T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

GÜÇLÜ $\varphi_h -$KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMITE-HADAMARD TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS

KUBİLAY ÖZÇELİK

HAZİRAN 2013

DÜZCE

KABUL VE ONAY BELGESİ

Kubilay ÖZÇELİK tarafından hazırlanan güçlü $\varphi_h -$konveks fonksiyonlar için hermite-hadamard tipli integral eşitsizlikler üzerine isimli lisansüstü tez çalışması, Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 03/06/2013 tarih ve 2013/289 sayılı kararı ile oluşturulan jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans olarak kabul edilmiştir.

Üye
(Tez Danışmanı)
Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Düzce Üniversitesi

Üye
Yrd. Doç. Dr. Erhan SET
Düzce Üniversitesi

Üye
Yrd. Doç. Dr. Mahmut AKYiĞiT
Sakarya Üniversitesi

Tezin Savunulduğu Tarih : 13.06.2013

ONAY

Bu tez ile Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu 'nun Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans derecesini almasını onamıştır.

Prof. Dr. Haldun MÜDERRİSOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

13 Haziran 2013

Kubilay ÖZÇELİK

Sevgili Aileme

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim ve bu tezin hazırlanması süresince gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA’ ya en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme ve çalışma arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

13 Haziran 2013 **Kubilay ÖZÇELİK**

İÇİNDEKİLER **Sayfa**

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\Re$	:	Reel Sayılar Kümesi
$\Re^n$	:	n- boyutlu Euclidean Uzay
Γ	:	Gama Fonksiyonu
β	:	Beta Fonksiyonu
N	:	Doğal Sayılar Kümesi
I	:	Aralık
I^0	:	Aralığın İçi
f'	:	Birinci Mertebeden Türev
f''	:	İkinci Mertebeden Türev
$\lvert f \rvert$	:	f nin mutlak değeri
$G(a,\beta)$	:	Geometrik Ortalama
$A(a,\beta)$	:	Aritmetik Ortalama
$L(a,\beta)$	:	Logaritmik Ortalama
$Q(I)$	:	Godunova - Levin Fonksiyonlar Sınıfı
$P(I)$	:	P- Fonksiyonlar Sınıfı
Suppf	:	Fonksiyonun Kompakt Desteği
Max	:	Maksimum
Min	:	Minimum
$C(I)$	:	Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
H-H	:	Hermite-Hadamard Eşitsizliği

ÖZET

GÜÇLÜ φ_h -KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMITE-HADAMARD TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERi ÜZERİNE

Kubilay ÖZÇELİK
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Doç. Dr. M. ZEKİ SARIKAYA
Haziran 2013, 60 sayfa

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılarak genel bir literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölümde, gerekli temel kavramlardan söz edilmiştir. Üçüncü bölümde farklı konvekslik türleri için elde edilen Hermite - Hadamard tipinde eşitsizlikler verilmiştir. $\varphi -$konveks fonksiyon kavramı tanıtılmış, bu konvekslik türü için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler verilmiştir. Reel normlu uzay ve Güçlü $\varphi -$konveks fonksiyon kavramı tanıtılmış, bu konvekslik türü için Hermite-Hadamard tipinde integral eşitsizlikler verilmiştir. Dördüncü bölümde güçlü $\varphi_h -$konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizlikler elde edilmiştir. Güçlü $\varphi_h -$ konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizliklerin genelleme olduğunu gösterdik. Son bölüm ise sonuç ve önerilere ayrılmıştır

Anahtar sözcükler: Güçlü $\varphi_h -$konveks fonksiyon, Hermite-Hadamard eşitsizliği

ABSTRACT

ON HERMITE-HADAMARD TYPE INTEGRAL INEQUALITİES FOR STRONGLY $\varphi_h -$CONVEX FUNCTIONS

Kubilay ÖZÇELİK
Düzce University
Institute of Science and Technology, Department of Mathematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Assoc. Doç. Dr. M. Zeki SARIKAYA
2013, 60 pages

This thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction section and provide a generel knowledge of literature. In the second chapter, we have given about the basic concepts needed. İn the third chapter, nation of real norm space and strongly $\varphi-$convex function were introduced Hermite-Hadamard type integral inequalities were given fort his type some convexty. İn the four chapter, we obtained some Hermite-Hadamard type inequalities for strongly $\varphi_h -$convex functions. At the same time we denoted that Hermite-Hadamard type inequalities for strongly $\varphi_h -$convex functions are more general notion. The last chapter is devoted into results and recommondatitons

Keywords: Strongly $\varphi_h -$convex functions, Hermite-Hadamard inequality

EXTENDED ABSTRACT

ON HERMITE-HADAMARD TYPE INTEGRAL INEQUALITİES FOR STRONGLY φ_h-CONVEX FUNCTIONS

Kubilay ÖZÇELİK
Düzce University
Institute of Science and Technology, Department of Mathematics

Master of Science Thesis
Supervisor: Assoc. Doç. Dr. M. Zeki Sarıkaya
2013, 60 pages

This thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction section and provide a general knowledge of literature. In the second chapter, we have given about the basic concepts needed. In the third chapter, Hermite-Hadamard-type inequalities were given for the different type of convexity. Notion of $\varphi-$convex function was introduced,and Hermite-Hadamard type inequalities were for this type of convexty. Dragomir and Agarwal (1998) proved with respect to the right of Hermite-Hermite trapezoid inequalities for differentiable convex functions. On the other hand Kırmacı (2004) proved with respect to the left of Hermite-Hermite (midpoint) inequalities for differentiable convex functions. Yang (2004) established with respect to both of side of Hermite-Hermite inequalities for differantiable convex and concave functions. Cristescu gave some result of both of side of Hermite-Hermite inequalities for $\varphi-$convex funcitons and Polyak firstly introduced notion of strongly $\varphi-$convex function. Sarıkaya established some Hermite-Hadamard type inequalities for strongly $\varphi-$convex functions which are defined in real norm space. In the four chapter, we obtained some Hermite-Hadamard type inequalities for strongly φ_h-convex functions. At the same time we denoted that Hermite-Hadamard type inequalities for strongly φ_h-convex functions are more general notion.

Anahtar sözcükler: Strongly φ_h-convex function, Hermite-Hadamard inequalities

1. GİRİŞ

1.1. AMAÇ VE KAPSAM

Konveks fonksiyonların ilk araştırması 19. yüzyılın sonlarında olmuştur. 20. yüzyılın ortalarında matematiğin önemli bir alanı olarak kabul edilmiştir. Konvekslik, geometri, analiz, lineer cebir ve topolojide kullanılır ve sayı teorisi, klasik ekstremum problemleri, lineer programlama, oyun teorisi ve eşitsizlikler teorisi (lineer, klasik ve matris) gibi çeşitli konularda önemli rol oynar. Günümüzde artan uygulamalarıyla matematiksel analizin merkezi alanlarından biri olarak yerini almıştır. Konveks terimine 1881 de Ch. Hermite(1822-1901) in Mathesis 3(1883, s.82) dergisine gönderdiği mektupta rastlanmıştır

Hermite-Hadamard Eşitsizliği, geometrik yorumu ve çoğu uygulaması konveks fonksiyonun ilk temel sonucudur. Çoğu matematikçi farklı konveks fonksiyon sınıfları(quasi-konveks fonksiyonlar, Godunova-Levin sınıfı, log-konveks , p-konveks fonksiyonlar, s-fonksiyonlar vb.) ve özel ortalamalar(p-logarithmic ortalamalar, identric ortalama, Stolarsky ortalamalar, vb.) için onu uygulamaya, genişletmeye, sadeleştirmeye ve genelleştirmeye çalışmaktadır.

O. Hölder(1889), $f''(x) > 0$ durumunda Jensen eşitsizliği olarak bilinen eşitsizliği f nin sağladığını ispatladı. O. Stolz(1893), f' nin $[a,b]$ de sürekliyse ve

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[f(x)+f(y)]$$

eşitsizliğini sağlaması durumunda , (a,b) nin her noktasında sağ ve sol türevlere sahip olduğunu gösterdi. J. Hadamard(1893), $[a,b]$ da türevleri artan olan fonksiyonlar için temel integral eşitsizlikleri buldu. İlk olarak J. L. W. V. Jensen(1905,1906) konveks fonksiyonları sistematik olarak araştırdı. Jensen konveksliği üsteki eşitsizlikten tanımladı. A.O-G.O eşitsizliği, Young Eşitsizliği, Hölder eşitsizliği ve Minkowski eşitsizlikleri konveks fonksiyonlar için Jensen eşitsizliğinin sonuçlarıdır.Hardy, Littlewood ve Polyak 1934 yılında "Inequalities" adlı eserde konveks fonksiyonlarla ilgili klasik ve yeni eşitsizlikleri vermişlerdir. Beckenbach ve Bellman 1965 de "Inequalities" adlı eseri, Mitrinovic'in 1970 de "Analytic Inequalities" adlı eseri yayınlamıştır. A. W. Roberts ve D. E. Varberg tarafından "Convex Functions" adlı eser, Pearić tarafından 1987 yılında "Convex Functions: Inequalities" adlı eser yayınlanmıştır. S.S. Dragomir ve C.E.M Pearce tarafından "Selected Topics on Hermite Hadamard Inequalities and Applications" adlı eser yayınlanmıştır. Konveks fonksiyonların daha genel bir durumu olan h-konveks fonksiyonlar için M. Z. Sarikaya " *On some Hadamard-type inequalities for h-convex functions*" (2008) adlı eserde Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikleri tanıtmıştır.

Konvekslik matematik programlamada, mühendislikte ve optimizasyon teorisinde önemli bir role sahiptir. Konveksliğin genellemesi matematiksel programlama ve optimizasyon teorisinin en önemli unsurlarndan biridir

Son yılllarda klasik konvekslik tanımından daha genel konveks fonksiyon çeşitleri oluşturulmaktadır. Bu çalışmada güçlü $\varphi_h -$konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipinde integral eşitsizlikler oluşturulmuştur.

2. KURAMSAL KAVRAMLAR

2.1. GENEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmamız için gerekli olan tanım, teorem, bazı eşitsizlikler ve temel özellikler verilecektir. Gerekli görülenler için ispatlar yapılacaktır.

Tanım 2.1.1. (Fonksiyonel): Lineer uzaydan reel(kompleks) uzaya olan dönüşümlere fonksiyonel denir.

Tanım 2.1.2. (Operatör): Fonksiyonlar cümlesini fonksiyonlar cümlesine dönüştüren dönüşüme operatör denir.

Tanım 2.1.3 (Gamma Fonksiyonu): Gamma fonksiyonu, $n > 0$ için

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

ile tanımlanır. Bu integral $n > 0$ için yakınsaktır. Gamma fonksiyonun bazı önemli özelliklerini şöyle sıralayabiliriz, [Abramowitz 1972].

i. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$

ii. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

iii. $\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x} dx = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \quad 0 < p < 1$

iv. $2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\Gamma(2n)$

Tanım 2.1.4 (Beta fonksiyonu): Euler integralinin ilk türü olan Beta fonksiyonu $x > 0$ ve $y > 0$ değerleri için

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

integrali ile tanımlanmıştır. Beta fonksiyonu Jacques Binet tarafından öğrencileri Euler ve Legendre' ye adandı.

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = 2\int_0^1 (\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}d\theta$$

dir (Dragomir et al.2000).

Tanım 2.1.5. (Normlu Uzay): X , F üzerinde bir vektör uzay olsun. X üzerinde bir norm aşağıdaki özellikleri sağlayan bir

$$\|.\| : X \to R$$

Fonksiyonudur (Reed 1980).

$\forall\ x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in F$ için

i. $\|.\| \geq 0$

ii. $\| x \| = 0$ ancak ve ancak $x = 0$

iii. $\| \alpha x \| = |\alpha|\ \|x\|$

iv. $\| x + y \| \leq \|x\| + \|y\|$

Tanım 2.1.6. (Sınırlı Fonksiyon): $I \subset \mathrm{R}$, $f : I \to \mathrm{R}$ bir fonksiyon ve $\forall x \in I$ için $|f(x)| \leq K$ olacak şekilde bir K pozitif reel sayısı varsa f fonksiyonuna sınırlı fonksiyon denir.

Tanım 2.1.7: (Lipschitz Şart): $[a,b]$ kapalı aralığındaki her x ve y noktaları için,

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

şartını sağlayan bir K sabiti varsa f , $[a,b]$ aralığında Lipchitz şartını sağlıyor denir (Bayraktar 2010).

Tanım 2.1.8. (Mutlak Süreklilik): $[a,b]$ nin ayrık açık alt aralıklarının birikimi $\{(a_i, b_i)\}_1^n$ için

$$\sum_1^n (b_i - a_i) < \delta$$

olduğunda,

$$\sum_1^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$$

olacak şekilde herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, bir $\delta > 0$ bulunabiliyorsa, f, $[a,b]$ de mutlak süreklidir denir (Carter and Brunt 2000).

Tanım 2.1.9. (Konveks Küme): $K \subseteq R^n$ boştan farklı bir küme olsun. K kümesinin herhangi iki elemanın birleştiren doğru parçası K kümesine ait ise veya başka bir ifadeyle $\forall u, v \in K$ ve $t \in [0,1]$ için

$$tu + (1-t)v \in K$$

oluyorsa K kümesine konveks küme denir (Bayraktar 2000).

Tanım 2.1.10. (Konveks Fonksiyon): $\forall\ x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y)$$

eşitsizliğini sağlayan $f : I \subset \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir(eşdeğer olarak t, $(0,1)$ aralığında seçilebilir). Geometrik olarak bu eşitsizlik, f fonksiyonunun grafiği kirişlerinin altından geçtiği anlamına gelmektedir (Pećarić et al.1992).

Aşağıdaki kriterler konveks fonksiyon tanımına eşdeğerdir.

i. I aralığı üzerinde f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart herhangi bir $c \in I$ noktası için, $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ fonksiyonunun I aralığında artan olmasıdır (Pećarić et al.1992).

ii. $f : (a,b) \to \mathrm{R}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart her $c, x \in (a,b)$ için,

$$f(x) - f(c) = \int_c^x g(t)\,dt$$

olacak şekilde $g : (a,b) \to \mathrm{R}$ artan fonksiyonun olmasıdır.

iii. f diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere, f in konveks olması için gerek ve yeter şart f' fonksiyonunun artan olmasıdır (Pećarić et al.1992).

iv. f'', (a,b) de mevcut olsun. Bu durumda f in konveks olması için gerek ve yeter şart $f''(x) \ge 0$ olmasıdır (Mitrinović 1970).

v. $f : (a,b) \to \mathrm{R}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart her $x_0 \in (a,b)$ için f fonksiyonun en az bir support doğrusuna sahip olmasıdır. Yani $\forall\ x \in (a,b)$ için,

$$f(x) \geq f(x_0) + \lambda(x - x_0) \quad , \quad \forall x \in (a,b)$$

eşitsizliğini sağlamasıdır. Burada λ , x_0 a bağlıdır ve eğer f' varsa o zaman $\lambda = f'(x_0)$ ya da $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$ ise $\lambda \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$ dir.

vi. $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart P, Q ve R noktaları f fonksiyonun grafiği üzerinde herhangi üç nokta olmak üzere, $eğimPQ \leq eğimPR \leq eğimQR$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Konveks Fonksiyonun Özellikleri

i. Kapalı aralıkta tanımlı konveks fonksiyon sınırlıdır (Azpeitia 1994).

ii. $f : I \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ise, I^0 (I ' nın içi) inde herhangi bir $[a,b]$ kapalı aralığında Lipschitz şartını sağlar. Bu nedenle f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında de mutlak sürekli ve I^0 de süreklidir (Pećarić et al.1992).

iii. $f : I \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ise, I^0 de $f'_-(x)$ ve $f'_+(x)$ vardır ve artandır (Pećarić et al.1992).

iv. $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I açık aralığında konveks ise, sayılabilir bir E kümesi haricinde f' mevcuttur ve süreklidir.

v. k tane fonksiyon $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ye konveks fonksiyonlar olsun. Bu takdirde;

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} a_j f_j(x), \; a_j > 0; \; (j = 1, 2, ..., k)$$

fonksiyonu da konvekstir.

vi. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ azalmayan ve konveks fonksiyon ayrıca $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveks olsun. Bu takdirde; $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = (g \circ h)(x)$ olarak tanımlanan f bileşke fonksiyonu da konvekstir (Roberts and Varberg 1973).

vii. $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ konveks ve h, $h(x) = Ax + B$ formunda $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveks olmak üzere,

$$f(x) = g(h(x))$$

fonksiyonu konveks fonksiyondur. Burada A uygun matristir.

Teorem 2.1.1. (Hermite Hadamard Eşitsizliği): $f : I \to \mathrm{R}$ konveks fonksiyon olmak üzere, $\forall\ a,b \in I$ ve $a<b$ için,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliğine Hermite-Hadamard eşitsizliği denir. Burada f fonksiyonunun konkav olması eşitsizliği tersine çevirir (Pećarić et al.1992).

İspat: f fonksiyonu sürekli ve sınırlı olsun. Bu durumda $[a,b]$ aralığında f fonksiyonu integrallenebilirdir. Konvekslik tanımından,

$$f(ta+(1-t)b) \leq tf(a)+(1-t)f(b)$$

eşitsizliği sağlanır. f fonksiyonunun integrallenebilir olduğu gözönüne alınarak, bu eşitsizliğin her iki tarafının $[0,1]$ aralığında t ye göre integrali alınırsa,

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b) \leq \int_0^1 tf(a) + \int_0^1 (1-t)f(b) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

elde edilip soldaki eşitsizlikte $x = ta+(1-t)b,\ t\in[0,1]$ dönüşümü uygulanırsa $H.-H.$ eşitsizliğinin sağ tarafı elde edilir. Sol tarafını ispat etmek için,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{b-a}\left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx\right]$$

eşitliğinin sağındaki integrantlara sırasıyla $x = a + t(b-a)/2$ ve $x = b - t(b-a)/2$ değişken değişimi uygulanırsa,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1\left[f\left(a+\frac{t(b-a)}{2}\right)+f\left(b-\frac{t(b-a)}{2}\right)\right]dt \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

elde edilip $H.-H.$ eşitsizliğinin sol tarafı ispatlanmış olur.

Tanım 2.1.11. (Logaritmik Konveks Fonksiyon): $f : I \to [0,\infty)$ fonksiyonu,

i. $\forall\ x,y \in I$ ve $t\in[0,1]$ için,

$$f(tx+(1-t)y) \leq [f(x)]^t[f(y)]^{1-t}$$

ii. $\log f$ konveks

şartlarından birini sağlıyorsa f fonksiyonuna logaritmik konveks fonksiyon denir (Pećarić et al.1992).

Teorem 2.1.2. $f : I \to [0,\infty)$ fonksiyonu logaritmik konveks ise konvekstir.

İspat: f fonksiyonu logaritmik konveks fonksiyon olduğundan, $\log f$ fonksiyonu I aralığında konvekstir ve $g(x) = e^{x}$ fonksiyonu tüm reel sayılar kümesinde artan ve konveks bir fonksiyon olduğundan, özellik vi. den dolayı,

$$f = \exp(\log f)$$

olup f fonksiyonu konveks olur. Diğer yoldan direk olarak konveksliğin ve logaritmik konveksliğin tanımı kullanılarak AO-GO eşitsizliğinden de benzer sonuç elde edilebilir.

Teorem 2.1.3. $f : I \to \mathrm{R}$ logaritmik konveks fonksiyon, $a,b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\le \exp\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx\right] \\ &\le \frac{1}{b-a}\int_a^b G(f(x), f(a+b-x))dx \\ &\le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \\ &\le L(f(a), f(b)) \end{aligned}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Burada $G(a,b)$ pozitif reel sayılar için geometrik ortalama ve $L(p,q)$ ayrık pozitif reel saylar için logaritmik ortalama anlamındadır.

Tanım 2.1.12. (Quasi-Konveks Fonksiyon): Her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$f(tx + (1-t)y) \le \max\{f(x), f(y)\}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $f : I \to \mathrm{R}$ fonksiyonuna *quasi konveks fonksiyon* denir. Tanım 2.1.10. , 2.1.11. den ve AO-GO eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) &\le [f(x)]^{t}[f(y)]^{1-t} \\ &\le tf(x) + (1-t)f(y) \\ &\le \max\{f(x), f(y)\} \end{aligned}$$

eşitsizliklerine sahip olabiliriz. Yani quasi-konveks fonksiyon ailesi log-konveks fonksiyon ailesini, log-konveks fonksiyon ailesinde konveks fonksiyon ailesini kapsar (Dragomir and Pearce 1998).

Tanım 2.1.13. (Godunova-Levin Fonksiyon): $f : I \to \mathrm{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon her $x, y \in I$, $t \in (0,1)$ olmak üzere

$$f(tx+(1-t)y) \le \frac{f(x)}{t} + \frac{f(y)}{1-t}$$

Şartını sağlayan f fonksiyonuna Godunova-Levin fonksiyon ve $Q(I)$ sınıfına aittir denir (Godunova and Levin 1985).

Tanım 2.1.14. (P-Fonksiyon): $f : I \to \mathrm{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. $\forall\ x, y \in I,\quad t \in [0,1]$ olmak üzere

$$f(tx+(1-t)y) \le f(x) + f(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna P–fonksiyonu veya $P(I)$ sınıfına aittir denir (Dragomir at al. 1995).

Tanım 2.1.15. (h-Konveks Fonksiyon): $h : (0,1) \to (0,\infty)$ pozitif bir fonksiyon ve $f : I \subset R \to [0,\infty)$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. $\forall\ x, y \in I,\quad t \in [0,1]$ için

$$f(tx+(1-t)y) \le h(t) f(x) + h(1-t) f(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna h-konveks fonksiyon denir. Eşitsizliğin tersini doğrulayan f fonksiyonuna h-konkav fonksiyon denir (Varosanec 2007).

Tanm 2.1.16. (**Güçlü Konveks Fonksiyon**): Tüm $x, y \in I$, $t \in (0,1)$ ve $c > 0$ ile

$$f(tx+(1-t)y) \le tf(x)+(1-t)f(y) - ct(1-t)(x-y)^2$$

eşitsizliğini sağlayan $f : I \to R$ fonksiyonuna güçlü konveks fonksiyon denir (Polyak).

Teorem 2.1.4. (Kompakt Destek ya da Support): Bir f fonksiyonunun kompakt desteği ya da supportu

$$Suppf = \overline{\{x / f(x) \ne 0\}}$$

olarak tanımlanır.(Schwartz 1996).

Teorem 2.1.5. (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu): f , $[a,b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $a \le b$ olmak üzere,

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx \quad a \le b$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Mitrinovic et al. 1993).

Tanım 2.1.17. (Özel Ortalamalar): α, β reel sayılar ve $\alpha \ne \beta$ olmak üzere,

$$\begin{array}{lll} G(\alpha,\beta) = \sqrt{\alpha\beta}, & \alpha,\beta \in \mathrm{R}/\{0\} & \textit{Harmonik Ortalama} \\ A(\alpha,\beta) = \frac{\alpha+\beta}{2}, & \alpha,\beta \in \mathrm{R} & \textit{Aritmetik Ortalama} \\ \overline{L}(\alpha,\beta) = \frac{\beta-\alpha}{\ln|\beta|-\ln|\alpha|} & \alpha,\beta \in \mathrm{R}/\{0\} & \textit{Logaritmik Ortalama} \end{array}$$

Şeklindedir (Bullen et al. 1988; Bullen 2003).

Teorem 2.1.6. (Jensen Eşitsizliği): f fonksiyonu (a,b) aralığında konveks ve $x_i \in (a,b)$ olsun. Bu durumda $\alpha_i > 0$ ve $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ ise

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right) \le \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

eşitsizliği geçerlidir (Jensen 1906).

İspat: Tümevarım yöntemiyle ispatı yapalım. $i = 2$ için f konveks olduğundan

$$f(a_1x_1 + a_2x_2) \le a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2)$$

olduğu açıktır. Şimdi $i = n$ için

$$f(a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n) \le a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + ... + a_n f(x_n)$$

doğru olduğunu kabul edelim. Şimdi $i = n+1$ için doğru olduğunu gösterelim. $\alpha_i > 0$ için f in konveksliğinden

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i \right) \le f\left(a_1x_1 + (1-a_1) \sum_{i=2}^{n+1} \frac{a_i}{1-a_1} x_i \right) \le a_1 f(x_1) + (1-a_1) f\left(\sum_{i=2}^{n+1} \frac{a_i}{1-a_1} x_i \right)$$

yazabiliriz. $\sum_{i=2}^{n+1} \dfrac{a_i}{1-a_1} = 1$ olduğundan eşitsizlik $i = n+1$ için doğrudur ve

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right) \le \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

eşitsizliği gerçeklenir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.1.7. (İntegraller için Jensen Eşitsizliği): $f : [a,b] \to \mathrm{R}$ konveks fonksiyon, $h : [a,b] \to (0,\infty)$ ve $u : [a,b] \to \mathrm{R}_+ = [0,\infty)$ integrallenebilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$f\left(\frac{\int_a^b h(t)u(t)dt}{\int_a^b h(t)dt}\right) \leq \frac{\int_a^b h(t)\, f(u(t))dt}{\int_a^b h(t)dt}$$

eşitsizliği geçerlidir (Jensen 1906).

İspat: f fonksiyonu konveks olduğundan dolayı, bir support doğruya sahiptir. Yani $\gamma > 0$ için

$$f(t) - f(\gamma) \geq \lambda(t-\gamma), \ \forall t \geq 0$$

olacak şekilde bir λ sabiti vardır. Burada $t = u(t)$ seçilir ve eşitsizliğin her iki tarafı $h(t)$ ile çarpılır ve $[a,b]$ aralığında t ye göre integral alınırsa,

$$\int_a^b h(t)\, f(u(t))dt - f(\gamma)\int_a^b h(t)dt \geq \lambda\left\{\int_a^b h(t)u(t)dt - \gamma\int_a^b h(t)dt\right\}$$

elde edilir. Son bulunan eşitsizlikte,

$$\gamma = \frac{\int_a^b h(t)u(t)dt}{\int_a^b h(t)dt}$$

yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 2.1.8. (AO-GO Eşitsizliği): Eğer $\forall \ i = 1,2,...,n$ için $x_i \geq 0$, $\alpha_i > 0$ ve $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ ise,

$$\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

eşitsizliği geçerlidir (Lin 2012).

İspat: En az bir i için $x_i = 0$ ise ispat aşikârdır. $x_i > 0$ durumunda $y_i = \log x_i$ seçilirse,

$$\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} = \exp\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i\right)$$

olup $f(t) = e^t$ fonksiyonu R de konveks olduğundan Jensen eşitsizliğini uygularsak,

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(y_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

elde edilip ispat tamamlanmış olur. Özel olarak $n = 2$, $\alpha_1 = \frac{1}{p}$, $\alpha_2 = \frac{1}{q}$, $x_1 = x^p$ ve $x_2 = y^q$ seçilirse Yooung eşitsizliği olarak bilinen,

$$xy \leq \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 2.1.9. (Hölder Eşitsizliği): $x_1,...,x_n, y_1,...,y_n > 0$, $p,q > 1$ öyle ki $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğine Hölder eşitsilizliği denir. Özel olarak, $p = q = 2$ seçilirse yukarıdaki eşitsizlik Cauchy-Buniakowsky-Schwartz eşitsizliği elde edilir (Mitrinović 1970).

İspat: Yukarıdaki eşitsizlikte x_i ve y_i ler den en az birinin sıfırdan farklı olduğunu düşünebiliriz. O halde, $u = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$ ve $v = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$ her ikisi de pozitiftir, Young eşitsizliğinde $x = x_i / u$ ve $y = y_i / v$ seçersek,

$$\frac{x_i}{u} \cdot \frac{y_i}{v} \leq \frac{1}{p}\left(\frac{x_i}{u}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{y_i}{v}\right)^q$$

elde edilir, son eşitsizlik $1 \leq i \leq n$ için düzenlenir taraf tarafa toplanırsa,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{uv} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

olur, bu da Hölder eşitsizliğini verir.

Teorem 2.1.10. (İntegraller İçin Hölder Eşitsizliği): $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g , $[a,b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović at al. 1970).

Tanım 2.1.18. (Kuvvet Ortalama Eşitsizliği) $q \geq 1$ olsun. f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde farklı konvekslik türleri için elde edilen Hermite - Hadamard tipinde eşitsizlikler verilmiştir. $\varphi-$konvekslik türü için Hermite-Hadamard tipinde eşitsizlik oluşturulmuş, 1998 de Dragomir ve Agarwal' ın diferansiyellenebilir konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard trapezoid eşitsizliğinin sağ tarafı ile ilgili eşitsizlikleri, 2004 yılında Kırmacı tarafından ispatlanan diferansiyellenebilen konveks fonksiyonlar için Hermit-Hadamard(midpoint) eşitsizliğinin sol tarafı ile ilgili sonuçları, 2004 yılında Yang'ın diferansiyellenebilir konveks ve konkav fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin her iki tarafı ile ilgili sonuçları, 2004 yılında Crıstescu' nun $\varphi-$konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin her iki tarafı ile ilgili sonuçları, 2013 yılında Sarıkaya' nın reel normlu uzay da tanımlı güçlü $\varphi-$konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipinde eşitsizlikleri verilmiştir.

3.1. φ-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN H-H TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER

1998 de Dragomir ve Agarwal diferansiyellenebilir konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard trapezoid eşitsizliğinin sağ tarafı ile ilgili sonucu ispatlamak için aşağıdaki lemmayı vermişlerdir.

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2}\int_0^1(1-2t)\,f'(ta+(1-t)b)dt$$

eşitliği sağlanır.

Böylece bu lemma kullanılarak aşağıdaki teorem ispatlandı.

Teorem 3.1.1. $f : I\subset \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I da diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a<b$ ($a,b\in I$) olmak üzere, eğer $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\le\frac{b-a}{8}\left[|f'(a)|+|f'(b)|\right]$$

eşitsizliği geçerlidir.

2000 yılında Pearce ve Pećarić Teorem 3.1.1 in genelleştirmesi olan aşağıdaki sonucu ispatladı.

Teorem 3.1.2. $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I de diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a < b$ ($a, b \in I$) olmak üzere, eğer $q \geq 1$ için $|f'|^q$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks ise,

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{b-a}{4} \left[\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2} \right]^{\frac{1}{q}}$$

ve

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{b-a}{4} \left[\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2} \right]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Eğer $q \geq 1$ için $|f'|^q$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konkav ise bu takdirde

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{b-a}{4} \left| f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|$$

ve

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{b-a}{4} \left| f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Aşağıda 2004 yılında Kırmacı tarafından ispatlanan diferansiyellenebilen konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard(midpoint) eşitsizliğinin sol tarafı ile ilgili sonuçlar verilmiştir.

Lemma 3.1.1. $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I de diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a < b$ ($a, b \in I$) olmak üzere, eğer f' fonksiyonu $[a,b]$ aralığında integrallenebilir ise

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = (b-a) \int_0^1 K(t) f'(ta + (1-t)b)dt$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada

$$K(t)=\begin{cases} t, & t\in\left[0,\frac{1}{2}\right] \\ 1-t, & t\in\left[\frac{1}{2},1\right] \end{cases}$$

şeklinde verilir [Kırmacı 2004].

Bu lemmayı kullanarak Kırmacı aşağıdaki teoremi ispatladı.

Teorem 3.1.3. $f\ :\ I\subset \mathrm{R}\to \mathrm{R}$ fonksiyonu I de diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a<b$ ($a,b\in I$) olmak üzere, eğer $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks ise

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\le\frac{b-a}{8}\left[|f'(a)|+|f'(b)|\right]$$

eşitsizliği geçerlidir, [Kırmacı 2004].

2004 yılında Yang diferansiyellenebilir konveks ve konkav fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin her iki taraf içinde bazı sonuçlar verdi.

Teorem 3.1.4. $f\ :\ I\subset \mathrm{R}\to \mathrm{R}$ fonksiyonu I de diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a<b$ ($a,b\in I$) olmak üzere, eğer $q\ge 1$ için $|f'|^q$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\le\frac{b-a}{12}\left[|f'(a)|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+|f'(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

ve

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\le\frac{b-a}{24}\left[|f'(a)|^q+4\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+|f'(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

eğer $|f'|^q$ konkav ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\le\frac{b-a}{8}\left[\left|f'\left(\frac{5a+b}{6}\right)\right|+\left|f'\left(\frac{a+5b}{6}\right)\right|\right]$$

ve

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\le\frac{b-a}{8}\left[\left|f'\left(\frac{2a+b}{3}\right)\right|+\left|f'\left(\frac{a+2b}{3}\right)\right|\right]$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Şimdi aşağıdaki tanımı vererek $\varphi - konveks$ fonksiyonlar için H-H tipindeki eşitsizlikleri verelim.

Tanım 3.1.1. Her $x, y \in [a,b]$ ve $t \in [0,1]$ için $f : [a,b] \to R$ fonksiyonu

$$f(t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)) \leq tf(\varphi(x)) + (1-t)f(\varphi(y))$$

eşitsizliğini sağlıyorsa $[a,b]$ üzerinde $\varphi - konveks$ fonksiyondur. Eğer eşitsizliğin tersi geçerliyse bu durumda f fonksiyonuna $\varphi - konkav$ fonksiyon denir (Youness 1999).

φ-konveks fonksiyonlar için H-H tipli integral eşitsizliklerle ilgili lemma ve teoremleri verelim (Cristescu 2004).

Lemma 3.1.2. $f : [a,b] \to R$ için aşağdaki ifadeler eşdeğerdir:

i. f , $[a,b]$ üzerinde $\varphi -$ konveks fonksiyondur.

ii. Her $x, y \in [a,b]$ için $g : [0,1] \to R,\ g(t) = f(t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y))$ dönüşümü $[0,1]$ üzerinde klasik anlamda konvekstir.

İspat: $x, y \in [a,b]$ ve $t_1, t_2 \in [0,1]$, $\lambda \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} g(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) &= f([\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2]\varphi(x) + [1 - \lambda t_1 - (1-\lambda)t_2]\varphi(y)) \\ &= f(\lambda[t_1\varphi(x) + (1-t_1)\varphi(y)] + (1-\lambda)[t_2\varphi(x) + (1-t_2)\varphi(y)]) \\ &\leq \lambda f(t_1\varphi(x) + (1-t_1)\varphi(y)) + (1-\lambda)f(t_2\varphi(x) + (1-t_2)\varphi(y)) \\ &= \lambda g(t_1) + (1-\lambda)g(t_2) \end{aligned}$$

olduğundan g fonksiyonu konvekstir. Tersine g fonksiyonunun dışbükey olduğunu varsayarak, $x, y \in [a,b]$, $\lambda \in [0,1]$, $t_1 = 1$ ve $t_2 = 0$ için

$$f(\lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y)) = g(\lambda 1 + (1-\lambda)0) \leq \lambda g(1) + (1-\lambda)g(0) = \lambda f(\varphi(x)) + (1-\lambda)f(\varphi(y))$$

olduğundan f , $\varphi - konveks$ fonksiyondur.

Teorem 3.1.6. $\varphi:[a,b]\to[a,b]$ sürekli fonksiyonu için $f:[a,b]\to R$, $[a,b]$ üzerinde $\varphi-konveks$ fonksiyon ise

$$f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)\leq \frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx \leq \frac{f(\varphi(a))+f((\varphi(b))}{2} \qquad (3.1)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: $f:[a,b]\to R$, $[a,b]$ üzerinde $\varphi-konveks$ fonksiyon olduğundan

$$f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)= f\left(\frac{t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)}{2}+\frac{(1-t)\varphi(a)+t\varphi(b)}{2}\right)$$
$$\leq \tfrac{1}{2}\, f(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b))+\tfrac{1}{2}\, f((1-t)\varphi(a)+t\varphi(b))$$

yazılır. Lemma 3.1.2. den ve önceki eşitsizligin $[0,1]$ aralığında integrali alınırsa,

$$f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)\leq \tfrac{1}{2}\int_0^1 f(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b))dt+\tfrac{1}{2}\int_0^1 f((1-t)\varphi(a)+t\varphi(b)dt$$

elde edilir. Buradan da

$$x=t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)) \quad \text{ve} \quad x=(1-t)\varphi(a)+t\varphi(b))$$

değişken değiştirme kullanılarak,

$$f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)\leq \frac{1}{2\,[\varphi(a)-\varphi(b)]}\int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(x)dx+\frac{1}{2\,[\varphi(b)-\varphi(a)]}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$$
$$=\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\varphi/a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$$

elde edilir. Eşitsizliğin ikinci kısmını kanıtlamak için, $f\,'\,nin$, $\varphi-konveks$ fonksiyon olduğu kullanılarak

$$f(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b))\leq tf(\varphi(a))+(1-t)\,f(\varphi(b)) \qquad (t\in[0,1])$$

elde edilir. Lemma 3.1.2. den son eşitsizliğin her iki tarafının $[0,1]$ aralığında integrali alınırsa,

$$\int_0^1 f(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b))dt \leq f(\varphi(a))\int_0^1 tdt + f(\varphi(b))\int_0^1 (1-t)dt$$

yazılır. Dolayısıyla bu eşitsizlikte değişken değiştirilirse,

$$\frac{1}{\varphi(a)-\varphi(b)}\int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(x)dx \leq \tfrac{1}{2} f(\varphi(a)) + \tfrac{1}{2} f(\varphi(b))$$

(3.1) eşitsizliğinin ikinci kısmı bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.1.7. $\varphi : [a,b] \to [a,b]$, $[a,b]$ üzerinde azalan olmayan fonksiyon için $f, g : [a,b] \to R$ reel değerli negatif olmayan $\varphi - konveks$ fonksiyonlar olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)g(x)dx \leq \tfrac{1}{3} M(a,b) + \tfrac{1}{6} N(a,b) \tag{3.2}$$

$$2f\left(\tfrac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)g\left(\tfrac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right) \leq \frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)g(x)dx + \tfrac{1}{6} M(a,b) + \tfrac{1}{3} N(a,b) \tag{3.3}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Burada

$$M(a,b) = f(\varphi(a))g(\varphi(a)) + f(\varphi(b))g(\varphi(b))$$
$$N(a,b) = f(\varphi(a))g(\varphi(b)) + f(\varphi(b))g(\varphi(a))$$

dır.

İspat: (3.2) eşitsizliğini kanıtlamak için f ve g nin $[a,b]$ üzerinde $\varphi - konveks$fonksiyon olduğunu varsayalım , $t \in [0,1]$ için

$$f(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)) \leq tf(\varphi(a))+(1-t)f(\varphi(b)), \tag{3.4}$$
$$g(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)) \leq tg(\varphi(a))+(1-t)g(\varphi(b)) \tag{3.5}$$

yazılır. Dolayısıyla (3.4) ve (3.5) eşitsizliklerinin çarpımından

$$\begin{aligned} &f(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b))g(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)) \\ &\leq t^2 f(\varphi(a))g(\varphi(a)) + (1-t)^2 f(\varphi(b))g(\varphi(b)) \\ &+ t(1-t)[f(\varphi(a))g(\varphi(b)) + f(\varphi(b))g(\varphi(a))] \end{aligned} \tag{3.6}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

$$\alpha : [a,b] \to R,\ \alpha(t) = f(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b))$$

ve

$$\beta:[a,b]\to R,\ \beta(t)=g(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b))$$

fonksiyonları ile birlikte Lemma 3.1.2. den $[0,1]$ aralığında konvekstir. Sonuç olarak bu fonksiyonlar $[0,1]$ üzerinde integrallenebilirler. Ayrıca f *ve* g nin $[a,b]$ üzerinde $\varphi-konveks$ olması ve verilen özellikleri altında bu fonksiyonlar integrallenebilir ve bu yüzden fg integrallenebilirdir. Böylece (3.6) eşitsizliğinin iki tarafının $[0,1]$ üzerinde integralini almak mümkündür. Dolayısıyla

$$\int_0^1 f(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b))g(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b))dt$$

$$\le f(\varphi(a))g(\varphi(a))\int_0^1 t^2dt+f(\varphi(b))g(\varphi(b))\int_0^1 (1-t)^2dt$$

$$+[f(\varphi(a))g(\varphi(b))+f(\varphi(b))g(\varphi(a))]\int_0^1 t(1-t)dt$$

elde edilir. Burada değişken değiştirmeyle,

$$t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)=x \quad (\varphi(a),\varphi(b)$$

$$t(\varphi(a)-\varphi(b))=x-\varphi(b),$$

$$\frac{1}{\varphi(a)-\varphi(b)}\int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(x)g(x)dx+\tfrac{1}{3}M(a,b)+\tfrac{1}{6}N(a,b)$$

(3.2) eşitsizliği elde edilir.

(3.3) eşitsizliği kanıtlamak için f ve g nin $[a,b]$ üzerinde $\varphi-konveks$ fonksiyon olduğunu varsayalım, $t\in[0,1]$ için

$$f\left(\tfrac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)g\left(\tfrac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)$$

$$= f\left(\frac{t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)}{2}+\frac{(1-t)\varphi(a)+t\varphi(b)}{2}\right)g\left(\frac{t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)}{2}+\frac{(1-t)\varphi(a)+t\varphi(b)}{2}\right)$$

$$\le\tfrac{1}{4}[f(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b))+f((1-t)\varphi(a)+t\varphi(b))][g(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b))+g((1-t)\varphi(a)+t\varphi(b))].$$

φ nin konvekslik özelliğinden

$$f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)g\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)$$

$$\le \tfrac{1}{4}[f(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b))g(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b))$$

$$+ f((1-t)\varphi(a)+t\varphi(b))g((1-t)\varphi(a)+t\varphi(b))]$$

$$\le \tfrac{1}{4}\{2t(1-t)[f(\varphi(a))g(\varphi(a))+f(\varphi(b))g(\varphi(b))]$$

$$+[t^2+(1-t)^2][f(\varphi(a))g(\varphi(b))+f(\varphi(b))g(\varphi(a))]\}$$

yazılır. Şimdi, [0, 1] aralığında bu eşitsizliğin her iki tarafının integrali alınırsa

$$f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)g\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)$$

$$\le \tfrac{1}{4}\int_0^1 [f(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b))g(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b))+f((1-t)\varphi(a)+t\varphi(b))g((1-t)\varphi(a)+t\varphi(b))]dt$$

$$+\tfrac{1}{12}M(a,b)+\tfrac{1}{6}N(a,b)$$

$$=\tfrac{1}{2}\int_0^1 f(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b))g(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b))dt+\tfrac{1}{12}M(a,b)+\tfrac{1}{6}N(a,b)$$

Elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

3.2. GÜÇLÜ φ - KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN H-H TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER

Tanım 3.2.1. (**Güçlü φ-Konvex Fonksiyon**) $(X, \|.\|)$ reel normlu uzay olmak üzere X in bir konveks alt kümesi olan D kümesi üzerinde $\varphi: D \to D$ verilen fonksiyon için $\forall\ x, y \in D$ ve $t \in [0,1]$ olmak üzere $c > 0$ ile

$$f(t\varphi(x)+(1-t)\varphi(y)) \le tf(\varphi(x))+(1-t)f(\varphi(y))-ct(1-t)\|\varphi(x)-\varphi(y)\|^2 \qquad (3.7)$$

eşitsizliğini sağlayan $f : D \to R$ fonksiyonu güçlü $\varphi-$konvekstir. Eğer $t=\tfrac{1}{2}$ ve $x, y \in D$ için

$$f\left(\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}\right) \le \frac{f(\varphi(x))+f(\varphi(y))}{2}-\frac{c}{4}\|\varphi(x))+\varphi(y)\|^2$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonuna güçlü φ-midkonvex fonksiyon denir. $c=0$ durumunda φ- konveks özelliği sağlanır (Sarıkaya 2013).

Normlu uzayda tanımlı güçlü φ - konveks fonksiyonlar için H-H tipli integral eşitsizlikler için lemma ve teoremleri verelim (Sarıkaya 2013).

Lemma 3.2.1. $(X, \|.\|)$ gerçek bir iç çarpm uzayı, D , X in konveks bir alt kümesi olmak üzere ve c pozitif bir sabit, $\varphi :\ D \to D$ fonksiyon olsun. Bu durumda

i. $f\ :\ D \to R$ fonksiyonu güçlü $\varphi -$konveks fonksiyonudur ancak ve ancak $g = f - c\|.\|^2$ fonksiyonu $\varphi -$konveks fonksiyondur

ii. $f\ :\ D \to R$ fonksiyonu güçlü $\varphi -$midkonveks fonksiyonudur ancak ve ancak $g = f - c\|.\|^2$ fonksiyonu $\varphi -$midkonveks fonksiyondur

İspat i. f fonksiyonunun güçlü $\varphi -$konveks fonksiyon olduğunu varsayalım. İç çarpm özelliklerini kullanarak,

$$g(t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y))$$
$$= f(t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)) - c\|t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)\|^2$$
$$\leq tf(\varphi(x)) + (1-t)f(\varphi(y)) - ct(1-t)\|\varphi(x) - \varphi(y)\|^2 - c\|t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)\|^2$$
$$\leq tf(\varphi(x)) + (1-t)f(\varphi(y)) -$$
$$c\Big(t(1-t)\big[\|\varphi(x)\|^2 - 2\langle\varphi(x)|\varphi(y)\rangle + \|\varphi(y)\|^2\big] + \big[t^2\|\varphi(x)\|^2 + 2t(1-t)\langle\varphi(x)|\varphi(y)\rangle + (1-t)^2\|\varphi(y)\|^2\big]\Big)$$
$$= tf(\varphi(x)) + (1-t)f(\varphi(y)) - ct\|\varphi(x)\|^2 - c(1-t)\|\varphi(y)\|^2$$
$$= tg(\varphi(x)) + (1-t)g(\varphi(y))$$

elde edilir. Bu da g nin $\varphi -$konveks fonksiyonu olduğunu verir. Tersine g nin $\varphi -$konveks fonksiyonu olduğunu kabul edelim, bu durumda

$$f(t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y))$$
$$= g(t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)) + c\|t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)\|^2$$
$$\leq tg(\varphi(x)) + (1-t)g(\varphi(y)) + c\|t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)\|^2$$
$$= t\left\{g(\varphi(x)) + c\|\varphi(x)\|^2\right\} + (1-t)\left\{g(\varphi(y)) + c\|\varphi(y)\|^2\right\} - ct(1-t)\left\{\|\varphi(x)\|^2 - 2\langle\varphi(x)|\varphi(y)\rangle + \|\varphi(y)\|^2\right\}$$
$$= tf(\varphi(x)) + (1-t)f(\varphi(y)) - ct(1-t)\|\varphi(x) - \varphi(y)\|^2$$

elde edilir. Bu da f fonksiyonunun güçlü $\varphi-$konveks fonksiyon olduğu anlamına gelir.

ii. f fonksiyonunun güçlü $\varphi-$midkonveks fonksiyon olduğunu varsayalm. Dolayısıyla,

$$g\left(\tfrac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}\right)= f\left(\tfrac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}\right)- c\left\|\tfrac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}\right\|^2$$

$$\leq \frac{f(\varphi(x))+f(\varphi(y))}{2}-\frac{c}{4}\|\varphi(x)-\varphi(y)\|^2-\frac{c}{4}\|\varphi(x)+\varphi(y)\|^2$$

$$\leq \frac{f(\varphi(x))+f(\varphi(y))}{2}-\frac{c}{4}(2\|\varphi(x)\|^2+2\|\varphi(y)\|^2$$

$$=\frac{g(\varphi(x))+g(\varphi(y))}{2}$$

bulunur. Buradan da g nin $\varphi-$midkonveks fonksiyon olduğunu anlaşılır.Tersine g nin φ-konveks fonksiyonu olduğunu kabul edelim, o halde

$$f\left(\tfrac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}\right)= g\left(\tfrac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}\right)+ c\left\|\tfrac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}\right\|^2$$

$$\leq \frac{g(\varphi(x))+g(\varphi(y))}{2}+\frac{c}{4}\|\varphi(x)+\varphi(y)\|^2$$

$$=\frac{g(\varphi(x))+\|\varphi(x)\|^2}{2}+\frac{g(\varphi(y))+\|\varphi(y)\|^2}{2}$$

$$+\frac{c}{4}(\|\varphi(x)+\varphi(y)\|^2-2\|\varphi(x)\|^2-2\|\varphi(y)\|^2)$$

$$\leq \frac{f(\varphi(x))+f(\varphi(y))}{2}-\frac{c}{4}\|\varphi(x)-\varphi(y)\|^2$$

olur ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.1. $(X,\ \|.\|)$ reel normlu uzay olsun, D , X in bir konveks alt kümesi olmak üzere $\varphi : D\to D$ için aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir

i. $(X,\ \|.\|)$ reel iç çarpım uzayıdır.

ii. Her $c>0$ için D , X in bir konveks alt kümesi üzerinde tanımlanan $f : D\to R$ bir fonksiyon olmak üzere $g=f+c\|.\|^2$ güçlü $\varphi-$konveks fonksiyondur.

iii. $c=1$ için $\|.\|^2 : X \to R$ fonksiyonu güçlü $\varphi-$konveks fonksiyondur

İspat: Lemma 3.1.2. ifade edilen i.$\Rightarrow$ii. yi sağlar. ii.$\Rightarrow$iii. olduğunu görmek için $g=0$ alınır. Açıkca g, $\varphi-$konveks fonksiyondur. Bu yüzden c ye bağlı $f=c\|.\|^2$ güçlü $\varphi-$konveks fonksiyon olur. Sonuç olarak $\|.\|^2$, $c=1$ ile güçlü $\varphi-$konveks olur. iii.$\Rightarrow$i. yi ispatlamak için $\|.\|^2$ nin güçlü $\varphi-$konveksliği ile

$$\left\|\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}\right\|^2 \leq \frac{\|\varphi(x)\|^2}{2}+\frac{\|\varphi(y)\|^2}{2}-\frac{1}{4}\|\varphi(x)-\varphi(y)\|^2$$

elde ederiz. Bu yüzden $\forall x,y\in X$ için

$$\|\varphi(x)+\varphi(y)\|^2+\|\varphi(x)-\varphi(y)\|^2 \leq 2\|\varphi(x)\|^2+2\|\varphi(y)\|^2 \tag{3.8}$$

olur.

Şimdi (3.9) da $u=\varphi(x)+\varphi(y)$ ve $v=\varphi(x)-\varphi(y)$ seçersek $\forall u,v\in X$ için

$$2\|u\|^2+2\|v\|^2 \leq \|u+v\|^2+\|u-v\|^2 \tag{3.9}$$

elde ederiz.

(3.8) ve (3.9) şartlarının anlamı; $\|.\|^2$ normunun klasik Jordan – Von Neumann teoremi ile ifade edilen paralelkenar özelliğini sağlaması demektir, öyleki ($X,\|.\|$) bir iç çarpım uzayıdır. Bu da ispatı tamamlar. Şimdi $c>0$ ile güçlü $\varphi-$konveks fonksiyonlar için yeni bir Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizliğini vereceğiz.

Teorem 3.2.2. $\varphi:[a,b]\to[a,b]$ sürekli fonksiyonu için $f:[a,b]\to R$ $c>0$ a göre güçlü $\varphi-$konveks fonksiyon ise

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)+\frac{c}{12}\left(\varphi(a)-\varphi(b)\right)^2 \leq \frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx \\ & \leq \frac{f(\varphi(a))+f(\varphi(b))}{2}-\frac{c}{6}(\varphi(a)-\varphi(b))^2 \end{aligned} \tag{3.10}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: f nin güçlü $\varphi-$konveks fonksiyon olmasından

$$f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)=f\left(\frac{t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)}{2}+\frac{(1-t)\varphi(a)+t\varphi(b)}{2}\right)$$

$$\leq\frac{1}{2}f(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b))+\frac{1}{2}f((1-t)\varphi(a)+t\varphi(b))-\frac{c}{4}(1-2t)^2(\varphi(a)-\varphi(b))^2$$

Lemma 3.1.2. dikkate alınarak son eşitsizlikte $[0,1]$ aralığında her iki tarafının integrali alınırsa,

$$f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)+\frac{c}{12}(\varphi(a)-\varphi(b))^2$$
$$\leq\frac{1}{2}\int_0^1 f(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b))\,dt+\frac{1}{2}\int_0^1 f((1-t)\varphi(a)+t\varphi(b))\,dt$$

yazılır.Burada

$$x=t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)$$
$$x=(1-t)\varphi(a)+t\varphi(b)$$

değişken değiştirmeleriyle

$$f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)+\frac{c}{12}(\varphi(a)-\varphi(b))^2$$
$$\leq\frac{1}{2(\varphi(a)-\varphi(b))}\int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(x)\,dx+\frac{1}{2(\varphi(b)-\varphi(a))}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx$$
$$=\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx$$

eşitsizliğin 2. kısmını ispatlamak için $\forall\ t\in[0,1]$ olmak üzere f nin güçlü φ - konveksliğinden başlayarak,

$$f(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b))\leq tf(\varphi(a))+(1-t)f(\varphi(b))-ct(1-t)(\varphi(a)-\varphi(b))^2$$

Lemma 3.1.2. yardımıyla, $[0,1]$ aralığında bu eşitsizliğin her iki tarafının integralini alırsak,

$$\int_0^1 f(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b))\,dt\leq f(\varphi(a))\int_0^1 t\,dt+f(\varphi(b))\int_0^1(1-t)\,dt-c(\varphi(a)-\varphi(b))^2\int_0^1 t(1-t)\,dt$$

elde ederiz. Bu eşitsizliğin birinci tarafında $x=t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)$ değişken değişimini yaparsak,

$$\frac{1}{(\varphi(a)-\varphi(b))}\int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(x)\,dx \le \frac{f(\varphi(a))}{2}+\frac{f(\varphi(b))}{2}-\frac{c}{6}(\varphi(a)-\varphi(b))^2$$

(3.10) elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.3. $\varphi:[a,b]\to[a,b]$ sürekli fonksiyon ve $c>0$ ile $f:[a,b]\to R$ güçlü $\varphi-$konveks fonksiyon ise

$$\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, f(a+b-x)\,dx$$

$$\le \frac{\left[f^2(\varphi(x))+f^2(\varphi(y))\right]}{6}+\frac{2f(\varphi(x))\,f(\varphi(y))}{3} \tag{3.11}$$
$$-\frac{c}{6}(\varphi(x)-\varphi(y))^2\left[f(\varphi(x))+f(\varphi(y))\right]-\frac{c^2}{30}(\varphi(x)-\varphi(y))^4$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: f nin $c>0$ ile güçlü $\varphi-$konveks fonksiyon olması ve $t\in[0,1]$ için

$$f(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b))\le t\varphi(a))+(1-t)f(\varphi(b))-ct(1-t)(\varphi(a)-\varphi(b))^2 \tag{3.12}$$

$$f((1-t)\varphi(a)+t\varphi(b))\le(1-t)f(\varphi(a))+tf(\varphi(b))-ct(1-t)(\varphi(a)-\varphi(b))^2 \tag{3.13}$$

eşitsizliklerinin çarpımından

$$\begin{aligned} &f(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b))\, f(1-t)\varphi(a)+t\varphi(b)) \\ &\le t(1-t)\left[f^2(\varphi(a))+f^2(\varphi(b))\right]+(t^2+(1-t)^2)\, f(\varphi(a))\, f(\varphi(b)) \\ &-ct(1-t)(\varphi(a)-\varphi(b))^2\left[f(\varphi(a))+f(\varphi(b))\right]+c^2t^2(1-t)^2(\varphi(a)-\varphi(b))^4 \end{aligned} \tag{3.14}$$

elde edilir. $[0,1]$ aralığında (3.14) eşitsizliğinin her iki tarafının integralini alırsak,

$$\int_0^1 f(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b))\, f((1-t)\varphi(a)+t\varphi(b))\,dt$$

$$\le \left[f^2(\varphi(a))+f^2(\varphi(b))\right]\int_0^1 t(1-t)dt + f(\varphi(a))f(\varphi(b))\int_0^1 t^2+(1-t)^2)\,dt$$

$$-c(\varphi(a)-\varphi(b))^2\left[f(\varphi(a))+f(\varphi(b))\right]\int_0^1 t(1-t)\,dt - c^2(\varphi(a)-\varphi(b))^4\int_0^1 t^2(1-t)^2\,dt$$

$$=\frac{\left[f^2(\varphi(a))+f^2(\varphi(b))\right]}{6}+\frac{2f(\varphi(a))\,f(\varphi(b))}{3}$$

$$-\frac{c}{6}(\varphi(a)-\varphi(b))^2\left[f(\varphi(a))+f(\varphi(b))\right]-\frac{c^2}{30}(\varphi(a)-\varphi(b))^4.$$

bulunur. Burada $t\in[0,1]$ ve $x=t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)$ değişken değiştirmesiyle (3.11) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.2.4. $\varphi:[a,b]\to[a,b]$ sürekli fonksiyon ve $f,g:[a,b]\to R$ $c>0$ ile güçlü $\varphi-$konveks fonksiyon ise

$$\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,g(x)dx$$

$$\le \frac{M(a,b)}{3}+\frac{N(a,b)}{6}-\frac{c}{12}(\varphi(a)-\varphi(b))^2\,S(a,b)+\frac{c^2}{30}(\varphi(a)-\varphi(b))^4 \tag{3.15}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$M(a,b)=f(\varphi(a))\,g(\varphi(a))+f(\varphi(b))\,g(\varphi(b))$$
$$N(a,b)=f(\varphi(a))g(\varphi(b))+f(\varphi(b))g(\varphi(a))$$
$$S(a,b)=f(\varphi(a))+f(\varphi(b))+g(\varphi(a))+g(\varphi(b))$$

dır.

İspat: $f,g:[a,b]\to R$, $c>0$ ile güçlü $\varphi-$konveks fonksiyon ve $t\in[0,1]$ için

$$f(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b))\le tf(\varphi(a))+(1-t)f(\varphi(b))-ct(1-t)(\varphi(a)-\varphi(b))^2 \tag{3.16}$$
$$g(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b))\le tg(\varphi(a))+(1-t)g(\varphi(b))-ct(1-t)(\varphi(a)-\varphi(b))^2 \tag{3.17}$$

eşitsizliklerinin çarpımından

$$f\,(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b))\;g\,(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b))$$

$$\leq t^2 f\,(\varphi(a))g(\varphi(a))+(1-t)^2\;f\,(\varphi(b))\;f(\varphi(b))$$

$$+t(1-t)\left[f(\varphi(a))g(\varphi(b))+f(\varphi(b))g(\varphi(a))\right]$$

$$-ct^2\,(1-t)\,(\varphi(a)-\varphi(b))^2\left[f\,(\varphi(a))+g(\varphi(a))\right]$$

$$-ct\quad(1-t)^2\,(\varphi(a)-\varphi(b))^2\left[f(\varphi(b))+g(\varphi(b))\right]$$

$$+c^2t^2(1-t)^2\,(\varphi(a)-\varphi(b))^4.$$

elde edilir. Lemma 3.1.2. yardımıyla $[0,1]$ aralığında bu eşitsizliğin her iki tarafının integralinin alınmasıyla

$$\int_0^1 f(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b))g(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b))\,dt$$

$$\leq f\,(\varphi(a))g(\varphi(a))\int_0^1 t^2dt+f\,(\varphi(b))\,f(\varphi(b))\int_0^1(1-t)^2\,dt$$

$$+\left[f(\varphi(a))g(\varphi(b))+f(\varphi(b))g(\varphi(a))\right]\int_0^1 t(1-t)\,dt$$

$$-c\,(\varphi(a)-\varphi(b))^2\left[f(\varphi(a))+g(\varphi(a))\right]\int_0^1 t^2(1-t)\,dt$$

$$-c\,(\varphi(a)-\varphi(b))^2\left[f(\varphi(b))+g(\varphi(b))\right]\int_0^1 t\,(1-t)^2\,dt$$

$$+c^2\,(\varphi(a)-\varphi(b))^4\int_0^1 t^2\,(1-t)^2dt$$

bulunur. Buradan da $x=t\varphi(a)+(1-t)\,\varphi(b)$ değişken değiştirmesiyle (3.15) eşitsizliği elde edilir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde güçlü $\varphi_h -$konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipinde integral eşitsizlikleri oluşturulmuştur

4.1. GÜÇLÜ $\varphi_h -$KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN H-H TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER

Tanım 4.1.1. (Güçlü $\varphi_h -$Konveks Fonksiyon): $x, y \in D$ ve her ve $t \in (0,1)$ olmak üzere $c > 0$ ile

$$f(t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)) \le h(t)\, f(\varphi(x)) + h(1-t)\, f(\varphi(y)) - ct(1-t)(\varphi(x) - \varphi(y))^2$$

eşitsizliğini sağlayan $f : D \to [0,\infty)$ fonksiyonuna güçlü $\varphi_h -$konveks fonksiyon denir (Sarıkaya 2013).

Lemma 4.1.1. $a,\ b \in I \subset R,\quad a < b,\quad \varphi : [a,b] \to [a,b]$ fonksiyon, $f : I \subset \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ I^0 (I nın içi) de diferansiyellenebilir dönüşümü Lebesgue anlamında integrallenebilir olsun. Bu durumda,

$$\frac{f(\varphi(a)) + f(\varphi(b))}{2} - \frac{1}{\varphi(b) - \varphi(a)} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, dx \tag{4.1}$$

$$= \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{2} \int_0^1 (2t - 1)\left[f'(t\varphi(b) + (1-t)\varphi(a)) + ct(1-t)(\varphi(b) - \varphi(a))^2 \right] dt$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Kısmi integral yardımıyla,

$$I=\int_0^1 (2t-1)\left[f'(t\varphi(b)+(1-t)\varphi(a))+ct(1-t)(\varphi(b)-\varphi(a))^2\right]dt$$

$$+\int_0^1 c(2t-1)(t)(1-t)(\varphi(b)-\varphi(a))^2\,dt$$

$$=(2t-1)\frac{f(t\varphi(b)+(1-t)\varphi(a))}{\varphi(b)-\varphi(a)}\Big|_0^1-\frac{2}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_0^1 f(t\varphi(b)+(1-t)\varphi(a))dt$$

$$=\frac{f(\varphi(b))+f(\varphi(a))}{\varphi(b)-\varphi(a)}-\frac{2}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_0^1 f(t\varphi(b)+(1-t)\varphi(a))dt$$

bulunur. Buradan da son integralde $x=t\varphi(b)+(1-t)\varphi(a)$, $t\in[0,1]$ değişken değişimi yapılırsa

$$I=\frac{f(\varphi(b))+f(\varphi(a))}{\varphi(b)-\varphi(a)}-\frac{2}{(\varphi(b)-\varphi(a))^2}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx \tag{4.2}$$

elde edilir. Böylece, her iki tarafı $\dfrac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2}$ ile çarparsak

$$\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2}I=\frac{f(\varphi(b))+f(\varphi(a))}{2}-\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$$

elde edilir.

Teorem 4.1.1. $h:(0,1)\to(0,\infty)$, $a,b\in I\subset R,\quad a<b,\quad \varphi:[a,b]\to[a,b]$ sürekli bir fonksiyon ve $\varphi(a)<\varphi(b)$ olsun. $f:I\subset \mathrm{R}\to\mathrm{R}$, I^0 (I nın içi) de diferansiyellenebilir ve Lebesgue anlamında integrallenebilir olsun. Eğer $\forall\ t\in(0,1)$ için $|f'|$, $c>0$ ' a göre güçlü -φ_h −konveks fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizliği sağlar.

$$\left|\frac{f(\varphi(a))+f(\varphi(b))}{2}-\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx\right|$$

$$\leq\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2}\left[|f'(\varphi(b)|+|f'(\varphi(a))|\right]\int_0^1|2t-1|h(t)dt. \tag{4.3}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Lemma 4.1.1. den ve $|f'|$, $c>0$ a göre güçlü φ_h −konveks fonksiyon olduğundan,

$$\left| \frac{f(\varphi(a))+f(\varphi(b))}{2} - \frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx \right|$$

$$\le \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2} \int_0^1 |2t-1| \left[\left| f'(t\varphi(b)+(1-t)\varphi(a)) \right| + ct(1-t)(\varphi(b)-\varphi(a))^2 \right] dt$$

$$\le \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2} \int_0^1 |2t-1| \left[h(t) \left| f'(\varphi(b)) \right| + h(1-t) \left| f'(\varphi(a)) \right| \right] dt$$

$$= \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2} \left[\left| f'(\varphi(b)) \right| + \left| f'(\varphi(a)) \right| \right] \int_0^1 |2t-1| h(t) dt.$$

elde edilir. Burada

$$\int_0^1 h(t)dt = \int_0^1 h(1-t)dt$$

dır.

Teoremi kullanarak, güçlü φ −konveks, güçlü φ_s −konveks, güçlü $\varphi - P$ −konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı ile ilgili sırasıyla aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.1.1. Teorem 4.1.1. varsayımları altında, $h(t)=t,\ t\in(0,1)$ olarak alırsak,

$$\left| \frac{f(\varphi(a))+f(\varphi(b))}{2} - \frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx \right| \le (\varphi(b)-\varphi(a)) \left(\frac{|f'(\varphi(b))|+|f'(\varphi(a))|}{8} \right) \tag{4.4}$$

elde edilir.

Sonuç 4.1.2. Teorem 4.1.1. varsayımları altında, $h(t)=t^s$, $s\in(0,1)$, $t\in(0,1)$ olarak alırsak,

$$\left|\frac{f(\varphi(a))+f(\varphi(b))}{2}-\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx\right| \qquad (4.5)$$
$$\leq \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2}\left(s+\frac{1}{2^s}\right)\left(\frac{|f'(\varphi(b))|+|f'(\varphi(a))|}{(s+1)(s+2)}\right)$$

elde edilir.

Sonuç 4.1.3. Teorem 4.1.1. varsayımları altında, $h(t)=1$, $t\in(0,1)$ olarak alırsak,

$$\left|\frac{f(\varphi(a))+f(\varphi(b))}{2}-\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx\right|\leq\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2}\left(\frac{|f'(\varphi(b))|+|f'(\varphi(a))|}{2}\right) \qquad (4.6)$$

elde ederiz.

Not 4.1.1. $\forall\ x\in[a,b]$ için $\varphi(x)=x$ alır ve $c\to 0$ limit durumunda (4.4) eşitsizliği Dragomir ve Agarwal' ın Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı ile ilgili olan

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\leq(b-a)\left(\frac{|f'(b)|+|f'(a)|}{8}\right)$$

eşitsizliği ile eşdeğerdir.

Not 4.1.2. $\forall\ x\in[a,b]$ için $\varphi(x)=x$ alır ve $c\to 0$ limit durumunda (4.5) eşitsizliği Kirmaci ve arkadaşlarının Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı ile ilgili olan eşitsizliğini verir,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\leq\frac{b-a}{2}\left(s+\frac{1}{2^s}\right)\left(\frac{|f'(b)|+|f'(a)|}{(s+1)(s+2)}\right).$$

Teorem 4.1.2. $h:(0,1)\to(0,\infty)$, $a,b\in I\subset R$, $a<b$, $\varphi:[a,b]\to[a,b]$ sürekli bir fonksiyon ve $\varphi(a)<\varphi(b)$ olsun. $f: I\subset \mathrm{R}\to\mathrm{R}$, I^0 (I nın içi) de diferansiyellenebilir ve Lebesgue anlamında integrallenebilir olsun, eğer $|f'|^q$, $c>0$ a gore güçlü φ_h-konveks fonksiyon ve $q>1$ ise

$$A=c^q(\varphi(b)-\varphi(a))^{2q}B(q+1,q+1)-\tfrac{c}{6}(\varphi(b)-\varphi(a))^2>0$$

ve $\forall t\in(0,1)$ için

$$\left|\frac{f(\varphi(a))+f(\varphi(b))}{2}-\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}f(x)dx\right|$$

$$\leq\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2^{\frac{1}{q}}}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(|f'(\varphi(b))|^q+|f'(\varphi(a))|^q\right)\left(\int_0^1 h(t)dt\right)+A\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada B Beta fonksiyonudur.

İspat: Lemma 4.1.1.' den ve Hölder integral eşitsizliğinden

$$\left|\frac{f(\varphi(a))+f(\varphi(b))}{2}-\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}f(x)dx\right|$$

$$\leq\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2}\left(\int_0^1|2t-1|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\times\left(\int_0^1\left[|f'(t\varphi(b)+(1-t)\varphi(a))|+ct(1-t)(\varphi(b)-\varphi(a))^2\right]^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir, $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde $c>0$ a göre güçlü φ_h-konveks olduğundan ve

$$(u+v)^q\leq 2^{q-1}(u^q+v^q),\ u,v>0,\ q>1$$

eşitsizliğini kullanarak,

$$\left|\frac{f(\varphi(a))+f(\varphi(b))}{2}-\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}f(x)dx\right|$$

$$\leq\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2^{\frac{1}{q}}}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(|f'(\varphi(b))|^q+|f'(\varphi(a))|^q\right)\left(\int_0^1 h(t)dt\right)\right.$$

$$\left.+c^q(\varphi(b)-\varphi(a))^{2q}B(q+1,q+1)-\frac{c}{6}(\varphi(b)-\varphi(a))^2\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde ederiz. Burada aşağıdaki eşitsizlikler kullanıldı

$$\int_0^1 |2t-1|^p \, dt = \frac{1}{p+1},$$

$$\int_0^1 t(1-t)dt = \frac{1}{6}, \quad \int_0^1 t^q (1-t)^q \, dt = B(q+1, q+1),$$

$$\int_0^1 h(t)dt = \int_0^1 h(1-t)dt.$$

bu ispatı tamamlar.

Hermite-Hadamardın sağ taraf ile ilgili sırasıyla güçlü $\varphi-$konveks, güçlü φ_s-konveks , güçlü $\varphi-P-$konveks sonuçlarını elde edilir.

Sonuç 4.1.4. Teorem 4.1.2. varsayımları altında $h(t)=t,\ t\in(0,1)$ olarak alınırsa,

$$\left| \frac{f(\varphi(a)) + f(\varphi(b))}{2} - \frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx \right|$$

$$\leq \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2^{\frac{1}{q}}} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|f'(\varphi(b))|^q + |f'(\varphi(a))|^q}{2} + A \right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.7}$$

elde edilir.

Sonuç 4.1.5. Teorem 4.1.2. varsayımları altında $h(t)=t^s$, $(s\in(0,1)),\ t\in(0,1)$ olarak alınırsa,

$$\left| \frac{f(\varphi(a)) + f(\varphi(b))}{2} - \frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx \right|$$

$$\leq \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2^{\frac{1}{q}}} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|f'(\varphi(b))|^q + |f'(\varphi(a))|^q}{s+1} + A \right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.8}$$

elde edilir.

Sonuç 4.1.6. Teorem 4.1.2. varsayımları altında $h(t)=1,\ t\in(0,1)$ olarak alınırsa,

$$\left|\frac{f(\varphi(a))+f(\varphi(b))}{2}-\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2^{\frac{1}{q}}}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left|f'(\varphi(b))\right|^{q}+\left|f'(\varphi(a))\right|^{q}+A\right)^{\frac{1}{q}}. \qquad (4.9)$$

elde edilir.

Not 4.1.3. $c\to 0$ limit durumunda (4.7.) (4.8) ve (4.9.) eşitsizlikleri sırasıyla φ-konveks, φ_s-konveks ve $\varphi-P-$konveks fonksiyon için Hermite-Hadamard tipli eşitsizliğin sağ tarafını üretir.

Lemma 4.1.2. $a,b\in I\subset R,\quad a<b,\quad \varphi : [a,b]\to[a,b]$ fonksiyon , $f\ :\ I\subset \mathrm{R}\to\mathrm{R}$ I^0 (I nın içi) de diferansiyellenebilir ve Lebesgue anlamında integrallenebilirse,

$$\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx - f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)$$

$$=(\varphi(b)-\varphi(a))\left\{\int_0^{\frac{1}{2}} t\left[f'(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b))+ct(1-t)(\varphi(b)-\varphi(a))^2\right]dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(t-1)\left[f'(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b))+ct(1-t)(\varphi(b)-\varphi(a))^2\right]dt\right\}$$

eşitliği elde edilir

ispat: Kısmi integrasyon yardımıyla

$$J_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} t\left[f'\left(t\varphi(a)+\left(1-t\right)\varphi(b)\right)+ct(1-t)(\varphi(b)-\varphi(a))^2\right]dt$$

$$= t\,\frac{f\left(t\varphi(a)+\left(1-t\right)\varphi(b)\right)}{\varphi(a)-\varphi(b)}\Big|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{1}{\varphi(a)-\varphi(b)}\int_0^{\frac{1}{2}} f\left(t\varphi(a)+\left(1-t\right)\varphi(b)\right)dt + c(\varphi(b)-\varphi(a))^2\int_0^{\frac{1}{2}} t^2(1-t)dt \qquad (4.10)$$

$$= \frac{1}{2(\varphi(a)-\varphi(b))}\, f\left(\frac{\varphi(b)+\varphi(a)}{2}\right)$$

$$+\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_0^{\frac{1}{2}} f\left(t\varphi(a)+\left(1-t\right)\varphi(b)\right)dt + \frac{5c}{3\times 2^6}(\varphi(b)-\varphi(a))^2$$

elde edilir ve buna benzer biçimde,

$$J_2 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(t-1\right)\left[f'\left(t\varphi(a)+\left(1-t\right)\varphi(b)\right)+ct(1-t)(\varphi(b)-\varphi(a))^2\right]dt$$

$$= \left(t-1\right)\frac{f\left(t\varphi(a)+\left(1-t\right)\varphi(b)\right)}{\varphi(a)-\varphi(b)}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$-\frac{1}{\varphi(a)-\varphi(b)}\int_{\frac{1}{2}}^{1} f\left(t\varphi(a)+\left(1-t\right)\varphi(b)\right)dt - c(\varphi(b)-\varphi(a))^2\int_{\frac{1}{2}}^{1} t(1-t)^2\,dt \qquad (4.11)$$

$$= \frac{1}{2(\varphi(a)-\varphi(b))}\, f\left(\frac{\varphi(b)+\varphi(a)}{2}\right)$$

$$+\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\frac{1}{2}}^{1} f\left(t\varphi(a)+\left(1-t\right)\varphi(b)\right)dt - \frac{5c}{3\times 2^6}(\varphi(b)-\varphi(a))^2.$$

elde edilir. (4.10) ve (4.11) toplanırsa

$$J = J_1 + J_2 = \frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_0^1 f\left(t\varphi(a)+\left(1-t\right)\varphi(b)\right)dt - \frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\, f\left(\frac{\varphi(b)+\varphi(a)}{2}\right) \qquad (4.12)$$

olur. Buradan da (4.12) eşitliği $x = t\varphi(a)+\left(1-t\right)\varphi(b)$, $t\in\left[0,1\right]$ değişken değiştirmesi ve $(\varphi(b)-\varphi(a))$ ile çarpılırsa

$$(\varphi(b)-\varphi(a))J=\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx - f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)$$

elde edilir.

Teorem 4.1.3. $h\ :\ (0,1)\rightarrow(0,\infty)$, $a,b\in I\subset R$, $a<b$, $\varphi\ :\ [a,b]\rightarrow[a,b]$ sürekli bir fonksiyon ve $\varphi(a)<\varphi(b)$ olsun. $f\ :\ I\subset \mathrm{R}\rightarrow \mathrm{R}$, I^0 (I nın içi) de diferansiyellenebilir ve Lebesgue anlamında integrallenebilir olsun. Eğer $|f'|$, $c>0$ a göre güçlü φ_h-konveks fonksiyonu ise $\forall\ t\in(0,1)$ için

$$\left|\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx - f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)\right|$$

$$(\varphi(b)-\varphi(a))\left(|f'(\varphi(a))|+|f'(\varphi(b))|\right)\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t\left[h(t)+h(1-t)\right]dt\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Lemma 4.1.2.' den ve $|f'|$, $c>0$ a göre güçlü φ_h-konveks fonksiyon olduğundan,

$$\left|\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx - f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)\right|$$

$$\leq (\varphi(b)-\varphi(a))\left\{\int_0^{\frac{1}{2}} t\left[h(t)|f'(\varphi(a))|+h(1-t)|f'(\varphi(b))|\right]dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)\left[h(t)|f'(\varphi(a))|+h(1-t)|f'(\varphi(b))|\right]dt\right\}$$

elde edilir. Burada

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t h(t) dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-t) h(1-t) dt$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t\,h(1-t)\,dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-t)\,h(t)\,dt$$

eşitliklerini kullanarak,

$$\left| \frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx - f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2} \right) \right|$$

$$\leq (\varphi(b)-\varphi(a))\left(|f'(\varphi(a))| + |f'(\varphi(b))| \right) \left(\int_0^{\frac{1}{2}} t\left[h(t)+h(1-t) \right] dt \right)$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Hermite-Hadamardın sol tarafı ile ilgili sırasıyla güçlü $\varphi-$konveks, güçlü φ_s-konveks, güçlü $\varphi-P-$konveks sonuçlarını $c>0$ ile elde ederiz.

Sonuç 4.1.7. Teorem 4.1.3. deki varsayımlar altında $h(t)=t,\ t\in(0,1)$ olarak alınırsa

$$\left| \frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx - f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2} \right) \right|$$

$$\leq (\varphi(b)-\varphi(a))\left(\frac{|f'(\varphi(a))| + |f'(\varphi(b))|}{8} \right) \tag{4.13}$$

elde edilir.

Sonuç 4.1.8. Teorem 4.1.3. deki varsayımlar altında $h(t)=t^s \quad (s\in(0,1)),\ t\in(0,1)$ olarak alınırsa,

$$\left| \frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx - f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2} \right) \right|$$

$$\leq (\varphi(b)-\varphi(a))\left(1+\frac{s+2}{2^{s+3}} \right)\left(\frac{|f'(\varphi(a))| + |f'(\varphi(b))|}{(s+2)(s+3)} \right). \tag{4.14}$$

elde edilir.

Sonuç 4.1.9. Teorem 4.1.3. deki varsayımlar altında $h(t)=1,\ t\in(0,1)$ olarak alınırsa,

$$\left|\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx - f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)\right|$$

$$\leq (\varphi(b)-\varphi(a))\left(\frac{|f'(\varphi(a))|+|f'(\varphi(b))|}{4}\right). \tag{4.15}$$

elde edilir.

Not 4.1.4. $\forall\ x\in[a,b]$ için $\varphi(x)=x$ alır ve $c\to 0$ limit durumunda (4.13) eşitsizliği Kırmacı' nin Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sol tarafı ile ilgili olan eşitsizliği verir.

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq (b-a)\left(\frac{|f'(a)|+|f'(b)|}{8}\right).$$

Not 4.1.5. $\forall\ x\in[a,b]$ için $\varphi(x)=x$ alır $c\to 0$ limit durumunda (4.14) eşitsizliğinden

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq (b-a)\left(1-\frac{s+3}{2^{s+2}}\right)\left(\frac{|f'(a)|+|f'(b)|}{(s+1)(s+2)}\right).$$

elde ettik.

Teorem 4.1.4. $h\ :\ (0,1)\to(0,\infty)$, $a,b\in I\subset R$, $a<b$, $\varphi\ :\ [a,b]\to[a,b]$ sürekli bir fonksiyon ve $\varphi(a)<\varphi(b)$ olsun. $f\ :\ I\subset \mathrm{R}\to\mathrm{R}$, I^0 (I nın içi) de dif eransiyellenebilir ve Lebesgue anlamında integrallenebilir olsun. Eğer, $|f'|^q$, $c>0$ a göre güçlü φ_h −konveks fonksiyon ise $q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $B_r(.,.)$ tam olmayan beta fonksiyonu

$$G=c(\varphi(b)-\varphi(a))^{2q}B_{\frac{1}{2}}(q+1,q+1)-\frac{c}{12}(\varphi(b)-\varphi(a))^2>0 \text{ ve } \forall\ t\in(0,1) \text{ için,}$$

$$\left|\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx - f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2^{\frac{1}{q}}}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left(h(t)\left|f'(\varphi(a))\right|^q + h(1-t)\left|f'(\varphi(b))\right|^q\right)dt + G\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(h(t)\left|f'(\varphi(a))\right|^q + h(1-t)\left|f'(\varphi(b))\right|^q\right)dt + G\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Lemma 4.1.2.' den ve Hölder integral eşitsizliğinden

$$\left|\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx - f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)\right|$$

$$\leq (\varphi(b)-\varphi(a))$$

$$\times\left\{\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\left|f'(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b))\right| + ct(1-t)(\varphi(b)-\varphi(a))^2\right]^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}(t-1)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left[\left|f'(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b))\right| + ct(1-t)(\varphi(b)-\varphi(a))^2\right]^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}.$$

bulunur. Buradan da $|f'|^q$, $[a,b]$ güçlü $\varphi_h -$konveks fonksiyon olduğundan ve

$$(u+v)^q \leq 2^{q-1}(u^q+v^q),\ u,v>0,\ q>1,$$

eşitsizliğini kullanarak,

$$\left|\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx - f\left(\frac{\varphi(b)+\varphi(a)}{2}\right)\right|$$

$$\leq 2^{1-\frac{1}{q}}(\varphi(b)-\varphi(a))\left\{\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\left|f'(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b))\right|^q + \left(ct(1-t)(\varphi(b)-\varphi(a))^2\right)^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left[\left|f'(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b))\right|^q + \left(ct(1-t)(\varphi(b)-\varphi(a))^2\right)^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$\leq \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left\{\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left(h(t)\left|f'(\varphi(a))\right|^q + h(1-t)\left|f'(\varphi(b))\right|^q\right)dt\right.\right.$$

$$\left.-\frac{c}{12}(\varphi(b)-\varphi(a))^2 + c(\varphi(b)-\varphi(a))^{2q} B_{\frac{1}{2}}(q+1,q+1)\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(h(t)\left|f'(\varphi(a))\right|^q + h(1-t)\left|f'(\varphi(b))\right|^q\right)dt\right.$$

$$\left.\left.-\frac{c}{12}(\varphi(b)-\varphi(a))^2 + c(\varphi(b)-\varphi(a))^{2q} B_{\frac{1}{2}}(q+1,q+1)\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

elde edilir

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^p dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^p dt = \frac{1}{2^{p+1}(p+1)},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t(1-t)dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1} t(1-t)dt = \frac{1}{12}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^q (1-t)^q \, dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 t^q (1-t)^q \, dt = B_{\frac{1}{2}}(q+1, q+1)$$

eşitliklerini kullanarak,

$$\left| \frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx - f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2} \right) \right|$$

$$\leq \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\left[\int_0^{\frac{1}{2}} \left(h(t) |f'(\varphi(a))|^q + h(1-t) |f'(\varphi(b))|^q \right) dt + G \right]^{\frac{1}{q}} \right.$$

$$\left. + \left[\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(h(t) |f'(\varphi(a))|^q + h(1-t) |f'(\varphi(b))|^q \right) dt + G \right]^{\frac{1}{q}} \right)$$

elde edilir.Böylece ispat tamamlar.

Hermite-Hadamardın sol taraf ile ilgili sırasıyla güçlü $\varphi-$konveks, güçlü φ_s-konveks, güçlü $\varphi-P-$konveks sonuçlarını $c>0$ ile elde ederiz.

Sonuç 4.1.10. Teorem 4.1.4. deki varsayımlar altında $h(t)=t,\ t\in(0,1)$ olarak alınırsa,

$$\left| \frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx - f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2} \right) \right|$$

$$\leq \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2^{\frac{1}{q}}} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times \left\{ \left(\frac{|f'(\varphi(a))|^q + 3|f'(\varphi(b))|^q}{8} + G \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{3|f'(\varphi(a))|^q + |f'(\varphi(b))|^q}{8} + G \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \quad (4.16)$$

elde edilir.

Sonuç 4.1.11. Teorem 4.1.4 deki varsayımlar altında $h(t)=t^s$, $s\in(0,1)$, $t\in(0,1)$ olarak alınırsa,

$$\left|\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx - f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{(\varphi(b)-\varphi(a))}{2^{\frac{1}{q}}}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left\{\left(\frac{1}{2^{s+1}(s+1)}|f'(\varphi(a))|^q+\frac{1}{(s+1)}\left(1-\frac{1}{2^{s+1}}\right)|f'(\varphi(b))|^q+G\right)^{\frac{1}{q}}\right. \tag{4.17}$$

$$\left.+\left(\frac{1}{(s+1)}\left(1-\frac{1}{2^{s+1}}\right)|f'(\varphi(a))|^q+\frac{1}{2^{s+1}(s+1)}|f'(\varphi(b))|^q+G\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

elde edilir.

Sonuç 4.1.12. Teorem 4.1.4. deki varsayımlar altında $h(t)=1$, $t\in(0,1)$ olarak alınırsa,

$$\left|\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx - f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2^{\frac{1}{q}-1}}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f'(\varphi(b))|^q+|f'(\varphi(a))|^q}{2}+G\right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.18}$$

elde edilir.

Not 4.1.6. $c\to 0$ limit durumunda (4.16.) (4.17) ve (4.18) eşitsizlikleri sırasıyla φ-konveks, φ_s-konveks ve $\varphi-P$-konveks fonksiyon için Hermite-Hadamard tipi eşitsizliğin sol tarafını üretir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada birinci mertebeden türevli fonksiyonun mutlak değerinin güçlü $\varphi_h -$konveks fonksiyon için Hermite-Hadamard tipinde eşitsizlikler elde edilmiştir. Burada h fonksiyonu sırasıyla $h(t)=t$, $h(t)=t^s$ ve $h(t)=1$ seçilirse, güçlü $\varphi -$konveks, güçlü $\varphi_s -$konveks, güçlü $\varphi - P -$konveks fonksiyonları için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ ve sol tarafı için bazı eşitsizlikler elde ettik. Benzer olarak ikinci mertebeden türevli fonksiyonun mutlak değerinin güçlü $\varphi_h -$konveks fonksiyon alınması halinde de yeni sonuçlar elde edilebilir. .Bunu da açık problem olarak burada verebiliriz.

6. KAYNAKLAR

Abramowitz M. and Irene A. Stegun, eds. Handbook of Mathematical Functions *with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.* New York: Dover, **1972**. *(See Chapter 6)*

Alomari, M., M. Darus and U.S. Kirmaci, Some inequalities of Hermite-Hadamard type for s-convex functions, Acta Mathematica Scientia **2011**,31B(4):1643-1652

Angulo, H., J. Gimenez, A. M. Moros and K. Nikodem, On strongly h-convex functions, Ann. Funct. Anal. 2 (**2011**), no. 2, 85--91.

Bakula, M. K. and J. Pečarić, Note on some Hadamard-type inequalities, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, vol. 5, no. 3, article 74, **2004**.

Bayraktar, M., **2000**. Fonsiyonel Analiz, ISBN 975-442-035-1.

Bayraktar, M., **2010**. Analiz, ISBN 978-605-395-412-5.

Bullen, P.S., **2003**. Handbook of Means and Their Inequalities. Dordrecht: Kluwer Academic, 537 pp, The Netherlands.

Bullen, P.S., Mitrinović, D.S. and Vasić, M., **1988**. Meands and Their Inegualities. Dordrecht: Kluwer Academic, 459 pp, Dordrecht-Boston.

Carter, M. and van Brunt, B., **2000**. The Lebesgue-Stieltjes Integral: A Practical Introduction. Springer-Verlag, 228, New York.

Cristescu, G. and L. Lupşa, Non-connected convexities and applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht / Boston / London, **2002**.

Cristescu, G., Hadamard type inequalities for ϕ - convex functions, Annals of the University of Oradea, Fascicle of Management and Technological Engineering, CD-Rom Edition, III(XIII), **2004**.

Dragomir, S. S. and S. Fitzpatrik, The Hadamard's inequality for s-convex functions in the second sense, Demonstration Math. 32(4), (**1999**), 687-696.

Dragomir, S.S., Pecarić, J. And Persson, L.E., **1995**. Some inequalities of Hadamard type. Soochow Journal of Mathematics, 21(3), 335-341.

Dragomir, S.S. and Agarwal, R.P., **1998**. Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula, Appl. Math. Lett., 11(5), 91-95.

Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M., **1998**. Quasi-convex functions and Hadamard's inequality. Bull. Austral. Math. Soc., 57, 377-385.

Dragomir, S.S., Agarwal, R.P. and Barnett, N.S., **2000**.Inequalities for Beta and Gamma Functions via Some Classical and New Integral Inequalities. J. of Inequal. and Appl., 5, 103-165.

Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M., **2000**. Selected Topics on Hermite-Hadamard Tpye Inequalities and Applications, RGMIA, Monographs, http://rgmia.vu.edu.au/monographs.html(15.03.2012).

Godonova, E.K. and Levin, V.I., **1985**. Neravenstva dlja funkcii sirokoga klassa, soderzascego vypuklye, monotonnye i nekotorya drugie vidy fuckcii, Vycislitel. Mat. i. Mat. Fiz. Mezvuzov. Sb. Nauc. Trudov, MGPI, Moskva, 138-142.

Hadamard, J., *Etude sur les propriétes des fonctions entiéres et en particulier d'une fonction considerée par Riemann*, J. Math. Pures Appl. 58(**1893**), 171-215.

Jensen, J. L. W. V., *On Konvexe Funktioner og Uligheder mellem Middlvaerdier*, Nyt. Tidsskr. Math. B. 16(**1905**), 49-69.

Jensen, J. L.W. V., *Sur lets fonctions convex et lets inegalites antre lets valeurs moyennes,* Acta mathematica, volume 30, Issue 1, pp 175-193 (**1906**),

Kavurmacı, H. M. Avci and M.E. Ozdemir, New inequalities of hermite-hadamard type for convex functions with applications, Journal of Inequalities and Applications, **2011**, 2011:86.

Kırmacı, U. S., **2008**. Improvement and further generalization of inequalities for differentiable mappings and applications. Computers and Mathematics with Applications, 55, 485-493.

Kırmacı, U. S. and Özdemir, M.E., **2004**. On some inequalities for differentiable mappings and applications to special means of numbers and to midpoint formula. Applied Mathematics and Computation, 153, 361-368.

Kırmacı, U. S., Inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to midpoint formula, Appl. Math. Comp., 147 (**2004**), 137-146.

Kırmacı, U. S., M., K. Bakula, M., E., Özdemir veJ., Pecaric,Hadamard – fype inegualities for s – convex functions, Appl. Math. And Computation, **2007**, 193, 26-35.

Lin M., the amgm inequality and cbs inegualty are equivalent, the mathematical intelliqencer, volume 34, Issue 2, p6 (**2012**)

Merentes, N., and K. Nikodem, Remarks on strongly convex functions, Aequationes Math. 80 (**2010**), no. 1-2, 193-199.

Mitrinović, D.S., **1970**. Analytic Inequalities. Springer-Verlag, 400, Berlin.

Mitrinović, D.S., Pecarić, J.E. and Fink, A.M., **1993**. Classical and New Inequalities in Analysis. Kluwer Academic Publishers, 740 pp, Dordrecht/Boston/London.

Nikodem, K., and Zs. Pales, Characterizations of inner product spaces be strongly convex functions, Banach J. Math. Anal. 5 (**2011**), no. 1, 83--87.

Ozdemir, M.E., E. Set and M.W. Alomari, Integral inequalities via several kinds of convexity, Creat. Math. Inform., 20 (**2011**), No.1, 62 - 73.

Ozdemir, M.E., M. Avcı and H. Kavurmacı, Hermite--Hadamard-type inequalities via (α,m)-convexity, Comput. Math.Appl., 61 (**2011**) 2614--2620.

Pachpatte, B.G., *On some inequalities for convex functions*, RGMIA Research Report Collection, vol. 6(E), **2003**, Available from URL [http://rgmia.vu.edu.au/v6(e).html](accessed **2004** January 23).

Pearce, C.E.M. and Pecarić, J., **2000**. Inequalities for differentiable mappings with applications to special means and quadrature Formula. Applied Mathematics Letters, 13, 51-55.

Pecaric, J. Proschan, F. and Tong, T.L., **1992**. Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications. Academic Press, Inc., 469 pp, Boston.

Polyak, B.T., Existence theorems and convergence of minimizing sequences in extremum problems with restictions, Soviet Math. Dokl. 7 (**1966**), 72--75.

Reed M., Simon B. - "Functional Analysis", Academic Press **1980**.

Roberts, A.W. and Varberg, D.E., **1973**. Convex Funstions. Acamic Press, 300pp, New York.

Sarikaya, M. Z., A. Saglam and H. Yıldırım, On some Hadamard--type inequalities for h-convex functions, Jour. Math. Ineq. 2(3),335-341, **2008**.

Sarikaya, M. Z., E. Set and M. E. Ozdemir, On some new inequalities of Hadamard type involving h-convex functions, Acta Mathematica Universitatis Comenianae, Vol. LXXIX, 2(**2010**), pp. 265-272.

Sarikaya, M. Z., On Hermite Hadamard-type inequalities for strongly ϕ-convex functions, Southeast Asian Bull. Math. in press.

Sarikaya, M. Z., On Hermite Hadamard-type inequalities for ϕ_{h}-convex functions, Submitted

Sarikaya, M. Z., On strongly ϕ_{h}-convex functions in inner product spaces, Submitted

Sarikaya M., Z., and Kubilay Ozcelik, On Hermite-Hadamard type integral inequalities for strongly $\varphi_h -$convex functions, submitted.

Set, E., M. E. Özdemir, and S. S. Dragomir, On the Hermite-Hadamard inequality and other integral inequalities involving two functions, Journal of Inequalities and Applications, Article ID 148102, 9 pages, **2010**.

Set, E., M. E. Özdemir, and S. S. Dragomir, On Hadamard-Type inequalities involving several kinds of convexity, Journal of Inequalities and Applications, Article ID 286845, 12 pages, **2010**.

Varosanec, S., **2007**. On *h* –convexty. J. Math. Anal. Appl., 336, 303-311.

Yang, G.S., Hwang, D.Y. and Tseng, K.L., **2004**. Some inequalities for differentiable convex and concave mappings. Computers and Mathematics with Applications, 47, 207-216.

Youness, E. A., E - Convex Sets, E - Convex Functions and E - Convex Programming, Journal of Optimization Theory and Applications, 102, 2(**1999**), 439-450.

7. EKLER

Tezin oluşumunda önemli bir rol oynayan güçlü $\varphi_h -$konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipinde elde etmiş olduğumuz çalışma yayınlanması için aşağıdaki başlık altında yayına gönderilmiştir.

1) M. Zeki Sarikaya and Kubilay Ozcelik, On Hermite-Hadamard type integral inequalities for strongly $\varphi_h -$convex functions, submitted.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: Kubilay ÖZÇELİK
Uyruğu	: T.C
Doğum tarihi ve yeri	: 30.10.1973 Divriği
Telefon	: 0533 613 57 17 - 0532 775 06 10
Faks	:
E-posta	: kubilayozcelik@windowslive.com

Eğitim

Derece	***Eğitim Birimi***	***Mezuniyet tarihi***
Lisans	Hacettepe Üniversitesi - Matematik Öğretmenliği	1998
Lise	Kartal Teknik Lisesi- Elektrik Bölümü	1993

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
1998 -2001	Konya	Hacı Numan Köyü İlköğretim okulu
2001 – 2003	Düzce	Düzce Lisesi
2003 -	Düzce	Arsal Anadolu Lisesi

Yabancı Dil

Almanca