}{8(4p+2)^{\frac{1}{p}}}\left[\max\{\left|f''(a)\right|^{\frac{p}{p-1}},\left|f''(b)\right|^{\frac{p}{p-1}}\}\right]^{\frac{p-1}{p}}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada Noor tarafından oluşturulan $\varphi - konveks$ fonksiyonlar için Hermite - Hadamard tipinde eşitsizlikler oluşturduk. Quasi-convex fonksiyonlar, Godunova-Levin sınıfı, log-convex ve r-convex fonksiyonlar, p-convex fonksiyonlar içinde benzer eşitsizlikler oluşturulabilir. Ayrıca f fonksiyonu K $\varphi - konveks$ kümesi üzerinde tanımlı olmak üzere her $u, v \in K$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$f\left(u + te^{i\varphi}(v-u)\right) \leq (1-t)\, f(u) + tf(v)$$

şeklinde f $\varphi - konveks$ fonksiyon tanımında $e^{i\varphi}(v-u)$ terimi yerine $\eta(v,u)$ gibi daha genel bir fonksiyon tanmlanarak benzer eşitsizlikler oluşturulabilir ve bu eşitsizliklerin özel ortalamalarda ve optimizasyon , varyasyonel eşitsizlikler ve denge problemlerinde uygulamaları yapılabilir

5. KAYNAKLAR

S Alomari, M. Darus, M. & Dragomir, S.S. 2010. New inequalities of Hermite-Hadamard type for functions whose second derivatives absolute values are quasi-convex. Tamkang. J. Math. 41: 353—359

Alomari, M. Darus, M. & Dragomir, S.S. 2010. New inequalities of Hermite-Hadamard type for functions whose second derivatives absolute values are quasi-convex. Tamkang. J. Math. 41: 353—359

Apostol, T. M. 1974. Mathematical Analysis. New York, Addison-Wesley.

Barani, A., Ghazanfari, A. G. & Dragomir S.S. 2012. Hermite-Hadamard inequality for functions whose derviatives absolute values are preinvex. Journal of Inequalities and Applications 2012, 2012:247.

Barani, A., Barani, S. & Dragomir S.S. 2012. Refinements of Hermite-Hadamard inequalities for functions when power of the absolute value of the second derivative is p-convex. Hindawi Publishing Corporation Journal of Applied Mathematics Volume 2012, Article ID 615737

Bullen, P. S. 2003. Handbook of Means and Their Inequalities. Dordrecht: Kluwer Academic.

Bullen, P. S., Mitrinović, D. S. & Vasić, M. 1988. Means and Their Inequalities. Dordrecht: Kluwer Academic.

Cerone, P. & Dragomir, S. S. 2000a. Midpoint type rules from an inequalities point of view. Handbook of Analytic-Computational Methods in Applied Mathematics, New York, CRC Press.

Cerone, P., Dragomir, S. S., Roumeliotis, J. & Šunde, J. 2000b. A new generalistion of the trapezoid formula for n-time differentiable mappings and applications. Demonstratio Mathematica 33: 719--736.

Cerone, P. & Dragomir, S. S. 2008. Advences in inequalities for special functions. Nova Science Publishers, Inc.

Dragomir, S. & Pearce, C. 2000. Selected topics on Hermite-Hadamard inequalities and applications. Victoria University: RGMIA Monographs, [http://ajmaa.org/RGMIA/monographs/hermite hadamard.html].

Dragomir, S.S., Cerone, P. & Sofo, A. 2000. Some remarks on the trapezoid rule in numerical integration. Indian J. pure appl. Math. 31(5): 475-494.

Dragomir, S.S. 2001. Refinements of the Hermite-Hadamard ienquality for convex funstions. Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences 17(2) 131-137 Aletheia University.

Dragomir, S. S. 2004. A generalised trapezoid type inequality for convex functions. East Asian Journal of Mathematics 20: 27--40.

Dragomir, S. & Mcandrew, A. 2005. Refinements of the Hermite-Hadamard inequalityfor convex functions. Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics Volume 6, Issue 5, Article 140.

Ion, D. A. 2007. Some estimates on the Hermite-Hadamard inequality through quasi-convex functions. Annals of the University of Craiova-Mathematics and Computer Science Series 34: 82--87.

Kirmaci, U. S. 2004. Inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers to midpoint formula. Applied Mathematics and Computation 147: 137--146.

Kirmaci, U. S. 2008. Improvement and further generalization of inequalities for differentiable mappings and applications. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 55: 485—493

Kirmaci, U. S., Bakula, M. K., ¨Ozdemir, M. E. & Peˇcari´c, J. 2007. Hadamard-type inequalities for s-convex functions. Applied Mathematics and Computation 193: 26--35.

Kirmaci, U. S. & Özdemir, M. E. 2004a. On some inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to midpoint formula. Applied Mathematics and Computation 153: 361--368.

Kirmaci, U. S. & Özdemir, M. E. 2004b. Some inequalities for mappings whose derivatives are bounded and applications to special means of real numbers. Applied Mathematics Letters 17: 641--645.

Mitrinović, D. S., Pearić, J. E. & Fink, A. M. 1993. Classical and New Inequalities in Analysis. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

Mitrinović, D. S., Pearić, J. E. & Fink, A. M. 1994. Inequalities for functions and their integrals and derivatives. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

Noor, M. A. 1994. Variational-like inequalities, Optimization, 30 (1994), 323--330.

Noor, M. A. 2005., Invex equilibrium problems, J. Math. Anal. Appl., 302 (2005), 463--475.

Noor, M. A. & Noor, K. I. 2006. Some characterizations of strongly preinvex functions, J. Math. Anal. Appl., 316 (2006), 697--706.

Noor, M. A. 2007, Hermite-Hadamard integral inequalities for log-preinvex functions, Preprint, 2007.

Noor, M. A. & Noor, K. I. 2006. Hemiequilibrium problems, Nonlinear Anal., 64 (2006), 2631--2642.

Özdemir, M. E. 2003. A theorem on mappings with bounded derivatives with applications to quadrature rules and means. Applied Mathematics and Computation 138: 425--434.

Pachpatte, B. G. 2005a. Mathematical inequalities. Elsevier B.V., Netherlands. Oldham, K.B., Spainer, J., The Fractional Calculus, Academic Press, New York and London, (1974).

Pachpatte, B. G. 2005. A note on Hadamard type integral inequalities involving several log-convex functions. Tamkang Journal of Mathematics Volume 36, Number 1, 43-47, Spring 2005.

Pearce, C. E. M. & Pearić, J. 2000a. Inequalities for differentiable mappings with application to special means and quadrature formula. Applied Mathematics Letters 13: 51--55.

Pecarić, J. E., Proschan, F. & Tong, Y. L. 1992. Convex functions, partial orderings, and statistical applications. London, Academic Press.

Roberts, A. W. & Varberg, D. E. 1973. Convex functions. London, Academic Press.

Sarikaya, M. Z., Saglam A., & Yldrm H. 2012. On some Hadamard-type inequalities for h-convex functions, Journal of Mathematical Inequalities, Volume 2, Number 3

(2008), 335-341.

Sarikaya, M. Z., Avc M. & Kavurmaci H. 2010. On some inequalities of Hermite-Hadamard type for convex functions, ICMS Iternational Conference on Mathematical Science. AIP Conference Proceedings 1309, 852 (2010).

Sarikaya, M. Z. & Aktan, N. 2011. On the generalization some integral inequalities and their applications Mathematical and Computer Modelling, Volume 54, Issues 9-10, November 2011, Pages 2175-2182.

Sarikaya, M. Z., Set, E. and Özdemir, M. E. 2010. On some new inequalities of Hadamard type involving h-convex functions, Acta Mathematica Universitatis Comenianae, Vol. LXXIX, 2(2010), pp. 265-272.

Sarikaya, M. Z., Saglam A., & Yldrm H. 2010. Some new inequalities of Hermite-Hadamard's type, Kyungpook Mathematical Journal, 50(2010), 399-410.

Tseng, K. L., Yang, G. S. & Wang, H.T. 2012. A note on integral inequalities of type hadamard type for log-convex and log-concave functions. Taiwanese Journal of Mathematics Vol. 16, No. 2, pp. 479-496, April 2012.

Sarikaya, M. Z., Saglam A., & Yldrm H. 2012. New inequalities of Hermite-Hadamard type for functions whose second derivatives absolute values are convex and quasi-convex, InternationalJournal of Open Problems in Computer Science an Mathematics (IJOPCM), 5(3), 2012.

.

6. EKLER

Tezin oluşumunda önemli bir rol oynayan Nonkonveks fonksiyonlarn birinci ve ikinci türevleri için Hermite-Hadamard eşitsizliği tipinde oluşturduğumuz baz eşitsizlikler aşağıdaki kaynaklarda sunulmuştur.

1) M. Z. Sarikaya and H. Bozkurt, On Hadamard Type Integral Inequalities for nonconvex Functions, (submitted), arXiv:1203.2282v1.

2) M. Z. Sarikaya, H. Bozkurt, On Hermite-Hadamard Type Integral nequalities for functions whose second derivative are nonconvex,

3) M. Z. Sarikaya, H. Bozkurt and N. Alp, On Hermite-Hadamard Type Integral Inequalities for preinvex and log-preinvex functions, (submitted), arXiv:1203.4759v1.
S Alomari, M. Darus,

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	: BOZKURT, Hakan
Uyruğu	: T.C
Doğum tarihi ve Yeri	: 14.07.1987 / NEVŞEHİR
Telefon	: (0507) 355 11 55
e-mail	: insedi@yahoo.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Yüksek Lisans	Düzce Ü. /Matematik B.	2012
Lisans	Selçuk Ü. /Matematik B.	2009
Lise	2000 Evler Lisesi	2005

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2010-2011	Cumhuriyet Anadolu L.	Matematik Öğrt.
2011-2012	Kavram Dersanesi	Matematik Öğrt.

Yabancı Dil

İngilizce(YDS: 40)

Yayınlar

1) M. Z. Sarikaya and H. Bozkurt, On Hadamard Type Integral Inequalities for nonconvex Functions, (submitted), arXiv:1203.2282v1.

2) M. Z. Sarikaya, H. Bozkurt, On Hermite-Hadamard Type Integral nequalities for functions whose second derivative are nonconvex,

3) M. Z. Sarikaya, H. Bozkurt and N. Alp, On Hermite-Hadamard Type Integral Inequalities for preinvex and log-preinvex functions, (submitted), arXiv:1203.4759v1.