T.C.

DÜZCE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HEMEN HEMEN YARI KENMOTSU MANİFOLDLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Dilek YEŞİLSANCAK

Eylül 2013

DÜZCE

KABUL VE ONAY BELGESİ

Dilek YEŞİLSANCAK tarafından hazırlanan Hemen Hemen Yarı Kenmotsu Manifoldlar isimli lisansüstü tez çalışması, Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 17.09.2013 tarih ve 2013/453 sayılı kararı ile oluşturulan jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Üye
(Tez Danışmanı)
Doç. Dr. Nesip AKTAN
Düzce Üniversitesi

Üye
Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Düzce Üniversitesi

Üye
Yrd. Doç. Dr. Erdal ÖZÜSAĞLAM
Aksaray Üniversitesi

Tezin Savunulduğu Tarih : 30.09.2013

ONAY

Bu tez ile Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Dilek YEŞİLSANCAK'ın Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans derecesini almasını onaylamıştır.

Prof. Dr. Haldun MÜDERRİSOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

30 Eylül 2013

Dilek YEŞİLSANCAK

Sevgili Anneme Babama Abime ve Aykut'a

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans öğrenimim ve bu tezin hazırlanmasında süresince gösterdiği her türlü destek ve yardımlarından dolayı çok değerli hocam Doç. Dr. Nesip AKTAN'a en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme, Aykut'a ve çalışma arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

30 Eylül 2013 **Dilek YEŞİLSANCAK**

İÇİNDEKİLER **Sayfa**

TEŞEKKÜR SAYFASI ………..…………………………………..……..i

İÇİNDEKİLER ……………………………………………….……..ii

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ iii

ÖZET ……………………………………………………...…....1

ABSTRACT ……………………………………………………......2

EXTENDED ABSTRACT …….....……………………………………3

1. GİRİŞ ………………………………………………………………..6

2. MATERYAL VE YÖNTEM 8

2.1. YARI-RİEMANN MANİFOLDLAR……… ..……………………………..8

2.2. HEMEN HEMEN DEĞME MANİFOLDLAR……...…………………..……..13

2.3. ALT MANİFOLDLAR………………………………………………..……18

3. BULGULAR VE TARTIŞMA..21

3.1. HEMEN HEMEN YARI KENMOTSU MANİFOLDLAR...........................21

3.2. TENSÖR ALANLARI VE ÖZELLİKLERİ...36

3.3. EĞRİLİK ÖZELLİKLERİ..39

3.4. PARALEL TENSÖR ALANLARI..44

3.5. ÖRNEKLER..50

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 53

5. KAYNAKLAR 54

ÖZGEÇMİŞ 56

SİMGELER VE KISALTMALAR

R	Riemann eğrilik tensörü
$\mathcal{D}$	Değme dağılımı
N	Nijenhuis tensör alanı
∇	Levi-Civita konneksiyonu
$\chi(M)$	M üzerindeki C^∞ vektör alanları uzayı
div	Divergens operatörü
$\overline{\overline{\nabla}}$	Van der Waerden-Bortolotti konneksiyonu
TM	M üzerindeki tanjant demeti
J	Hemen hemen kompleks yapı
$\mathcal{L}$	Lie türev operatörü
B	İkinci temel form

ÖZET

HEMEN HEMEN YARI KENMOTSU MANİFOLDLAR

Dilek YEŞİLSANCAK

Düzce Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Nesip AKTAN

Eylül 2013, 63 sayfa

Plazma fiziğinde geniş bir uygulama alanına sahip olan değme manifoldların, hemen hemen yarı Kenmotsu manifold olarak adlandırılan, yeni bir alt sınıfı tanımlanmıştır. Öncelikle, bu tür manifoldlar için temel eğrilik özellikleri verilmiş ve daha sonra hemen hemen yarı Kenmotsu manifoldların bazı paralel tensör alanlarıyla olan ilişkileri incelenerek çok çarpıcı sonuçlara ulaşılmıştır. Son olarak sonra hemen hemen yarı Kenmotsu manifoldlara ait iki örnek ve konu ile ilgili açık problemlere yer verilmiştir.

Anahtar sözcükler: Değme manifold, Hemen hemen Kenmotsu manifold, Hemen hemen yarı Kenmotsu manifold.

ABSTRACT

ALMOST PSEUDO KENMOTSU MANIFOLDS

Dilek YEŞİLSANCAK

Düzce University

Institute of Science and Technology, Department of Mathematics

Master of Science Thesis

Supervisor: Assoc. Prof. Nesip Aktan

September 2013, 63 pages

A new sub-class called almost pseudo Kenmotsu manifold of contact manifolds with a wide range of applications in plasma physics is described. First, for this kind of manifolds, basic curvature properties are given and then striking results are obtained by examining the relationship between almost pseudo Kenmotsu manifolds with some parallel tensor fields. Finally, then, two examples of manifolds with almost pseudo Kenmotsu and clear problems related to the subject are given place.

Key Words: Contact Manifold, Almost Kenmotsu Manifold, Almost Pseudo Kenmotsu Manifold.

EXTENDED ABSTRACT

ALMOST PSEUDO KENMOTSU MANIFOLDS

Dilek YEŞİLSANCAK
Düzce University
Institute of Science and Technology, Department of Mathematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Nesip Aktan
September 2013, 63 pages

1. INTRODUCTION

The class of almost contact metric manifolds which are called almost Kenmotsu manifolds M , were firstly introduced by Kenmotsu. These manifolds appear for the first time in (Kenmotsu 1972), where they have been locally classified. Kenmotsu defined a structure closely related to the warped product which was characterized by tensor equations.

Contact metric structures have been intensively studied by several authors. The recent monograph of (Blair 2002) gives a wide and detailed overview of the results obtained in this framework. Contact pseudo-metric structures (η, g) , where η is a contact one-form and g a pseudo-Riemannian metric associated to it, are a natural generalization of contact metric structures. Contact structures equipped with pseudo-Riemannian metrics were first introduced and studied by (Takahashi 1969), who focused on the Sasakian case. Since then, up to our knowledge, most of the research devoted to the topic was concerned with Sasakian pseudo-Riemannian metrics (see for instance Duggal, 1990; Bejancu and Duggal 1993). On the other hand, a systematic study of general contact pseudo-metric manifolds has undertaken by (Calvaruso and Perrone 2010). The authors provide the technical apparatus needed for further investigations, prove some general classification results and exhibit several explicit examples.

In (Boecks 2006), the authors showed that a locally symmetric contact metric space is either Sasakian with the constant curvature or locally isometric to the unit tangent sphere bundle of an Euclidean space. Following these works, Cho et all investigated the η -parallelity of the torsion tensor τ of a contact metric manifold M . The tensor field τ was firstly introduced by Hamilton and Chern. They defined by the torsion tensor field τ for any vector fields X and Y on M as follows:

$$g(\tau X, Y) = \left(\mathcal{L}_{\xi} g\right)(X, Y)$$

Cho showed that a non-Sasakian contact metric manifold with the η-parallel torsion tensor is a (k, μ)-contact manifold.

2. MATERIAL AND METHODS:

In this section, we introduce some fundamental concept of manifold theory. In the first subsection, we give pseudo-Riemannian manifolds and some basic properties. In the second subsection, we introduce some fundamental concept of pseudo almost contact metric manifolds. In the second subsection, we give submanifolds.

3. RESULTS AND DISCUSSIONS:

In this section, we define a wide subclass of almost contact metric manifolds which is called almost pseudo Kenmotsu manifold. Firstly, we give the concept of almost pseudo Kenmotsu manifolds and state general curvature properties. We derive several important formulas on almost pseudo Kenmotsu manifolds. These formulas enable us to find the geometrical properties of almost pseudo Kenmotsu manifolds with η -parallel tensors h and φh . We also examine the tensor field τ on M. Then we give some propositions and theorems on η-parallelity, cyclic parallelity, Codazzi condition and η-cyclic parallelity. Finally, we give two extensive examples on almost pseudo kenmotsu manifolds.

4. CONCLUSION AND OUTLOOK:

In this study, we have a generalization of almost Kenmotsu manifolds and some curvature properties. Submanifolds of pseudo almost Kenmotsu manifolds and symmetry properties are open problems, one can obtain very important results.

Key Words: Contact Manifold, Almost Kenmotsu Manifold, Almost Pseudo Kenmotsu Manifold

1.GİRİŞ

Manifold teorisinde hemen hemen değme manifoldları çok önemli bir yere sahiptir. $(2n+1)$-boyutlu bir C sınıfından diferensiyellenebilir M manifoldunun tanjant demetlerinin grup yapısı $U(n) \times 1$ tipine indirgenebiliyorsa M ye hemen hemen değme manifold denir. İlk olarak, 1959 yılında J. Gray tek boyutlu manifoldlar üzerinde yaptığı çalışmada $U(n) \times 1$ yapısal grubunun bir indirgenmesiyle hemen hemen değme yapıları tanımlamıştır. Buna göre, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme yapısı

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi \,, \ \eta(\xi) = 1$$

denklemlerini sağlayan $(1,1)$-tipli bir tensör alanı φ , bir vektör alanı ξ ve bir 1-form olan η ile oluşturulan (φ, ξ, η) üçlüsüyle ifade edilir. Daha sonra 1960 yılında Sasaki (φ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı üzerinde

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$
$$\eta(X) = g(X, \xi),$$

eşitlikleriyle verilen uygun bir g metriği tanımlayarak hemen hemen değme metrik yapıyı tam olarak ifade etmiştir. 1961 yılında Sasaki ve Hatakeyama hemen hemen değme manifoldlar için normallik şartının J kompleks yapısının $J^2 = -I$ integrallenebilmesi olduğunu ispatlamışlardır.

1972 yılında Kenmotsu hemen hemen değme metrik manifoldlar üzerinde yeni bir karakterizasyon ve sınıflama ortaya koymuştur. Bu sınıflama Kenmotsu manifold olarak adlandırılmıştır (Kenmotsu 1972). 1981 yılında Vanhecke hemen hemen değme yapılarını ele aldığı çalışmasında hemen hemen Kenmotsu manifoldlarını genişleterek hemen hemen f-Kenmotsu manifoldları tanımlamıştır (Vanhecke 1981).

(M, ϕ, ξ, η, g), $(2n+1)$- boyutlu bir hemen hemen değme yapısı

$$d\eta = 0, \qquad d\Phi = 2\eta \wedge \Phi$$

şartlarını sağlanıyor ise bu manifoldlara hemen hemen Kenmotsu manifold denir. Normallik koşulu altında ise Kenmotsu manifold olarak adlandırılır.

İkinci bölümde, manifoldlar ve altmanifoldlar ile ilgili temel kavramlar tanıtılacaktır. Bu bölümün ilk kısmında, manifold teorisi ile ilgili temel kavramlar verilmiştir. İlk kısım iki alt kısımdan oluşmaktadır. Birinci alt kısımda, Riemann manifoldları ve bazı temel özellikleri tanıtılmıştır. İkinci alt kısımda, hemen hemen değme metrik manifoldlar ile ilgili temel kavramlar verilmiştir. İkinci kısımda, altmanifoldlar teorisi hakkında temel kavramlar tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde, hemen hemen yarı Kenmotsu manifoldlar ile ilgili genel sonuçlar elde edilmiştir. Özellikle, paralel tensör alanlarını gözönüne alarak bu tür manifoldları ayrıntılı bir şekilde araştırılmıştır. Bu bölümün ilk kısmında; hemen hemen yarı Kenmotsu yapılar tanıtılmıştır. İkinci kısımda, bazı özel tensör alanlarının temel özellikleri verilmiştir. Üçüncü kısımda, Riemann eğrilik tensörü özellikleri verilmiş ve (Pastore ve Dileo 2007) de değinilen hemen hemen Kenmotsu manifoldlar ile ilgili temel özellikler genelleştirilmiştir. Son kısımda, bazı paralel tensör alanları ve h, ϕh tensörleri yardımıyla yeni sonuçlara ulaşılmıştır. Özellikle, bu kısımda h tensör alanının η-paralellik koşulu önemli yer kaplamaktadır.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. YARI-RİEMANN MANİFOLDLAR

Tanım 2.1.1. V bir reel vektör uzayı olsun.

$$g: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü $\forall\, a, b \in R$ ve $\forall u, v, w \in V$ için,

$i)\;\; g(u,v) = g(v,u),$

$ii)\;\; g(au + bv, w) = ag(u,w) + bg(v,w),$

$\quad g(u, av + bw) = ag(u,v) + bg(u,w)$

özelliklerine sahip ise g dönüşümüne V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.2. V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form g olsun.

$i)$ $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ $için$ $g(v,v) > 0$ *ise g simetrik bilineer formuna pozitif tanımlı*,

$ii)$ $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ $için$ $g(v,v) < 0$ *ise g simetrik bilineer formuna negatif tanımlı*,

$iii)$ $\forall v \in V$ $için$ $g(v,v) \geq 0$ *ise g simetrik bilineer formuna pozitif yarı-tanımlı*,

$iv)$ $\forall v \in V$ $için$ $g(v,v) \leq 0$ *ise g simetrik bilineer formuna negatif yarı-tanımlı denir* (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.3. V bir reel vektör uzayı ve g , V üzerinde simetrik bilineer form olsun. $0 \neq \xi \in V$ olmak üzere $\forall\, v \in V$ için

$$g(\xi, v) = 0$$

ise g simetrik bilineer formuna V üzerinde dejeneredir denir. Aksi durumda g ye non-dejeneredir denir.

Buradan görülür ki , g nin non-dejenere olması için gerek ve yeter şart $\forall\, u \in V$ için

$$g(u,v) = 0 \; iken \; v = 0$$

olmasıdır (Duggal 1996).

Tanım 2.1.4. V bir reel vektör uzayı ve g, V üzerinde simetrik bilineer form olsun.

$$g|_w: W \; x \; W \longrightarrow \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekildeki en büyük boyutlu W altuzayının boyutuna g simetrik bilineer formun indeksi denir ve v ile gösterilir (O'Neill 1983).

Teorem 2.1.5. V bir reel vektör uzayı ve V üzerinde simetrik bilineer form g olsun. Bu durumda,

$i)$ $g(\alpha_i, \alpha_j) = 0, i \neq j$

$ii)$ $g(\alpha_i, \alpha_i) = 1, 1 \leq i \leq \gamma,$

$iii)$ $g(\alpha_i, \alpha_i) = -1, \gamma + 1 \leq i \leq \gamma + v$

$iv)$ $g(\alpha_i, \alpha_i) = 0, \gamma + v + 1 \leq i \leq n = \gamma + v + \mu$

olacak şekilde V nin $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ bazı vardır (Duggal 1996).

Tanım 2.1.6. V reel vektör uzayı üzerinde non-dejenere simetrik bilineer forma V reel vektör uzayı üzerinde bir skalar çarpım (yarı-öklid metriği) denir. V üzerindeki bir skalar çarpma g ise (V, g) ikilisine de skalar çarpım uzayı (yarı-öklid uzayı) denir.

Eğer g pozitif tanımlı ise o zaman g bir iç çarpım (Öklid metriği) olur ve (V, g) de Öklid uzay olarak adlandırılır. Eğer g nin indeksi $v = 1$ ise g ye Lorentz (Minkowski) metriği ve (V, g) yede Lorentz (Minkowski) uzayı denir. Eğer g dejenere ise o zaman V vektör uzayına g ye göre lightlike (dejenere) vektör uzayı denir (Duggal 1996).

Teorem 2.1.7. V bir yarı-öklid uzay ve W da bu uzayın bir lightlike altuzayı olsun. Bu durumda , W boyunca V uzayının bir quasi-ortonormal bazı vardır (Duggal 1996).

Tanım 2.1.8. $M \; bir \; C^\infty$ manifold olsun. $p \in M$ noktasındaki tanjant uzay T_pM olmak üzere

$$g|_p: T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(X_p, Y_p) \longrightarrow g|_p(X_p, Y_p) = g(X_p, Y_p)$$

biçiminde tanımlı sabit indeksli, simetrik, bilineer, non-dejenere $(0,2)$ tensör alanına M üzerinde metrik tensör alanı denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.9. $M\ bir\ C^{\infty}$ manifold olsun. M, bir g metrik tensörü ile donatılmışsa, M ye yarı-Riemann manifoldu denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.10. Bir M yarı-Riemann manifoldu üzerinde g metrik tensörünün indeksine yarı-Rieamann manifoldunun indeksi denir ve $indM$ ile gösterilir.

Eğer indeks v ise $0 \leq v \leq boyM$ dir. Özel olarak, $v = 0$ ise $\forall p \in M$ için $g|_p$, T_pM üzerinde pozitif tanımlı bir iç çarpım olduğundan, M bir Riemann manifoldu olur. $v = 1$ ve $n \geq 2$ olması durumunda ise, M ye bir Lorentz manifoldu denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.11. $M\ bir\ C^{\infty}$ n-boyutlu manifold olsun. M üzerinde

$$\mathcal{D}: M \longrightarrow T_pM$$

$$p \longrightarrow \mathcal{D}_p \subset T_pM$$

şeklinde tanımlı $\mathcal{D}$ dönüşümüne $r -$boyutlu dağılım ve $X \in \Gamma(TM)$ için $Xp \in \mathcal{D}_p$ ise X vektör alanına da $\mathcal{D}$ ye aittir denir. Eğer her $p \in M$ noktası için $\mathcal{D}_p$ de r tane diferensiyellenebilir lineer bağımsız vektör alanı var ise $\mathcal{D}$ dağılımına diferensiyellenebilir denir (Duggal 1996).

Tanım 2.1.12. M bir diferensiyellenebilir manifold olsun ve K de M üzerinde herhangi bir tensör alanı olsun. Bu durumda $p \in M, t \in I \subset \mathbb{R}$ ve $\mathrm{X} \in \Gamma(TM)$ olmak üzere

$$\mathcal{L}_X K = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(K(p) - (\Phi_t K)(p) \right)$$

ile tanımlanan $\mathcal{L}_X$ diferensiyel operatörüne X vektör alanına göre Lie türevi denir. Burada Φ,

$$\Phi: (t, x) \in [-\varepsilon, \varepsilon] x U \longrightarrow \Phi(t, x) \in M$$

şeklinde tanımlı bir dönüşümdür (Duggal 1996).

Teorem 2.1.13. M bir diferensiyellenebilir manifold ve $\mathcal{L}_X$ de manifold üzerinde tanımlı Lie türevi olsun. O zaman $\forall Y, Z \in\ \Gamma(TM)\ \ ve\ \ f \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ için

$i)$ $\mathcal{L}_X f = X(f)$

$ii)$ $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$

$iii)$ $\psi,$ M üzerinde $(0,2)$ tipinde bir tensör alanı olmak üzere

$$(\mathcal{L}_X \psi)(Y, Z) = X(\psi(Y, Z)) - \psi([X, Y], Z) - \psi(Y, [X, Z])$$

dir (Duggal 1996).

Tanım 2.1.14. M bir C^∞ n-boyutlu manifold ve $\mathcal{D}$, M üzerinde r-boyutlu bir dağılım olsun. Eğer X, Y $\in$ $\Gamma(\mathcal{D})$ için $[X, Y] \in$ $\Gamma(\mathcal{D})$ ise $\mathcal{D}$ dağılımına involutuftir denir (Duggal 1996).

Tanım 2.1.15. $\{u_1, \dots u_n\}$, $\mathbb{R}_v^n$ üzerinde doğal koordinatlar olsun. V ve $W = \sum W_i \partial_i, \mathbb{R}_v^n$ üzerinde vektör alanları iseler

$$\nabla_V W = \sum V(W_i)\partial_i$$

vektör alanına W nın V ye göre kovaryant türevi denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.16. M bir C^∞ manifold olsun. M üzerindeki bir ∇ konneksiyonu

$i)$ $\nabla_V W, V$ *ye göre* $C^\infty(M, \mathbb{R})$ *lineerdir,*

$ii)$ $\nabla_V W, W$ *ya göre* $\mathbb{R}$ *lineerdir,*

$iii)$ $\nabla_V(fW) = V(f)W + f\nabla_V W,\ \forall f \in\ C^\infty(M, \mathbb{R})$

şartlarını sağlayan ve

$$\nabla: \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$

şeklinde tanımlanan bir fonksiyondur (O'Neill 1983).

Teorem 2.1.17. Bir M yarı-Riemann manifoldu üzerinde $\forall\ X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$i)$ $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$

$ii)$ $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$

olacak şekilde M nin bir tek ∇ Levi-Civita konneksiyonu vardır ve bu konneksiyon

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) \ - g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) \\ + g(Z,[X,Y])$$

Kozsul formülü ile karakterize edilir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.18. M bir C^∞ manifold ve ∇**,** M üzerinde bir lineer konneksiyon olsun. Eğer $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \ \in \Gamma(\mathcal{D})$ için

$$\nabla_X Y \in \Gamma(TM)$$

ise $\mathcal{D}$ dağılımına paraleldir denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.19. M, Levi-Civita konneksiyonu ∇ olan bir yarı-Riemann manifoldu olsun. $\forall\, X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$R : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$$

$$(X, Y, Z) \ \longrightarrow R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

biçiminde tanımlanan M üzerinde $(1,3)$ tipindeki R fonksiyonuna M nin Riemann eğrilik tensörü denir (O'Neill 1983).

Teorem 2.1.20. M bir yarı-Riemann manifoldu ve R, M nin Riemann eğrilik tensörü olsun. O zaman, $\forall X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ için

$i)$ $g(R(X,Y)Z, W) = -g(R(Y,X)Z, W)$,

$ii)$ $g(R(X,Y)Z, W) = -g(R(X,Y)W, Z)$,

$iii)$ $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$,

$iv)$ $g(R(X,Y)Z, W) = g(R(Z,W)X, Y)$

dir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.21. Eğer M manifoldu sabit bir c eğrisine sahipse M nin eğrilik tensörü $\forall\, X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$R(X,Y)Z = c\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\}$$

şeklindedir (O'Neill 1983).

Tanım2.1.22. M bir yarı- Riemann manifold ve R , M nin Riemann eğrilik tensörü olsun. $\{e_1, \ldots e_n\}$, T_pM nin bir ortonormal bazı olmak üzere

$$S: T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(X_p, Y_p) \longrightarrow S(X_p, Y_p) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g(R(e_i, X_p)\, Y_p, e_i)$$

veya

$$S(X_p, Y_p) = iz\{Z_p \longrightarrow R(Z_p, X_p)Y_p\}$$

şeklinde tanımlı Ric tensörüne M yarı- Riemann manifoldunun Ricci eğrilik tensörü ve $S\,(X_p, Y_p)$ değerine de Ricci eğriliği denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.23. M yarı-Riemann manifoldu ve R , M nin Riemann eğrilik tensörü olsun. $\{e_1, \ldots e_n\}$, T_pM nin bir ortonormal bazı olmak üzere

$$\rho = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i S(e_i, e_i)$$

değerine M yarı-Riemann manifoldunun skalar eğriliği denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.24. M bir yarı-Riemann manifold ve R de M nin eğrilik tensörü olsun. Eğer, $R = 0$ ise M ye lokal flat ve $\nabla R = 0$ ise M ye lokal simetrik uzay denir (Hacısalihoğlu H. H., 2003).

2.2. HEMEN HEMEN DEĞME MANİFOLDLAR

Bu kısımda, hemen hemen değme manifoldlar ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

Tanım 2.2.1. M^{2n+1}, $(2n+1)$-boyutlu bir manifold φ, ξ, η da M^{2n+1} üzerinde, sırasıyla, $(1,1)$ - tipinde bir tensör alanı, bir vektör alanı ve 1-form olsunlar. Eğer φ, ξ, η için, M^{2n+1} üzerinde herhangi bir vektör alanı X olmak üzere,

$$\eta(\xi) = 1 \tag{2.1}$$

$$\varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi$$

eşitsizlikleri sağlanıyorsa o zaman, (φ, ξ, η) üçlüsüne M^{2n+1} üzerinde bir hemen hemen değme yapı ve bu yapı ile birlikte M^{2n+1} ye bir hemen hemen değme manifold denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.2. M^{2n+1} , (φ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı ile verilsin. M^{2n+1} üzerinde bir g Riemann metriği

$$\eta(X) = g(X, \xi), \tag{2.2}$$

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

şartlarını sağlıyorsa g metriğine M^{2n+1} üzerinde hemen hemen değme metrik, (φ, ξ, η, g) yapısına hemen hemen değme metrik ve (φ, ξ, η, g) yapısı ile M^{2n+1} ye de hemen hemen değme metrik manifold denir (Yano ve Kon 1984).

Sonuç 2.2.1. M^{2n+1}, (φ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik manifold verilsin. Bu durumda,

$$g(\varphi X, Y) = -g(X, \varphi Y) \tag{2.3}$$

dır (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.3. M^{2n+1} üzerinde bir hemen hemen değme manifold (φ, ξ, η, g) olmak üzere,

$$\Phi(X, Y) = g(X, \varphi Y) \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlı Φ dönüşümüne hemen hemen değme manifoldun temel 2-formu denir (Yano ve Kan 1984).

Tanım 2.2.4. (M^n, g) bir Riemann manifold ve $x_1, x_2, \dots, x_n$ M^n nin lokal koordinatları olsun. $\omega = \sqrt{|g|}dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots dx_n$ ve $g(x) > 0$ ise ω ye M^n üzerindeki bir hacim form denir. Bu arada dx_i , M^n üzerindeki kotanjant uzayda 1-formlar ve $|g|$, M^n üzerindeki metrik tensörün determinantıdır (Spivak 1965).

Tanım 2.2.5. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. M^n üzerinde bir hacim form mevcut ise M^n ye yönlendirilebilirdir denir (Gallot, Hulin, Lafontaine 2004).

Sonuç 2.2.2. Φ temel 2-formu ters simetrik ve Tanım 2.2.3. yardımıyla $\eta \wedge \Phi^n \neq 0$ dır. Böylece Tanım 2.1.2.5. gereğince $(M^n, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen değme manifoldu yönlendirilebilirdir (Gonzalez 1990).

Tanım 2.2.6. M bir C^∞ manifold olsun. Eğer ω 1-form ise, keyfi X, Y vektör alanları için,

$$2d\omega(X, Y) = X\big(\omega(Y)\big) - Y\big(\omega(X)\big) - \omega[X, Y]$$

dır. Eğer ω 2-form ise,

$$\begin{aligned} 3d\omega(X, Y, Z) = X\big(\omega(Y, Z)\big) - Y\big(\omega(Z, Y)\big) + Z(\omega(X, Y)) - \omega([X, Y], Z) \\ - \omega([Y, Z], X) - \omega([Z, X], Y) \end{aligned}$$

dır. (Yano ve Kon 1984).

Önerme 2.2.1. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen değme manifold ve ∇ Riemann konneksiyonu olsun. Keyfi X, Y, Z vektör alanları için,

(i) $(\nabla_X \Phi)(Y, Z) = g(Y, (\nabla_X \varphi)Z)$

(ii) $(\nabla_X \Phi)(Y, Z) + (\nabla_X \Phi)(\varphi Y, \varphi Z) = \eta(Z)(\nabla_X \eta)\varphi Y - \eta(Y)(\nabla_X \eta)\varphi Z$

(iii) $(\nabla_X \eta)Y = g(Y, \nabla_X \xi) = (\nabla_X \Phi)(\xi, \varphi Y)$

(iv) $2d\eta(X, Y) = (\nabla_X \eta)Y - (\nabla_Y \eta)X$

(v) $3d\Phi(X, Y, Z) = \underset{X,Y,Z}{\oplus} (\nabla_X \Phi)(Y, Z)$

eşitlikleri geçerlidir. Burada $\underset{X,Y,Z}{\oplus}$, X, Y, Z vektör alanları üzerinden alınan devirli toplamı göstermektedir.

Ayrıca, $\{X_i, \varphi X_i, \xi\}$ $i = 1,2,\dots,n$ olmak üzere, M^{2n+1} nin açık bir alt cümlesi üzerinde tanımlanan bir lokal ortonormal baz olsun. O zaman, δ operatörü

$$\delta\eta = -\sum_{i=1}^{n}\{(\nabla_{X_i}\eta)X_i + (\nabla_{\varphi X_i}\eta)\varphi X_i\}$$

şeklinde elde edilir (Gonzalez 1990).

Tanım 2.2.7. M^n bir reel diferensiyellenebilir manifold olsun. Eğer M^n nin $\forall$ p noktası için $J^2 = -I$ olacak şekilde $T_P M$ tanjant uzayının bir J endomorfizması mevcut ise, o zaman M^n üzerindeki J tensör alanına bir hemen hemen kompleks yapı adı verilir. Bir J hemen hemen kompleks yapısı ile verilen manifolda bir hemen hemen kompleks manifold denir (Yano ve Kon 1984).

M üzerinde bir hemen hemen pseudo yapısı (φ, ξ, η, g) ile verilsin. O zaman, $Mx\mathbb{R}$ üzerinde herhangi bir vektör alanı

$$(X, f\frac{d}{dt})$$

şeklinde tanımlanır. Burada X, M manifolduna teğet bir vektör alanı; $t, \mathbb{R}$ nin bir koordinatı ve $f, M \times \mathbb{R}$ üzerinde bir C^∞ fonksiyondur.

M üzerinde (φ, ξ, η, g) bir hemen hemen değme manifold olsun. Böylece $M \times \mathbb{R}$ üzerindeki bir hemen hemen kompleks yapı

$$J\left(X, f\frac{d}{dt}\right) = \left(\varphi X - f.\xi, \eta(X)\frac{d}{dt}\right)$$

biçiminde tanımlanır. Kolayca $J^2 = -I$ elde edilir (Yano ve Kon 1984).

Tanım.2.2.8. M^n bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere , M^n üzerinde (1,1) tipli bir tensör alanı F olsun. $\forall$ $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ için,

$$N_F(X,Y) = F^2[X,Y] + [FX,FY] - F[FX,Y] - F[X,FY]$$

şeklinde tanımlı N_F tensör alanına F tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörü denir (Yano ve Kon 1984).

J, M^n üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı olsun. Tanım 2.2.8 yardımıyla M^n üzerinde J tensör alanına Nijenhuis torsiyon tensörü

$$
\begin{aligned}
N_J(X,Y) &= J^2[X,Y] + [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] \\
&= -[X,Y] + [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY]
\end{aligned}
$$

şeklindedir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.9. (M^{2n},J) hemen hemen kompleks manifold olsun. O zaman, $N_J = 0$ ise J dönüşümüne integrallenebilirdir denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.10. Eğer $M^{2n} \times \mathbb{R}$ üzerindeki bir J hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir ise (φ,ξ,η) hemen hemen değme yapısına normaldir denir (Yano ve Kon 1984).

Önerme 2.2.2. M^{2n+1} üzerinde (φ,ξ,η) hemen hemen değme yapısının normal olması için gerek ve yeter koşul

$$N_\varphi + 2d\eta \otimes \xi = 0$$

eşitliğinin sağlamasıdır. Burada N_φ, φ tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörüdür (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.11. (M^{2n},J) hemen hemen kompleks manifold olsun. M^{2n} üzerinde $\forall\ X,Y$ vektör alanları için,

$$g(JX,JY) = g(X,Y)$$

şeklinde verilen g Riemann metriğine Hermit metriği denir. Hermit metriği ile verilen bir hemen hemen kompleks manifolda bir hemen hemen Hermit manifoldu denir. Hermit metriği ile verilen kompleks manifolda ise Hermit manifoldu denir (Blair 2002).

Tanım 2.2.12. (M^{2n},J,g) bir hemen hemen Hermit manifoldu olsun. $\forall\ X,Y$ vektör alanları için,

$$\Omega(X,Y) = g(X,JY)$$

eşitliği ile tanımlanan Ω 2-formuna hemen hemen Hermit yapısının temel 2-formu denir. Eğer $d\Omega = 0$ ise (J, g) yapısına hemen hemen Kaehler manifoldu denir. Bir Kaehler yapı ile verilen kompleks manifolda Kaehler manifoldu denir. Bir Hermit manifoldunun bir Kaehler manifold olması için gerek ve yeter koşul $\nabla J = 0$ eşitliğinin sağlamasıdır (Blair 2002).

2.3. ALT MANİFOLDLAR

Bu kısımda, altmanifoldlar teorisi hakkında bazı temel kavramlar verilmiştir.

Tanım 2.3.1. $\widetilde{M}$ Riemann manifoldunun bir alt cümlesi M olsun. $\widetilde{M}$ üzerindeki metrik $\tilde{g}$ olmak üzere,

$$j : M \longrightarrow \widetilde{M}$$

$$p \longrightarrow j(p) = p$$

dahil etme dönüşümü için $p \in M$ noktasındaki

$$T_pM \xrightarrow{j_*|p} T_p\widetilde{M}$$

$$T_pM^* \xrightarrow{j^*|p} T_p\widetilde{M}^*$$

türev ve ek dönüşümleri için,

$$\left(j_p^*(\tilde{g}_p)\right)(v, w_p) = \tilde{g}_p\left(j_*(v_p), j_*(w_p)\right);\ \forall\, v_p, w_p \in T_pM$$

eşitliği ile tanımlanan $j_p^*\tilde{g}_p = g_p$ dönüşümü M üzerinde bir metrik ise M ye $\widetilde{M}$ nın bir Riemann altmanifoldu denir (O'neill 1983).

Tanım 2.3.2. $(\widetilde{M}^{\boldsymbol{n+d}}, \tilde{g})$ Riemann manifoldunun bir Riemann altmanifoldu (M^n, g) olsun. $\nabla\ ve\ \widetilde{\nabla}$ sırasıyla, $M^n\ ve\ \widetilde{M}^{\boldsymbol{n+d}}$ manifoldlarının Levi-Civita konneksiyonları olsun. O halde, Gauss ve Weingarten eşitlikleri, sırasıyla,

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X, Y) \tag{2.5}$$

$$\widetilde{\nabla}_X N = -A_\gamma X + \nabla_X^\perp N \tag{2.6}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada B ye M^n nin ikinci temel formu denir ve N, M^n üzerinde bir normal vektör alanıdır. Eğer $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M^n)$ için, $B(X,Y) = 0$ ise M manifolduna total geodeziktir denir (Chen 1973).

İkinci temel form B ve A_γ şekil operatörü arasında baza göre yazılım

$$B(X,Y) = \sum_{\gamma=1}^{d} g(A_\gamma X, Y) N_\gamma$$

eşitliği elde edilir. Burada $N_\gamma, (\gamma = 1, \ldots, d)$ M^n altmanifolduna dik olan vektör alanları, $\nabla^\perp$ de M^n altmanifoldunun normal konneksiyonudur. Kolayca

$$g\big(A_\gamma X, Y\big) = g(B(X,Y), N_\gamma)$$

eşitliği elde edilir (Chen 1973).

Tanım 2.3.3. $(M^n, g), (\widetilde{M}^{\boldsymbol{n+d}}, \tilde{g})$ Riemann manifoldunun bir alt manifoldu olsun. O zaman,

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} B(e_i, e_i)$$

şeklinde tanımlanan H vektör alanına M^n nin ortalama eğrilik vektör alanı denir. Eğer $H = 0$ ise M^n altmanifolduna minimaldir denir. H ortalama eğrilik vektörünün normuna M^n nin ortalama eğriliği denir. Burada $\{e_1, \ldots, e_n\}$ M^n üzerinde bir lokal ortonormal bazdır (O'neill 1983).

Tanım 2.3.4. $(\widetilde{M}^{n+d}, \tilde{g})$ Riemann manifoldunun bir altmanifoldu (M^n, g) olsun. $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M^n)$ olmak üzere,

$$B(X,Y) = g(X,Y)H$$

eşitliği sağlanıyorsa M^n ye total umbilik altmanifold denir (Chen 1973).

Tanım 2.3.5. $(M^n, g), (\widetilde{M}^{\boldsymbol{n+d}}, \tilde{g})$ Riemann manifoldunun bir alt manifoldu olsun. B ikinci temel formu $\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M^n)$ için, B nin X yönündeki kovaryant türevi

$$(\overline{\nabla}_X B)(Y,Z) = \nabla_{\mathrm{X}}^{\perp}\left(B(Y,Z)\right) - B(\nabla_X Y, Z) - B(Y, \nabla_X Z)$$

şeklinde tanımlıdır. $\overline{\nabla}B$ (0,3)- tipli bir tensör alanıdır ve M^n altmanifoldunun üçüncü temel formu olarak adlandırılır. Ayrıca, $\overline{\nabla}$ ya Van der Waerden-Bortolotti konneksiyonu adı verilir. Eğer $\overline{\nabla}B = 0$ ise M^n altmanifoldu paralel ikinci temel formludur denir (Chen 1973).

B ikinci temel formunun $\overline{\nabla}^2 B$ ikinci kovaryant türevi

$$(\overline{\nabla}^2 B)(Z,W,X,Y) = (\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y B)(Z,W) = \nabla_{\mathrm{X}}^{\perp}\left((\overline{\nabla}_Y B)(Z,W)\right) -$$
$$(\overline{\nabla}_Y B)(\nabla_X Z, W) - (\overline{\nabla}_X B)(Z, \overline{\nabla}_Y W) - \overline{\nabla}_{\nabla_X Y} B(Z,W) \qquad (2.7)$$

şeklinde tanımlıdır (Chen 1973).

Tanım 2.3.6. $(M^n, g), (\widetilde{M}^{\boldsymbol{n+d}}, \tilde{g})$ Riemann manifoldunun bir alt manifoldu olsun. O zaman,

$$R^{\perp}(X,Y) = \nabla_{\mathrm{X}}^{\perp}\nabla_{\mathrm{Y}}^{\perp} - \nabla_{\mathrm{Y}}^{\perp}\nabla_{\mathrm{X}}^{\perp} - \nabla_{[\mathrm{X,Y}]}^{\perp} \qquad (2.8)$$

şeklinde tanımlı $R^{\perp}$ dönüşümüne M^n nin normal yönünde eğrilik tensörü denir (O'neill 1983).

(2.7) ve (2.8) eşitlikleri yardımıyla

$$(\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y B)(Z,W) - (\overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X B)(Z,W) = (\bar{R}(X,Y).B)(Z,W)$$
$$= R^{\perp}(X,Y)B(Z,W) - B(R(X,Y)Z,W) - B(Z,R(X,Y)W)$$

eşitliği elde edilir. Burada $R^{\perp}, \overline{\nabla}$ konneksiyonuna göre eğrilik tensörüdür (Chen 1973).

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, hemen hemen değme metrik manifoldların geniş bir alt sınıfı olan hemen hemen yarı Kenmotsu manifoldlar incelenmiştir. Bu bölüm orjinal sonuçlar içermektedir.

3.1. HEMEN HEMEN YARI KENMOTSU MANİFOLDLAR

Bu kısımda öncelikle hemen hemen yarı Kenmotsu yapılar tanıtılarak, gerekli literatür bilgisi verilmiştir.

Tanım 2.2.2. M^{2n+1} , (φ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı ile verilsin. M^{2n+1} üzerinde bir g yarı Riemann metriği

$$\eta(X) = \varepsilon g(X, \xi),$$

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \varepsilon\eta(X)\eta(Y)$$

şartlarını sağlıyorsa g yarı Riemann metriğine M^{2n+1} üzerinde hemen hemen değme yarı Riemann metrik, (φ, ξ, η, g) yapısına hemen hemen yarı değme metrik yapı ve (φ, ξ, η, g) yapısı ile M^{2n+1} ye de hemen hemen yarı değme metrik manifold denir . Burada $\varepsilon = \pm 1$ dir (Calvaruso and Perrone 2010).

Tanım 3.1.1. $(M, \phi, \xi, \eta, g), (2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen yarı değme metrik manifold olsun. M^{2n+1} üzerinde

$$d\eta = 0, \qquad d\Phi = 2\eta \wedge \Phi$$

eşitlikleri sağlanıyorsa M^{2n+1} ye hemen hemen yarı Kenmotsu manifold denir.

Yardımcı Teorem 3.1.1. M^{2n+1} manifoldunun bir (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısı için,

$$\begin{aligned} 2g\big((\nabla_X\phi)Y, Z\big) &= 3d\Phi(X, \phi Y, \phi Z) - 3d\Phi(X, Y, Z) \\ &+ g\big(N^{(1)}(Y, Z), \phi X\big) + \varepsilon N^{(2)}(Y, Z)\eta(X) \\ &+ 2\varepsilon d\eta(\phi Y, X)\eta(Z) - 2\varepsilon d\eta(\phi Z, X)\eta(Y) \end{aligned} \tag{3.1}$$

dir. Burada $N^{(1)}, N^{(2)}$ tensör alanları, sırasıyla,

$$N^{(1)}(X,Y) = N_\phi(X,Y) + 2d\eta(X,Y)\xi \tag{3.2}$$

$$N^{(2)}(X,Y) = (\mathcal{L}_{\phi X}\eta)Y - (\mathcal{L}_{\phi Y}\eta)X \tag{3.3}$$

dir (Calvaruso and Perrone 2010).

Önerme 3.1.1. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen yarı Kenmotsu manifold olsun. O zaman, $\forall\, X, Y \in \mathcal{X}(M^{2n+1})$ için,

$$i)\ hX = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}_\xi \phi\right)X,\ \ h(\xi) = 0 \tag{3.4}$$

$$ii)\ \nabla_X \xi = -\phi^2 X - \phi h X \tag{3.5}$$

$$iii)\ \nabla_\xi \xi = 0,\ \ \nabla_\xi \phi = 0 \tag{3.6}$$

$$iv)\ (\phi\ o\ h)X + (h\ o\ \phi)X = 0 \tag{3.7}$$

$$v)\ (\nabla_X \eta)Y = [\varepsilon g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)] + \varepsilon g(\phi Y, hX) \tag{3.8}$$

$$vi)\ \text{İ}z(h) = 0 \tag{3.9}$$

$$vii)\ h = 0\ \Leftrightarrow\ \nabla_\xi = -\phi^2 \tag{3.10}$$

dir.

İspat $(\boldsymbol{i})$ **ve** $(\boldsymbol{ii})$**:** Koszul formülünden

$$
\begin{aligned}
&2g\big((\nabla_X\varphi)Y,Z\big)\\
&\qquad = 3d\Phi(X,\varphi Y,\varphi Z) - 3d\Phi(X,Y,Z) + g\big(N^{(1)}(Y,Z),\varphi X\big)\\
&\qquad + \varepsilon N^{(2)}(Y,Z)\eta(X)\\
&\qquad = 2\{\eta(X)\Phi(\varphi Y,\varphi Z)\}\\
&\qquad - 2\{\eta(X)\Phi(Y,Z) + \eta(Y)\Phi(Z,X) + \eta(Z)\Phi(X,Y)\} + g\big(N^{(1)}(Y,Z),\varphi X\big)\\
&\qquad + \varepsilon N^{(2)}(Y,Z)\eta(X)
\end{aligned}
$$

yazılabilir. Bu eşitlikte $Y=\xi$ alınırsa

$$2g\big((\nabla_X\varphi)\xi,Z\big) = -2\{g(Z,\varphi X)\} + g\big(N^{(1)}(\xi,Z),\varphi X\big) + \varepsilon N^{(2)}(\xi,Z)\eta(X)$$

eşitliği elde edilir.

(3.2) ve (3.3) ile verilen $N^{(1)}$ ve $N^{(2)}$ de $X=\xi$ ve $Y=Z$ yazılırsa;

$$N^{(1)}(\xi,Z) = -[\xi,Z] + \eta([\xi,Z])\xi$$

ve

$$N^{(2)}(\xi,Z) = \eta[\varphi Z,\xi]$$

yazılır.

Bu değerler kullanılarak

$$
\begin{aligned}
2g\big((\nabla_X\varphi)\xi, Z\big) &= -2g(Z,\varphi X) + g\big(N^{(1)}(\xi,Z),\varphi X\big) + \varepsilon N^{(2)}(\xi,Z)\eta(X) \\
&= -2g(Z,\varphi X) - g\big(\varphi(\mathcal{L}_\xi\varphi)Z,\varphi X\big) - \varepsilon\big[(\mathcal{L}_{\varphi Z}\eta)\xi\big]\eta(X) \\
&= -2g(Z,\varphi X) - g\Big((\mathcal{L}_\xi\varphi)Z, X\Big) + \varepsilon\eta\Big((\mathcal{L}_\xi\varphi)Z\Big)\eta(X) - \varepsilon\eta\Big((\mathcal{L}_{\varphi Z}\eta)\xi\Big)\eta(X) \\
&= -2g(Z,\varphi X) - g\Big((\mathcal{L}_\xi\varphi)Z, X\Big) + \varepsilon\eta([\xi,\varphi Z] - \varphi[\xi,Z])\eta(X) \\
&\quad - \varepsilon\big(\varphi Z(\eta(\xi)) - \eta[\varphi Z,\xi]\big)\eta(X) \\
&= -2g(Z,\varphi X) - g\Big((\mathcal{L}_\xi\varphi)Z, X\Big) + \varepsilon\eta[\xi,\varphi Z]\eta(X) + \varepsilon\eta[\varphi Z,\xi]\eta(X) \\
&= -2g(Z,\varphi X) - g\Big((\mathcal{L}_\xi\varphi)Z, X\Big)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Eğer $hZ = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_\xi\varphi)Z$ olarak tanımlanır ise h simetrik bir operatör olup,

$$g\big((\nabla_X\varphi)\xi, Z\big) = g(X,\varphi Z) - g(hX, Z)$$

dir. Ve buradan

$$\nabla_X\xi = -\varphi^2X - \varphi hX$$

bulunur.

iii) (3.5) eşitliğinde $X = \xi$ alınır ise;

$$\nabla_\xi\xi = 0$$

olduğu kolayca görülür. Ayrıca

$$(\nabla_X\varphi)\xi = -\varphi X - hX$$

eşitliği gözönüne alınır ve Kozsul formülünde $X = \xi$ alınır ise;

$$2g\left(\left(\nabla_\xi\varphi\right)Y,Z\right)=2\{\Phi(\varphi Y,\varphi Z)\}-2\{\Phi(Y,Z)\}+g\left(N^{(1)}(Y,Z),\varphi\xi\right)+\varepsilon N^{(2)}(Y,Z)$$
$$=2g(\varphi Y,\varphi^2 Z)-2g(Y,\varphi Z)+\varepsilon N^{(2)}(Y,Z)$$
$$=2g(Y,\varphi Z)-2g(Y,\varphi Z)+\varepsilon N^{(2)}(Y,Z)$$

$$=\varepsilon N^{(2)}(Y,Z)=0$$

yazılabilir. $Z\neq 0$ olduğundan $\nabla_\xi\varphi=0$ ‘dır.

(iv) $\forall\ X,Y\in\mathcal{X}(M^{2n+1})$ için,

$$(\phi\ o\ h)X+(h\ o\ \phi)X=\varphi(hX)+h(\varphi X)$$
$$=\frac{1}{2}(\varphi[\xi,\varphi X]-\varphi^2[\xi,X])+\frac{1}{2}([\xi,\varphi^2X]-\varphi[\xi,\varphi X])$$
$$=-\frac{1}{2}\varphi^2[\xi,X]+\frac{1}{2}[\xi,\varphi^2X]$$
$$=\frac{1}{2}[\xi,X]-\frac{1}{2}\eta([\xi,X])\xi+\frac{1}{2}[\xi,-X+\eta(X)\xi]$$
$$=\frac{1}{2}[\xi,X]-\frac{1}{2}\eta([\xi,X])\xi-\frac{1}{2}[\xi,X]+\frac{1}{2}[\xi,\eta(X)\xi]$$
$$=-\frac{1}{2}\eta([\xi,X])\xi+\frac{1}{2}[\xi,\eta(X)\xi]$$
$$=-\frac{1}{2}\eta\left(\nabla_\xi X-\nabla_X\xi\right)\xi+\frac{1}{2}\left(\nabla_\xi\eta(X)\xi-\nabla_{\eta(X)\xi}\xi\right)$$
$$=-\frac{1}{2}\eta\left(\nabla_\xi X\right)\xi+\frac{1}{2}\eta(\nabla_X\xi)\xi+\frac{1}{2}\nabla_\xi\eta(X)\xi$$
$$=-\frac{1}{2}\eta\left(\nabla_\xi X\right)\xi+\frac{1}{2}\eta(\nabla_X\xi)\xi+\frac{\varepsilon}{2}\nabla_\xi g(X,\xi)\xi$$
$$=-\frac{1}{2}\eta\left(\nabla_\xi X\right)\xi+\frac{1}{2}\eta(\nabla_X\xi)\xi+\frac{1}{2}\eta\left(\nabla_\xi X\right)\xi=\frac{1}{2}\eta(\nabla_X\xi)\xi=\eta(\nabla_X\xi)\xi$$
$$=0$$

yazılabilir. Dolayısı ile (3.7) eşitliği elde edilir.

(v) $\forall\, X, Y \in \mathcal{X}(M^{2n+1})$ için,

$$(\nabla_X \eta)Y = \nabla_X \eta(Y) - \eta(\nabla_X Y)$$

$$= \nabla_X \varepsilon g(Y, \xi) - \eta(\nabla_X Y)$$

$$= \varepsilon \nabla_X g(Y, \xi) - \eta(\nabla_X Y)$$

$$= \varepsilon g(\nabla_X Y, \xi) + \varepsilon g(Y, \nabla_X \xi) - \eta(\nabla_X Y)$$

$$= \varepsilon g(Y, \nabla_X \xi)$$

$$= \varepsilon g(Y, -\varphi^2 X - \varphi h X)$$

$$= \varepsilon g(Y, -\varphi^2 X) + \varepsilon g(Y, -\varphi h X)$$

$$= \varepsilon g(\varphi Y, \varphi X) - \varepsilon g(Y, \varphi h X)$$

$$= \varepsilon g(X, Y) - \varepsilon . \varepsilon \eta(X)\eta(Y) - \varepsilon g(Y, \varphi h X)$$

$$= \varepsilon g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) - \varepsilon g(Y, \varphi h X)$$

$$= [\varepsilon g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)] + \varepsilon g(\varphi Y, h X)$$

dır. Dolayısı ile (3.8) ispat edilmiş olur. (vi) ve (vii) eşitlikleri (3.4)'den açıktır.

Yardımcı Teorem 3.1.2. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen değme manifold olsun. O zaman, $\forall\, X \in \mathcal{X}(M)$ için,

$$(\nabla_\xi h)\, o\, \phi + \phi\, o\, (\nabla_\xi h) = 0$$

dir (Blair 2002).

Önerme 3.1.2. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen yarı Kenmotsu manifold olsun. O zaman, $\forall\, X, Y \in \mathcal{X}(M)$ için Levi-Civita konneksiyonu

$$(\nabla_X \phi)Y + (\nabla_{\phi X} \phi)\phi Y = -[\eta(Y)\phi X + 2\varepsilon g(X, \phi Y)\xi] - \eta(Y) h X \qquad (3.11)$$

koşulunu sağlar.

İspat: (3.1) eşitliğinden yararlanılarak;

$$2g\big((\nabla_X\varphi)Y,Z\big)$$
$$= 2\{\eta(X)\phi(\varphi Y,\varphi Z)\} - 2\{\eta(X)\phi(Y,Z)+\eta(Y)\phi(Z,X)+\eta(Z)\phi(X,Y)\}$$
$$+ g\big(N^{(1)}(Y,Z),\varphi X\big)$$

yazılabilir. Bu eşitlikte $X=\varphi X$, $Y=\varphi Y$ yazılırsa;

$$2g\left(\big(\nabla_{\varphi X}\varphi\big)\varphi Y,Z\right) = -2\eta(Z)\phi(\varphi X,\varphi Y) + g\big(N^{(1)}(\varphi Y,Z),\varphi^2 X\big)$$

bulunur. Elde edilen her iki eşitlik toplanırsa;

$$2g\left((\nabla_X\varphi)Y + \big(\nabla_{\varphi X}\varphi\big)\varphi Y,Z\right) = 2\{\,\eta(X)\phi(\varphi Y,\varphi Z) - \eta(X)\phi(Y,Z) \tag{3.12}$$
$$-\eta(Y)\phi(Z,X) - \eta(Z)\phi(X,Y) - \eta(Z)\phi(\varphi X,\varphi Y)\}$$
$$-g\big(\varphi N^{(1)}(Y,Z)+N^{(1)}(\varphi Y,Z),X\big) + \frac{1}{\varepsilon}\eta(X)\eta\left(N^{(1)}(\varphi Y,Z)\right)$$

elde edilir.

$$\varphi N^{(1)}(Y,Z) + N^{(1)}(\varphi Y,Z)$$

toplanacak olursa

$$\varphi N^{(1)}(Y,Z) = \varphi^3[Y,Z] + \varphi[\varphi Y,\varphi Z] - \varphi^2[\varphi Y,Z] - \varphi^2[Y,\varphi Z]$$
$$+$$
$$N^{(1)}(\varphi Y,Z) = \varphi^2[\varphi Y,Z] + [\varphi^2 Y,\varphi Z] - \varphi[\varphi^2 Y,Z] - \varphi[\varphi Y,\varphi Z]$$

ifadelerinden

$$\varphi N^{(1)}(Y,Z) + N^{(1)}(\varphi Y,Z) = -\varphi[Y,Z] - \varphi^2[\varphi Y,Z] - \varphi^2[Y,\varphi Z] + \varphi^2[\varphi Y,Z]$$
$$+[\varphi^2 Y,\varphi Z] - \varphi[\varphi^2 Y,Z]$$

$$= -\varphi[Y,Z] - \varphi^2[\varphi Y,Z] + [\varphi^2 Y,\varphi Z] - \varphi[\varphi^2 Y,Z]$$

$$-\varphi^2[Y,\varphi Z] + \varphi^2[\varphi Y,Z]$$

$$= -\varphi[Y,Z] + [\varphi Y,Z] - \eta([\varphi Y,Z])\xi - [Y,\varphi Z] + [\eta(Y)\xi,\varphi Z]$$

$$+\varphi[Y,Z] - \varphi[\eta(Y)\xi,Z] + \varphi^2[\varphi Y,Z] - \varphi^2[Y,\varphi Z]$$

$$= [\varphi Y,Z] - \eta([\varphi Y,Z])\xi - [Y,\varphi Z] + [\eta(Y)\xi,\varphi Z] -$$
$$\varphi[\eta(Y)\xi,Z] + \varphi^2[\varphi Y,Z] - \varphi^2[Y,\varphi Z]$$

$$= \nabla_{\varphi Y}Z - \nabla_Z\varphi Y - \eta\big(\nabla_{\varphi Y}Z\big)\xi + \eta(\nabla_Z\varphi Y)\xi - \nabla_Y\varphi Z +$$
$$\nabla_{\varphi Z}Y + \nabla_{\eta(Y)\xi}\varphi Z - \nabla_{\varphi Z}\eta(Y)\xi - \varphi\nabla_{\eta(Y)\xi}Z +$$
$$+\varphi(\nabla_Z\eta(Y)\xi) + \varphi^2[\varphi Y,Z] - \varphi^2[Y,\varphi Z]$$

$$= \nabla_{\varphi Y}Z - \nabla_Z\varphi Y - \eta\big(\nabla_{\varphi Y}Z\big)\xi - \varepsilon g(\varphi Y,\nabla_Z\xi)\xi - \nabla_Y\varphi Z +$$
$$\nabla_{\varphi Z}Y - \eta(Y)\nabla_\xi\varphi Z - \varepsilon g\big(\nabla_{\varphi Z}Y,\xi\big)\xi - \varepsilon g\big(Y,\nabla_{\varphi Z}\xi\big)\xi -$$
$$\eta(Y)\nabla_{\varphi Z}\xi - \eta(Y)\varphi\nabla_\xi Z + \varphi(\varepsilon g(\nabla_Z Y,\xi)\xi) +$$
$$\varphi(\varepsilon g(Y,\nabla_Z\xi)\xi) + \varphi\eta(Y)\nabla_Z\xi + \varphi^2[\varphi Y,Z] - \varphi^2[Y,\varphi Z]$$

$$= \nabla_{\varphi Y}Z - \nabla_Z\varphi Y - \eta\big(\nabla_{\varphi Y}Z\big)\xi - \varepsilon g(\varphi Y,\nabla_Z\xi)\xi - \nabla_Y\varphi Z +$$
$$\nabla_{\varphi Z}Y - \varphi\eta(Y)\nabla_\xi Z - \eta\big(\nabla_{\varphi Z}Y\big)\xi - \varepsilon g\big(Y,\nabla_{\varphi Z}\xi\big)\xi -$$
$$\eta(Y)\nabla_{\varphi Z}\xi - \varphi\eta(Y)\nabla_\xi Z + \varphi\eta(Y)\nabla_Z\xi + \varphi^2[\varphi Y,Z] -$$
$$\varphi^2[Y,\varphi Z]$$

$$= \nabla_{\varphi Y}Z - \nabla_Z\varphi Y - \eta\big(\nabla_{\varphi Y}Z\big)\xi - \varepsilon g(\varphi Y,\nabla_Z\xi)\xi - \nabla_Y\varphi Z +$$
$$\nabla_{\varphi Z}Y - \eta\big(\nabla_{\varphi Z}Y\big)\xi - \varepsilon g\big(Y,\nabla_{\varphi Z}\xi\big)\xi - \eta(Y)\nabla_{\varphi Z}\xi +$$
$$\eta(Y)\varphi\nabla_Z\xi + \varphi^2[\varphi Y,Z] - \varphi^2[Y,\varphi Z]$$

$$= \nabla_{\varphi Y}Z - \nabla_Z\varphi Y - \eta\big(\nabla_{\varphi Y}Z\big)\xi - \varepsilon g(\varphi Y,\nabla_Z\xi)\xi - \nabla_Y\varphi Z +$$
$$\nabla_{\varphi Z}Y - \eta\big(\nabla_{\varphi Z}Y\big)\xi - \varepsilon g\big(Y,\nabla_{\varphi Z}\xi\big)\xi - \eta(Y)\nabla_{\varphi Z}\xi +$$
$$\eta(Y)\varphi\nabla_Z\xi - \nabla_{\varphi Y}Z + \nabla_Z\varphi Y + \eta\big(\nabla_{\varphi Y}Z\big)\xi - \eta(\nabla_Z\varphi Y)\xi +$$
$$\nabla_Y\varphi Z - \nabla_{\varphi Z}Y - \eta(\nabla_Y\varphi Z)\xi + \eta\big(\nabla_{\varphi Z}Y\big)\xi$$

$$= -\varepsilon g(\varphi Y,\nabla_Z\xi)\xi - \varepsilon g\big(Y,\nabla_{\varphi Z}\xi\big)\xi - \eta(Y)\nabla_{\varphi Z}\xi +$$
$$\eta(Y)\varphi\nabla_Z\xi + \varepsilon g(\varphi Y,\nabla_Z\xi)\xi + \varepsilon g(\varphi Z,\nabla_Y\xi)\xi$$

$$= -\varepsilon g(Y, -\varphi^3 Z - \varphi h\varphi Z)\xi - \eta(Y)(-\varphi^3 Z - \varphi h\varphi Z) + \eta(Y)(-\varphi^3 Z - \varphi^2 hZ) + \varepsilon g(\varphi Z, -\varphi^2 Y - \varphi hY)\xi$$

$$= -\varepsilon g(Y, \varphi Z)\xi + \varepsilon g(Y, hZ)\xi - \eta(Y)\varphi Z + \eta(Y)hZ + \eta(Y)\varphi Z + \eta(Y)hZ - \varepsilon g(Z, \varphi Y)\xi - \varepsilon g(Z, hY)\xi$$

$$= 2\eta(Y)hZ$$

dır. Yani;

$$\varphi N^{(1)}(Y,Z) + N^{(1)}(\varphi Y, Z) = 2\eta(Y)hZ$$

olarak bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\eta\left(N^{(1)}(\varphi Y, Z)\right) &= \varepsilon g\left(N^{(1)}(\varphi Y, Z), \xi\right) \\
&= \varepsilon g(\varphi^2[\varphi Y, Z] + [\varphi^2 Y, \varphi Z] - \varphi[\varphi^2 Y, Z] - \varphi[\varphi Y, \varphi Z], \xi) \\
&= \varepsilon g([\varphi^2 Y, \varphi Z], \xi) = \varepsilon g(-[Y, \varphi Z], \xi) + \varepsilon g([\eta(Y)\xi, \varphi Z], \xi) \\
&= \varepsilon g\left(\nabla_{\varphi Z} Y, \xi\right) - \varepsilon g(\nabla_Y \varphi Z, \xi) + \varepsilon g\left(\nabla_{\eta(Y)\xi}\varphi Z, \xi\right) - \varepsilon g\left(\nabla_{\varphi Z}\eta(Y)\xi, \xi\right) \\
&= \eta\left(\nabla_{\varphi Z} Y\right) - \eta(\nabla_Y \varphi Z) - \varepsilon g\left(\varepsilon g\left(\nabla_{\varphi Z} Y, \xi\right)\right)\xi + \varepsilon g\left(Y, \nabla_{\varphi Z}\xi\right)\xi \\
&+ \left(\eta(Y)\nabla_{\varphi Z}\xi, \xi\right) \\
&= \eta\left(\nabla_{\varphi Z} Y\right) - \eta(\nabla_Y \varphi Z) - \varepsilon g\left(\eta\left(\nabla_{\varphi Z} Y\right)\xi, \xi\right) - g\left(Y, \nabla_{\varphi Z}\xi\right) g(\xi, \xi) \\
&- \varepsilon g\left(\eta(Y)\nabla_{\varphi Z}\xi, \xi\right) \\
&= \eta\left(\nabla_{\varphi Z} Y\right) - \eta(\nabla_Y \varphi Z) - \eta\left(\nabla_{\varphi Z} Y\right) - \varepsilon g\left(Y, \nabla_{\varphi Z}\xi\right) - \varepsilon\eta(Y) g\left(\nabla_{\varphi Z}\xi, \xi\right) \\
&= \varepsilon g(\varphi Z, \nabla_Y \xi) - \varepsilon g\left(Y, \nabla_{\varphi Z}\xi\right) \\
&= \varepsilon g(\varphi Z, -\varphi^2 Y - \varphi hY) - \varepsilon g(Y, -\varphi^3 Z - \varphi h\varphi Z) \\
&= \varepsilon g(Z, \varphi^3 Y) - \varepsilon g(Z, hY) + \varepsilon g(Y, \varphi^3 Z) + g(Y, hZ) = 0
\end{aligned}$$

dır. Bu ifadeler (3.12) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&2g\left((\nabla_X \varphi)Y + \left(\nabla_{\varphi X}\varphi\right)\varphi Y, Z\right) \\
&\qquad = -2\eta(Y) g(\varphi X, Z) - 2\eta(Y) g(hX, Z) - 4\eta(Z) g(X, \varphi Y) \\
&\qquad = -2\eta(Y) g(\varphi X, Z) - 2\eta(Y) g(hX, Z) - 4\varepsilon g(Z, \xi) g(X, \varphi Y)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu son eşitlikten

$$(\nabla_X \phi)Y + \big(\nabla_{\phi X}\phi\big)\phi Y = -[\eta(Y)\phi X + 2\varepsilon g(X,\phi Y)\xi] - \eta(Y)hX$$

dir. Bu ise (3.11) ‘in ispatıdır.

Sonuç: $(M^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)$, hemen hemen yarı Kenmotsu manifold olsun. $\forall\, X,Y\ \in \mathcal{X}(M)$ için,

$$\phi\big(\nabla_{\phi X}\phi\big)Y - (\nabla_X \phi)Y = 2\eta(Y)\phi X - \varepsilon g(\phi X + hX, Y)\xi \tag{3.13}$$

dir.

İspat: $\forall\, X,Y \in \mathcal{X}(M^{2n+1})$ için,

$$\begin{aligned}
\big(\nabla_{\phi X}\phi\big)\phi Y &= \nabla_{\varphi X}\varphi^2 Y - \varphi\nabla_{\varphi X}\varphi Y \\
&= -\nabla_{\varphi X}Y + \nabla_{\varphi X}\eta(Y)\xi - \varphi^2\nabla_{\varphi X}Y - \varphi\big(\nabla_{\varphi X}\varphi\big)Y \\
&= -\nabla_{\varphi X}Y + \varepsilon g\big(\nabla_{\varphi X}Y,\xi\big)\xi + \varepsilon g\big(Y,\nabla_{\varphi X}\xi\big)\xi + \eta(Y)\nabla_{\varphi X}\xi + \nabla_{\varphi X}Y - \\
&\quad \eta\big(\nabla_{\varphi X}Y\big)\xi - \varphi\big(\nabla_{\varphi X}\varphi\big)Y \\
&= \varepsilon g(Y,-\varphi^3 X - \varphi h\varphi X)\xi + \eta(Y)(-\varphi^3 X - \varphi h\varphi X) - \varphi\big(\nabla_{\varphi X}\varphi\big)Y \\
&= \varepsilon g(Y,-\varphi X - hX)\xi + \eta(Y)\varphi X - \eta(Y)hX - \varphi\big(\nabla_{\varphi X}\varphi\big)Y \\
&= \varepsilon g(Y,\varphi X)\xi - \varepsilon g(Y,hX)\xi + \eta(Y)\varphi X - \eta(Y)hX - \varphi\big(\nabla_{\varphi X}\varphi\big)Y
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafına $(\nabla_X\varphi)Y$ eklenirse;

$$\begin{aligned}
(\nabla_X\varphi)Y + \big(\nabla_{\phi X}\phi\big)\phi Y &= \varepsilon g(Y,\varphi X)\xi - \varepsilon g(Y,hX)\xi + \eta(Y)\varphi X - \eta(Y)hX - \\
&\quad \varphi\big(\nabla_{\varphi X}\varphi\big)Y + (\nabla_X\varphi)Y
\end{aligned}$$

olup, (3.11) eşitliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
(\nabla_X\varphi)Y - \varphi\big(\nabla_{\varphi X}\varphi\big)Y &= -2\eta(Y)\varphi X - \varepsilon g(X,\varphi Y)\xi + \varepsilon g(Y,hX)\xi \\
&= -2\eta(Y)\varphi X + \varepsilon\big[\big(g(\varphi X,Y) + g(hX,Y)\big)\xi\big]
\end{aligned}$$

$$= -2\eta(Y)\varphi X + \varepsilon g(\varphi X + hX, Y)\xi$$

$$\varphi\big(\nabla_{\varphi X}\varphi\big)Y - (\nabla_X\varphi)Y = 2\eta(Y)\varphi X - \varepsilon g(\varphi X + hX, Y)\xi$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

Önerme 3.1.3. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen yarı Kenmotsu manifold olsun. O zaman, $\forall\, X, Y \in \mathcal{X}(M)$ için,

$$g\big(R_{\xi X}Y, Z\big) - g\big(R_{\xi X}\phi Y, \phi Z\big) + g\big(R_{\xi\phi X}Y, \phi Z\big) + g\big(R_{\xi\phi X}\phi Y, Z\big) \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned} = 2(\nabla_{hX}\Phi)(Y, Z) + 2\eta(Y)g(X, Z) - 2\eta(Z)g(X, Y) - 2\eta(Y)g(\phi hX, Z) \\ + 2\eta(Z)g(\phi hX, Y) \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: R Riemann eğrilik tensörü simetrik olduğundan $R(\xi, X, Y, Z) = g(X, R(Y, Z)\xi)$ dır. (3.20) eşitliğinin kullanılmasıyla

$$R(\xi, X, Y, Z) - R(\xi, X, \varphi Y, \varphi Z) + R(\xi, \varphi X, Y, \varphi Z) + R(\xi, \varphi X, \varphi Y, Z) =$$

$$\begin{aligned} = \eta(Y)g(X, Z) - \eta(Z)g(X, Y) - \eta(Y)g(\varphi hZ, X) + \eta(Z)g(\varphi hY, X) + g\big((\nabla_Z\varphi h)Y, X\big) \\ - g\big((\nabla_Y\varphi h)Z, X\big) - g\Big(\big(\nabla_{\varphi Z}\varphi h\big)\varphi Y, X\Big) + g\Big(\big(\nabla_{\varphi Y}\varphi h\big)\varphi Z, X\Big) \\ + \eta(Y)g(\varphi X, \varphi Z) - \eta(Y)g(hZ, \varphi X) + g\Big(\big(\nabla_{\varphi Z}\varphi h\big)Y, \varphi X\Big) \\ - g\big((\nabla_Y\varphi h)\varphi Z, \varphi X\big) - \eta(Z)g(\varphi X, \varphi Y) + \eta(Z)g(hY, \varphi X) \\ + g\big((\nabla_Z\varphi h)\varphi Y, \varphi X\big) - g\Big(\big(\nabla_{\varphi Y}\varphi h\big)Z, \varphi X\Big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \eta(Y)g(X, Z) - \eta(Z)g(X, Y) - \eta(Y)g(\varphi hZ, X) + \eta(Z)g(\varphi hY, X) + \eta(Y)g(X, Z) \\ - \eta(Y)\eta(X)\eta(Z) + \eta(Y)g(\varphi hZ, X) - \eta(Z)g(X, Y) + \eta(Z)\eta(X)\eta(Y) \\ - \eta(Z)g(\varphi hY, X) + g\big((\nabla_Z\varphi h)Y, X\big) - g\big((\nabla_Y\varphi h)Z, X\big) \\ - g\Big(\big(\nabla_{\varphi Z}\varphi h\big)\varphi Y, X\Big) + g\Big(\big(\nabla_{\varphi Y}\varphi h\big)\varphi Z, X\Big) + g\Big(\big(\nabla_{\varphi Z}\varphi h\big)Y, \varphi X\Big) \\ - g\big((\nabla_Y\varphi h)\varphi Z, \varphi X\big) + g\big((\nabla_Z\varphi h)\varphi Y, \varphi X\big) - g\Big(\big(\nabla_{\varphi Y}\varphi h\big)Z, \varphi X\Big) \end{aligned}$$

$$= 2\eta(Y)g(X,Z) - 2\eta(Z)g(X,Y) + g\big((\nabla_Z\varphi h)Y, X\big) - g\big((\nabla_Y\varphi h)Z, X\big)$$
$$- g\left(\left(\nabla_{\varphi Z}\varphi h\right)\varphi Y, X\right) + g\left(\left(\nabla_{\varphi Y}\varphi h\right)\varphi Z, X\right) + g\left(\left(\nabla_{\varphi Z}\varphi h\right)Y, \varphi X\right)$$
$$- g\big((\nabla_Y\varphi h)\varphi Z, \varphi X\big) + g\big((\nabla_Z\varphi h)\varphi Y, \varphi X\big) - g\left(\left(\nabla_{\varphi Y}\varphi h\right)Z, \varphi X\right)$$

elde edilir.

$$B(X,Y,Z) = -g(\varphi X, (\nabla_Y\varphi h)\varphi Z) - g(X, (\nabla_Y\varphi h)Z) + g\big(X, \left(\nabla_{\varphi Y}\varphi h\right)\varphi Z\big)$$
$$- g\big(\varphi X, \left(\nabla_{\varphi Y}\varphi h\right)Z\big)$$

şeklinde tanımlanır ise

$$B(X,Z,Y) = -g(\varphi X, (\nabla_Z\varphi h)\varphi Y) - g(X, (\nabla_Z\varphi h)Y) + g\big(X, \left(\nabla_{\varphi Z}\varphi h\right)\varphi Y\big)$$
$$- g\big(\varphi X, \left(\nabla_{\varphi Z}\varphi h\right)Y\big)$$

yazılabilir.

$$B(X,Y,Z) - B(X,Z,Y)$$
$$= -g(\varphi X, (\nabla_Y\varphi h)\varphi Z) - g(X, (\nabla_Y\varphi h)Z) + g\big(X, \left(\nabla_{\varphi Y}\varphi h\right)\varphi Z\big)$$
$$- g\big(\varphi X, \left(\nabla_{\varphi Y}\varphi h\right)Z\big) + g(\varphi X, (\nabla_Z\varphi h)\varphi Y) + g(X, (\nabla_Z\varphi h)Y)$$
$$- g\big(X, \left(\nabla_{\varphi Z}\varphi h\right)\varphi Y\big) + g\big(\varphi X, \left(\nabla_{\varphi Z}\varphi h\right)Y\big)$$

olacağından

$$R(\xi,X,Y,Z) - R(\xi,X,\varphi Y,\varphi Z) + R(\xi,\varphi X,Y,\varphi Z) + R(\xi,\varphi X,\varphi Y,Z)$$
$$= 2\eta(Y)g(X,Z) - 2\eta(Z)g(X,Y) + B(X,Y,Z) - B(X,Z,Y) \quad (3.15)$$

şeklinde elde edilir. Öte yandan

$$g\big(X,(\nabla_{\varphi Y}\varphi h)\varphi Z\big)-g\big(\varphi X,(\nabla_{\varphi Y}\varphi h)Z\big)=$$
$$=g\big(\varphi X,\varphi(\nabla_{\varphi Y}\varphi h)\varphi Z\big)-g\big(\varphi X,(\nabla_{\varphi Y}\varphi h)Z\big)+\eta(X)\eta\left((\nabla_{\varphi Y}\varphi h)\varphi Z\right)$$
$$=g\big(\varphi X,\varphi(\nabla_{\varphi Y}\varphi h)\varphi Z\big)-(\nabla_{\varphi Y}\varphi h)Z+\eta(X)\eta\left((\nabla_{\varphi Y}\varphi h)\varphi Z\right)\quad(3.16)$$

ve

$$\varphi(\nabla_Y\varphi h)\varphi Z-(\nabla_Y\varphi h)Z=\varphi\nabla_Y\varphi h\varphi Z-\varphi^2h\nabla_Y\varphi Z-\nabla_Y\varphi hZ+\varphi h\nabla_Y Z$$
$$=\varphi\nabla_Y hZ+h\nabla_Y\varphi Z-\nabla_Y\varphi hZ+\varphi h\nabla_Y Z$$
$$=\varphi\nabla_Y hZ+h\varphi\nabla_Y Z+h(\nabla_Y\varphi)Z-(\nabla_Y\varphi)hZ-\varphi\nabla_Y hZ$$
$$+\varphi h\nabla_Y Z\ \varphi(\nabla_Y\varphi h)\varphi Z-(\nabla_Y\varphi h)Z=h(\nabla_Y\varphi)Z-(\nabla_Y\varphi)hZ\quad(3.17)$$

$$\eta\left((\nabla_{\varphi Y}\varphi h)\varphi Z\right)=\varepsilon g\left((\nabla_{\varphi Y}\varphi h)\varphi Z,\xi\right)=\varepsilon g\big(\nabla_{\varphi Y}\varphi h\varphi Z,\xi\big)-\varepsilon g\big(\varphi h\nabla_{\varphi Y}\varphi Z,\xi\big)=$$

$$=\varepsilon g\big(\nabla_{\varphi Y}hZ,\xi\big)=-\varepsilon g\big(hZ,\nabla_{\varphi Y}\xi\big)=-\varepsilon g(hZ,-\varphi^3Y-\varphi h\varphi Y)=$$

$$=-\varepsilon g(hZ,\varphi Y-hY)=\varepsilon g(hZ,-\varphi Y+hY)\qquad(3.18)$$

olarak elde edilen $(3.16),(3.17)$ ve (3.18) ifadelerinin yanısıra $(3.11),(3.13)$ eşitlikleride $B(X,Y,Z)$'de yerine yazılırsa

$$B(X,Y,Z)=g\big(X,\varphi\big((\nabla_Y\varphi h)\varphi Z\big)-(\nabla_Y\varphi h)Z\big)$$
$$+g\left(\varphi X,\varphi\left((\nabla_{\varphi Y}\varphi h)\varphi Z\right)-\left(\nabla_{\varphi Y}\varphi h\right)Z\right)+\eta(X)\eta\left((\nabla_{\varphi Y}\varphi h)\varphi Z\right)$$
$$=g(X,-(\nabla_Y\varphi)hZ+h(\nabla_Y\varphi)Z)+g\big(\varphi X,-\big(\nabla_{\varphi Y}\varphi\big)hZ+h\big(\nabla_{\varphi Y}\varphi\big)Z\big)$$
$$+\eta(X)\eta\left((\nabla_{\varphi Y}\varphi h)\varphi Z\right)$$
$$=-g(X,-(\nabla_Y\varphi)hZ)+g(hX,(\nabla_Y\varphi)Z)-g\big(\varphi X,-\big(\nabla_{\varphi Y}\varphi\big)hZ\big)$$
$$+g\big(\varphi X,h\big(\nabla_{\varphi Y}\varphi\big)Z\big)+\eta(X)\eta\left((\nabla_{\varphi Y}\varphi h)\varphi Z\right)$$
$$=g\big(X,\varphi\big(\nabla_{\varphi Y}\varphi\big)hZ-(\nabla_Y\varphi)hZ\big)+g\big(hX,(\nabla_Y\varphi)Z+\varphi\big(\nabla_{\varphi Y}\varphi\big)Z\big)$$
$$+\eta(X)\eta\left((\nabla_{\varphi Y}\varphi h)\varphi Z\right)$$

$$= g(X, 2\eta(hZ)\varphi Y - \varepsilon g(\varphi Y + hY, hZ)\xi)$$
$$+ g(hX, 2(\nabla_Y\varphi)Z + 2\eta(Z)\varphi Y - \varepsilon g(\varphi Y + hY, Z)\xi)$$
$$+ \eta(X)[+\varepsilon g(hZ, -\varphi Y + hY)]$$
$$= -g(\varphi Y + hY, hZ)\eta(X) + 2g(hX, (\nabla_Y\varphi)Z) + 2\eta(Z)g(\varphi Y, hX)$$
$$- \varepsilon g(hZ, \varphi Y)\eta(X) + \varepsilon g(hZ, hY)\eta(X)$$
$$= -g(\varphi Y, hZ)\eta(X) - g(hY - hZ)\eta(X) + 2g(hX, (\nabla_Y\varphi)Z)$$
$$+ 2\eta(Z)g(\varphi Y, hX) - \varepsilon g(hZ, \varphi Y)\eta(X) + \varepsilon g(hZ, hY)\eta(X)$$

$$B(X,Y,Z) = -(\varepsilon + 1)g(\varphi Y, hZ)\eta(X) + (\varepsilon - 1)g(hY, hZ)\eta(X) + 2g(hX, (\nabla_Y\varphi)Z) + 2\eta(Z)g(\varphi Y, hX) \tag{3.19}$$

eşitliği elde edilir. Bu ifadeler kullanılarak (3.15) eşitliği

$$R(\xi, X, Y, Z) - R(\xi, X, \varphi Y, \varphi Z) + R(\xi, \varphi X, Y, \varphi Z) + R(\xi, \varphi X, \varphi Y, Z)$$
$$= 2\eta(Y)g(X,Z) - 2\eta(Z)g(X,Y) + 2g(hX, (\nabla_Y\varphi)Z)$$
$$- 2g(hX, (\nabla_Z\varphi)Y) + 2\eta(Z)g(\varphi Y, hX) - 2\eta(Y)g(\varphi Z, hX)$$

şeklinde yeniden yazılarak

$$d\Phi = 2\eta \wedge \Phi$$

ve

$$3\Omega(Y, Z, hX) = (\nabla_Y\Phi)(Z, hX) + (\nabla_Z\Phi)(hX, Y) + (\nabla_{hX}\Phi)(Y, Z)$$

eşitlikleri gözönüne alınarak ispat tamamlanır.

Tanım 3.1.2. M^n bir C^∞ manifold olsun. Keyfi bir $p \in M^n$ noktası için T_PM^n nin r-boyutlu altuzayı $r \leq n$ $\mathcal{D}$ ve $\mathcal{D}_P$ nin bir koleksiyonu $\mathcal{D} = \{\mathcal{D}_P\}$ olmak üzere, p noktasını ihtiva eden M^n nin bir U açık altcümlesi üzerinde C^∞sınıfından lineer bağımsız $\{X_1, \dots, X_r\}$ vektör alanları U nun her $q \in M^n$ noktasında hala $\mathcal{D}_P$ nin bir bazı oluyorsa $\mathcal{D}$ ye M^n üzerinde bir r-boyutlu dağılım ve $\{X_1, \dots, X_r\}$ cümlesine U üzerinde $\mathcal{D}$ için birlokal baz denir (Sharpe 1997).

Tanım 3.1.3. M^n bir C^∞ manifold ve M^n nin bir r-boyutlu dağılımı $\mathcal{D}$ olsun. M^n nin bir haritası $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ olmak üzere, $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_r}\right\}$ cümlesi $\mathcal{D}$ dağılımı için bir baz oluşturuyorsa x haritasına $\mathcal{D}$ dağılımına göre düzlemseldir denir. Eğer M^n nin her noktasında tanımlı olan $\mathcal{D}$ dağılımı için bir düzlemsel harita bulunabiliyorsa $\mathcal{D}$ dağılımına integrallenebilirdir denir (Sharpe 1997).

Tanım 3.1.4. M^n bir C^∞ manifold ve M^n nin bir r-boyutlubağlantılı altmanifoldu N ve M^n nin bir r-boyutlu dağılımı $\mathcal{D}$ olsun. Her $p \in N$ için, $\mathcal{D}_P = T_P N$ ise N ye M^n nin r-boyutlu integral altmanifoldu denir (Sharpe 1997).

Önerme 3.1.4. M^n bir C^∞ manifold ve w M^n üzerinde C^∞ bir 1-form olsun. M^n nin her $p \in M^n$ noktası için $n = boy(\ker w_p) = r$ sabit ise $\ker w_p$ M^n üzerinde bir r-boyutlu dağılımdır (Sharpe 1997).

Teorem 3.1.1. (Frobenius Teoremi) M^n bir C^∞ manifold ve M^n nin bir r-boyutlu dağılımı $\mathcal{D}$ olsun. $\mathcal{D}$ dağılımının integrallenebilmesi için gerek ve yeter koşul her $X, Y \in \mathcal{D}$ için $[X, Y] \in \mathcal{D}$ olmasıdır (Sharpe 1997).

Önerme 3.1.5. M^n bir C^∞ manifold ve w M^n üzerinde C^∞ bir 1-form olsun. M^n nin $\forall\, p \in M^n$ noktası için $n = boy(\ker w_p) = r$ sabit olsun. Böylece

$\mathcal{D} = \{\ker w_p : p \in M^n\}$ dağılımının integrallenebilmesi için gerek ve yeter koşul $\forall$

$X, Y \in \ker w$ için $dw(X, Y) = 0$ olmasıdır (Sharpe 1997).

Uyarı 3.1.1. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen yarı Kenmotsu manifold olsun. $\forall\, p \in M^{2n+1}$ için,

$$\mathcal{D}_P = \ker \eta_p = \{X \in T_P M : \eta(X_P) = 0\}$$

ve $\mathcal{D} = \{\mathcal{D}_P\}$ olmak üzere, $boy(\mathcal{D}_P) = 2n$ olduğundan Önerme 3.1.4. gereğince $\mathcal{D}$ M^{2n+1} nin bir $2n$-boyutlu dağılımı olur. Diğer yandan, M^{2n+1} bir hemen hemen yarı Kenmotsu manifold olduğundan $d\eta = 0$ olup, Önerme 3.1.5. yardımıyla $\mathcal{D}$ dağılımı integrallenebilirdir. Böylece $\mathcal{D}$ dağılımına $2n$-boyutlu integral altmanifoldları karşılık gelir.

Önerme 3.1.6.$(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, $\mathcal{D}$ değme dağılımının integral altmanifoldları Kaehler olacak şekilde bir hemen hemen yarı Kenmotsu manifold olsun. O zaman,

M^{2n+1} nin yarı Kenmotsu manifold olması için gerek ve yeter koşul $\nabla_\xi = -\phi^2$ olmasıdır.

İspat: Herhangi bir vektör alanı X olmak üzere, $N_\phi(X,\xi) = 2\phi hX$ eşitliği yazılır. Bu nedenle, yapının normal olduğunu kabul edersek $Y \in \mathcal{D}$ için, $h(Y) = 0$ elde edilir.

$h(\xi) = 0$ olduğundan $h = 0$ bulunur ve (3.10) ifadesi $\nabla_\xi = -\phi^2$ eşitliğini gerektirir. (3.10) ifadesi yardımıyla eğer $\nabla_\xi = -\phi^2$ ise $h = 0$ dır. O halde, keyfi X vektör alanları için $N_\phi(X,\xi) = 0$ dır. $J_\mathcal{D}$ hemen hemen kompleks yapı olsun. Bu durumda her $X, Y \in \mathcal{D}$ için $N_\phi(X,Y) = N_{J_\mathcal{D}}(X,Y) = 0$ dır. Böylece $\mathcal{D}$ dağılımının integral manifoldları Kaehler yapıdadır.

Sonuç 3.1.1. (M,ϕ,ξ,η,g), 3-boyutlu bir hemen hemen yarı Kenmotsu manifoldu $\nabla_\xi = -\phi^2$ şartını sağlıyorsa bir Kenmotsu manifolddur.

İspat: Boyutun 3 olması durumunda, $\mathcal{D}$ dağılımının integral altmanifoldları boyutu 2 olan hemen hemen Kaehler yapıdadırlar. Böylece Önerme 3.1.8. den dolayı ispat tamamlanır.

3.2. TENSÖR ALANLARI VE ÖZELLİKLERİ

Bu kısımda belli tensör koşulları sağlayan $A\ ve\ h$ tensör alanları incelenmiştir.

Yardımcı Teorem 3.2.1. $(M^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)$, bir hemen hemen yarı Kenmotsu manifold olsun. M^{2n+1} üzerinde (1,1)-tipli A tensör alanı, $A = -\nabla_\xi$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda, $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$ için,

(i) $A\ ve\ h$ simetriktir,

(ii) $A\phi + \phi A = -2\phi$,

(iii) $\eta\ o\ A = 0,\ \eta\ o\ h = 0$,

(iv) $h = A\ o\ \phi + \phi$,

(v) $hA + Ah = -2h$,

(vi) $İz\ (A) = -\sum \varepsilon_i$,

(vii) $İz(\phi A) = 0$

eşitlikleri sağlanır.

İspat: (i) M^{2n+1} üzerinde herhangi X, Y vektör alanları için,

$$g(AX,Y) = g(\varphi^2 X + \varphi hX, Y)$$
$$= g(X, \varphi^2 Y + \varphi hY)$$

$$g(AX,Y) = g(X, AY)$$

dır. Böylece A simetriktir. Özel olarak, $X = \xi$ için $A\xi = \phi^2\xi + \phi h\xi = 0$ elde edilir. Benzer olarak, h tensör alanının simetrik olduğu kolayca elde edilir.

(ii) A tensör alanının tanımı göz önüne alındığında $A\phi = (\phi^2 + \phi h)\phi$ ve $\phi A = \phi(\phi^2 + \phi h)$ yazılabilir. Bu iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa $A\phi + \phi A = -2\phi$ eşitliği bulunur.

(iii) A tensör alanının tanımından

$$(\eta\ o\ A)X = \eta(AX)$$
$$= \varepsilon g(AX, \xi) = \varepsilon g(X, A\xi) = 0$$

ve

$$(\eta\ o\ h)X = \eta(hX)$$
$$= \varepsilon g(hX, \xi) = \varepsilon g(X, h\xi) = 0$$

dir.

(iv) (3.5) eşitliğinden

$$AX = \varphi^2 X + \varphi hX$$
$$A\varphi X = \varphi^3 X + \varphi h\varphi X$$
$$= -\varphi X + hX$$

$$hX = A\varphi X + \varphi X$$

elde edilir.

(v) $AX = -\nabla_X \xi = \varphi^2 X + \varphi h X$ eşitliğinden yararlanılırsa;

$$hAX = h\varphi^2 X + h\varphi h X$$
$$= \varphi^2 hX - \varphi h^2 X$$
$$= -hX - \varphi h^2 X$$

ve

$$AhX = \varphi^2 hX + \varphi h^2 X$$
$$= -hX + \varphi h^2 X$$

şeklinde bulunur. Böylece yukarıdaki iki eşitlik taraf tarafa toplanarak

$hAX + AhX = -2hX$ elde edilir.

(vi)

$$iz(A) = \sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i g(AE_i, E_i) = \sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i g(\varphi^2 E_i, \varphi h E_i, E_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i g(\varphi^2 e_i, E_i) + \sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i g(\varphi h E_i, E_i) = -\sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i g(\varphi E_i, \varphi E_i) + \varepsilon_i tr(\varphi h)$$

$$= -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n + \varepsilon_{n+1} + \cdots + \varepsilon_{2n})$$

$$= -\sum_{i=1}^{2n} \varepsilon_i$$

(vii)

$$iz(\varphi A) = \sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i g(\varphi A E_i, E_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i g(\varphi^3 E_i + \varphi^2 h E_i, E_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i g(-\varphi E_i - h E_i, E_i)$$

$$= -\sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i g(\varphi E_i, E_i) - \sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i g(h E_i, E_i) = -tr(h) = 0$$

elde edilir.

Önerme 3.2.2. Bir hemen hemen yarı Kenmotsu manifoldun $\mathcal{D}$ dağılımının integral altmanifoldlarının Kaehler yapıda olması için gerek ve yeter koşul $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$ için,

$$(\nabla_X \phi)Y = -g(\phi AX, Y)\xi + \eta(Y)\phi AX \tag{3.20}$$

dır. Burada her X vektör alanı için, $AX = \phi^2 X + \phi h X$ dır.

İspat: (Pastore ve Falcitelli 2007) önerme 2.2 $s = 1$ için kolayca görülür.

3.3 EĞRİLİK ÖZELLİKLERİ

Bu kısımda, Riemann eğrilik tensörü yardımıyla bazı eğrilik özellikleri incelenmiştir

Önerme 3.3.1.$(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen yarı Kenmotsu manifold olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M^{2n+1})$ için,

$$\begin{aligned} R(X,Y)\xi &= [\eta(X)Y - \eta(Y)X] - [\eta(X)\phi hY - \eta(Y)\phi hX] + (\nabla_Y \phi h)X - \\ &\quad (\nabla_X \phi h)Y \qquad (3.21) \\ &= (\nabla_Y A)X - (\nabla_X A)Y \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: R Riemann eğrilik tensörü tanımından

$$
\begin{aligned}
R(X,Y)\xi &= \nabla_X\nabla_Y\xi - \nabla_Y\nabla_X\xi - \nabla_{[X,Y]}\xi \\
&= \big(\nabla_X Y - \eta(\nabla_X Y)\xi - \varepsilon g(Y,X)\xi + \varepsilon g(Y,\varphi hX)\xi - \eta(Y)X + \eta(Y)\varphi hX \\
&\quad - \varphi h\nabla_X Y - (\nabla_X\varphi hY)\big) \\
&\quad - \big(\nabla_Y X - \eta(\nabla_Y X)\xi - \varepsilon g(X,Y)\xi + \varepsilon g(X,\varphi hY)\xi - \eta(X)Y + \eta(X)\varphi hY \\
&\quad - \varphi h\nabla_Y X - (\nabla_Y\varphi hX)\big) \\
&\quad - \big(\nabla_X Y - \nabla_Y X - \varepsilon g(\nabla_X Y,\xi)\xi + \varepsilon g(\nabla_Y X,\xi)\xi - h(\nabla_X Y) + h(\nabla_Y X)\big) \\
&= \nabla_X Y - \eta(\nabla_X Y)\xi - \varepsilon g(Y,X)\xi + \varepsilon g(Y,\varphi hX)\xi - \eta(Y)X + \eta(Y)\varphi hX \\
&\quad - \varphi h\nabla_X Y - (\nabla_X\varphi hY) - \nabla_Y X + \eta(\nabla_Y X)\xi + \varepsilon g(X,Y)\xi - \varepsilon g(X,\varphi hY)\xi \\
&\quad + \eta(X)Y - \eta(X)\varphi hY + \varphi h\nabla_Y X + (\nabla_Y\varphi hX) - \nabla_X Y + \nabla_Y X \\
&\quad + \varepsilon g(\nabla_X Y,\xi)\xi - \varepsilon g(\nabla_Y X,\xi)\xi + h(\nabla_X Y) - h(\nabla_Y X)
\end{aligned}
$$

yazılabilir. Bu ifade sadeleştirilirse

$$
R(X,Y)\xi = [\eta(X)Y - \eta(Y)X] - [\eta(X)\varphi hY - \eta(Y)\varphi hX] + (\nabla_Y\varphi h)X - (\nabla_X\varphi h)Y
$$

elde edilir.

Önerme 3.3.2. $(M^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)$, bir hemen hemen yarı Kenmotsu manifold olsun. Bu durum

$i)$ $R(X,\xi)\xi = \phi^2X + 2\phi hX - h^2X + \phi\big(\nabla_\xi h\big)X$ (3.22)

$ii)$ $\big(\nabla_\xi h\big)X = -\phi R(X,\xi)\xi - \phi X - 2hX - \phi h^2X$ (3.23)

$iii)$ $R(X,\xi)\xi - \phi R(\phi X,\xi)\xi = 2[\phi^2X - h^2X]$ (3.24)

$iv)$ $S(X,\xi) = -2n\eta(X) - \big(div(\phi h)\big)X$ (3.25)

$v)$ $S(\xi,\xi) = \text{İ}z(l) = -[2n + \text{İ}z(h^2)]$ (3.26)

eşitlikleri geçerlidir.

İspat $i)$ **:** (3.21) eşitliğinde $Y = \xi$ yazılır ise;

$$R(X,\xi)\xi = [\eta(X)\xi - \eta(\xi)X] - [\eta(X)\varphi h\xi - \eta(\xi)\varphi hX] + \left(\nabla_\xi \varphi h\right)X - (\nabla_X \varphi h)\xi$$
$$= \varphi^2 X + \varphi hX + \left(\nabla_\xi \varphi h\right)X - (\nabla_X \varphi h)\xi$$

olarak bulunur. Bu ifadede yer alan

$\left(\nabla_\xi \varphi h\right)X \quad ve \quad (\nabla_X \varphi h)\xi$ değerleri

$$\begin{aligned}(\nabla_X \varphi h)\xi &= \nabla_X \varphi h\xi - \varphi h\nabla_X \xi \\ &= -\varphi h(-\varphi^2 X - \varphi hX) \\ &= \varphi h\varphi^2 X + \varphi h\varphi hx \\ &= \varphi^3 hX - \varphi^2 h^2 X \\ &= -\varphi hX + h^2 X\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\left(\nabla_\xi \varphi h\right)X &= \nabla_\xi \varphi hX - \varphi h\nabla_\xi X \\ &= \left(\nabla_\xi \varphi\right)hX + \varphi\nabla_\xi hX - \varphi h\nabla_\xi X \\ &= \varphi h\nabla_\xi X + \varphi\left(\nabla_\xi h\right)X - \varphi h\nabla_\xi X \\ &= \varphi\left(\nabla_\xi h\right)X\end{aligned}$$

şeklinde olacaktır. Bu değerler yerine yazılır ise

$$R(X,\xi)\xi = \varphi^2 X + 2\varphi hX - h^2 X + \varphi\left(\nabla_\xi h\right)X$$

olarak bulunur.

$ii)$ $R(X,\xi)\xi = \ell x$ olsun,

$$\begin{aligned}\varphi\ell x &= \varphi^3 X + 2\varphi^2 hX - \varphi h^2 X + \varphi^2\left(\nabla_\xi h\right)X \\ &= -\varphi X - 2hX - \varphi h^2 X - \left(\nabla_\xi h\right)X + \eta\left(\left(\nabla_\xi h\right)X\right)\xi\end{aligned}$$

ve

$$\eta\left(\left(\nabla_\xi h\right)X\right)\xi = \varepsilon g\left(\left(\nabla_\xi h\right)X,\xi\right) = \varepsilon g\left(X,\left(\nabla_\xi h\right)\xi\right) = 0$$

olacağından

$$\left(\nabla_\xi h\right)X = -\varphi\ell x - \varphi X - 2hX - \varphi h^2 X$$

dır.

iii) (3.22) ifadesinde X yerine ϕX alınırsa

$$R(\phi X,\xi)\xi = \phi^3 X + 2\phi h\phi X - h^2\phi X + \phi\left(\nabla_\xi h\right)(\phi X) \tag{3.27}$$

eşitliği bulunur. (3.22) ve (3.27) ifadeleri göz önüne alındığında

$$\begin{aligned}\ell x - \varphi\ell\varphi x &= \varphi^2 X + 2\varphi hX - h^2 X + \varphi\left(\nabla_\xi h\right)X \\ &\quad - \left[\varphi^4 X + 2\varphi^2 h\varphi X - \varphi h^2\varphi X + \varphi^2\left(\nabla_\xi h\right)\varphi X\right] \\ &= \varphi^2 X + 2\varphi hX - h^2 X + \varphi\left(\nabla_\xi h\right)X + \varphi^2 X - 2\varphi hX - h^2 X - \\ &\quad \varphi^2\left(\nabla_\xi h\right)\varphi X \\ &= 2\varphi^2 X - 2h^2 X + \varphi\left(\nabla_\xi h\right)X + \varphi^3\left(\nabla_\xi h\right)X = 2[\varphi^2 X - h^2 X]\end{aligned}$$

$$R(X,\xi)\xi - \varphi R(\varphi X,\xi)\xi = 2[\varphi^2 X - h^2 X]$$

dir.

$iv)$ (3.21) ifadesinden

$$S(X,\xi) = \sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i g(R(E_i,X)\xi,E_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g(R(e_i,X)\xi,e_i)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{n+i} g(R(\varphi e_i,X)\xi,\varphi e_i) + \varepsilon_{2n+1} g(R(\xi,X)\xi,\xi)$$

$$= -2n\eta(X) + \eta(X)\left[\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\, g(\varphi h e_i,e_i) + \varepsilon_{n+i} g(\varphi h\varphi e_i,\varphi e_i)\right]$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} [\varepsilon_i g((\nabla_X \varphi h)e_i,e_i) + \varepsilon_{n+i} g((\nabla_X \varphi h)\varphi e_i,\varphi e_i)]$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \left[\varepsilon_i g\left(\left(\nabla_{e_i}\varphi h\right)X,e_i\right) + \varepsilon_{n+i} g\left(\left(\nabla_{\varphi e_i}\varphi h\right)X,\varphi e_i\right)\right]$$

$$= -2n\eta(X) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g((\nabla_X\varphi h)e_i,e_i) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{n+i} g((\nabla_X\varphi h)\varphi e_i,\varphi e_i)$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g\left(\left(\nabla_{e_i}\varphi h\right)X,e_i\right) - \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{n+i} g\left(\left(\nabla_{\varphi e_i}\varphi h\right)X,\varphi e_i\right)$$

$$= -2n\eta(X) + \sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i g\left(\left(\nabla_{E_i}\varphi h\right)X,E_i\right) = -2n\eta(X) + [div(\varphi h)]X$$

şeklinde (3.25) eşitliği elde edilir.

$v)$ (3.25) eşitliğinde $X = \xi$ alnırsa

$$S(\xi,\xi) = -2n\eta(\xi) - [div(\varphi h)]\xi$$

$$= -2n - \left(div(\varphi h)\right)\xi$$

dır. Bu ifadede yer alan $\left(div(\varphi h)\right)\xi$ hesaplanırsa

$$\big(div(\varphi h)\big)\xi = \sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i g\left(\left(\nabla_{E_i}\varphi h\right)\xi, E_i\right) = \sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i\left[-g(\varphi h E_i, E_i) + g\left(h^2 E_i, E_i\right)\right]$$

$$= -\sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i g\,(\varphi h E_i, E_i) + \sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i g\left(h^2 E_i, E_i\right) = -tr(\varphi h) + tr\left(h^2\right)$$

$$= tr\left(h^2\right) = \text{İ}z\left(h^2\right)$$

olacağından (3.25) eşitliğinde $X = \xi$ alınarak

$$S(\xi,\xi) = -2n - \big(div(\varphi h)\big)\xi = -2n - \text{İ}z\left(h^2\right)$$

elde edilir. Böylece (3.26) eşitliği ispatlanmış olur.

3.4 PARALEL TENSÖR ALANLARI

Bu kısımda, hemen hemen yarı Kenmotsu manifoldlar üzerinde η-paralellik, Kodazzi, devirli paralellik ve devirli η-paralellik tensör koşulları incelenmiştir.

Tanım 3.4.1. $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$**,** bir hemen hemen değme metrik olsun. $\forall\,\{X,Y,Z\} \in \ker\eta$ olmak üzere,

$$g\big((\nabla_X\eta)Y, Z\big) = 0 \tag{3.28}$$

koşulu sağlıyorsa M^{2n+1} ye η-paraleldir denir (Boeckx 2005).

Tanım 3.4.2. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. M^n üzerinde herhangi simetrik (1,1)- tipli tensör alanı T olmak üzere, herhangi X, Y, Z vektör alanları için,

$$(\nabla_X T)Y = (\nabla_Y T)X \tag{3.29}$$

ise T ye Kodazzi tensör alanı denir (Blair 2002).

Tanım 3.4.3. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. M^n üzerinde herhangi simetrik (1,1)- tipli tensör alanı T olmak üzere, herhangi X, Y, Z vektör alanları için,

$$g\big((\nabla_X T)Y, Z\big) + g\big((\nabla_Y T)Z, X\big) + g\big((\nabla_Z T)X, Y\big) = 0 \tag{3.30}$$

eşitliği sağlanıyorsa T ye devirli paralel tensör alanı denir (Cho 2008).

Tanım 3.4.4. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$**,** bir hemen hemen değme metrik olsun.

$\forall\, \{X, Y, Z\} \in \ker\eta$ olmak üzere M^{2n+1} üzerindeki herhangi simetrik (1,1)- tipli T tensör alanı

$$g\big((\nabla_X T)Y, Z\big) + g\big((\nabla_Y T)Z, X\big) + g\big((\nabla_Z T)X, Y\big) = 0 \tag{3.31}$$

eşitliği sağlanıyorsa T ye devirli η-paralel tensör alanı denir (Cho 2008).

Tanım 3.4.5. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$**,** bir değme metrik manifold olsun. $\forall\ X, Y$ vektör alanları için,

$$g(\tau X, Y) = \big(\mathcal{L}_\xi g\big)(X, Y)$$

eşitliği ile verilen τ tensör alanına torsiyon tensör alanı denir (Cho 2008).

Bu tanımlamaya göre aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 3.4.1. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$**,** bir hemen hemen yarı Kenmotsu manifold olsun. O zaman, M^{2n+1} manifoldu için τ torsiyon tensör alanı

$$\tau X = -2AX \tag{3.32}$$

dır.

İspat: τ tensör alanının tanımından M^{2n+1} üzerindeki tüm vektör alanları için,

$$\begin{aligned}\big(\mathcal{L}_\xi g\big)(X, Y) &= \mathcal{L}_\xi g(X, Y) + g\big(\mathcal{L}_\xi X, Y\big) - g\big(X, \mathcal{L}_\xi Y\big)\\ &= g(\nabla_X \xi, Y) + g\big(\mathrm{X}, \nabla_Y \xi\big)\\ &= 2g(-\varphi^2 X - \varphi h X, Y)\end{aligned}$$

elde edilir. (3.5) kullanılarak istenen sonuca ulaşılır.

Önerme 3.4.2. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$**,** bir hemen hemen yarı Kenmotsu manifold olsun. Eğer h tensör alanı η-paralel ise o zaman, $\forall\, X, Y \in \mathcal{X}(M^{2n+1})$ için,

$$(\nabla_X h)Y = -\eta(X)[\varphi lY + \varphi Y + 2hY + \varphi h^2 Y] - \eta(Y)[hX + \varphi h^2 X] \\ -\varepsilon g(Y, hX + \varphi h^2 X)\xi \tag{3.33}$$

eşitliği sağlanır. Burada $l. = R(., \xi)\xi$ dır.

İspat: h tensör alanı η-paralel olsun. Her X vektör alanı için $X^T = X - \eta(X)\xi$ alınırsa

$$0 = g\left((\nabla_{X^T} h)Y^T, Z^T\right)$$

$$\begin{aligned} &= g\left(\left(\nabla_{X-\eta(X)\xi} h\right)(Y - \eta(Y)\xi), Z - \eta(Z)\xi\right) \\ &= g\big((\nabla_X h)Y, Z\big) - \eta(X) g\left(\left(\nabla_\xi h\right)Y, Z\right) - \eta(Y) g\big((\nabla_X h)\xi, Z\big) \\ &\quad - \eta(Z) g\big((\nabla_X h)Y, \xi\big) + \eta(X)\eta(Y) g\left(\left(\nabla_\xi h\right)\xi, Z\right) \\ &\quad + \eta(Y)\eta(Z) g\big((\nabla_X h)\xi, \xi\big) + \eta(Z)\eta(X) g\left(\left(\nabla_\xi h\right)Y, \xi\right) \\ &\quad - \eta(X)\eta(Y)\eta(Z) g\left(\left(\nabla_\xi h\right)\xi, \xi\right) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Yukarıdaki eşitlik sadeleşirse

$$(\nabla_X h)Y = \eta(X)\big(\nabla_\xi h\big)Y + \eta(Y)(\nabla_X h)\xi + \varepsilon g\big((\nabla_X h)\xi, Y\big)\xi$$

denklemi elde edilir. $(3.5), (3.7)\ ve\ (3.23)$ denklemleri yardımıyla (3.33) eşitliği bulunur.

Önerme 3.4.3. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$**,** bir hemen hemen yarı Kenmotsu manifold olsun. Eğer φh tensör alanı η-paralel ise o zaman, her X, Y vektör alanları için,

$$(\nabla_X \varphi h)Y = \eta(X)[lY - \varphi^2 Y - 2\varphi hY + h^2 Y] - \eta(Y)[\varphi hX - h^2 X] - \\ \varepsilon g(Y, \varphi hX - h^2 X)\xi \tag{3.34}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: φh tensör alanının η-paralel olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} 0 = g\left((\nabla_{X^T}\varphi h)Y^T, Z^T\right) &= g\left(\left(\nabla_{X-\eta(X)\xi}\varphi h\right)(Y-\eta(Y)\xi), Z-\eta(Z)\xi\right) \\ &= g\big((\nabla_X\varphi h)Y, Z\big) - \eta(X)g\left(\left(\nabla_\xi\varphi h\right)Y, Z\right) - \eta(Y)g\big((\nabla_X\varphi h)\xi, Z\big) \\ &- \eta(Z)g\big((\nabla_X\varphi h)Y, \xi\big) + \eta(X)\eta(Y)g\left(\left(\nabla_\xi\varphi h\right)\xi, Z\right) \\ &+ \eta(Y)\eta(Z)g\big((\nabla_X\varphi h)\xi, \xi\big) + \eta(Z)\eta(X)g\left(\left(\nabla_\xi\varphi h\right)Y, \xi\right) \\ &- \eta(X)\eta(Y)\eta(Z)g\left(\left(\nabla_\xi\varphi h\right)\xi, \xi\right) \end{aligned}$$

denklemi yazılır. Bu denklem düzenlenirse

$$g\big((\nabla_X\varphi h)Y, \varphi^2 Z\big) = -\eta(X)g\left(\left(\nabla_\xi\varphi h\right)Y, Z\right) - \eta(Y)g\big((\nabla_X\varphi h)\xi, Z\big)$$

elde edilir. (3.5) ve (3.7) denklemleri kullanılarak

$$(\nabla_X\varphi h)Y = \eta(X)\left(\nabla_\xi\varphi h\right)Y - \eta(Y)[\varphi hX - h^2X] - \varepsilon g(Y, \varphi hX - h^2X)\xi$$

eşitliği bulunur. Burada $\left(\nabla_\xi\varphi h\right)Y = \varphi\left(\nabla_\xi h\right)Y$ olduğundan (3.33) denklemine ulaşılır.

Önerme 3.4.4. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$**,** bir hemen hemen yarı Kenmotsu manifold olsun. Eğer φh tensör alanı η-paralel ise o zaman, her X, Y vektör alanları için,

$$R(X,Y)\xi = \eta(Y)lX - \eta(X)lY \tag{3.35}$$

dir.

İspat: (3.21) denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned} R(X,Y)\xi = [\eta(X)Y - \eta(Y)X] &- [\eta(X)\varphi hY - \eta(Y)\varphi hX] - \eta(X)\left(\nabla_\xi\varphi h\right)Y \\ &+ \eta(Y)[\varphi hX - h^2X] + \varepsilon g(Y, \varphi hX - h^2X)\xi + \eta(Y)\left(\nabla_\xi\varphi h\right)X \\ &- \eta(X)[\varphi hY - h^2Y] - \varepsilon g(X, \varphi hY - h^2Y)\xi \end{aligned}$$

elde edilir. (3.34) ifadesinden ispat tamamlanır.

Böylece Ricci operatörü ile ilgili aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Teorem 3.4.3. $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$**,** bir hemen hemen yarı Kenmotsu manifold olsun. Eğer φh tensör alanı η-paralel ise o zaman, ξ vektör alanı M^{2n+1} üzerinde $Ricci$ operatörünün özvektörüdür.

İspat: $\{E_1,\dots,E_{2n+1},\xi\}$**,** tanjant uzayın herhangi bir noktasındaki ortonormal bazı olmak üzere (3.31) eşitliğinden

$$\sum_{i=1}^{2n+1}\varepsilon_i g(R(E_i,Y)\xi,E_i)=\sum_{i=1}^{2n+1}\varepsilon_i[\eta(Y)g(lE_i,E_i)-\eta(E_i)g(lY,E_i)]$$

olup, bu eşitlikte $Y=\xi$ alınarak

$$S(\xi,\xi)=\sum_{\mathrm{i}=1}^{2n+1}\varepsilon_i g(lE_i,E_i)$$

ifadesine ulaşılır. Buradan

$$Q\xi=trace(l)\xi \tag{3.36}$$

dır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.4.4. (M,φ,ξ,η,g)**,** bir hemen hemen yarı Kenmotsu manifold olsun. Eğer φh veya h tensör alanları Kodazzi şartlarını sağlıyorsa bu durumda, $\forall$ X,Y,Z vektör alanları için $\mathcal{D}$ ‘nin integral alt manifoldları total umbuliktir.

İspat: φh tensör alanı Kodazzi şartını sağlasın. O halde, X,Y,Z vektör alanları için,

$$0=g\big((\nabla_Y\varphi h)X,Z\big)-g\big((\nabla_X\varphi h)Y,Z\big) \tag{3.37}$$

eşitliği sağlanır. (3.37) eşitliğinden

$$(\nabla_Y\varphi h)X-(\nabla_X\varphi h)Y=0$$

yazılır. $X = \xi$ seçilerek

$$lY = \varphi^2 Y + \varphi h Y \tag{3.38}$$

denklemine ulaşılır. (3.38) eşitliğinin her iki tarafına φ uygulanıp, (3.24) eşitliği kullanıldığında

$$-2h^2 Y = 0$$

elde edilir. Sonuç olarak, $h = 0$ dır. Bu nedenle, Önerme 3.1.6 ve Önerme 3.1.7 den ispat tamamlanacaktır.

Önerme 3.4.5. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$**,** bir hemen hemen yarı Kenmotsu manifold olsun. Eğer τ tensör alanı η-paralel ise o zaman, $\forall\ X, Y, Z$ vektör alanları için,

$$(\nabla_X \varphi h)Y = \eta(X)\big(\nabla_\xi \varphi h\big)Y - \eta(Y)\varphi h \nabla_X \xi + \varepsilon g\big((\nabla_X \varphi h)\xi, Y\big)\xi \tag{3.39}$$

denklemi geçerlidir.

İspat: Hipotez gereğince tüm X^T tanjant vektörleri için,

$$g\left((\nabla_{X^T}\tau)Y^T, Z^T\right) = 0$$

eşitliği sağlanır. τ tensör alanının tanımı kullanılır ve $X^T = X - \eta(X)\xi$ olarak seçilirse

$$(\nabla_X \tau)Y = \eta(X)\big(\nabla_\xi \tau\big)Y + \eta(Y)(\nabla_X \tau)\xi + g\big((\nabla_X \tau)Y, \xi\big)\xi \tag{3.40}$$

$$(\nabla_X \tau)Y = -2\eta(Y)\nabla_X \xi - 2g(\nabla_X \xi, Y)\xi - 2(\nabla_X \varphi h)Y \tag{3.41}$$

$$(\nabla_X \tau)\xi = -2\nabla_X \xi + 2\varphi h \nabla_X \xi \tag{3.42}$$

$$\big(\nabla_\xi \tau\big)Y = -2\big(\nabla_\xi \varphi h\big)Y \tag{3.43}$$

denklemleri elde edilir. (3.42), (3.43) denklemleri (3.40) ve (3.41) eşitliklerinde yerine yazılarak, bu iki denklem birbirine eşitlenirse (3.39) denklemi bulunur.

Teorem 3.4.5. $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$**,** bir hemen hemen yarı Kenmotsu manifold olsun. Eğer τ tensör alanı η-paralel ise o zaman, ξ vektör alanı M^{2n+1} üzerinde Ricci operatörünün özvektörüdür.

İspat: (3.40) denklemi kullanılarak

$$(\nabla_Y\varphi h)X-(\nabla_X\varphi h)Y=\eta(Y)\big(\nabla_\xi\varphi h\big)X-\eta(X)\varphi h\nabla_Y\xi$$
$$-\eta(X)\big(\nabla_\xi\varphi h\big)Y+\eta(Y)\varphi h\nabla_X\xi \tag{3.44}$$

yazılır. $(3.20), (3.22), (3.44)$ eşitlikleri göz önüne alındığında

$$R(X,Y)\xi=\eta(Y)lX-\eta(X)lY$$

bulunur.

3.5. ÖRNEKLER

Örnek 3.5.1. R_p^{2n+1} in standart koordinatlarını $(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n,z)$ ve $M=\{(x_1,\dots,x\{n\},y_1,\dots,y\{n\},z)|z\neq 0\}$ tarafından tanımlanan $M\subset\mathbb{R}_p^{2n+1}$ $(2n+1)$-boyutlu manifoldunu alalım. M nin bir bazı

$$X_i=\left(-(z+1)+\sqrt{(z+1)^2+e^{2z}}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial z},$$

$$Y_i=\left((z+1)+\sqrt{(z+1)^2+e^{2z}}\right)\frac{\partial}{\partial y_i},$$

$$\xi=\frac{\partial}{\partial z}, i=1,2,\dots,n,$$

şeklinde olsun. Eğer

$$\eta = dz, g = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\varepsilon_i}{\left(-(z+1) + \sqrt{(z+1)^2 + e^{2z}}\right)^2} dx_i^2 \right.$$

$$\left. + \varepsilon_{n+i} \frac{1}{\left((z+1) + \sqrt{(z+1)^2 + e^{2z}}\right)} dy_i^2 \right) + \varepsilon dz^2$$

$$\varphi(\xi) = 0, \varphi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{(z+1) + \sqrt{(z+1)^2 + e^{2z}}}{-(z+1) + \sqrt{(z+1)^2 + e^{2z}}} \frac{\partial}{\partial y_i},$$

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right) = \frac{(z+1) + \sqrt{(z+1)^2 + e^{2z}}}{(z+1) - \sqrt{(z+1)^2 + e^{2z}}} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{1}{(z+1) + \sqrt{(z+1)^2 + e^{2z}}} \frac{\partial}{\partial z},$$

olarak alınırsa, M üzerindeki (φ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısının sağlandığı görülür. Üstelik, $d\eta = 0$ koşulunun sağlandığı aşikardır. Öte yandan,

$\Phi_{ii} \coloneqq g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \varphi \frac{\partial}{\partial y_i}\right) = -\varepsilon_i$ dışındaki tüm Φ_{ij} ler sıfırdır, bu nedenle

$\Phi = -\sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i$ olup, $d\Phi$ dış türevi $d\Phi = 0$ dır. Sonuç olarak, φ nin Nijenhuis torsiyon tensörünün sıfır olmaması nedeniyle, manifold hemen hemen yarı Kenmotsu manifolddur.

Örnek 3.5.2. R_p^{2n+1} in standart koordinatlarını $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z)$ ve $M = \{(x_1, \ldots, x\{n\}, y_1, \ldots, y\{n\}, z) | z \neq 0\}$ tarafından tanımlanan $M \subset \mathbb{R}_p^{2n+1}$ $(2n+1)$-boyutlu manifoldunu alalım. M nin bir bazı

$$X_i = \left(-1 + \sqrt{1 + e^{2z}}\right) \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial z},$$

$$Y_i = \left(1 + \sqrt{1 + e^{2z}}\right) \frac{\partial}{\partial y_i},$$

$$\xi = \frac{\partial}{\partial z}, i = 1,2, \ldots, n,$$

şeklinde olsun. Eğer

$$\eta = dz, g = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\varepsilon_i}{\left(-1+\sqrt{1+e^{2z}}\right)^2}dx_i^2 + \varepsilon_{n+i}\frac{1}{\left(1+\sqrt{1+e^{2z}}\right)}dy_i^2\right) + \varepsilon dz^2$$

$$\varphi(\xi) = 0, \varphi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{1+\sqrt{1+e^{2z}}}{-1+\sqrt{1+e^{2z}}}\frac{\partial}{\partial y_i},$$

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right) = \frac{1+\sqrt{1+e^{2z}}}{1-\sqrt{1+e^{2z}}}\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{1}{1+\sqrt{1+e^{2z}}}\frac{\partial}{\partial z},$$

olarak alınırsa, M üzerindeki (φ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısının sağlandığı görülür. Üstelik, $d\eta = 0$ koşulunun sağlandığı aşikardır. Öte yandan,

$\Phi_{ii} \coloneqq g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \varphi\frac{\partial}{\partial y_i}\right) = -\varepsilon_i$ dışındaki tüm Φ_{ij} ler sıfırdır, bu nedenle

$\Phi = -\sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i$ olup, $d\Phi$ dış türevi $d\Phi = 0$ dır. Sonuç olarak,

φ nin Nijenhuis torsiyon tensörünün sıfır olması nedeniyle, manifold yarı Kenmotsu manifolddur.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada değme manifoldların yeni bir sınıfı olan hemen hemen Pseudo Kenmotsu manifoldlar tanımlanarak bu manifoldarın bazı temel özellikleri elde edilmiştir. Bu yapılan çalışmalar sonunda hemen hemen Pseudo Kenmotsu (κ,μ,ν)- uzayları için genel bir sınıflandırma problemi açıktır. Ayrıca, Ricci simetrik, Ricci yarı-simetrik, Pseudo simetrik ve Pseudo yarı-simetrik gibi özel tensör şartları altında hem hemen hemen Pseudo Kenmotsu hem de (κ,μ,ν)- uzayları için ilginç sonuçlar bulunabilir. Bundan başka $divR = 0$ ve $divC = 0$ eşitlikleri bu tür uzaylar için açık uçlu problemlerdir.

KAYNAKLAR

Bang-Yen C., *Geometry of submaifolds,* New York, M. Dekker, (**1973**).

Blair D. E., *Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds,* Progress in Mathematics, 203. Birkhauser, Boston., (**2002**).

Chinea D., Gonzalez C., *A classification of almost contact metric manifolds,* Annali di Matematica Pura Ed Applicata, 156(4) (**1990**) 15-36.

Dileo G., Pastore A. M., *Almost kenmotsu manifolds and local symmetry,* Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, 14 (**2007**) 343-354.

Gallot S., Hulin D., Lafontaine J., *Riemann geometry,* 3rd ed., XVI, 322 p., Springer Universitext, ISBN: 9783540204930, (**2004**).

Janssens D., Vanhecke L., *Almost contact structures and curvature tensors,* Kodai Math J., 4(**1981**) 1-27.

Kenmotsu K., *A class of contact riemannian manifold,* Tohoku Math. Journal 24 (**1972**) 93-103.

Kim, T. W., Pak H. K., *Canonical foliations of certain classes of almost contact metric structures,* Acta Math. Sinica, Eng. Ser. Aug., 21(4) (**2005**) 841-846.

O'neill B., *Semi riemannian geometry,* A. Press, London, (**1983**).

Olszak Z., *On almost cosymplectic manifolds,* Kodai Math, 4(2) (**1981)** 239-250.

Spivak M., *Calculus on manifolds,* Reading, Massachusetts, W.A. Benjamin, Inc., ISBN:0805902193, (**1965**).

Yano K., Kon M., *Structures on manifolds,* Series in Pure Mathematics, 3.World Scientific Publishing Corp., Singapore, (**1984**).

T. Takahashi, *Sasakian manifold with pseudo-riemannian metrics,* Tohoku Math. J. 21 (**1969)** 271-290.

K. L. Duggal, *Space time manifolds and contact structures,* Int. J. Math. Math. Sci. 13 (**1990**) 545-554.

A. Bejancu, K.L. Duggal, *Real hypersurfaces of indefinite kaehler manifolds,* Int, J. Math. Math. Sci. 16 (**1993)** 545-556.

G. Calvaruso, D. Perrone, *Differential geometry and its applications,* 28 (**2010**) 615-634.

Hacısalihoğlu H. H., Ekmekçi N., *Tensör geometri,* Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi YAYINLARI, (**2003**).

Duggal, K. L., Bejancu, A., *Lightlike submanifolds of semi-riemannian manifold and applications*, Kluwer, Dordrecht (**1996**).

Falcitelli M. and Pastore M., *Almost kenmotsu f-manifolds*, Balkan Journal of Geometry and Its Applications, 12(1) (**2007**) 32-43.

Boeckx E., Cho J. T., *Locally symmetric contact metric manifolds*, Monatsh. Math., 148(4) (**2006**).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: YEŞİLSANCAK, Dilek
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 01.02.1986 / SAKARYA
Telefon	: 0555 733 00 37
E-posta	: yesilsancakdilek@gmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Yüksek Lisans	Düzce Ü. / Matematik B.	2013
Pedagojik Formasyon	Sakarya Üniversitesi	2012
Lisans	Azerbaycan Devlet Neft Akademisi	2010
Lise	Hendek Yabancı Dil Ağırlıklı Lise	2004

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2012-2013	Hendek Ticaret Meslek Lisesi	Matematik Öğrt.
2011-2012	Hendek Beylice İlköğretim Okulu	Matematik Öğrt.

Yayınlar

1. Aktan N., Yeşilsancak D., Yıldırım M., Hemen Hemen Yarı Kosimplektik Manifoldlar, Ankara Matematik Günleri, Ankara , (2013).

2. Aktan N., Yeşilsancak D., Hemen Hemen Yarı Kenmotsu Manifoldlar, Ordu Üniversitesi XI. Geometri Sempozyumu, Ordu, (2013).