T.C
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

THETA FONKSİYONU VE DEDEKIND ETA FONKSİYONUNDAN ELDE EDİLEN ELİPTİK FONKSİYON ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NURAY SAKALLI

AĞUSTOS 2013

DÜZCE

T.C

DÜZCE ÜNİVERSİTESİ

KABUL VE ONAY BELGESİ

Nuray SAKALLI tarafından hazırlanan, Theta Fonksiyonu ve Dedekind Eta Fonksiyonundan Elde Edilen Eliptik Fonksiyon Üzerine, isimli Lisansüstü tez çalışması, Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 26/07/2013 tarih ve 2013-347 sayılı kararı ile oluşturulan jüri tarafından Matematik Ana Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

(Tez Danışmanı)

Prof. Dr. İsmet YILDIZ

Düzce Üniversitesi

Üye	Üye
Yrd. Doç. Dr. Yıldırım ÖZDEMİR	Yrd. Doç. Dr. S. Melike AYDOĞAN
Düzce Üniversitesi	Işık Üniversitesi

Tezin savunulduğu tarih: 21/08/2013

<u>ONAY</u>

Bu tez ile Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Nuray SAKALLI'nın Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans derecesini almasını onaylamıştır.

Prof. Dr. Haldun MÜDERRİSOĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

21.08.2013

Nuray SAKALLI

Canım Kızlarım

Beril SAKALLI ve

Duru SAKALLI'ya...

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim ve bu tezin hazırlanması süresince gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Prof. Dr. İsmet YILDIZ'a en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Yüksek lisans öğrenimim boyunca benden desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocam İkramettin ŞAHİN'e en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Tüm yaşamım boyunca gülen gözleriyle yaşama sevincim olan, destekleriyle hayatımı kolaylaştıran canım annem Fatma KARABÖCEK'e ve canım babam Cafer KARABÖCEK'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışmam boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili eşim Emin SAKALLI'ya ve sevgili kardeşlerim Tuğba KARA'ya ve Oğuz KARA'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ağustos 2013 **Nuray SAKALLI**

İÇİNDEKİLER **Sayfa**

SİMGELER

θ	: Theta Fonksiyonu
σ	: Sigma Fonksiyonu
ζ	: Zeta-fonksiyonu
$\wp$	: Pe-fonksiyonu
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks Sayılar Kümesi
$\mathcal{L}$	: Latis

ÖZET

THETA FONKSİYONU VE DEDEKIND ETA FONKSİYONUNDAN ELDE EDİLEN ELİPTİK FONKSİYON ÜZERİNE

Nuray SAKALLI
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Prof. Dr. İsmet YILDIZ
Ağustos 2013, 122 sayfa

Weierstrass'ın sigma fonksiyonu ile Theta fonksiyonları arasında bir ilişki olduğu aşikardır. Bir eliptik fonksiyon Theta fonksiyonları ile oluşturulabileceği gibi, Weierstrass'ın sigma fonksiyonu yardımıyla da kurulabilir ve Dedekind η-fonksiyonu ve θ-theta fonksiyonu arasındaki iki ilişki $\mathrm{Im}\tau>0$ ı sağlayan z,τ kompleks sayıları ve (z,τ) çiftine göre θ-fonksiyonu için karakteristik değerler kullanılarak kurulabilir. Bu tez üç bölümden oluşmaktadır ve tezin birinci bölümünde çalışma içerisinde kullanılmış olan gerekli tanım ve temel teoremler verildi. Bu tezin ikinci bölümünde de periyodik ve eliptik fonksiyonlar, Weierstrass Pe-fonksiyonu, Weierstrass Zeta-fonksiyonu ve Sigma fonksiyonu tanıtılmıştır. Aynı zamanda eliptik fonksiyonların Zeta-fonksiyonu ile oluşturulması ve Weierstrass tarzı eliptik fonksiyonların oluşturulması hakkında bilgi verilmiştir. Ardından, eliptik fonksiyonların cebirsel ve geometrik özellikleri, Theta fonksiyonları ve Jacobi theta fonksiyonları hakkında bilgi verilmiştir. Son olarak Dedekind eta fonksiyonu tanıtılmıştır. Üçüncü bölümde ise, çeyrek periyotlara göre Theta fonksiyonları arasındaki dönüşümler verilmiş ve Jacobian tarzı eliptik fonksiyonlar; tanımlanmış bir fonksiyon yardımıyla Theta fonksiyonları kullanılarak kurulmuştur.

Anahtar sözcükler: Dedekind eta Fonksiyonu, Theta Fonksiyonu, Eliptik Fonksiyonlar, Weierstrass Fonksiyonları ve Karakteristik Değerler

ABSTRACT

ON THE ELLIPTIC FUNCTION OBTAINED FROM THE THETA FUNCTION AND DEDEKIND'S ETA FUNCTION

Nuray SAKALLI
Duzce University
Graduade School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Prof. İsmet YILDIZ
August 2013, 122 pages

It's a reality that there is a relationship between the sigma function of Weierstrass and Theta functions. An elliptic function can be set up using the theta functions just as it can be established with the help of sigma function of Weierstrass and two relations between the Dedekind's η-function and θ-theta function were established by the using characteristic values for θ-function according to the (z,τ) pair and z,τ complex numbers, satisfying $\mathrm{Im}\tau>0$. This thesis consists of three sections. In the first section, a short literature survey is given. The definitions and basic theorems which used for this study are provided in this section.. In the second section, firstly periodic functions, elliptic functions, Weierstrass functions, theta functions, Jacobi elliptic functions and Dedekind eta function are defined and then some relations between them are given. In the third section, the transformations among the Theta functions according to the quarter periods have been given and a Jacobian style elliptic functions has been set up the theta function by the help of a defined function.

Keywords : Dedekind eta Function, Theta Function, Elliptic Functions, Weierstrass Functions and Characteristic Values

EXTENDED ABSTRACT

ON THE ELLIPTIC FUNCTION OBTAINED FROM THE THETA FUNCTION AND DEDEKIND'S ETA FUNCTION

Nuray SAKALLI
Düzce University
Graduade School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics

Master of Science Thesis
Supervisor: Prof. İsmet YILDIZ
August 2013, 122 pages

1.INTRODUCTION

It's a reality that there is a relationship between the sigma function of Weierstrass and Theta functions. An elliptic function can be set up using the theta functions just as it can be established with the help of sigma function of Weierstrass and two relations between the Dedekind's η-function and θ-theta function were established by the using characteristic values for θ-function according to the (z,τ) pair and z,τ complex numbers, satisfying Imτ>0. This thesis consists of three sections. In the first section, a short literature survey is given. The definitions and basic theorems which used for this study are provided in this section. In the second section, firstly periodic functions, elliptic functions, Weierstrass functions, Theta functions, Jacobi elliptic functions and Dedekind eta function are defined and then some relations between them are given. In the third section, the transformations among the Theta functions according to the quarter periods have been given and a Jacobian style elliptic functions has been set up the theta function by the help of a defined function.

2.MATERIAL AND METHODS:

We define Weierstrass functions, Dedekind's η-function and Theta function in this section. We defined the Theta function $\theta(z,\tau)$ by the series,

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(z,\tau)=\sum_{n}\exp\left\{\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2}\pi i\tau+2\pi i\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(z+\frac{\varepsilon'}{2}\right)\right\}$$

and Dedekind's eta function by the infinite product

$$\eta(z)=e^{\frac{\pi i z}{12}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{2n\pi i z}\right).$$

3. RESULTS AND DISCUSSIONS:

In this section, we show relations between the Dedekind's η-function and Theta function. These relations are given below. We have the relations

$$a)\eta(z)=e^{\frac{\pi iz}{12}}\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\left(\frac{z+1}{2},3z+2k\right)$$

$$b)\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(\frac{z+4}{4},\frac{3}{2}z\right)=e^{-\frac{\pi iz}{12}}\eta(z)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{(2n-1)\pi iz}\right)$$

between the functions $\theta\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}(z,\tau),\theta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(z,\tau)$ and Dedekind's η-function which defined by the infinite product $\eta(z)=e^{\frac{\pi iz}{12}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{2n\pi iz}\right)$ where Imτ>0 and k is a integer.

4. CONCLUSION AND OUTLOOK:

As a result, the relation has been obtained between Theta and Dedekind's -η(z) functions by using the characteristic $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ and the variable $\frac{z+4}{4}$ instead of the characteristic $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ and the variable $\frac{z+1}{2}$ which were previously used by Jacobi.

1 GİRİŞ

Eliptik fonksiyonlar teorisi 18. yüzyıl ve 19. yüzyılın başlarında Euler, Legendre, Gauss, Abel, Jacobi ve Liouville'in çalışmaları ile geliştirilmiştir. Abel ve Jacobi bu konuyu, 1827'de ters fonksiyonları ve kompleks düzlem teorisi çalışarak köklü bir değişime uğratmıştır. Liouville sınırlı tam fonksiyonlar üzerine teoremini de kapsayan kompleks değişkenler metodunun sistematik kullanımını ortaya çıkarmıştır. Weierstrass'ın 19. yüzyılın sonlarına doğru geliştirdiği versiyon Jacobinin theta fonksiyonları ile kurduğu yöntemden çok daha basitti. Mittag-Leffler, Neville ve Tricomi, Abel ve Jacobi teorisini geliştirmek için theta fonksiyonları yerine Weierstrass fonksiyonlarını kullanmışlardır.

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır ve tezin birinci bölümünde çalışma içerisinde kullanılmış olan gerekli tanım ve temel teoremler verildi.

Bu tezin ikinci bölümünde de periyodik ve eliptik fonksiyonlar, Weierstrass Pe-fonksiyonu, Weierstrass Zeta-fonksiyonu ve Sigma fonksiyonu tanıtılmıştır. Aynı zamanda eliptik fonksiyonların Zeta-fonksiyonu ile oluşturulması ve Weierstrass tarzı eliptik fonksiyonların oluşturulması hakkında bilgi verilmiştir. Ardından, eliptik fonksiyonların cebirsel ve geometrik özellikleri, theta fonksiyonları ve Jacobi theta fonksiyonları hakkında bilgi verilmiştir. Son olarak Dedekind eta fonksiyonu tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde ikinci bölümde verilmiş olan Jacobi eliptik fonksiyonu kullanılarak, Theta fonksiyonu ve Dedekind eta fonksiyonu arasında bir bağıntı elde edilmiştir.

1.1 KURAMSAL KAVRAMLAR

1.1.1 Genel Kavramlar

Bu bölümde çalışmamız için gerekli olan tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 1.1.1.1 (ε-Komşuluk): $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere,

$$B(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$$

kümesine z_0 noktasının $\varepsilon-$komşuluğu denir.

Tanım 1.1.1.2 (İç Nokta): $A \subset \mathbb{C}$ herhangi bir küme ve $z_0 \in A$ olsun. $B(z_0, \varepsilon) \subset A$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ gerçel sayısı varsa, z_0 noktasına A kümesinin bir iç noktası denir.

Tanım 1.1.1.3 (iç): Bir A kümesinin bütün iç noktalarının oluşturduğu kümeye A kümesinin içi denir, ve A^0 ile gösterilir.

Tanım 1.1.1.4 (Açık Küme): Her noktası bir iç nokta olan kümeye açık küme denir. Başka bir deyişle $A^0 = A$ ise A kümesi bir açık kümedir.

Tanım 1.1.1.5 (Kapalı Küme): Tümleyeni açık olan kümeye kapalı küme denir.

Tanım 1.1.1.6 (Dış Nokta): $A \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. A kümesinin tümleyeninin bir iç noktasına A kümesinin bir dış noktası denir. Bütün dış noktalarının oluşturduğu kümeye A kümesinin dışı denir ve $(\mathbb{C} - A)^0$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.1.7 (Yığılma Noktası): $\alpha \in \mathbb{C}$ olsun. α'nın her $\varepsilon > 0$ komşuluğunda A kümesine ait en az bir eleman varsa, α'ya A kümesinin yığılma noktası veya yığılma yeri denir. Eğer sonsuz çoklukta elemanı varsa bu yığılma noktasına limit noktası denir.

Tanım 1.1.1.8 (Kapanış Noktası): $A \subset \mathbb{C}$ alt kümesi ve bir $z \in \mathbb{C}$ noktası verilsin. Eğer z noktasının her komşuluğunda A kümesinin en az bir elemanı varsa, z noktasına A kümesinin kapanış noktası denir.

Tanım 1.1.1.9 (Bağlantılı Küme): A, Y ve Z $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesinin alt kümeleri olsun. Eğer $A \subset Y \cup Z$, $A \cap Z \neq \varnothing$, $A \cap Y \neq \varnothing$ ve $A \cap Y \cap Z = \varnothing$ olacak biçimde Y ve Z gibi boş olmayan iki ayrık ve açık küme bulunamaz ise, $A \subset \mathbb{C}$ kümesine bağlantılıdır denir. Aksi halde bağlantısızdır denir.

Tanım 1.1.1.10 (Basit Bağlantılı Küme): A kümesi içindeki herhangi iki noktayı birleştiren bütün yollar yine küme içinde kalıyorsa, bu A kümesine basit bağlantılı küme denir.

Tanım 1.1.1.11 (Bölge): Kompleks düzlemde açık ve bağlantılı kümelere bölge denir.

Tanım 1.1.1.12 (Örtü): X herhangi bir uzay olsun. Bileşimleri V kümesini kapsayan $\{G_i\}$ ailesine, $V \subset X$ kümesinin örtüsü denir. Bileşimleri $V \subset X$ kümesini kapsayan ve $\bigcup\limits_i G_i = X$ olan açık kümelerin $\{G_i\}$ ailesine, $V \subset X$ kümesinin açık örtüsü denir. Bileşimleri $V \subset X$ kümesini kapsayan alt aileye veya V kümesini örten aileye, verilen bir örtünün alt örtüsü adı verilir. Eğer $V \subset X$ kümesini kapsayan alt aile yanlız sonlu sayıda küme kapsıyorsa, bu aileye de sonlu alt örtü denilir.

Tanım 1.1.1.13 (Kompaktlık): Eğer bir kümenin her açık örtüsünün sonlu alt örtüsü varsa, bu kümeye kompakttır denir.

Tanım 1.1.1.14 (Seri):

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

ifadesine seri denir. $a_1, a_2, ...$ sayılarına da serinin terimleri adı verilir.

Bir seriyi göstermek için

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

veya

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum a_n$$

kullanılır.

Tanım 1.1.1.15 (Yakınsaklık): Kompleks sayıların bir $\{z_n\}$ dizisi ve $z_0 \in \mathbb{C}$ verilsin. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $\forall n \geqslant n_0$ olduğunda $|z_n - z_0| < \varepsilon$ olacak biçimde bir n_0 doğal sayısı varsa, bu dizi z_0 kompleks sayısına yakınsıyor denir. $\{z_0\}$ dizisinin z_0 noktasına yakınsaması $z_n \to z_0$ veya $\lim z_n = z_0$ biçiminde gösterilir.

Tanım 1.1.1.16 (Düzgün Yakınsama): $A \subset \mathbb{C}$ ve $f_n : A \to \mathbb{C}$ fonksiyonlarının $\{f_n\}$ dizisi verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve tüm $z \in A$ değerleri için $\forall n \geqslant n_0$ alındığında $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ olacak biçimde bir n_0 doğal sayısı varsa, $\{f_n\}$ fonksiyon dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsıyor denir.

Tanım 1.1.1.17 (Mutlak Yakınsaklık): $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |U_n|$ serisi yakınsak ise $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ serisine mutlak yakınsak seri denir.

Tanım 1.1.1.18 (Limit):$\omega = f(z)$ fonksiyonu basit bağlantılı bir D bölgesinde tanımlanmış olsun.$z_0 \in D$ için $z \to z_0$ olduğunda $\omega = f(z)$ fonksiyonunun limiti; $\varepsilon > 0$ sayısı ve $|z - z_0| < \delta$ olduğu müddetçe $|f(z) - L| < \varepsilon$ eşitsizliği daima gerçeklenecek şekilde $\delta > 0$ sayısı mevcut ise $f\ (z)$ fonksiyonunun limiti L'dir denir ve $\lim_{z \to z_0} f\ (z) = L$ şeklinde yazılır.

Tanım 1.1.1.19 (Süreklilik): $A \subset \mathbb{C}$, $f : A \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in A$ olsun. $\varepsilon > 0$ keyfi olmak üzere $z \in A$ ve $|z - z_0| < \delta$ için

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

olacak biçimde $\delta(z_0, \varepsilon) > 0$ sayısı mevcut ise f fonksiyonuna z_0 noktasında süreklidir denir.

Tanım 1.1.1.20 (Parçalı Süreklilik): $A \subset \mathbb{C}$, $f : A \to \mathbb{C}$ tanımlı bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun A'daki süreksizlik noktalarının sayısı sonlu ise f fonksiyonuna A üzerinde parçalı süreklidir denir.

Tanım 1.1.1.21 (Analitik Fonksiyon): f, kompleks değişkenli ve kompleks değerli fonksiyonu $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasının bir komşuluğunda tanımlı olsun. Eğer

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti varsa, bu fonksiyona z_0 noktasında diferansiyellenebilirdir denir. z_0 noktasının bir $\varepsilon > 0$ komşuluğunda diferansiyellenebilir bir f fonksiyonuna z_0 noktasında analitik fonksiyon denir.

Tanım 1.1.1.22 (Analitik Devam): Bir $f(z)$ fonksiyonu, a merkezli C_1 yakınsaklık çemberi içinde

$$a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + ...$$

ile tanımlanan Taylor serisi ile gösterilebilir. C_1 çemberi içinde seçilmiş bir b noktası için; yukarıdaki açılımdan, $f(z)$ fonksiyonunun b noktasındaki türevleri ve $f(z)$ fonksiyonunun değeri bulunabilir. Böylece

$$b_0 + b_1(z-b) + b_2(z-b)^2 + ...$$

serisi yeni bir seri olup C_2 yakınsaklık dairesine sahip olur. Eğer C_1'den öteye bir C_2 varsa o zaman $f(z)$'nin değeri ve türevleri bu parça uzaması içinde bulunabilir ve böylece $f(z)$ ile ilgili fazla bilgiye sahip oluruz. Bu durumda; $f(z)$ fonksiyonunun analitikliğinin C_1 eğrisinin ötesine genişleyebildiğini söyleyebiliriz. Buna analitik devamlılık denir.

Tanım 1.1.1.23 (Kutup Noktası, Sıfır Noktaları): f fonksiyonu, $z = z_0$ noktasında analitik değil fakat

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = A \neq 0 \tag{1}$$

olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}^+$ sayısı mevcut ise, $z = z_0$ noktasına f fonksiyonunun bir kutup noktası denir. (1) ifadesini gerçekleyen en küçük $n \in \mathbb{Z}^+$ sayısına z_0 kutup noktasının mertebesi denir. Mertebesi 1 olan kutup noktası basit kutup noktası adını alır.

$z_0 \in \mathbb{C}$ noktasında analitik bir f fonksiyonu için $f(z_0) = 0$ iken

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z) \tag{2}$$

koşulunu sağlayan bir n pozitif tamsayısı ve $g(z_0) \neq 0$ olan, z_0 noktasında analitik bir g fonksiyonu varsa z_0 sayısına f fonksiyonunun n. mertebeden sıfırı denir. $n = 1$ durumunda z_0 noktasına f fonksiyonunun bir basit sıfırı denir.

Tanım 1.1.1.24 (Rezidü): f fonksiyonu, tek değerli olmak üzere C içindeki bir $z = z_0$ noktası hariç, C'nin üzerinde ve içinde analitik olsun. f fonksiyonunun $z = z_0$ noktasındaki Laurent açılımı,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n} \tag{3}$$

şeklindedir.

Bu açılımdaki negatif üslü terimin ilk b_1 katsayısı da f fonksiyonunun $z = z_0$ noktasındaki rezidüsü denir ve $\mathrm{Rez}(f, z_0)$ ile gösterilir.

(3) ifadesinden

$$\mathrm{Rez}(f, z_0) = b_1$$

şeklinde tanımlanır. Bu rezidü ayrıca

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)\, dz$$

integrali ile de hesaplanabilir. Bu nokta bir basit kutup ise

$$f(z) = \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \cdots$$

açılımı var olup burdan

$$b_1 = \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0) f(z) \right]$$

limiti ile de rezidü hesaplanabilir.

Tanım 1.1.1.25 (Periyodik fonksiyon): Kompleks düzlem üzerindeki her noktada tanımlı ve reel sayılar cisminde lineer bağımsız vektörler olan ω_1 ve ω_2 kompleks sayılar olmak üzere iki periyoda sahip olan fonksiyona çifte periyodik fonksiyon denir.

Tüm kompleks z sayıları için ω_1 ve ω_2'nin f'in periyodları olması

$$f(z+\omega_1) = f(z+\omega_2) = f(z)$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 1.1.1.26 (Meromorf Fonksiyon): Bir B bölgesinde kutup noktalarından başka singüler noktası olmayan fonksiyona meromorf fonksiyon denir.

Tanım 1.1.1.27 (Eliptik Fonksiyon): Açık $z-$düzlemindeki bir periyot latisinde meromorf ve çifte periyodik fonksiyona eliptik fonksiyon denir.

Tanım 1.1.1.28 (Riemann Theta Fonksiyonu): $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere, Riemann theta fonksiyonu

$$\theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (u,\tau) = \sum_n \exp \pi i \left\{ \tau \left(n+\frac{a}{2}\right)^2 + 2\left(n+\frac{a}{2}\right)\left(u+\frac{b}{2}\right) \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.1.1.29 (Jacobi Theta Fonksiyonu): Jacobi theta fonksiyonu

$$\begin{aligned} \theta_1(z \mid \tau) &= -iq^{1/8} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n(n+1)/2} e^{(2n+1)iz} = 2q^{1/8} \\ & \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n(n+1)/2} \sin(2n+1) z \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Tanım 1.1.1.30 (Tam Fonksiyon): Bütün sonlu z düzleminde analitik olan fonksiyonlara tam fonksiyonlar denir.

Tanım 1.1.1.31 (Grup): Bir G kümesi üzerinde $\oplus$ işaretiyle göstereceğimiz bir ikili işlem tanımlı olsun. Eğer bu işlem grup aksiyomları denilen aşağıdaki özelliklere sahipse $(G, \oplus)$ yapısına bir grup, denilir.

$(G1)$ İşlem birleşme özelliğine sahiptir.

$(G2)$ İşleme göre G nin birim öğesi vardır.

$(G3)$ G nin her öğesinin bu işleme göre bir ters öğesi vardır.

Ayrıca aşağıdaki özellik de sağlanıyorsa $(G, \oplus)$ yapısına değişmeli (abel) bir gruptur, denilir.

$(G4)$ İşlem yer değiştirme özelliğine sahiptir.

Tanım 1.1.1.32 (Halka): Bir H kümesi üzerinde $\oplus$ ve $\otimes$ işaretleriyle göstereceğimiz iki tane ikili işlem tanımlı olsun. Eğer bu işlemler halka aksiyomları diyeceğimiz aşağıdaki üç özelliğe sahipse $(H, \oplus, \otimes)$ yapısına bir halka denilir.

$(H1)$ $(H, \oplus)$ bir abel grubudur.

$(H2)$ $\otimes$ işlemi birleşme özelliğine sahiptir.

$(H3)$ $\otimes$ işleminin $\oplus$ işlemi üzerine soldan ve sağdan dağılma özelliği vardır.

Bu üç özellik ile birlikte

$(H4)$ $\otimes$ işlemine göre H nin birim öğesi var.

aksiyomu da sağlanıyorsa, $(H, \oplus, \otimes)$ halkasına birim öğeli halka ya da, kısaca, birimli bir halka, denilir.

İlk üç özellik ile birlikte

$(H5)$ $\otimes$ işlemi yer değiştirme özelliğine sahiptir,

aksiyomu da sağlanıyorsa, bu halkaya değişmeli bir halkadır, denilir.

Yukarıdaki beş özelliği sağlayan bir halkaya birimli ve değişmeli bir halkadır,denilir.

Tanım 1.1.1.33 (Cisim): Bir F kümesi üzerinde $\oplus$ ve $\otimes$ işaretleriyle göstereceğimiz iki tane ikili işlem tanımlı olsun. Eğer bu işlemler cisim aksiyomları diyeceğimiz aşağıdaki iki özelliğe sahipse $(F, \oplus, \otimes)$ yapısına bir cisim, denilir.

$(C1)$ $(F, \oplus, \otimes)$ birimli ve değişmeli bir halkadır.

$(C2)$ F kümesinden $\oplus$ işleminin birim öğesi atılınca, geri kalan küme $\otimes$ işlemine göre bir abel grubudur.

Tanım 1.1.1.34 (Modül): $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cümlesinin boş cümleden farklı ve toplama işlemine göre değişmeli her alt grubuna, $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkası üzerinde bir modül denir.

Tanım 1.1.1.35 (Latis): Sonlu düzlemde yığılma noktası bulunmayan bir modüle latis denir.

Sıfırdan farklı bir yığılma noktası olan her modül için sıfır da bir yığılma noktasıdır. O halde bir $\mathcal{L}$ latisi için sıfır bir yığılma noktası değildir. Buna göre sıfırdan farklı elemanları, mutlak değerce alttan sınırlı olan her değişmeli grup bir latis olmalıdır.

Düzlemsel latisler:

a)$\mathcal{L}_0 = \{mw : m = 0, w \neq 0, m \in \mathbb{Z}, w \in \mathbb{C}\}$

şeklinde tanımlı latise, sıfır boyutlu ya da sıfır latis denir.

b)$\mathcal{L}_1 = \{mw : m \neq 0, w \neq 0, m \in \mathbb{Z}, w \in \mathbb{C}\}$

olarak tanımlanan latise bir boyutlu veya basit latis denir.

c)$\mathcal{L}_2 = \left\{ \begin{array}{c} mw_1 + nw_2 : (m,n) \neq (0,0), w \neq 0, \quad m,\ n \in \mathbb{Z}, \\ w_1, w_2 \in \mathbb{C}, \frac{w_2}{w_1} = \tau \notin \mathbb{R} \end{array} \right\}$

cümlesi ile tanımlanan latise de iki boyutlu ya da çift latis denir.

Burada w_1, w_2 kompleks sayıları lineer bağımsız olup (w_1, w_2) çiftine $\mathcal{L}$ latisi için bir bazı denir ve

$$\operatorname{Im}\left(\frac{w_2}{w_1} = \tau\right) > 0$$

alınır.

Tanım 1.1.1.36 (Kalan Sınıfı): $u \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$u + \mathcal{L} = \{u + w : w \in \mathcal{L}\}$$

cümlesine, $\mathrm{mod}\,\mathcal{L}$'ye göre bir kalan sınıfı denir.

Tanım 1.1.1.37 (Temel Bölge): Her kalan sınıfının yalnız bir tek elemanını içeren basit bağlantılı bölgeye, ilgili latisin temel bölgesi denir.

$\mathcal{L}$ latisinin kendisi de bir kalan sınıfıdır. Buna göre, $\mathcal{L}_0$ düzlemsel latisinin temel bölgesi bütün düzlem, $\mathcal{L}_1$ latisinin temel bölgesi iki paralel iki doğru ile sınırlanmış, sonsuz bir şerit ve $\mathcal{L}_2$ latisinin temel bölgesi ise, değişik geometrik şekillerde olabilir.

$$D = \{aw_1 + bw_2 : 0 \leq a,\ b < 1\}$$

paralelkenarı, bu geometrik şekillerden biridir. Bir $\mathcal{L}$ latisinin bütün $w \in \mathcal{L}$ noktaları, sıfırdan farklı bir $\lambda \in \mathbb{C}$ kompleks sayısı ile çarpıldığında yeni bir

$$\hat{\mathcal{L}} = \{\lambda w : w \in \mathcal{L}\}$$

latisi tanımlanabilir.

Teorem 1.1.1.1: Eliptik fonksiyonların toplamı, farkı, bölümü ve çarpımları da yine bir eliptik fonksiyondur.

Teorem 1.1.1.2: En fazla bir kutbu olan 1. dereceden bir eliptik fonksiyon sabittir.

Tanım 1.1.1.38 (Euler Formülü): Her reel θ sayısı için $e^{i\theta}$ ya da $\exp(i\theta)$ ile gösterilen

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

ifadesi Euler Formülü olarak bilinir. Sıfırdan farklı z kompleks sayısının kutupsal formda

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

yazılışında Euler Formülü kullanılarak, z kompleks sayısı üstel formda

$$z = re^{i\theta}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 1.1.1.39 (Moivre Formülü):

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \qquad (n = 0, \pm1, \pm2, ...)$$

ifadesine Moivre Formülü adı verilir.

Teorem 1.1.1.3(Laurent Teoremi): $\omega = f(z)$ fonksiyonu aynı a merkezli r_1 yarıçaplı C_1 çemberi ve r_2 yarıçaplı C_2 çemberi üzerinde ve bu çemberlerin sınırladığı D halka bölgesinde tanımlanmış, analitik bir fonksiyon olsun. Bu halde f fonksiyonu

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-a)^n}$$

şeklinde bir açılıma sahiptir.

Bu açılımda

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\omega)}{(\omega - a)^{n+1}} d\omega; n = 0, 1, 2, ...$$

ve

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(\omega)}{(\omega - a)^{-n+1}} d\omega; n = 1, 2, ...$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca açılımdaki

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-a)^n}$$

kısmına Laurent serisinin "esas kısmı" adı verilir.

Teorem 1.1.1.4(Weierstrass M-testi): $g_n, A \subset \mathbb{C}$ cümlesindeki fonksiyonların bir dizisi olsun ve $M_n \geq 0$ reel sabitlerin bir dizisi alınsın.

(i) Tüm $z \in A$ değerleri için $|g_n(z)| \leq M_n$ ve,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ serisi yakınsak

olacak şekilde iki koşul sağlanıyorsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$$

serisi mutlak ve düzgün olarak A cümlesinde yakınsar.

2 MATERYAL VE YÖNTEM

2.1 PERİYODİK FONKSİYONLAR:

Tanım 2.1.1: f(z) fonksiyonu düzlemin bir D bölgesinde tanımlı olsun. Eğer $\forall z_1, z_2 \epsilon D$ için, $z_1 \sim z_2 = m2\omega$ olacak şekilde $f(z_1) = f(z_2)$ ise o zaman $m\epsilon Z$ için 2ω kompleks sayısına fonksiyonun periyodu ve fonksiyona da periyodik fonksiyon denir.

Örnek:

1) $\exp(z + 2\pi i) = \exp z$

$f(z) = \exp(z + 2\pi i) = e^z.e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z$ yani $f(z) = f(z + 2\pi i)$ olduğundan $2\pi i$ bu fonksiyonun periyodudur.

Teorem 2.1.1: $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları aynı periyotlu iki periyodik fonksiyon ise, o zaman $f(z) \pm g(z)$, $f(z)g(z)$ ve $\frac{f(z)}{g(z)}$ $(g(z) \neq 0)$ de aynı periyotlu periyodik fonksiyonlardır.

Teorem 2.1.2: Aynı periyotlu periyodik fonksiyonlar kümesi bir cisim formundadır.

Teorem 2.1.3: Bir periyodik fonksiyonun türevi de aynı periyot yada periyotlara sahip bir periyodik fonksiyondur.

İspat: $f(z)$ fonksiyonu 2ω periyotlu bir fonksiyon olsun.

O zaman

$$f(z + 2\omega) = f(z)$$

dir. Bundan dolayı

$$f'(z + 2\omega) = f'(z)$$

dir.

Teorem 2.1.4: Eğer $f(z)$ fonksiyonu 2ω periyotlu bir periyodik fonksiyon ise, o zaman herhangi bir m tamsayısı için $m2\omega$ da $f(z)$ nin bir periyodudur.

İspat: m herhangi bir pozitif tamsayı olsun.

$$\begin{aligned} f(z+m2\omega) &= f\left(z+\overline{m-1}\,2\omega+2\omega\right) \\ &= f\left(z+\overline{m-1}\,2\omega\right) \\ &= f\left(z+\overline{m-2}\,2\omega+2\omega\right) \\ &= f\left(z+\overline{m-2}\,2\omega\right) \\ &\vdots \\ &= f(z) \end{aligned}$$

m herhangi bir negatif tamsayı olsun. O zaman

$$\begin{aligned} f(z-m2\omega) &= f(z-m2\omega+m2\omega) \\ &= f(z) \end{aligned}$$

dir.

Dikkat: $\Omega=\{m2\omega\}$ periyotlarının kümesi sonsuzdur.

Teorem 2.1.5: Eğer $f(z)$ periyodik fonksiyonunun periyotlarının kümesi $2\omega_1, 2\omega_2, 2\omega_3$ ise, o zaman $\sum_{r=1}^{n} m_r 2\omega_r \ (m_r \in \mathbb{Z})$ de fonksiyonun bir periyodudur.

İspat: $f(z)$ için

$$\begin{aligned} f\left(z+\sum_{r=1}^{n} m_r 2\omega_r\right) &= f\left(z+\sum_{r=2}^{n} m_r 2\omega_r + m_1 2\omega_1\right) \\ &= f\left(z+\sum_{r=2}^{n} m_r 2\omega_r\right) \\ &= f\left(z+m_2 2\omega_2+\sum_{r=3}^{n} m_r 2\omega_r\right) \\ &= f\left(z+\sum_{r=3}^{n} m_r 2\omega_r\right) \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$= f(z)$$

Teorem 2.1.6: Ω periyotların kümesi olmak üzere toplama işlemi altında Ω bir değişmeli gruptur.

Teorem 2.1.7:Eğer periyodik meromorfik fonksiyonun sabit olmayan iki periyodu $2\omega_1, 2\omega_2$ ve $\frac{2\omega_2}{2\omega_1} \in \mathbb{R}$ ise, o zaman $\frac{2\omega_2}{2\omega_1} \in \mathbb{Q}$ dır.

İspat: $m \in \mathbb{Z}$ için 0 ve $2\omega_1$ üzerinde bulunduran aralık $(0, \pm m2\omega_1)$ olsun. $\frac{2\omega_2}{2\omega_1} \in \mathbb{R}$ olduğundan $n \in \mathbb{Z}$ için $n2\omega_2$ bu doğru üzerinde olmalıdır.

Eğer $m2\omega_1 = n2\omega_2$ ise $\frac{2\omega_2}{2\omega_1}$ bir rasyonel sayıdır. m, n nin en az bir değeri için eğer $m2\omega_1 = n2\omega_2$ ise o zaman $\{z'_n\}$ noktalarının kümesi $mod 2\omega_1$ e göre $\{n2\omega_2\}$ konjuge olur.

$$z'_{n_1} = z'_{n_2}, n_1 \neq n_2$$

veya

$$n_1 2\omega_2 \equiv n_2 2\omega_2 \qquad (mod 2\omega_1)$$

yani

$$(n_1 - n_2)\, 2\omega_2 = m2\omega_1$$

dir. Sonsuz sınırlı bir küme olan $\{z'_n\}$ kümesinin bir limit noktası vardır. Fakat $\{z'_n\} \subset \Omega$ olduğundan bu imkansızdır. Bundan dolayı $\frac{2\omega_2}{2\omega_1} \in \mathbb{Q}$ dur.

Teorem 2.1.8: Sabitten farklı periyodik meromorfik bir fonksiyon Ω periyotlar kümesinin elemanları ya $m2\omega$ yada $m2\omega_1 + n2\omega_2$ dir.

Tanım 2.1.2: Bir $f(z)$ periyodik fonksiyonunun $m2\omega$ şeklindeki periyotlarına göre $f(z)$ fonksiyonuna *basit periyodik* fonksiyon denir. $2\omega_1$ periyoduna da *esas periyot* veya *asıl periyot* denir.

Tanım 2.1.3: $2\omega_1$ ile tanımlanan şeride de basit periyot fonksiyonunun *periyot şeridi* denir.

Tanım 2.1.4: Köşeleri $z_0 + m2\omega_1 + n2\omega_2$ noktalarında bulunan latise *periyot paralelkenarı* veya z_0 *periyot kafesi* denir.

Teorem 2.1.9 (Liouville): $f(z)$ fonksiyonu tüm sonlu düzlemde analitik ve sınırlı ise, $f(z)$ sabittir. Bir başka ifadeyle, bütün düzlemde sınırlı olan tam fonksiyon sabittir.

Tanım 2.1.5:Eğer $f(z+\omega) = f(z)$,z ve $z+\omega$ f' nin alanında olduğunda, kompleks değişkenli bir f fonksiyonu ω periyodu ile *periyodik* olarak adlandırılır. ω bir periyot ise, bu şekilde her n tamsayısı için $n\omega$'dır. ω_1 ve ω_2 periyotlar ise,bu şekilde seçilen her m ve n tamsayıları için $m\omega_1 + n\omega_2$ dir.

Tanım 2.1.6:Eğer iki periyodu ω_1 ve ω_2,onların oranı $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ reel değil ise, f fonksiyonuna *çifte periyodik* denir.

Dejenere durumları önlemek için oranın reel olması gerekir.Örneğin; eğer ω_1 ve ω_2 periyotlar,onların oranı reel ve rasyonel ise her ω_1 ve ω_2 nin aynı periyorların bir tamsayı katı olduğunu göstermek kolaydır. Gerçekten eğer a ve b aralarında asal tam sayılar olduğunda $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{a}{b}$ ise ,o zaman m ve n tamsayıları vardır, böylece $mb + na = 1$'dir. $\omega = m\omega_1 + n\omega_2$ olsun. O zaman ω bir periyottur ve

$$\omega = \omega_1 \left(m + n\frac{\omega_2}{\omega_1} \right) = \omega_1 \left(m + n\frac{a}{b} \right) = \frac{\omega_1}{b} (mb + na) = \frac{\omega_1}{b}$$

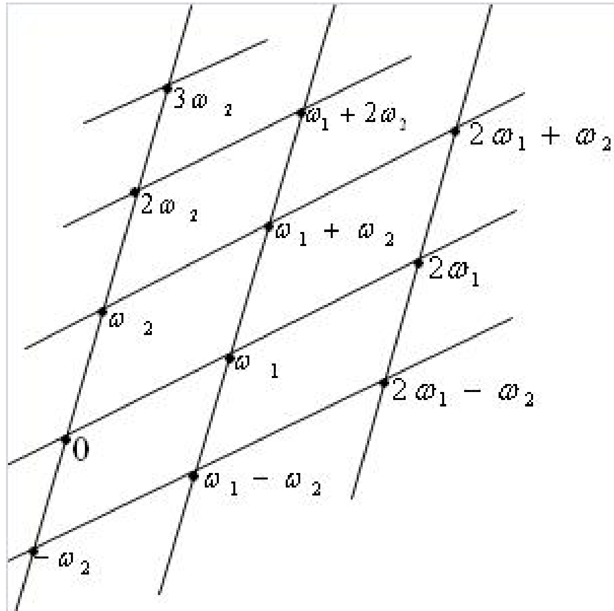
elde edilir. Böylece $\omega_1 = b\omega$ ve $\omega_2 = a\omega$ 'dir. Bu nedenle hem ω_1 hem de ω_2 ω'nın tamsayı katlarıdır.

Eğer $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ oranı reel ve irrasyonel ise f nin keyfi olarak küçük periyotlara sahip olduğu gösterilebilir. Keyfi küçük periyotlar ile bir fonksiyon, bu fonksiyonun analitik olduğu her açık bağlantılı küme üzerinde sabittir. Gerçekten, f nin analitik olduğu her noktada

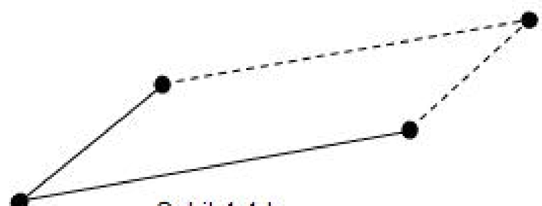
$$f'(z) = \lim_{z_n \to 0} \frac{f(z + z_n) - f(z)}{z_n}$$

dir. Burada $\{z_n\}$, 0 eğilimindeki sıfırdan farklı kompleks sayıların herhangi bir dizisidir. Eğer f keyfi küçük periyotlara sahip ise, $\{z_n\}$ 0 eğilimindeki periyotların bir dizisi olarak seçilebilir. O zaman $f(z + z_n) = f(z)$ dir ve bundan dolayı $f'(z) = 0$ dır. Başka bir deyişle f nin analitik olduğu her açık bağlantılı küme üzerinde sabit olmalıdır.

Tanım 2.1.7: f;ω_1 ve ω_2 periyotlarına sahip olsun ve periyotların oranı $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ reel olmasın. Eğer m ve n birer tamsayı iken f nin her periyodu $m\omega_1 + n\omega_2$ biçiminde ise (ω_1, ω_2) çiftine *esas çift* denir.



Şekil 1.1.a

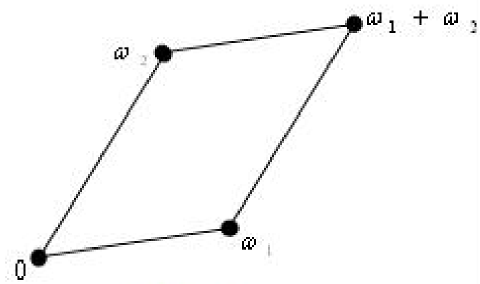


Şekil 1.1.b

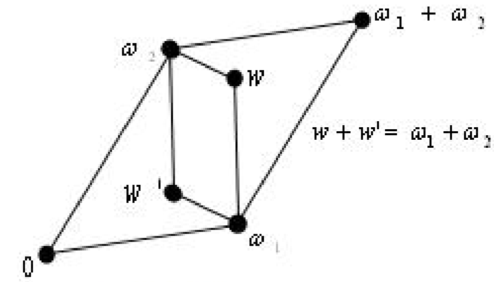
ω_1 ve ω_2 periyotlarının her esas çifti; düzlemin karoları biçimindeki paralelkenarların bir ağını belirler. Bunlara *periyot paralelkenarları* denir. Köşeleri $\omega = m\omega_1 + n\omega_2$ periyotlarıdır. İki kenarın kesişimi ve periyot paralelkenarına ait tek sınır noktaları olarak bunların kesişme noktaları dikkate alınır, şekil 1.1.b de gösterildiği gibidir.

Gösterim: Eğer ω_1 ve ω_2 iki kompleks sayı ve onların oranı reel değil ise, burada m ve n keyfi tam sayılar olmak üzere $m\omega_1 + n\omega_2$ nin tüm lineer kombinasyonlarının kümesi $\Omega(\omega_1, \omega_2)$ (veya sadece Ω) ile gösterilir. Bu ω_1 ve ω_2 tarafından oluşturulan *latis* olarak adlandırılır.

Teorem 2.1.10: Eğer (ω_1, ω_2) periyotların bir esas çifti ise, o zaman köşeleri $0, \omega_1, \omega_2$ olan üçgen içinde veya sınırında başka periyotlar içerir.



Şekil 1.2.a



Şekil 1.2.b

İspat: Şekil 1.2.a da gösterilen, köşeleri $0, \omega_1, \omega_1{+}\omega_2$ ve ω_2 olan paralelkenarı dikkate alalım. Bu paralel kenarın içindeki ve sınırındaki noktalar,

$$z = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2$$

formuna sahiptir, burada $0 \leq \alpha \leq 1$ ve $0 \leq \beta \leq 1$ dir. Bu noktalar arasındaki periyotlar sadece $0, \omega_1, \omega_2$ ve $\omega_1 +\ \omega_2$ dir, yani köşeleri $0, \omega_1, \omega_2$ olan üçgenin köşeleri dışında hiçbir periyodları yoktur.

Tersi olarak $0, \omega_1, \omega_2$ üçgeninin köşeleri dışında bir periyodu olduğunu varsayalım ve ω herhangi bir periyodu olsun. m ve n tamsayıları için $\omega = m\omega_1 + n\omega_2$ olduğu gösterilsin. $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ reel olmayan sayı ω_1 ve ω_2 reel sayılar üzerinde lineer bağımsız olduğu için ,bunun sonucu olarak

$$\omega = t_1\omega_1 + t_2\omega_2$$

dir, burada t_1 ve t_2 reeldir. Şimdi $[t]$ t den küçük veya eşit en büyük tam sayı olsun ve burada $0 \leq r_1 < 1$ ve $0 \leq r_2 < 1$ olduğunda

$$t_1 = [t_1] + r_1, \quad t_2 = [t_2] + r_2$$

yazılır. O zaman

$$\omega - [t_1]\,\omega_1 - [t_2]\,\omega_2 = r_1\omega_1 + r_2\omega_2$$

dir. Eğer r_1 veya r_2 den biri sıfırdan farklı ise o zaman $r_1\omega_1 + r_2\omega_2$ köşeleri $0, \omega_1, \omega_2, \omega_1 +\ \omega_2$ olan paralelkenarın içinde uzanan bir periyot olacaktır.

Fakat eğer bir w periyodu bu paralelkenarın içinde uzanıyorsa, o zaman ya w yada $\omega_1 + \omega_2 - w$; $0, \omega_1, \omega_2$ üçgeninin içinde veya ω_1 ve ω_2 yi birleştiren köşegen üzerinde uzanacaktır, bu hipoteze aykırıdır. Bu nedenle $r_1 = r_2 = 0$ ve ispat tamamlanır.

Tanım 2.1.8: Reel olmayan orana sahip olan (ω_1, ω_2) ve (ω_1', ω_2') kompleks sayılarının iki çiftine,eğer periyotlarının aynı latislerini oluşturuyorlar ise *eşittir* denir; bu ise, $\Omega(\omega_1, \omega_2) = \Omega(\omega_1', \omega_2')$ olarak gösterilir.

Teorem 2.1.11: (ω_1, ω_2) ve (ω_1', ω_2') iki çifti eşittir ancak ve ancak tamsayı girdileri ile $2x2$ matrisi $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ve $ad - bc = \pm 1$ determinantı vardır, böylece

$$\begin{pmatrix} \omega_2' \\ \omega_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_1 \end{pmatrix}$$

dir veya diğer bir deyişle,

$$\begin{aligned} \omega_2' &= a\omega_2 + b\omega_1, \\ \omega_1' &= c\omega_2 + d\omega_1 \end{aligned}$$

dir.

2.2 ELİPTİK FONKSİYONLAR:

Tanım 2.2.1: Eğer f fonksiyonu aşağıdaki iki özelliğe sahip ise *eliptiktir.*

(a) f çifte periyodiktir.

(b) f meromorfiktir.

Teorem 2.2.1: Sabit olmayan eliptik fonksiyon, periyotların bir esas çiftine sahiptir.

Teorem 2.2.2: Eğer bir f eliptik fonksiyonu bazı periyot paralelkenarlarında kutba sahip değil ise f fonksiyonu sabittir.

İspat: Eğer f nin bir periyot paralelkenarında kutbu yok ise, o zaman f sürekli ve bundan dolayı paralelkenarların kapatılması ile sınırlandırılmıştır. Periyodiklik ile, f bütün düzlemde sınırlıdır. Bundan dolayı, Lioville's Teoremi (Teorem 2.1.9) ile, f sabittir.

Teorem 2.2.3: Eğer bir f eliptik fonksiyonu bazı periyot paralelkenarlarında sıfıra sahip değil ise, o zaman f sabittir.

Teorem 2.2.4: Herhangi bir hücrenin (cell) sınırı boyunca alınan eliptik fonksiyonun kontur integrali sıfırdır.

İspat: Periyodiklik nedeniyle paralel kenarlar boyunca integraller iptal edilir.(Etkisiz hale gelir.)

Teorem 2.2.5: Herhangi bir periyot paralelkenarında, eliptik fonksiyonun kutuplarındaki eliptik fonksiyonun rezidüleri toplamı sıfırdır.

Not: Teorem 2.2.5 Her bir periyot paralelkenarında en az 2 basit kutba veya en az bir çift kutba sahip olan eliptik fonksiyonun sabit olmadığını gösterir.

Teorem 2.2.6: Herhangi bir periyot paralelkenarındaki eliptik fonksiyonun sıfırlarının sayısı kutuplarının sayısına eşittir.

İspat: Bir hücrenin C sınırı etrafında alınan

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

integrali, hücre içindeki kutupların sayısı ile sıfırlarının sayısı arasındaki fark sayılır. Fakat, f ile aynı periyotlarda $\frac{f'}{f}$ eliptiktir ve Teorem 2.2.4 bu integralin sıfır olduğunu bize anlatır.

Not: Herhangi bir periyot paralel kenarındaki eliptik fonksiyonun sıfırlarının (veya kutuplarının) sayısı fonksiyonun *derecesi(mertebesi)* olarak adlandırılır. Her sabit olmayan eliptik fonksiyonun derecesi 2 ye eşit veya 2 den büyüktür.

2.2.1 Eliptik Fonksiyonların Yapısı

Fonksiyonun mertebesi en az 2 olduğundan, her bir periyot paralelkenarındaki ikinci dereceden bir kutba veya iki basit kutba ihtiyacımız var. Biri Weierstrass ile, diğeri Jacobi ile geliştirilen iki olasılık eliptik fonksiyonların iki teorisine yol açar. Wierstrass ve onun hareket noktasının, $z = 0$ da ve bunun için her periyottaki derecesi 2 olan bir kutuba sahip eliptik fonksiyonlarınn yapısıdır. Laurent açılımının her bir ω periyodu civarındaki önemli bir kısmı

$$\frac{A}{(z-\omega)^2} + \frac{B}{(z-\omega)^2}$$

formuna sahip olmalıdır.

Kolaylık için $A = 1, B = 0$ alalım. Her bir ω periyodu civarındaki böyle bir açılım istediğimizden, bu tip terimlerin bir toplamını

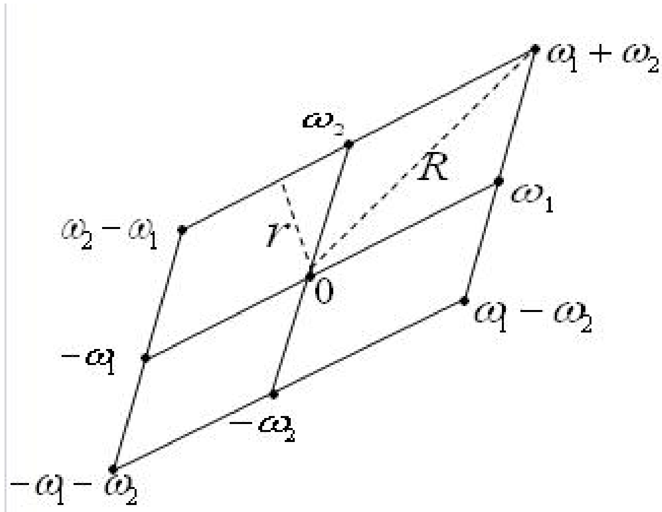
$$\sum_{\omega} \frac{1}{(z-\omega)^2}$$

olarak düşünmek doğaldır, bütün $\omega = m\omega_1 + n\omega_2$ periyotları üzerinde toplanır. $z \neq \omega$ sabiti için, bu m ve n üzerinde toplanan bir çift seridir. Sonraki iki lemmada, bu tipteki çift serilerin yakınsaklık özellikleri ele alınacaktır. Bu lemmalarda,bütün $m\omega_1 + n\omega_2$ lineer kombinasyanlarının kümesi Ω ile gösterilir, burada m ve n keyfi tamsayılardır.

Lemma 2.2.1: Eğer α reel ise,

$$\sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ \omega \neq 0}} \frac{1}{\omega^{\alpha}}$$

sonsuz serisi mutlak yakınsar,ancak ve ancak $\alpha > 2$ dir.



Şekil 1.3

İspat: Şekil 1.3 e bakınız ve r ve R sırasıyla 0 dan gösterilen paralelkenara olan minimum ve maksimum uzaklıklar olsun. Eğer ω, bu şemada gösterilen herhangi 8 sıfır olmayan periyotsa,

$$r \le |\omega| \le R \qquad (\omega \text{ nın 8 periyodu için})$$

elde edilir.

Bu 8'i çevreleyen eş periyotların bir sonraki katında

$$2r \le |\omega| \le 2R \qquad (\omega \text{ nın 16 yeni periyodu için})$$

eşitsizliklerini sağlayan 2.8=16 tane yeni periyot elde edilir. Bir sonraki katında

$$3r \le |\omega| \le 3R \quad (\omega \text{ nın 24 yeni periyodu için})$$

eşitsizliğini sağlayan 3.8=24 tane yeni periyot elde edilir v.b. Bu nedenle ,

$$\omega \text{ nın ilk 8 periyodu için, } \frac{1}{R^\alpha} \le \frac{1}{|\omega|^\alpha} \le \frac{1}{r^\alpha}$$

$$\omega \text{ nın sonraki 16 periyodu için, } \frac{1}{(2R)^\alpha} \le \frac{1}{|\omega|^\alpha} \le \frac{1}{(2r)^\alpha}, v.b.$$

eşitsizlikler elde edilir. Bunun için orijin etrafındaki sıfır olmayan $8(1+2+ ...... +n)$ periyot üzerinde alınan $S\left(n\right)=\sum\left|\omega\right|^{-\alpha}$ toplamı;

$$\frac{8}{R^{\alpha}}+\frac{2.8}{\left(2R\right)^{\alpha}}+...+\frac{n.8}{\left(nR\right)^{\alpha}}\leq S\left(n\right)\leq\frac{8}{r^{\alpha}}+\frac{2.8}{\left(2r\right)^{\alpha}}+...+\frac{n.8}{\left(nr\right)^{\alpha}},$$

veya

$$\frac{8}{R^{\alpha}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha-1}}\leq S\left(n\right)\leq\frac{8}{r^{\alpha}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha-1}}$$

eşitsizliklerini sağlar. $\alpha>2$ ise, bu $8\zeta\frac{(\alpha-1)}{r^{\alpha}}$ ile üstten sınırlı $S(n)$ kısmi toplamlarının olduğunu gösterir. Fakat herhangi bir parçalı toplam, bu tür iki parçalı toplam arasında yer alır, bu yüzden $\sum\left|\omega\right|^{-\alpha}$ serisinin bütün parçalı toplamları üstten sınırlıdır ve bundan dolayı $\alpha>2$ ise seri yakınsar. $\alpha\leq2$ ise alttan sınırlı $S(n)$ dizisinin ıraksar olduğunu gösterir.

Lemma 2.2.2: $\alpha>2$ ve $R>2$ ise $|z|\leq R$ diskinde

$$\sum_{|\omega|>R}\frac{1}{\left(z-\omega\right)^{\alpha}}$$

serisi mutlak ve düzgün yakınsar.

İspat: $\alpha\geq1$ ise, böyle bir M sabitinin (R ve α ya bağlı olarak) var olduğu gösterilecek, $|z|\leq R$ olan z'ler ve $|\omega|>R$ olan bütün ω'lar için

$$\frac{1}{\left(z-\omega\right)^{\alpha}}\leq\frac{M}{\left|\omega\right|^{\alpha}}\tag{4}$$

elde edilir. (4) eşitsizliği

$$\left|\frac{z-\omega}{\omega}\right|^{\alpha}\geq\frac{1}{M}\tag{5}$$

denktir.

M yi sergilemek için $|\omega|>R$ olan Ω daki bütün ω ları göz önüne alalım. Modülü minimum düzeyde seçilsin, $d>0$ olduğunda $|\omega|=R+d$ söylenir. O zaman $|z|\leq R$ ve $|\omega|\geq R+d$ ise

$$\left|\frac{z-\omega}{\omega}\right|=\left|1-\frac{z}{\omega}\right|\geq1-\left|\frac{z}{\omega}\right|\geq1-\frac{R}{R+d}$$

elde edilir ve bundan dolayı

$$M = \left(1 - \frac{R}{R+d}\right)^{-\alpha}$$

olduğunda

$$\left|\frac{z-\omega}{\omega}\right|^{\alpha} \geq \left(1 - \frac{R}{R+d}\right)^{\alpha} = \frac{1}{M}$$

dir. Bu hem (5) 'i hem de Lemma 2.2.2 yi ispatlar.

Daha önce belirtildiği gibi,

$$\sum_{\omega\in\Omega} \frac{1}{(z-\omega)^2}$$

formundaki seri kullanılarak basit eliptik fonksiyonlar oluşturmak denenebilir. Bu, her bir periyot civarında uygun (gerekli) temel kısma sahiptir. Ancak seri mutlak yakınsamaz, bu yüzden serideki üs 2 yerine 3 kullanılır. Bu bize 3. dereceden eliptik fonksiyonları verir.

Teorem 2.2.7: f;

$$f(z) = \sum_{\omega\in\Omega} \frac{1}{(z-\omega)^3}$$

serisi ile tanımlansın. O zaman f; Ω da her bir ω periyodunda 3. dereceden bir kutbu olan ve periyotları ω_1,ω_2 olan eliptik bir fonksiyondur.

İspat: Lemma 2.2.2 ile, seri $|z| \leq R$ diskinde düzgün yakınsayan $|\omega| > R$ üzerindeki toplam ile elde edilir. Bu nedenle o, bu diskteki analitik bir fonksiyonu gösterir. Sayılardaki sonlu kalan terimler bu diskteki her bir ω periyodundaki 3.dereceden kutupları hariç, bu diskte analitiktir. Bu, Ω daki her ω daki 3. dereceden bir kutbu olan f fonksiyonunun meromorfik olduğunu ispatlar. Sonra f nin ω_1 ve ω_2 periyotlarına sahip olduğunu gösterir. Bunun için serinin mutlak yakınsaklığından faydalanılabilir.

$$f(z+\omega_1) = \sum_{\omega\in\Omega} \frac{1}{(z+\omega_1-\omega)^3}$$

elde edilir. Fakat $\omega - \omega_1, \omega$ ya sahip Ω daki bütün periyotlardan geçer, yani $f(z+\omega_1)$ için seri, $f(z)$ için serinin sadece bir yeniden düzenlemesidir. Mutlak yakınsaklık ile $f(z+\omega_1) = f(z)$ elde edilir. Benzer şekilde $f(z+\omega_2) = f(z)$ dir yani f çifte periyodiktir. Bu ispatı tamamlar.

2.3 MOBİUS DÖNÜŞÜMLER VE MODÜLER FONKSİYONLAR:

Tanım 2.3.1 (Mobius Dönüşümler): Daha genel bir dönüşüm olan

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \tag{6}$$

(a,b,c,d keyfi kompleks sayılar) ile ilgili bazı açıklamalar ile başlayalım.

Eşitlik (6); $z = \frac{-d}{c}$ ve $z = \infty$ hariç $C^* = C \cup \{\infty\}$ genişletilmiş kompleks sayılar sistemindeki tüm z'ler için $f(z)$ tanımlar. $z \neq 0$ ise $\frac{z}{0} = \infty$ olduğu olağan kurala sahip

$$f\left(\frac{-d}{c}\right) = \infty \quad \text{ve} \quad f(\infty) = \frac{a}{c}$$

ile tanımlanan C^* tamamına f nin tanımı genişletilebilir.

İlk olarak;

$$f(w) - f(z) = \frac{(ad-bc)(w-z)}{(cw+d)(cz+d)}, \tag{7}$$

$ad - bc = 0$ ise f nin sabit olduğunu gösterir. Bu dejenere durumu engellemek için, $ad - bc \neq 0$ olduğunu varsayalım. Dolayısıyla bu rasyonel fonksiyona *mobius dönüşüm* denir. $z = \frac{-d}{c}$ deki sabit kutup hariç C^* üzerindeki her yerde analitiktir.

Eşitlik(7), her Mobius dönüşümü C^* üzerinde bire bir olduğunu gösterir. $f(z)$ cinsinden z için (6) çözüldüğünde;

$$z = \frac{df(z) - b}{-cf(z) + a}$$

bulunur. Yani C^* üzerinde f nin haritası C^* dir. Bu da ters fonksiyonun f^{-1} in bir Mobius dönüşüm olduğunu gösteriyor.

(7)'de $w-z$ ile bölündüğünde ve $w \to z$ olduğunda

$$f'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$$

elde edilir, bundan dolayı analitik olan her noktada $f'(z) \neq 0$ dır. Bu nedenle, muhtemelen $z = \frac{-d}{c}$ kutbu hariç her yerde f konformaldir.

Mobius dönüşümler daireler üzerindeki daire haritalarıdır.(Dairelerin özel durumlarının doğrular olduğu düşünülsün.) Bunu ispatlamak için A ve C reel olmak üzere

$$Az\overline{z} + Bz + \overline{B}\overline{z} + C = 0 \tag{8}$$

eşitliği düşünülsün. Herhangi bir daire üzerindeki noktalar $A \neq 0$ olan böyle bir eşitliği karşılar ve herhangi bir doğru üzerindeki noktalar $A = 0$ olan böyle bir eşitliği karşılar. (8)'deki z, $(aw+b)/(cw+d)$ ile değiştirildiğinde w nun aynı tip bir eşitliği olan

$$A'w\overline{w} + B'w + \overline{B'}\overline{w} + C' = 0 \tag{9}$$

karşıladığı bulunur, burada A' ve C' reeldir. Bunun için her Mobius dönüşüm, bir daire veya doğru üzerindeki bir daire veya doğru haritasıdır.

Aynı sıfır olmayan sabitler ile tüm a, b, c, d katsayıları çarpılır ise Mobius dönüşüm değişmeden kalır. Bu nedenle bu $ad - bc = 1$ olduğu varsayılan genellik içinde hiçbir kayıp yoktur.

$ad - bc \neq 0$ olan her bir Mobius dönüşümü (6)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

2x2 matrisi ile ilişkilidir. O zaman $\det A = ad - bc \neq 0$ dir. Eğer A ve B sırasıyla f ve g Mobius dönüşümleri ile ilişkili matrisler ise, o zaman matris çarpımı AB nin $f \circ g$ bileşke ile ilişkili olduğunu doğrulamak kolaydır, burada $(f \circ g)(z) = f(g(z))$ dir. $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ birim matrisi,

$$f(z) = z = \frac{1z + 0}{0z + 1}$$

birim dönüşümü ile ilişkilidir ve

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

ters matrisi

$$f^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}$$

olan f nin tersi ile ilişkilidir. Böylece $ad - bc \neq 0$ bileşke altında bir grup oluşturan tüm Mobius dönüşümlerin kümesi olduğu görülür. Bu bölüm katsayıları olan a, b, c, d tamsayıları önemli alt gruplarla ilgilidir.

Tanım 2.3.2 (Γ Modüler Grubu): $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ için $\det A = |A| = ad - bc = 1$ olmak üzere $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ şeklinde tersi mevcut olan matrisler grubu $\Re$ olsun. Tersi mevcut olan $\mathcal{L} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ lineer dönüşümü için,

$$\mathcal{L}_A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, z \to w = A.z$$

ile verilen ifadeye, *homojen lineer dönüşüm* denir. $A.z$ çarpımı, A ile $z = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ nin matris çarpımıdır.

$$z \to w = \overline{A}(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

ifadesi de *inhomojen lineer dönüşüm* olarak tanımlanır. Elemanları tamsayılar ve $\det A = 1$ olan homojen lineer dönüşüme, *homojen modüler dönüşüm* denir. Homojen modüler dönüşümler bir grup teşkil eder ki bu gruba *modüler grup* denir ve

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \; a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \det A = 1 \right\}$$

bağıntısı ile verilir. İnhomojen modüler dönüşümler,

$$\overline{\Gamma} = \left\{ \overline{A} : A \in \Gamma \right\}$$

grubu olarak tanımlanır [19].

Teorem 2.3.1: Homojen modüler grup, sonsuz kuvvetten $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve 4.kuvvetten $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisleri ile oluşturulur. İnhomojen modüler dönüşümler ise, 2.dereceden $S\tau = -\frac{1}{\tau}$ ve sonsuz dereceden $T\tau = \tau + 1$ dönüşümleri ile oluşturulur.

Sonraki teorem ,Γ nın

$$T\tau = \tau + 1 \;\; \text{ve} \;\; S\tau = -\frac{1}{\tau}$$

dönüşümleri ile oluşturulduğunu gösterir.

Teorem 2.3.2: Γ modüler grubu

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisleri ile oluşturulur. Yani n ler birer tamsayı olmak üzere, Γ daki her A,

$$A = T^{n_1} S T^{n_2} S ... T^{n_k} S$$

formunda ifade edilebilir.

Tanım 2.3.3 (Temel Küme): G, Γ modüler grubunun herhangi bir alt grubunu göstersin. H üst yarı düzlemindeki iki nokta τ ve τ' nün, G'deki bazı A için $\tau' = A\tau$ ise G altında denk olduğu söylenir.G bir grup olduğundan bu bir denklik bağıntısıdır.

Bu denklik bağıntısının, denklik sınıflarının ayrık(parçalı) toplamları halindeki H üst-yarı düzlemini bölmesine *yörünge* denir.$G\tau$ yörüngesi,$A \in G$ olmak üzere $A\tau$ formunun tüm kompleks sayılarının kümesidir.

Her yörüngeden bir nokta seçilir, bütün bu noktalar birleştirilirse buna G'nin temel kümesi denir.

Tanım 2.3.4: G, Γ modüler grubunun bir alt grubu olsun. Eğer R_G aşağıdaki iki özelliğe sahip ise H'nin R_G alt kümesi G'nin *temel bölgesi* olarak adlandırılır.

(a) İki farklı noktası olmayan R_G ,G altında denktir.

(b) $\tau \in H$ ise, R_G kapalı bölgesinde bir τ' noktası vardır,öyleki G altında τ', τ ya denktir.

Lemma 2.3.1: ω_1', ω_2' ile $\frac{\omega_2'}{\omega_1'}$ reel olmasın,

$$\Omega = \{m + n\omega_2'\} : m, n \text{ birer tamsayı}$$

O zaman ,burada bir (ω_1, ω_2) temel çifti (ω_1', ω_2') denktir. Öyleki, $ad - bc = 1$ olan

$$\begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_2' \\ \omega_1' \end{pmatrix}$$

dür ve öyleki

$$|\omega_2| \geq |\omega_1|, |\omega_1 + \omega_2| \geq |\omega_2|, |\omega_1 - \omega_2| \geq |\omega_2|$$

dir.

Teorem 2.3.3: $\tau' \in H$ ise H deki bir τ kompleks sayısı Γ altındaki τ' ye denktir, öyleki;

$$|\tau| \geq |1|, |\tau + 1| \geq |\tau| \ \ ve \ \ |\tau - 1| \geq |\tau|$$

İspat: $\omega_1' = 1, \omega_2' = \tau'$ olsun, $\Omega = \{m + n\tau' : m, n \text{ birer tamsayı}\}$ periyotlarının kümesine Lemma 1 uygulansın. O zaman burada $|\omega_2| \geq |\omega_1|, |\omega_1 \pm \omega_2| \geq |\omega_2|$ olan ω_1, ω_2 bir temel çifti vardır. $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ olsun. O zaman $ad - bc = 1$ ve

$$|\tau| \geq |1|, |\tau \pm 1| \geq |\tau|$$

ile $\tau = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tau'$ dür.

Not: $|\tau \pm 1| \geq |\tau|$ karşılayan H deki bu τ ,aynı zamanda $|\tau + \overline{\tau}| \leq 1$ de karşılar.

Teorem 2.3.4:

$$R_\Gamma = \{\tau \in H : |\tau| > 1, |\tau + \overline{\tau}| \leq 1\}$$

açık kümesi Γ için bir temel bölgedir. Dahası R_Γ daki bazı τ lar için $A \in \Gamma$ ve $A\tau = \tau$ ise o zaman $A = 1$ dir. Diğer bir deyişle ,sadece birim eleman R_Γ da sabit noktalara sahiptir.

İspat: Teorem 3.3.2; R_Γ kapalı bölgesindeki τ nun Γ altında τ' ne denk olduğunu gösterir. İki farklı noktası olmayan R_Γ nın Γ altında denk olduğunu ispatlamak için, $\tau' = A\tau$ olsun, burada $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dir. $\tau \in R_\Gamma$ ve $c \neq 0$ ise, ilk olarak $\operatorname{Im}(\tau') > \operatorname{Im}(\tau)$ olduğu gösterilsin.

$$\operatorname{Im}(\tau') = \frac{\operatorname{Im}(\tau)}{|c\tau + d|^2}$$

elde edilir. $\tau \in R_\Gamma$ ve $c \neq 0$ ise

$$|c\tau + d|^2 = (c\tau + d)(c\overline{\tau} + d) = c^2\tau\overline{\tau} + cd(\tau + \overline{\tau}) + d^2 > c^2 - |cd| + d^2$$

elde edilir. $d = 0$ ise $|c\tau + d|^2 > c^2 \geq 1$ bulunur. $d \neq 0$ ise

$$c^2 - |cd| + d^2 = (|c| - |d|)^2 + |cd| \geq |cd| \geq 1$$

elde edilir, bu yüzden tekrar $|c\tau + d|^2 > 1$ dir. Bu nedenle $c \neq 0, |c\tau + d|^2 > 1$ anlamına gelir ve bunun sonucu olarak $\operatorname{Im}(\tau') < \operatorname{Im}(\tau)$ dur. Diğer bir deyişle ,$c \neq 0$ olan Γ nın her A elemanı, R_Γ daki her bir noktanın ordinatını azaltır.

Şimdi hem τ hem de τ' nün R_Γ nın iç noktalarına denk olduğunu varsayalım. O zaman

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \qquad \text{ve} \qquad \tau = \frac{d\tau' - b}{-c\tau' + a}$$

dır. $c \neq 0$ ise hem $\mathrm{Im}(\tau') < \mathrm{Im}(\tau)$ hem de $\mathrm{Im}(\tau) < \mathrm{Im}(\tau')$ elde edilir. Bunun için $c = 0$ dır yani $ad = 1$, $a = d = \pm 1$ ve

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 & b \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} = T^{\circ b}$$

dir. Fakat o zaman hem τ hem de τ' R_Γ içinde olduğundan yani $\tau = \tau'$ olduğundan $b = 0$ dır. Bu R_Γ nın farklı olmayan iki noktasının Γ altında denk olduğunu ispatlar.

Son olarak, R_Γ içindeki bazı τ için $A\tau = \tau$ ise, aynı kanıt $c = 0$, $a = d = \pm 1$ olduğunu gösterir, yani $A = 1$ dir. Bu sadece birim elemanın R_Γ da sabit noktalara sahip olduğunu ispatlar.

Tanım 2.3.5 (Modüler Fonksiyonlar): H üst yarı düzlem ve $w, w' \in H$ oranları reel olmayan kompleks sayılar için $\tau = \frac{w'}{w}, \mathrm{Im}\,\tau > 0$ olmak üzere bir $f(\tau)$ fonksiyonu,

(a) Bütün τ değerleri için genişletilmiş H^*üst yarı düzleminde analitiklik şartlarını sağlıyorsa,

(b) f nin Fourier açılımı

$$f(\tau) = \sum_{n=-m}^{\infty} a(n)\, e^{2\pi i n\tau}$$

formuna sahipse ve

(c) Her $\tau \in H^*$ ve $A \in \Gamma$ için

$$f(A(\tau)) = (c\tau + d)^k f(\tau)$$

yazılabiliyorsa, bu $f(\tau)$ fonksiyonuna k ağırlıklı bir modüler form denir. Özel olarak, k=0 alınırsa, $f(\tau)$ *modüler fonksiyondur* [19].

Teorem 2.3.5: Eğer f nin modüler ve özdeş sıfırları yok ise, o zaman R_Γ temel bölgesinin kapatılmasındaki, f nin sıfırlarının sayısı, kutuplarının sayısına eşittir.

Teorem 2.3.6: Eğer f modüler ve sabit değilse, o zaman her c kompleks sayısı için, $f - c$ fonksiyonu R_Γ kapanışındaki kutupları gibi sıfırlarının aynı sayısına sahiptir. Diğer bir deyişle, f genellikle R_Γ kapanışındaki eşit her değeri alır.

Teorem 2.3.7: Eğer f , H de modüler ve sınırlı ise, o zaman f sabittir.

2.4 WEIERSTRASS SİGMA FONKSİYONU $\sigma(z)$:

Tanım 2.4.1:

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sigma(z)}{z}=1$$

sağlanması şartı ile

$$\frac{d}{dz}\left[\log\sigma(z)\right]=\zeta(z)$$

bağıntısı ile tanımlanır.

Teorem 2.4.1: $\sigma(z)$ fonksiyonu

$$\sigma(z)=z\prod_{m,n}{}'\left\{\left(1-\frac{z}{\Omega_{mn}}\right)e^{\left(\frac{z}{\Omega_{mn}}+\frac{1}{2}\frac{z^2}{\Omega_{mn}^2}\right)}\right\}$$

formunda sonsuz sayıda çarpan ile ifade edilebilir. Burada çarpım m ve n'lerin aynı anda sıfır olmadıkları tüm pozitif ve negatif sayılara genişletilebilir.

İspat: $\sigma(z)$'nin tanımından elde edilen

$$\frac{d}{dz}\left\{\log\sigma(z)\right\}-\frac{1}{z}=\zeta(z)-\frac{1}{z}$$

eşitliğinin iki tarafının integralini alarak

$$\log\frac{\sigma(z)}{Az}=\int_0^z\left\{\zeta(z)-\frac{1}{z}\right\}dz$$

elde ederiz. $\zeta(z)$'nin tanımından

$$\begin{aligned}\log\frac{\sigma(z)}{Az} &= \int_0^z\sum\sum{}'\left\{\frac{1}{(z-\Omega_{mn})}+\frac{1}{\Omega_{mn}}+\frac{z}{\Omega_{mn}^2}\right\}dz\\ &= \sum\sum{}'\int_0^z\left\{\frac{1}{(z-\Omega_{mn})}+\frac{1}{\Omega_{mn}}+\frac{z}{\Omega_{mn}^2}\right\}dz\\ &= \sum\sum{}'\left\{\log\left(\frac{z-\Omega_{mn}}{-\Omega_{mn}}\right)+\frac{z}{\Omega_{mn}}+\frac{1}{2}\frac{z^2}{\Omega_{mn}^2}\right\}\end{aligned}$$

burada A integral sabitidir ve $\zeta(z)-\frac{1}{z}$, $z=0$ komşuluğunda analitiktir ve her bir terimin integrali alınarak serinin, analitik fonksiyonların düzgün yakınsak serisi olduğu görülebilir.

Böylece A bir sabit iken

$$\sigma(z)=Az\prod_{m,n}{}'\left\{\left(1-\frac{z}{\Omega_{mn}}\right)e^{\left(\frac{z}{\Omega_{mn}}+\frac{1}{2}\frac{z^2}{\Omega_{mn}^2}\right)}\right\}$$

olur.

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sigma(z)}{z}=1$$

olduğundan $A=1$'dir.

Açıklama 2.4.1: $\sigma(z)$ fonksiyonu Ω_{mn}'de sıfırları olan integral fonksiyonudur. Bu yüzden eliptik fonksiyon değildir. Bazı yazarlar $\sigma(z)$'yi Teorem 2.4.1 ile tanımlarlar.

Yardımcı Teorem 2.4.1: σ fonksiyonunda homojenlikten her $\lambda\neq 0$ için

$$\sigma(\lambda z;\lambda\omega_1,\lambda\omega_2)=\lambda\sigma(z;\omega_1,\omega_2)$$

olduğu açıktır.

İspat: Bu Teorem 2.4.1 ile doğrudan ispatlanır. $\sigma(z)$ fonksiyonu birinci dereceden homojen bir fonksiyondur.

Teorem 2.4.2: $\sigma(z)$ fonksiyonu $z=0$ komşuluğunda

$$b_1=-\frac{a_2}{12},b_2=-\frac{a_4}{30},\cdots$$

olmak üzere

$$\sigma(z)=z+b_1z^5+b_2z^7+\cdots+b_nz^{2n+3}+\cdots$$

şeklinde kuvvet serisine açılır.

İspat : $\sigma(z)$'nin tanımından

$$\log\frac{\sigma(z)}{z}=\int_0^z\left\{\zeta(z)-\frac{1}{z}\right\}dz$$

olduğunu biliyoruz. $\zeta(z)$'nin Teorem 2.5.4 ile gösterilen seri açılımından

$$\begin{aligned}\log\frac{\sigma(z)}{z} &= \int_0^z\left\{-a_2\frac{z^3}{3}-a_4\frac{z^5}{5}-\cdots-a_{2n}\frac{z^{2n+1}}{2n+1}-\cdots\right\}dz\\ &= -\frac{a_2}{12}z^4-\frac{a_4}{30}z^6-\cdots=-z^4\left(\frac{a_2}{12}+\frac{a_4}{30}z^2+\cdots\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$P(z)=\frac{a_2}{12}+\frac{a_4}{30}z^2+\cdots$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\sigma(z) &= ze^{-z^4P(z)}\\ &= z\left\{1-z^4P(z)+\frac{z^8}{2!}P^2(z)+\cdots\right\}\\ &= z-\frac{a_2}{12}z^5-\frac{a_4}{30}z^7-\cdots\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$b_1=-\frac{a_2}{12},\quad b_2=-\frac{a_4}{30}$$

olmak üzere

$$\sigma(z)=z+b_1z^5+b_2z^7+\cdots+b_nz^{2n+3}+\cdots$$

olur.

Yardımcı Teorem 2.4.2: $\sigma(z)$ tek fonksiyondur.

İspat: Kuvvet serisi açılımında z yerine $-z$ yazıldığında

$$\begin{aligned}\sigma(-z) &= (-z)+b_1(-z)^5+b_2(-z)^7+\cdots+b_n(-z)^{2n+3}+\cdots\\ &= -\left(z+b_1z^5+b_2z^7+\cdots+b_nz^{2n+3}+\cdots\right)\\ &= -\sigma(z)\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Teorem 2.4.3: σ ve $\wp$ fonksiyonları arasında

$$\wp\left(z\right)=-\frac{d^2}{dz^2}\left\{\log\sigma\left(z\right)\right\}=\frac{\sigma'^2\left(z\right)-\sigma\left(z\right)\sigma''\left(z\right)}{\sigma^2\left(z\right)}$$

bağıntısı vardır.

İspat:

$$\wp\left(z\right)=-\frac{d}{dz}\zeta\left(z\right)$$

olduğunu biliyoruz. Buradan

$$\begin{aligned}\wp\left(z\right) &= -\frac{d^2}{dz^2}\left\{\log\sigma\left(z\right)\right\}\\ &= \frac{\sigma'^2\left(z\right)-\sigma\left(z\right)\sigma''\left(z\right)}{\sigma^2\left(z\right)}\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 2.4.4: $2\eta_{mn}=2m\eta_1+2n\eta_2$ olmak üzere

$$\sigma\left(z+\Omega_{mn}\right)=\left(-1\right)^{m+n+mn}e^{2\eta_{mn}\left(z+\frac{\Omega_{mn}}{2}\right)}\sigma\left(z\right)$$

eşitliği vardır.

İspat: Teorem 2.5.6'dan elde edilen

$$\zeta\left(z+\Omega_{mn}\right)=\zeta\left(z\right)+2\eta_{mn}$$

veya

$$\frac{\sigma'\left(z+\Omega_{mn}\right)}{\sigma\left(z+\Omega_{mn}\right)}=\frac{\sigma'\left(z\right)}{\sigma\left(z\right)}+2\eta_{mn}$$

eşitliğinin iki tarafının da integrali alınarak, A bir integral sabiti olmak üzere,

$$\log\sigma\left(z+\Omega_{mn}\right)=\log\sigma\left(z\right)+2\eta_{mn}z+A$$

ve böylece

$$\begin{aligned}\sigma\left(z+\Omega_{mn}\right) &= e^{2\eta_{mn}z+A}\sigma\left(z\right)\\ &= e^{2\eta_{mn}\left(z+\frac{\Omega_{mn}}{2}\right)+A'}\sigma\left(z\right)\\ &= Ce^{2\eta_{mn}\left(z+\frac{\Omega_{mn}}{2}\right)}\sigma\left(z\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $A' = A - \eta_{mn}\Omega_{mn}$ ve $C = e^{A'}$birer sabittir. C sabiti aşağıdaki şekillerde elde edilebilir:

Durum 1:

m ve n aynı anda çift olmadığı zaman $\frac{\Omega_{mn}}{2}$ bir periyot değildir.

Son elde edilen denklemde $z = -\frac{\Omega_{mn}}{2}$ yazıldığında

$$C = \frac{\sigma\left(\frac{\Omega_{mn}}{2}\right)}{\sigma\left(-\frac{\Omega_{mn}}{2}\right)} = -1$$

elde edilir.

Durum 2:

m ve n aynı anda çift olduğu zaman $\frac{\Omega_{mn}}{2}$ sayısı $\sigma(z)$'nin bir sıfırıdır.

Böylece L'Hospital Kuralı ile

$$C = \frac{\sigma'\left(\frac{\Omega_{mn}}{2}\right)}{\sigma'\left(-\frac{\Omega_{mn}}{2}\right)} = +1$$

elde edilir.

σ fonksiyonunun Ω_{mn}'de basit sıfıra sahip olmasına rağmen, σ' fonksiyonu bir çift fonksiyondur ve $\frac{\Omega_{mn}}{2}$'de hiç sıfırı yoktur. Bu yüzden

$$\sigma(z + \Omega_{mn}) = (-1)^{m+n+mn}\, e^{2\eta_{mn}\left(z+\frac{\Omega_{mn}}{2}\right)}\sigma(z)$$

Yardımcı Teorem 2.4.3. : Teorem 2.4.4'ten aşağıdaki özel sonuçlar elde edilir.

$$\sigma(z + 2\omega_1) = -e^{2\eta_1(z+\omega_1)}\sigma(z),$$

$$\sigma(z + 2\omega_2) = -e^{2\eta_2(z+\omega_2)}\sigma(z),$$

$$\sigma(z + 2\omega_3) = -e^{2\eta_3(z+\omega_3)}\sigma(z).$$

Teorem 2.4.5 (Legendre Bağıntısı):

$$\omega_1, \omega_2 \Im\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) > 0$$

için $\mathcal{L}$ latisinin bazı olsun. Bu durumda zeta fonksiyonunun $\eta_j = \eta(\omega_j)$ yarı periyotları

$$\omega_1\eta_2 - \omega_2\eta_1 = 2\pi i$$

ifadesini sağlar.

İspat: 0'ı F'in bir iç noktası olarak kabul edelim. Bu durumda $\zeta(z)$ F içerisinde 1. dereceden kutba sahiptir. Bu yüzden rezidü teoreminden

$$2\pi i = \int_{\partial F} \zeta(z)\, dz$$

bulunur.

Zeta fonksiyonunun dönüşüm formülünü kullanarak ve zıt köşeler üzerindeki integralleri birbirine ekleyerek Teorem 2.4.5'i ispatlayan

$$-\int_{\gamma+\omega_1}^{\gamma} \eta_2 dz - \int_{\gamma}^{\gamma+\omega_2} \eta_1 dz = \omega_1\eta_2 - \omega_2\eta_1$$

elde edilir.

2.5 WEIERSTRASS ZETA-FONKSİYONU $\zeta(z)$:

Tanım 2.5.1: Zeta fonksiyonu aşağıdaki çifte seri ile tanımlanır.

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum\sum{}' \left\{ \frac{1}{z-\Omega_{mn}} + \frac{1}{\Omega_{mn}} + \frac{z}{\Omega_{mn}^2} \right\} \tag{10}$$

Burada $\Omega_{mn} = 2m\omega_1 + 2n\omega_2$ ve $(m,n) \neq (0,0)$ şeklinde tamsayılardır. $\sum\sum'$ toplamı $(m,n) \neq (0,0)$ olduğu tüm tamsayı değerleri için tanımlıdır.

Açıklama 2.5.1: Ω_{mn}'lerin $\zeta(z)$'nin basit kutupları olduğu açıktır ve bu nedenle fonksiyon meromorftur.

Teorem 2.5.1:

$$\frac{1}{z} + \sum\sum{}' \left\{ \frac{1}{z-\Omega_{mn}} + \frac{1}{\Omega_{mn}} + \frac{z}{\Omega_{mn}^2} \right\}$$

serisi mutlak ve düzgün yakınsaktır.

İspat: $|\Omega_{mn}| > 2\,|z|$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{z-\Omega_{mn}} + \frac{1}{\Omega_{mn}} + \frac{z}{\Omega_{mn}^2}\right| &= \left|\frac{z^2}{\Omega_{mn}^2 (z-\Omega_{mn})}\right| \\
&\leq \frac{|z|^2}{|\Omega_{mn}|^3 \left(1 - \frac{|z|}{|\Omega_{mn}|}\right)} \\
&< \frac{2\,|z|^2}{|\Omega_{mn}|^3}
\end{aligned}$$

olduğu için (10) ile verilen seri mutlak ve düzgün yakınsaktır.

Teorem 2.5.2: $\zeta(z)$ fonksiyonu bir tek fonksiyondur.

İspat:

$$\begin{aligned}
\zeta(-z) &= -\frac{1}{z} + \sum\sum{}' \left\{ \frac{1}{(-z-\Omega_{mn})} + \frac{1}{\Omega_{mn}} - \frac{z}{\Omega_{mn}^2} \right\} \\
&= -\left[\frac{1}{z} + \sum\sum{}' \left\{ \frac{1}{(z+\Omega_{mn})} - \frac{1}{\Omega_{mn}} + \frac{z}{\Omega_{mn}^2} \right\} \right] \\
&= -\left[\frac{1}{z} + \sum\sum{}' \left\{ \frac{1}{(z-\Omega_{-m-n})} + \frac{1}{\Omega_{-m-n}} + \frac{z}{\Omega_{-m-n}^2} \right\} \right] \\
&= -\left[\frac{1}{z} + \sum\sum{}' \left\{ \frac{1}{(z-\Omega_{mn})} + \frac{1}{\Omega_{mn}} + \frac{z}{\Omega_{mn}^2} \right\} \right] \\
&= -\zeta(z)
\end{aligned}$$

Burada $\{\Omega_{mn}\}$ ve $\{\Omega_{-m-n}\}$ kümelerinin denk olduğuna dikkat edelim.

Teorem 2.5.3: $\wp(z)$ ve $\zeta(z)$ fonksiyonları arasında $\wp(z) = -\zeta'(z)$ eşitliği vardır.

İspat: $\zeta(z)$ serisi, analitik fonksiyonların düzgün yakınsak bir serisi olduğundan her terimi ayrı ayrı türevlenebilir.

Böylece,

$$\zeta'(z) = -\left[\frac{1}{z^2} + \sum\sum{}' \frac{1}{(z-\Omega_{mn})^2} - \frac{1}{\Omega_{mn}^2} \right] = -\wp(z)$$

elde edilir.

Teorem 2.5.4:

$$a_k = \sum\sum{}' (k+1)\Omega_{mn}^{-(k+2)}$$

olmak üzere, $\zeta(z)$ fonksiyonu

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} - \frac{a_2}{3}z^3 - \frac{a_4}{5}z^5 - \cdots - \frac{a_{2n}}{2n+1}z^{2n+1} - \cdots$$

şeklinde kuvvet serisine açılabilir.

İspat:

$$\frac{1}{(z-\Omega_{mn})} = -\frac{1}{\Omega_{mn}}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{\Omega_{mn}}}\right) = -\frac{1}{\Omega_{mn}}\left(1 + \frac{z}{\Omega_{mn}} + \left(\frac{z}{\Omega_{mn}}\right)^2 + \cdots\right)$$

bilgisini kullanarak

$$\begin{aligned}
\zeta(z) &= \frac{1}{z} + \sum\sum{}' \left\{\frac{1}{(z-\Omega_{mn})} + \frac{1}{\Omega_{mn}} + \frac{z}{\Omega_{mn}^2}\right\} \\
&= \frac{1}{z} + \sum\sum{}' \left\{-\frac{1}{\Omega_{mn}}\left(1 + \frac{z}{\Omega_{mn}} + \left(\frac{z}{\Omega_{mn}}\right)^2 + \cdots\right) + \frac{1}{\Omega_{mn}} + \frac{z}{\Omega_{mn}^2}\right\} \\
&= \frac{1}{z} + \sum\sum{}' \left\{-\frac{1}{\Omega_{mn}} - \frac{z}{\Omega_{mn}^2} - \frac{z^2}{\Omega_{mn}^3} + \cdots + \frac{1}{\Omega_{mn}} + \frac{z}{\Omega_{mn}^2}\right\} \\
&= \frac{1}{z} - \sum\sum{}' \left\{\frac{z^2}{(\Omega_{mn}^3)} + \frac{z^3}{\Omega_{mn}^4} + \cdots\right\} \\
&= \frac{1}{z} - z^2\left\{\sum\sum{}' \Omega_{mn}^{-3}\right\} - z^3\left\{\sum\sum{}' \Omega_{mn}^{-4}\right\} - \cdots
\end{aligned}$$

$\zeta(z)$ tek fonksiyon olduğundan her $k \in \mathbb{Z}^+$ için z^{2k} terimlerinin katsayıları sıfır olacaktır.

Böylece

$$a_k = \sum\sum{}' (k+1)\Omega_{mn}^{-(k+2)}, k = 2, 4, 6, ...$$

olduğu yerde

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} - \frac{a_2}{3}z^3 - \frac{a_4}{5}z^5 - \cdots \tag{11}$$

elde edilir.

Teorem 2.5.5: (10) ifadesinde homojenlikten her $\lambda \neq 0$ için

$$\zeta(\lambda z; \lambda\omega_1, \lambda\omega_2) = \lambda^{-1}\zeta(z; \omega_1, \omega_2)$$

olduğu açıktır.

İspat: Bu $\zeta(z)$'nin tanımından doğrudan elde edilir. $\zeta(z)$ fonksiyonu (-1) . dereceden homojen bir fonksiyondur.

Teorem 2.5.6: Tanımlı oldukları yerlerde

$$\begin{aligned} \zeta(z+2\omega_1) &= \zeta(z)+2\eta_1, \\ \zeta(z+2\omega_2) &= \zeta(z)+2\eta_2 \end{aligned}$$

eşitlikleri vardır. Burada

$$\eta_1 = \zeta(\omega_1) \text{ ve } \eta_2 = \zeta(\omega_2)$$

dir.

İspat:

$$\zeta'(z+2\omega_1) - \zeta'(z) = -\wp(z+2\omega_1) + \wp(z) = 0$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla C sabit olmak üzere $\zeta(z+2\omega_1) = \zeta(z)+C$ olur. Buradan $z = -\omega_1$ için

$$C = \zeta(\omega_1) - \zeta(-\omega_1) = 2\zeta(\omega_1)$$

ve böylece

$$\zeta(z+2\omega_1) = \zeta(z) + 2\zeta(\omega_1)$$

elde edilir. Benzer şeklide

$$\zeta(z+2\omega_2) = \zeta(z) + 2\eta_2 \quad \text{ve} \quad \eta_2 = \zeta(\omega_2)$$

elde edilir.

Yardımcı Teorem 2.5.1: Teorem 2.5.6'nın tekrar tekrar uygulanması ile

$$\zeta(z+2m\omega_1+2n\omega_2) = \zeta(z) + 2m\eta_1 + 2n\eta_2 \tag{12}$$

elde edilir.

Teorem 2.5.7: η_1 ve η_2 sabitleri

$$\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \frac{\pi}{2}i$$

şeklinde Legendre bağıntısı ile birbirlerine bağlıdır.

İspat: Rezidü teoremi ile

$\int\limits_{(z_0)} \zeta(z)dz = 2\pi i \times\zeta(z)$'nin (z_0) latisinde bulunan Ω_{mn}'deki rezidüsü

$$2\pi i = \int\limits_{(z_0)} \zeta(z)dz$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\int\limits_{(z_0)}^{z_0+2\omega_1} + \int\limits_{(z_0+2\omega_1)}^{z_0+2\omega_1+2\omega_2} + \int\limits_{(z_0+2\omega_1+2\omega_2)}^{z_0+2\omega_2} + \int\limits_{(z+2\omega_2)}^{z_0}\right]\zeta(z)dz \\
&= \int\limits_{(z_0)}^{z_0+2\omega_2} \left\{\zeta(z+2\omega_1) - \zeta(z)\right\} dz - \int\limits_{(z_0)}^{z_0+2\omega_1} \left\{\zeta(z+2\omega_2) - \zeta(z)\right\} dz \\
&= 4\eta_1\omega_2 - 4\eta_2\omega_1
\end{aligned}$$

Buradan

$$\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \frac{\pi}{2}i$$

bulunur.

Açıklama 2.5.2: Teorem 2.5.6'dan $\zeta(z)$ 'nin çifte periyodik olmadığı açıktır ve bu sebeple eliptik bir fonksiyon değildir. Bu aynı zamanda 1. dereceden sabit olmayan bir eliptik fonksiyon olmadığı için beklenen bir sonuçtur. Legendre bağıntısından, η_1 ve η_2'nin aynı anda sıfır olamayacakları açıktır. Ama $\zeta(z)$ fonksiyonu periyodikliğe bağlı olarak davranışında bazı düzenlere sahiptir: Ω_{mn} arttıkça z gibi bir toplama sabitine bağlı olarak fonksiyon değeri değişir. Fonksiyonların bu özelliği genelde yarı (veya pseudo) toplam periyodikliği olarak bilinir.

2.6 WEIERSTRASS PE-FONKSİYONU $\wp(z)$:

Eliptik fonksiyonların Weierstrass teorisini geliştirmek için, Weierstrass Pe-Fonksiyonu $\wp(z)$ veya daha net şekilde $\wp(z;\omega_1,\omega_2)$ yi ele almalıyız.

Tanım 2.6.1:

$$\Omega_{mn} \neq 0, \Omega_{mn} = m2\omega_1 + n2\omega_2 \equiv 0(\operatorname{mod} 2\omega_1, 2\omega_2)$$

iken ve $\sum\limits_m \sum\limits_n$ toplamı $(m,n) \neq (0,0)$ için tüm pozitif ve negatif m,n tamsayıları ile alındığında, Weierstrass Pe-Fonksiyonu

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_m \sum_n \left\{ \frac{1}{(z-\Omega_{mn})^2} - \frac{1}{\Omega_{mn}^2} \right\} \tag{13}$$

çifte serisi ile tanımlanır.

Konunun devamında

$$\sum_m = \sum, \quad \sum_n = \sum{}'$$

ile gösterilecektir.

Şüphesiz ki $\wp(z), \Omega_{mn}$'de 2. dereceden bir kutba sahip ve temel kısmı $\frac{1}{(z-\Omega_{mn})^2}$ olan düzgün meromorf fonksiyondur ve $\wp(z)$ serisi yakınsaktır.

NOT: (13) ifadesinde homojenlikten her $\lambda \neq 0$ için

$$\wp(\lambda z; \lambda\omega_1, \lambda\omega_2) = \lambda^{-2}\wp(z;\omega_1,\omega_2)$$

olduğu açıktır.

Teorem 2.6.1: $\wp(z)$ serisi Ω_{mn} dışındaki tüm z'ler için mutlak ve düzgün yakınsaktır.

İspat: $|\Omega_{mn}| \geq 2|z|$ olmak üzere her $m, n \in \mathbb{Z}^*$ için

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{(z-\Omega_{mn})^2} - \frac{1}{\Omega_{mn}^2}\right| &= \left|\frac{2\Omega_{mn}z - z^2}{\Omega_{mn}^2(z-\Omega_{mn})^2}\right| \\
&\leq \frac{\{2|\Omega_{mn}| + |z|\}|z|}{|\Omega_{mn}|^4\left|1-\left(\frac{z}{\Omega_{mn}}\right)\right|^2} \\
&\leq \frac{\left(2|\Omega_{mn}| + \frac{1}{2}|\Omega_{mn}|\right)|z|}{|\Omega_{mn}|^4\left|1-\frac{z}{\Omega_{mn}}\right|^2} \\
&\leq \frac{5|z|}{2|\Omega_{mn}|^2}\frac{1}{\left(\left|1-\left|\frac{z}{\Omega_{mn}}\right|\right|\right)^2} \\
&\leq \frac{10|z|}{|\Omega_{mn}|^2}
\end{aligned}$$

eşitsizliğinden $|\Omega_{mn}| \geq 2|z|$ için

$$\sum\sum{}'\left\{\frac{1}{(z-\Omega_{mn})^2} - \frac{1}{\Omega_{mn}^2}\right\}$$

mutlak ve düzgün yakınsaktır. Bu yüzden $\wp(z)$ serisi Ω_{mn} dışında tüm z'ler için mutlak ve düzgün yakınsaktır.

Teorem 2.6.2: $\wp$ fonksiyonu bir çift fonksiyondur.

İspat:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum\sum{}''\left\{\frac{1}{(z-\Omega_{mn})^2} - \frac{1}{\Omega_{mn}^2}\right\} + \sum\sum{}''\left\{\frac{1}{(z-\Omega'_{mn})^2} - \frac{1}{\Omega'^2_{mn}}\right\}$$

burada

$$\Omega_{mn} = m2\omega_1 + n2\omega_2, \qquad \Omega'_{mn} = -m2\omega_1 - n2\omega_2 = -\Omega_{mn}$$

m bir pozitif tamsayı ve n herhangi bir tamsayı ve $\sum\sum''$ toplamı hem m pozitif tamsayısı ve herhangi bir n tamsayısı için aynı anda $m = 0$ ve $n = 0$ olmadığı duruma genişletilebilir. Eğer yukarıdaki $\wp(z)$ ifadesindeki z yerine $-z$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
\wp(-z) &= \frac{1}{z^2} + \sum\sum{}''\left\{\frac{1}{(-z-\Omega_{mn})^2} - \frac{1}{\Omega_{mn}^2}\right\} \\
&\quad + \sum\sum{}''\left\{\frac{1}{(-z-\Omega'_{mn})^2} - \frac{1}{\Omega'^2_{mn}}\right\}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{z^2} + \sum\sum{}'' \left\{ \frac{1}{(z+\Omega_{mn})^2} - \frac{1}{\Omega_{mn}^2} \right\} + \sum\sum{}'' \left\{ \frac{1}{(z+\Omega'_{mn})^2} - \frac{1}{\Omega'^2_{mn}} \right\}$$
$$= \frac{1}{z^2} + \sum\sum{}'' \left\{ \frac{1}{(z-\Omega'_{mn})^2} - \frac{1}{\Omega'^2_{mn}} \right\} + \sum\sum{}'' \left\{ \frac{1}{(z-\Omega_{mn})^2} - \frac{1}{\Omega_{mn}^2} \right\}$$
$$= \wp(z)$$

eşitliği elde edilir ve yukarıda görüldüğü gibi $\frac{1}{z^2}$ terimi değişmez, sadece iki serinin yerleri değişir.

Böylece $\wp$ bir çift fonksiyondur.

NOT: $\wp(z)$ fonksiyonu tüm Ω_{mn} noktalarında sıfır rezidülü çift kutba sahiptir.

Teorem 2.6.3: $\wp(z)$ fonksiyonu $2\omega_1, 2\omega_2$ periyotlarına sahip çifte periyodik bir fonksiyondur.

İspat :

$$\begin{aligned}
\wp(z) &= \frac{1}{z^2} + \sum\sum{}' \left\{ \frac{1}{(z-\Omega_{mn})^2} - \frac{1}{\Omega_{mn}^2} \right\} \\
&= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{(z-2\omega_1)^2} - \frac{1}{(2\omega_1)^2} + \sum\sum{}'' \left\{ \frac{1}{(z-\Omega_{mn})^2} - \frac{1}{\Omega_{mn}^2} \right\}
\end{aligned}$$

burada $(m,n) = (0,0)$ ve $(m,n) = (1,0)$ dışındaki tüm m ve n'ler için $\sum\sum''$ bir toplamdır.

$$\begin{aligned}
\wp(z+2\omega_1) &= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{(z+2\omega_1)^2} - \frac{1}{(2\omega_1)^2} \\
&\quad + \sum\sum{}'' \left\{ \frac{1}{(z+2\omega_1-\Omega_{mn})^2} - \frac{1}{\Omega_{mn}^2} \right\} \\
&= \frac{1}{z^2} + \sum\sum{}' \left\{ \frac{1}{(z-\Omega_{mn})^2} - \frac{1}{\Omega_{mn}^2} \right\} \\
&= \wp(z)
\end{aligned}$$

Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\wp(z) &= \frac{1}{z^2} + \sum\sum{}' \left\{ \frac{1}{(z-\Omega_{mn})^2} - \frac{1}{\Omega_{mn}^2} \right\} \\
&= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{(z-2\omega_2)^2} - \frac{1}{(2\omega_2)^2} + \sum\sum{}'' \left\{ \frac{1}{(z-\Omega_{mn})^2} - \frac{1}{\Omega_{mn}^2} \right\}
\end{aligned}$$

burada $(m,n) = (0,0)$ ve $(m,n) = (1,0)$ dışındaki tüm m ve n'ler için $\sum\sum''$ bir toplamdır.

$$\begin{aligned}
\wp(z+2\omega_2) &= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{(z+2\omega_2)^2} - \frac{1}{(2\omega_2)^2} \\
&\quad + \sum\sum{}'' \left\{ \frac{1}{(z+2\omega_2-\Omega_{mn})^2} - \frac{1}{\Omega_{mn}^2} \right\} \\
&= \frac{1}{z^2} + \sum\sum{}' \left\{ \frac{1}{(z-\Omega_{mn})^2} - \frac{1}{\Omega_{mn}^2} \right\} \\
&= \wp(z)
\end{aligned}$$

Sonuçlar 2.6.1:

(1) $\wp(z)$ fonksiyonu bir eliptik fonksiyondur, böylece eliptik fonksiyonlar sınıfı boş değildir.

(2) Bir çifte periyodik fonksiyon eliptik olmak zorunda değildir, örneğin $e^{\wp(z)}$ çifte periyodik olduğu halde eliptik değildir. $e^{\wp(z)}$ meromorf fonksiyon olmadığından eliptik de olamaz. Bu yüzden eliptik fonksiyonlar sınıfı, çifte periyodik fonksiyonlar sınıfının özel bir alt sınıfıdır.

Teorem 2.6.4: $z = 0$'ın bir komşuluğunda

$$a_{2k} = (2k+1)\sum\sum{}' \Omega_{mn}^{-(2k+2)}$$

iken

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} z^{2k}$$

şeklinde bir Laurent(kuvvet) serisine açılabilir.

İspat: $\wp(z) - \frac{1}{z^2}$ fonksiyonu $z = 0'$ın bir komşuluğunda analitiktir ve bu yüzden $|2\omega| = \min(|2\omega_1|, |2\omega_2|)$ için $|z| < |2\omega|$ olduğu yerde $\wp(z) - \frac{1}{z^2}$ fonksiyonu z'nin kuvvet serisine dönüştürülebilir.

$$\sum\sum{}' \left\{ \frac{1}{(z-\Omega_{mn})^2} - \frac{1}{\Omega_{mn}^2} \right\} = \sum\sum{}' \left\{ \frac{1}{\Omega_{mn}^2 (1 - \frac{z}{\Omega_{mn}})^2} - \frac{1}{\Omega_{mn}^2} \right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum\sum{}' \left\{ \frac{1}{\Omega_{mn}^2} \left(1 + \frac{2}{1!} \frac{z}{\Omega_{mn}} + \frac{3 \cdot 2}{2!} \left(\frac{z}{\Omega_{mn}} \right)^2 + \cdots \right) - \frac{1}{\Omega_{mn}^2} \right\} \\
&= \sum\sum{}' \left\{ \frac{1}{\Omega_{mn}^2} + \frac{2z}{\Omega_{mn}^3} + \frac{3z^2}{\Omega_{mn}^4} + \cdots - \frac{1}{\Omega_{mn}^2} \right\} \\
&= \sum\sum{}' \left\{ \frac{2z}{\Omega_{mn}^3} + \frac{3z^2}{\Omega_{mn}^4} + ... \right\} \\
&= \sum\sum{}' \left\{ \sum_k (k+1) \frac{z^k}{\Omega_{mn}^{k+2}} \right\} \\
&= \sum_k \left\{ (k+1) \sum\sum{}' \frac{1}{\Omega_{mn}^{k+2}} \right\} z^k \\
&= \sum_k a_k z^k
\end{aligned}
$$

Weierstrass $\wp$ fonksiyonunun bir çift fonksiyon olduğunu görmüştük. Dolayısıyla

$$
a_k = (k+1) \sum\sum{}' \frac{1}{\Omega_{mn}^{k+2}}
$$

ifadesinde k'nın tüm tek tamsayı değerleri için $a_k = 0$'dır.

Böylece bu sonuçtan yola çıkarak;

Teorem 2.6.5: Eğer $\wp(\omega_1) = e_{1,}$ $\wp(\omega_2) = e_2$ ve $\wp(\omega_1 + \omega_2) = e_3$ ise e_1, e_2 ve e_3 farklı olmalıdır.

İspat: Yarı periyotlarda çift bir eliptik fonksiyonun kutup ya da sıfırlarının mertebesi çifttir. Bu yüzden $f(z) = \wp(z) - e_1$ çift fonksiyonu ikinci dereceden bir sıfıra sahiptir. Eğer $e_1 = e_2$ ise f'nin bir latis içinde 4 sıfıra sahip olması gerekir ki bu da bir çelişkidir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Tanım 2.6.2 ($\wp(z)'$nin Türevleri): $\sum\sum$ toplamı tüm pozitif ve negatif tamsayı değerleri ve m ve n'nin sıfır değerlerine genişletildiğinde $\wp(z)$'nin türevi

$$
\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} - \sum\sum{}' \frac{2}{(z - \Omega_{mn})^3} = -2 \sum\sum \frac{1}{(z - \Omega_{mn})^3}
$$

ile tanımlanır.

$\wp(z)$ serisi mutlak ve düzgün yakınsak olduğu ve $\wp(z)$ serisi analitik olduğu için, $\wp'(z)$ serisi de aynı zamanda mutlak ve düzgün yakınsaktır.

Sonuçlar 2.6.2:

1) $\wp'(z)$ fonksiyonu her Ω_{mn} noktasında sıfır rezidülü üçüncü dereceden kutba sahiptir.

2) $\wp(z)$ fonksiyonunda homojenlikten her $\lambda \neq 0$ için

$$\wp'(\lambda z; \lambda\omega_1, \lambda\omega_2) = \lambda^{-3}\wp(z; \omega_1, \omega_2)$$

olduğu açıktır.

Özellikler 2.6.1:

1) $\wp(z)$'nin türevi olan $\wp'(z)$ fonksiyonu $\wp(z)$ ile aynı periyotlara sahip, bir tek eliptik fonksiyondur.

2) Yarı periyotlar ($\omega_1, \omega_1 + \omega_2$ ve ω_2) $\wp'(z)$'nin sıfırlarıdır.

3) $\wp'(z)$'nin kutuplarının toplamı sıfıra eşittir veya daha doğrusu 0'a denktir.

4) Eğer α_1 ve α_2 noktaları $\wp(z) - C$ 'nin iki sıfırı ise bu durumda $\alpha_1 \equiv -\alpha_2 (\operatorname{mod} 2\omega_1, 2\omega_2)$.

5) $\wp(z_1) = \wp(z_2) \Longleftrightarrow z_1 \equiv z_2 (2\omega_1, 2\omega_2)$

Teorem 2.6.6: $\wp(z)$ veya $\wp'(z)$'nin Ω_{mn} dışında kutupları yoktur.

İspat: $\wp(z)$ ve $\wp'(z)$'nin tanımlarından gelir.

Teorem 2.6.7: $z = 0$ komşuluğunda, $a_{2k} = (2k+1) \sum \sum' \Omega_{mn}^{-(2k+2)}$ iken $\wp'(z)$'nin Laurent(kuvvet) serisi açılımı

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + 2a_2 z + 4a_4 z^3 + \cdots$$

şeklindedir.

İspat: Teorem 2.6.4'ten

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} z^{2k}$$

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + \sum_{k=1}^{\infty} 2k a_{2k} z^{(2k-1)}$$

2.7 ELİPTİK FONKSİYONLARIN $\zeta(z)$ CİNSİNDEN İFADE EDİLMESİ:

Teorem 2.7.1: f eliptik fonksiyonunun sadece $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_s$ noktalarında basit kutuplarının olduğu bir latis içinde bu kutuplardaki rezidüleri sırasıyla $A_{1,}A_2, ..., A_s$ olmak üzere A_0'ın sabit olduğu yerde

$$f(z) = A_0 + \sum_{r=1}^{s} A_r \zeta(z - \beta_r)$$

dir.

İspat: f eliptik bir fonksiyon olduğundan,

$$\sum_{r=1}^{s} A_r = 0 \qquad (14)$$

eşitliği vardır.

$$\phi(z) = \sum_{r=1}^{s} A_r \zeta(z - \beta_r)$$

fonksiyonunu ele alalım.

ϕ fonksiyonu sonlu sayıda meromorf fonksiyonun toplamı olduğundan meromorftur.

(14) eşitliği yardımıyla

$$\phi(z + 2m\omega_1 + 2n\omega_2) = \sum_{r=1}^{s} A_r \zeta(z + 2m\omega_1 + 2n\omega_2 - \beta_r)$$

Yardımcı Teorem 2.5.1'den faydalanarak

$$\begin{aligned} \phi(z + 2m\omega_1 + 2n\omega_2) &= \sum_{r=1}^{s} A_r \{\zeta(z - \beta_r) + 2m\eta_1 + 2n\eta_2\} \\ &= \sum_{r=1}^{s} A_r \zeta(z - \beta_r) \end{aligned}$$

Dolayısıyla ϕ fonksiyonu çifte periyodik bir fonksiyondur ve açıkça eliptiktir. Böylece ϕ ve f fonksiyonları, kutuplarda bağlantılı rezidüleri ile aynı kutuplara sahip iki eliptik fonksiyondur. Böylece A_0'ın sabit olduğu yerde

$$f(z) = A_0 + \phi(z) = A_0 + \sum_{r=1}^{s} A_r \zeta(z - \beta_r)$$

denklemine sahibiz.

Teorem 2.7.2: ζ fonksiyonu yarı cebirsel toplam teoremini sağlar:

$$\zeta(z_1 + z_2) - \zeta(z_1) - \zeta(z_2) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\wp'(z_2) - \wp'(z_1)}{\wp(z_2) - \wp(z_1)}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\zeta''(z_2) - \zeta''(z_1)}{\zeta'(z_2) - \zeta'(z_1)}\right\}$$

İspat:

$$\frac{\wp'(z)}{\wp(z) - \wp(z_1)}$$

fonksiyonu $z_1, -z_1, 0$ noktalarında kutbu olan ve bu noktalarda sırasıyla 1, 1, -2 rezidülerine sahip bir eliptik fonksiyondur. Eğer $z_1, -z_1, 0$ noktaları bir latisin içinde değillerse latis içinde o noktaların denk noktalarını alabiliriz. Teorem 2.7.1 ile

$$\frac{\wp'(z)}{\wp(z) - \wp(z_1)} = A_0 + \zeta(z - z_1) + \zeta(z + z_1) - 2\zeta(z) \qquad (15)$$

elde ederiz.

z yerine $-z$ yazarak

$$-\frac{\wp'(z)}{\wp(z) - \wp(z_1)} = A_0 - \zeta(z + z_1) - \zeta(z - z_1) + 2\zeta(z)$$

veya

$$\frac{\wp'(z)}{\wp(z) - \wp(z_1)} = -A_0 + \zeta(z + z_1) + \zeta(z - z_1) - 2\zeta(z) \qquad (16)$$

elde ederiz.

(15) ve (16)'dan açıkça $A_0 = 0$'dır. (15) eşitliğinde $z = z_2$ için

$$\frac{\wp'(z_2)}{\wp(z_2) - \wp(z_1)} = \zeta(z_2 + z_1) + \zeta(z_2 - z_1) - 2\zeta(z_2)$$

ve buradan z_1 ve z_2'nin yerleri değiştirilerek

$$\frac{\wp'(z_1)}{\wp(z_1) - \wp(z_2)} = \zeta(z_1 + z_2) + \zeta(z_1 - z_2) - 2\zeta(z_1)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\wp'(z_2)-\wp'(z_1)}{\wp(z_2)-\wp(z_1)}\right]=\zeta(z_1+z_2)-\ \zeta(z_1)-\ \zeta(z_2) \tag{17}$$

bulunur.

$$\zeta'(z)=-\wp(z)$$

sonucunu kullanarak

$$\zeta(z_1+z_2)-\ \zeta(z_1)-\ \zeta(z_2)=\frac{1}{2}\left\{\frac{\zeta''(z_2)-\zeta''(z_1)}{\zeta'(z_2)-\zeta'(z_1)}\right\}$$

olduğunu görürüz.

Açıklama 2.7.1: $\zeta(z)$ ve $\zeta'(z)$ hiçbir cebirsel ilişkiyi sağlamadığından yukarıda elde ettiğimiz sonuç $\zeta'(z_1+z_2)$, $\zeta(z_1)$ ve $\zeta(z_2)$ arasında bir cebirsel bağlantıya yol açmaz. Bu yüzden bu teorem yarı cebirsel toplam teoremi olarak adlandırılır.

Yardımcı Teorem 2.7.1: $\wp$ fonksiyonu aşağıdaki şekillerdeki toplama teoremlerini sağlar.

$$\wp(z_1+z_2)=\wp(z_1)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left\{\frac{\wp'(z_1)-\wp'(z_2)}{\wp(z_1)-\wp(z_2)}\right\}$$

$$\wp(z_1+z_2)=\wp(z_2)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left\{\frac{\wp'(z_2)-\wp'(z_1)}{\wp(z_2)-\wp(z_1)}\right\}$$

İspat: (17) eşitliğinin sırasıyla z_1 ve z_2'ye göre türevleri alınarak bu yardımcı teorem görülür.

Teorem 2.7.3: Herhangi bir f eliptik fonksiyonu, $\sum$ bir latis içindeki tüm farklı β_r kutupları için genelleştirilmiş bir toplam ve C bir sabit ve β_r kutbundaki temel kısmı

$$\frac{A_r}{z-\beta_r}-\frac{1!A_r'}{(z-\beta_r)^2}+\frac{2!A_r''}{(z-\beta_r)^3}-\cdots+\frac{(-1)^{k_r-1}(k_r-1)!A_r^{k_r-1}}{(z-\beta_r)^{k_r}}$$

olmak üzere;

$$f(z)=C+\sum_r\left\{A_r\zeta(z-\beta_r)+A_r'\zeta'(z-\beta_r)+\cdots+A_r^{k_r-1}\zeta^{k_r-1}(z-\beta_r)\right\}$$

şeklinde yazılabilir.

İspat: ϕ fonksiyonu

$$\phi(z) = \sum_r \left\{A_r \zeta(z-\beta_r) + A'_r \zeta'(z-\beta_r) + \cdots + A_r^{k_r-1} \zeta^{k_r-1}(z-\beta_r)\right\}$$

şeklinde verilmiş olsun.

ϕ sonlu sayıda meromorf fonksiyonun toplamı olduğundan meromorftur. Aynı zamanda

$$\phi(z + 2m\omega_1 + 2n\omega_2) = \phi(z)$$

olduğu için $\phi(z)$ fonksiyonu çifte periyodik ve dolayısıyla eliptiktir.

2.8 WEIERSTRASS TARZI ELİPTİK FONKSİYONLARIN OLUŞTURULMASI:

Sabit olmayan bir f eliptik fonksiyonu, modul $\mathcal{L}$'de mertebesi 0'dan farklı olan sonlu sayıda noktaya sahiptir. Bu noktalar mertebeleri $m_1, ..., m_s$ olan $a_1, ..., a_s$ noktaları olsun.

$$\sum_{j=1}^{s} m_j = 0 \quad ve \quad \sum_{j=1}^{s} m_j a_j \in \mathcal{L} \tag{18}$$

olduğu bilinmektedir.

Aksine, (18)'i sağlayan $a_j \in \mathbb{C}$ ve $m_j \in \mathbb{Z}$ için

$$g(z) = \prod_{j=1}^{s} \left(e^{z a_j^*} \sigma(z-a_j)\right)^{m_j} \tag{19}$$

f ile aynı derecelere, sıfırlara ve kutuplara sahip bir eliptik fonksiyon tanımlanır. Bunu görmek için $\omega \in \mathcal{L}$ için σ fonksiyonunun dönüşüm formüllerini kullanacağız.

$$g(z+\omega) = \Psi(\omega)^{\sum m_j} e^{\omega(\sum m_j a_j)^* - \omega^*(\sum m_j a_j)} g(z)$$

Bu noktada, e'nin kuvveti, Legendre bağıntısı ve $\sum m_j a_j \in \mathcal{L}$ bağıntısına göre $2\pi i$'nin bir çarpanıdır. Dahası kabule göre $\sum m_j = 0$'dır. Böylece $g(z+\omega) = g(z)$'dir. Bu yüzden g eliptiktir.

Teorem 1.1.1.1'den $\frac{f}{g}$ fonksiyonu sabit olmalıdır ve aşağıdaki teoremi ispatlamış oluruz.

Teorem 2.8.1(Abel-Jacobi): $a_1, ..., a_s \in \mathbb{C}$ ve $m_1, ..., m_s \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ olsun. Öyle bir eliptik f fonksiyonu vardır ki ancak ve ancak (19) şartı sağlandığında a_i'ler $\mathrm{mod}\, \mathcal{L}$'de f 'in derecesinin sıfırdan farklı ve m_i'ye eşit olduğu noktalardır. Bu şekilde sabit bir çarpana sahip olan her fonksiyon (19)'daki çarpıma eşittir.

Örnek olarak, $a \in \mathbb{C} \backslash \mathcal{L}$ için $\wp(z) - \wp(a)$ fonksiyonunu ele alalım. Burada $a_1 = a$, $a_2 = -a$, $a_3 = 0$; $m_1 = m_2 = 1$, $m_3 = -2$'dir. Bu yüzden Teorem 2.8.1 ve C sabiti ile

$$\wp(z) - \wp(a) = C \frac{\sigma(z-a)\, \sigma(z+a)}{\sigma^2(z)}$$

olur. C'yi bulmak için, denklemin her iki tarafını da $\sigma(z)^2$ ile çarpalım ve $z \to 0$ için limit alalım. Bu $C = \frac{-1}{\sigma^2(a)}$ olduğunu gösterir ve sıradaki teoremin ilk iddiasını ispatlar. İkinci kısmı ispatlamak için ilk formülü $z - a$ 'ya bölelim ve $a \to z$ için limit alalım.

Teorem 2.8.2:

(i) $a \in \mathbb{C} \backslash \mathcal{L}$ için

$$\wp(z) - \wp(a) = -\frac{\sigma(z-a)\, \sigma(z+a)}{\sigma^2(z)\, \sigma^2(a)}$$

(ii)

$$\sigma'(z) = -\frac{\sigma(2z)}{\sigma^2(z)}$$

Açıkça, bir latise bağlı eliptik fonksiyonların kümesi toplama ve çarpmaya göre bir cisimdir. Konunun devamında bunu $\mathbb{C}_{\mathcal{L}}$ ile göstereceğiz.

Teorem 2.8.3: $\mathbb{C}_{\mathcal{L}}$, $\mathbb{C}$ üzerinde $\wp$ ve $\wp' : \mathbb{C}_{\mathcal{L}} = \mathbb{C}(\wp, \wp')$ ile üretilir.

İspat: İlk olarak her eliptik fonksiyonu, $\wp$'nin rasyonel fonksiyonu olarak göstereceğiz. Bu nedenle aşağıdaki ifadeye ihtiyacımız olacak.

Lemma 2.8.1: f , $\mathbb{C}_{\mathcal{L}} \backslash \mathbb{C}$ içinden bir çift fonksiyon olsun ve $2a \in \mathcal{L}$ olacak şekilde $a \in \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda a'da f 'in derecesi 2 ile tam bölünür.

İspat: f 'in a'da Taylor açılımını yazarsak

$$f(z) = c_m (z-a)^m + c_{m+1} (z-a)^{m+1} + \cdots, \; c_m \neq 0$$

$$f(z) = f(-z+2a) = f(a+(a-z)) = (-1)^m c_m (z-a)^m + \cdots$$

buluruz.

Bu yüzden m çift olmalıdır.

Lemma 2.8.2: $\wp'(z)$ 3.mertebedendir ve

$$w_1 = \frac{\omega_1}{2}, \qquad w_2 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \qquad w_3 = \frac{\omega_2}{2}$$

yarı periyotlarında 3 tane basit sıfırı vardır.

$a \in \mathbb{C} \backslash \mathcal{L}$ için $\wp(z) - \wp(a)$ fonksiyonu, $2a \notin \mathcal{L}$ ise, her bir $\pm a$ noktasında basit sıfırı; $2a \in \mathcal{L}$ ise a'da 2. dereceden sıfırı vardır.

İspat: $\wp'$ tek fonksiyon olduğundan Lemma 2.8.1'in ispatındaki Taylor açılımını kullanarak $\wp'(z)$'nin sıfırlarının yarı periyotlar olduğu sonucuna varırız. Dahası $\wp'$ derecesi 3 olduğu için bunlar $\mathcal{L}$ moduna göre sıfırlardır. Lemma 2.8.2'nin $\wp$ hakkındaki iddiası $\wp$'nin derecesi 2 olduğu için görülür.

Teorem 2.8.3'ün ispatı: İlk önce f derecesi $m_j \neq 0$ olan, $\bmod \mathcal{L}'$e göre tüm noktaları $a_1, ..., a_s$ olan, sabit olmayan çift eliptik bir fonksiyon olsun. $2a_j \in \mathcal{L}$ olduğunda, $m_j' = m_j$ ve $2a_j \in \mathcal{L}$ olduğunda $m_j' = \frac{m_j}{2}$ olarak alalım. Bu durumda Lemma 2.8.2 ile

$$g(z) = f(z) \prod_{j=1}^{s} (\wp(z) - \wp(a_j))^{-m_j'}$$

fonksiyonunu $\mathcal{L}$ içinde sadece sıfırlara ya da kutuplara sahiptir ve g sabittir, bu yüzden f, $\wp'$nin rasyonel bir fonksiyonudur.

Şimdi, f herhangi bir eliptik fonksiyon olsun. Biz f fonksiyonunu tek ve çift fonksiyonların toplamı olarak yazalım

$$f(z) = \frac{f(z) + f(-z)}{2} + \frac{f(z) - f(-z)}{2\wp'(z)} \wp'(z)$$

bu 1 ve $\wp'$ katsayıları ile 1 ve $\wp'$ nin lineer kombinasyonlarından oluşan, $\wp$ içindeki çift ve dolayısıyla rasyonel fonksiyonlardır.

2.9 ELİPTİK FONKSİYONLARIN CEBİRSEL VE GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ:

$\mathcal{L}$ latisinin Eisenstein serisi

$$G_m(\mathcal{L}) = \sum_{\omega \in \mathcal{L}}{}' \frac{1}{\omega^{2m}}, \qquad m \geqslant 2$$

mutlak yakınsaktır.

$$g_2 = g_2(\mathcal{L}) = 60 G_2(\mathcal{L})$$

$$g_3 = g_3(\mathcal{L}) = 140 G_3(\mathcal{L})$$

Teorem 2.9.1: $\wp$ ve $\wp'$ fonksiyonları

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$$

cebirsel denklemini sağlar.

$$P(X) = 4X^3 - g_2 X - g_3$$

polinomu ω_j yarı periyodu ile üç ikili farklı sıfıra sahiptir.

$$e_j = \wp(w_j), \qquad j = 1, 2, 3$$

Diskriminantı

$$\Delta(\mathcal{L}) = 16(e_1 - e_2)^2 (e_1 - e_3)^2 (e_2 - e_3)^2$$

Tüm latisler için

$$\Delta(\mathcal{L}) \neq 0$$

ve

$$\Delta(\mathcal{L}) = g_2^3 - 27 g_3^2$$

elde edilir.

İspat: $z = 0$'ın bir komşuluğunda

$$a_{2k} = (2k+1) \sum \sum{}' \Omega_{mn}^{-(2k+2)}$$

iken

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} z^{2k}$$

şeklinde bir Laurent serisine açılabildiğini biliyoruz.

$$g(z) = \wp'^2 - \left(4\wp^3 - g_2\wp - g_3\right)$$

fonksiyonunu Laurent açılımı cinsinden yazarsak, g'nin hiç kutbu olmadığını ve $g(0) = 0$ olduğunu görürüz. Böylece ilk iddiamızı ispatlarız, $g = 0$'dır. Kalan iddiaları ispatlamak için, her ω_i yarı periyodu için Lemma 2.8.2'ye göre

$$\wp'(\omega_i) = 0$$

olduğu için $4X^3 - g_2X - g_3$ polinomunun sıfırları $j = 1, 2, 3$ için $\wp(\omega_j)$'dir. Dahası bunlar $\wp'(\omega_i) = 0$ olduğundan farklı ikilidir ve $\wp$, ω_j'de 2. dereceye sahiptir.

Bu Teorem 2.9.1'in ispatını tamamlar.

Teorem 2.9.1, $\mathbb{C}/\mathcal{L}$ ve

$$E = \left\{(t : x : y) \in P^2(\mathbb{C}) \,\middle|\, y^2t = 4x^3 - g_2xt^2 - g_3t^3\right\}$$

izdüşümsel eğrisi arasında

$$z + \mathcal{L} \longmapsto Q(z) = \begin{cases} (1 : \wp(z) : \wp'(z)) & z \notin \mathcal{L} \text{ iken} \\ \left(\frac{1}{\wp'(z)} : \frac{\wp(z)}{\wp'(z)} : 1\right) & \wp'(z) \neq 0 \text{ iken} \end{cases}$$

şeklinde bir birebir örten eşlemeye sebep olur.

Tanımdan

$$Q(z_1) + Q(z_2) = Q(z_1 + z_2)$$

E, sonsuzdaki $Q(0) = (0 : 0 : 1)$ noktası ile nötr eleman olarak bir grup yapısı ile verilmiştir. Bu grup yapısının cebirsel özellikleri elde edeceğimiz $\wp$'nin toplam formülünden elde edilmektedir.

Toplam formülünün analitik kaynağı Teorem 2.8.2'deki ilk formüldür.

$$\wp(z) - \wp(z') = -\frac{\sigma(z+z')\,\sigma(z-z')}{\sigma(z)^2\,\sigma(z')^2}$$

Her iki tarafın z ve z' 'ne göre logaritmik türevini alırsak;

$$\frac{\wp'(z)}{\wp(z) - \wp(z')} = \zeta(z+z') + \zeta(z-z') - 2\zeta(z)$$

$$-\frac{\wp'(z')}{\wp(z) - \wp(z')} = \zeta(z+z') - \zeta(z-z') - 2\zeta(z')$$

elde edilir ve iki formülü toplarsak;

Teorem 2.9.2 (ζ **fonksiyonunun toplam formülü**)

$z, z' \in \mathbb{C}\backslash\mathcal{L}, z \not\equiv \pm z' \bmod \mathcal{L}$ için

$$\zeta(z+z') = \zeta(z) + \zeta(z') + \frac{1}{2}\frac{\wp'(z) - \wp'(z')}{\wp(z) - \wp(z')}$$

Teorem 2.9.2'deki formülün z ve z''ye göre türevlerini alarak,

$$\wp(z+z') = \wp(z) - \frac{1}{2}\frac{\wp''(z)(\wp(z) - \wp(z')) - (\wp'(z) - \wp'(z'))\wp'(z)}{(\wp(z) - \wp(z'))^2}$$

$$\wp(z+z') = \wp(z') - \frac{1}{2}\frac{-\wp''(z')(\wp(z) - \wp(z')) - (\wp'(z) - \wp'(z'))(-\wp'(z'))}{(\wp(z) - \wp(z'))^2}$$

Dahası, Teorem 2.9.1'deki cebirsel denklemin türevi alınarak

$$\wp''(z) = 6\wp(z)^2 - \frac{g_2}{2}$$

elde edilir.

$\wp(z+z')$ için olan formülleri toplayarak ve $\wp''$ ifadesini $\wp$ kullanarak ifade edersek, son formül ile;

Teorem 2.9.3 ($\wp$ **fonksiyonunun toplam teoremi**)

$z, z' \in \mathbb{C}\backslash\mathcal{L}, z \not\equiv \pm z' \bmod \mathcal{L}$ için

$$\wp(z+z') = -\wp(z) - \wp(z') + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z) - \wp'(z')}{\wp(z) - \wp(z')}\right)^2$$

ve $2z \not\equiv \pm 0 \bmod \mathcal{L}$ için

$$\wp(2z) = -2\wp(z) + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp''(z)}{\wp'(z)}\right)^2 .$$

2.10 JACOBİ ELİPTİK FONKSİYONLARI:

Tanım 2.10.1 (sn z,cn z,dn z Jacobi Eliptik Fonksiyonları): sn z,cn z,dn z Jacobi eliptik fonksiyonları aşağıdaki eşitlikler ile tanımlanır,

$$\operatorname{sn}(z,k)=\frac{\vartheta_3(0|\tau)}{\vartheta_2(0|\tau)}\frac{\vartheta_1\left(z\vartheta_3^{-2}(0|\tau)\,|\tau\right)}{\vartheta_4\left(z\vartheta_3^{-2}(0|\tau)\,|\tau\right)} \tag{20.1}$$

$$\operatorname{cn}(z,k)=\frac{\vartheta_4(0|\tau)}{\vartheta_2(0|\tau)}\frac{\vartheta_2\left(z\vartheta_3^{-2}(0|\tau)\,|\tau\right)}{\vartheta_4\left(z\vartheta_3^{-2}(0|\tau)\,|\tau\right)} \tag{20.2}$$

$$\operatorname{dn}(z,k)=\frac{\vartheta_4(0|\tau)}{\vartheta_3(0|\tau)}\frac{\vartheta_3\left(z\vartheta_3^{-2}(0|\tau)\,|\tau\right)}{\vartheta_4\left(z\vartheta_3^{-2}(0|\tau)\,|\tau\right)} \tag{20.3}$$

burada $k^2=\frac{\vartheta_2^4(0|\tau)}{\vartheta_3^4(0|\tau)}=\left(\frac{e_3-e_2}{e_1-e_2}\right)$ eliptik fonksiyonların *modülü* olarak bilinir ve $k'=\left(\frac{e_1-e_3}{e_1-e_2}\right)^{\frac{1}{2}}$ ile verilen k' ise *bütünleyici modül* olarak adlandırılır ki k ve k', $k^3+k'^2=1$ ilişkisi ile bağlıdır.

Gelecek tartışmada,

$$K=\frac{\pi}{2}\vartheta_3^2(0)\,,\quad iK'\frac{\pi\tau}{2}\vartheta_3^2(0)$$

ifade edilecek, bunların gelecek Teorem 2.10.6 da π ve $\pi\tau$ periyotları ile bağlantıları verilecektir.

Teorem 2.10.1: sn z,cn z ve dn z fonksiyonları, sırasıyla $4K, 2iK'; 4K, 2K+2iK'$; ve $2K, 4iK'$ periyotlarının periyodik fonksiyonlarıdır.

Teorem 2.10.2: Temel hücredeki sıfırlar ve kutuplar ile sn z,cn z ve dn z fonksiyonlarının kutuplarındaki rezidüler aşağıdaki gibi verilir:

sn z nin basit sıfırları	$0, 2K$
cn z nin basit sıfırları	$K, 3K$
dn z nin basit sıfırları	$K+iK', K+3iK'$
sn z nin basit kutupları	$iK', 2K+iK'$
cn z nin basit kutupları	$iK', 2K+iK'$
dn z nin basit kutupları	$iK', 3iK'$

iK' ve $2K+iK'$ deki sn z nin rezidüleri sırasıyla $\frac{1}{k}, -\frac{1}{k}$

iK' ve $2K+iK'$ deki cn z nin rezidüleri sırasıyla $-\frac{i}{k}, \frac{i}{k}$

iK' ve $3iK'$ deki dn z nin rezidüleri sırasıyla $-i, i$ dir.

Teorem 2.10.3: Jacobi eliptik fonksiyonları arasında aşağıdaki ilişkiler bulunur.

$$\mathrm{sn}^2 z + \mathrm{cn}^2 z = 1 \tag{21.1}$$

$$\mathrm{dn}^2 z + k^2 \mathrm{sn}^2 z = 1 \tag{21.2}$$

$$\mathrm{dn}^2 z - k^2 \mathrm{cn}^2 z = k'^2 \tag{21.3}$$

Teorem 2.10.4: sn z,cn z ve dn z ile sağlanan diferansiyel denklemler aşağıdaki gibidir:

$$\frac{d}{dz}\mathrm{sn}\ z = \mathrm{cn}\ z \ \ \mathrm{dn}\ z \tag{22.1}$$

$$\frac{d}{dz}\mathrm{cn}\ z = -\mathrm{sn}\ z \ \ \mathrm{dn}\ z \tag{22.2}$$

$$\frac{d}{dz}\mathrm{dn}\ z = -k^2 \mathrm{sn}\ z \ \ \mathrm{cn}\ z \tag{22.3}$$

Teorem 2.10.5 (Jacobi Eliptik Fonksiyonlarının Maclaurin Kuvvet Serisi Açılımı): sn z,cn z ve dn z fonksiyonları,

$$\begin{aligned}
\mathrm{sn}\ z &= z - \left(1+k^2\right)\frac{z^3}{3!} + \left(1+14k^2+k^4\right)\frac{z^5}{5!} - ... \\
\mathrm{cn}\ z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \left(1+4k^2\right)\frac{z^4}{4!} - ... \\
\mathrm{dn}\ z &= 1 - \frac{k^2 z^2}{2!} + \left(4k^2+k^4\right)\frac{z^4}{4!} - ...
\end{aligned}$$

gibi kuvvet serilerine genişletilebilir.

Teorem 2.10.6 (Weierstrass Eliptik Fonksiyonunun Terimlerindeki Jacobi Eliptik Fonksiyonlarının Açılımı ve Tersi):

$$\begin{aligned}
\mathrm{sn}(z,k) &= \left\{\frac{(e_1-e_2)}{\wp\left(\frac{z}{\sqrt{e_1-e_2}}\right)-e_2}\right\}^{\frac{1}{2}} \\
\mathrm{cn}(z,k) &= \left\{\frac{\wp\left(\frac{z}{\sqrt{e_1-e_2}}\right)-e_1}{\wp\left(\frac{z}{\sqrt{e_1-e_2}}\right)-e_2}\right\}^{\frac{1}{2}} \\
\mathrm{dn}(z,k) &= \left\{\frac{\wp\left(\frac{z}{\sqrt{e_1-e_2}}\right)-e_3}{\wp\left(\frac{z}{\sqrt{e_1-e_2}}\right)-e_2}\right\}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Teorem 2.10.7 (Cebirsel Toplam Teoremi): sn z,cn z ve dn z fonksiyonları, aşağıdaki toplam teoremlerini sağlar:

$$\text{sn }(z_1+z_2)=\frac{\text{sn }z_1\text{ cn }z_2\text{ dn }z_2+\text{ sn }z_2\text{ cn }z_1\text{ dn }z_1}{1-k^2\text{sn}^2\ z_1\text{sn}^2\ z_2} \tag{23.1}$$

$$\text{cn }(z_1+z_2)=\frac{\text{cn }z_1\text{ cn }z_2\ -\text{sn }z_1\text{ sn }z_2\text{ dn }z_1\text{ dn }z_2}{1-k^2\text{sn}^2\ z_1\text{sn}^2\ z_2} \tag{23.2}$$

$$\text{dn }(z_1+z_2)=\frac{\text{dn }z_1\text{ dn }z_2\ -k^2\text{sn }z_1\text{ sn }z_2\text{ cn }z_1\text{ cn }z_2}{1-k^2\text{sn}^2\ z_1\text{sn}^2\ z_2} \tag{23.3}$$

Teorem 2.10.8: k sıfır eğiliminde iken; sn z,cn z ve dn z fonksiyonları da sırasıyla $\sin z, \cos z$ ve 1 eğilimindedir.

Teorem 2.10.9: k bir eğiliminde iken; sn z,cn z ve dn z fonksiyonları da sırasıyla $\tanh z, \sec hz$ ve $\sec hz$ eğilimindedir.

Teorem 2.10.10 (Jacobi Eliptik Fonksiyonları ile Sağlanan İntegral Formülü): sn z,cn z ve dn z fonksiyonları; integralin yolunun herhangi bir fonksiyonun tekilliğinden geçmediği yerde,

$$z=\int_0^{sn(z,k)}\left(1-t^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-k^2t^2\right)^{-\frac{1}{2}}dt \tag{24.1}$$

$$z=\int_{cn(z,k)}^{1}\left(1-t^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(k'^2+k^2t^2\right)^{-\frac{1}{2}}dt \tag{24.2}$$

$$z=\int_{dn(z,k)}^{1}\left(1-t^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(t^2-k'^2\right)^{-\frac{1}{2}}dt \tag{24.3}$$

integraller yoluyla gösterilebilir.

Teorem 2.10.11: $\Gamma(\alpha,\beta;\gamma;x)\,,x$ in bir hiper geometrik fonksiyonu olduğunda, K sabiti

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-k^2\sin^2\theta\right)^{-\frac{1}{2}}d\theta=\frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;k^2\right) \tag{25.1}$$

gibi k nın bir fonksiyonu olarak ifade edilebilir.

Teorem 2.10.12: K' Sabiti

$$K'=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-k'^2\sin^2\theta\right)^{-\frac{1}{2}}d\theta=\frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;k'^2\right) \tag{25.2}$$

gibi k$'$ nün bir fonksiyonu olarak ifade edilebilir.

Tanım 2.10.2: $\mathrm{am}(z,k)$ fonksiyonu

$$z=\int_0^{am(z,k)}\left(1-k^2\sin^2 t\right)^{-\frac{1}{2}}dt$$

integrali ile tanımlanır.

Teorem 2.10.13:

$$\begin{aligned}\mathrm{sn}\,(z,k) &= \sin\{\mathrm{am}\,(z,k)\}\\ \mathrm{cn}\,(z,k) &= \cos\{\mathrm{am}\,(z,k)\}\\ \mathrm{dn}\,(z,k) &= \triangle\{\mathrm{am}\,(z,k)\}\end{aligned}$$

Teorem 2.10.14: sn z,cn z ve dn z için Jacobi'nin sanal dönüşümü,

$$\mathrm{sn}\left(iz,k^{'}\right)=i\mathrm{sc}\,(z,k) \tag{26.1}$$

$$\mathrm{cn}\left(iz,k^{'}\right)=\mathrm{nc}\,(z,k) \tag{26.2}$$

$$\mathrm{dn}\left(iz,k^{'}\right)=\mathrm{dc}\,(z,k) \tag{26.3}$$

olarak belirtilebilir.

Teorem 2.10.15: sn z Jacobian tarzı eliptik fonksiyonunun Landen dönüşümü, $k_1=\frac{\left(1-k^{'}\right)}{\left(1+k^{'}\right)}$ olduğu yerde

$$\mathrm{sn}\left\{\left(1+k^{'}\right)z,k_1\right\}=\left(1+k^{'}\right)\mathrm{sn}\,(z,k)\,\mathrm{cd}\,(z,k) \tag{27}$$

ile verilebilir.

Teorem 2.10.16 (Jacobi Eliptik Fonksiyonlarının Sonsuz Çarpım Gösterimi): Jacobi eliptik fonksiyonları,

$$\mathrm{sn}\frac{2Kz}{\pi}=2q^{\frac{1}{4}}k^{-\frac{1}{2}}\sin z\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1-2q^{2n}\cos 2z+q^{4n}}{1-2q^{2n-1}\cos 2z+q^{4n-2}}\right\} \tag{28.1}$$

$$\mathrm{cn}\frac{2Kz}{\pi}=2q^{\frac{1}{4}}k^{\frac{1}{2}}k^{-\frac{1}{2}}\cos z\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1+2q^{2n}\cos 2z+q^{4n}}{1-2q^{2n-1}\cos 2z+q^{4n-2}}\right\} \tag{28.2}$$

$$\mathrm{dn}\frac{2Kz}{\pi}=k^{\frac{1}{2}}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1+2q^{2n-1}\cos 2z+q^{4n-2}}{1-2q^{2n-1}\cos 2z+q^{4n-2}}\right\} \tag{28.3}$$

formunun sonsuz çarpımları olarak belirtilebilir.

Teorem 2.10.17 (Jacobi Eliptik Fonksiyonlarının Fourier Gösterimi): Jacobi eliptik fonksiyonlarının Fourier serisi gösterimi, $|\mathrm{Im}\,(z)| < \frac{\pi}{2}\,\mathrm{Im}\,(\tau)$ sağlandığında,

$$\mathrm{sn}\left(\frac{2Kz}{\pi}\right) = \frac{2\pi}{Kk}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+\frac{1}{2}}\sin\left(2n+1\right)z}{1-q^{2n+1}} \tag{29.1}$$

$$\mathrm{cn}\left(\frac{2Kz}{\pi}\right) = \frac{2\pi}{Kk}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+\frac{1}{2}}\cos\left(2n+1\right)z}{1+q^{2n-1}} \tag{29.2}$$

$$\mathrm{dn}\left(\frac{2Kz}{\pi}\right) = \frac{\pi}{2K} + \frac{2\pi}{K}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n}\cos 2nz}{1+q^{2n}} \tag{29.3}$$

$$\mathrm{am}\left(\frac{2Kz}{\pi}\right) = \int_{0}^{\frac{2Kz}{\pi}}\mathrm{dn}t dt = z + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2q^{n}\sin 2nz}{n\left(1+q^{2n}\right)} \tag{29.4}$$

ile verilir.

2.11 THETA FONKSİYONLARI:

Tanım 2.11.1: Riemann theta fonksiyonunda $a, b \in \mathbb{R}$ yerine $\epsilon, \epsilon' \in \mathbb{C}$ alındığında; u kompleks sayısı, diğer τ kompleks sayısı $\mathrm{Im}(\tau) > 0$ olacak şekilde üst yarı düzlemde ve elemanları tamsayılardan oluşan $\begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix}$ 2×1'lik θ-Theta karakteristiği verilsin. Argümenti u olan, θ-Theta periyodu τ, karateristiği $\begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix}$ olan birinci dereceden θ-Theta fonksiyonunu aşağıdaki eşitlikle tanımlı olsun.

$$\theta\begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix}(u,\tau) = \sum_{n}\exp \pi i\left\{\tau\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^{2} + 2\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)\left(u+\frac{\epsilon'}{2}\right)\right\} \tag{30}$$

Theta fonksiyonunun işareti; ϵ ve ϵ' değerlerinin rezidü sınıfları ile belirlenir. (Rauch, 1973). Çalışmalarımda bu fonksiyon kullanılmıştır.

Eğer tanımlı eşitlikte $q = e^{\tau\pi i}$ alınırsa $\theta-$Theta fonksiyonu

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,q) = \sum_n q^{\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2} e^{2i\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u-\frac{\varepsilon'}{2}\pi\right)}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.11.1: Eğer $\epsilon = 2\upsilon' + \breve{E}$ ve $\epsilon' = 2\upsilon' + \breve{E}'$ ise

$$\theta\begin{bmatrix}\epsilon\\ \epsilon'\end{bmatrix}(\zeta;\tau) = (-1)^{\epsilon\upsilon'}\begin{bmatrix}\breve{E}\\ \breve{E}'\end{bmatrix}(\zeta,\tau) \tag{31}$$

eşitliği elde edilir.

İspat: İlk olarak ε yerine $\varepsilon \pm 2$ yazılsın. (30)'dan; n bir toplamın yapay indeksi olduğundan, $n' = n \pm 1$ ile değiştirilmesiyle,

$$\begin{aligned}\theta\begin{bmatrix}\epsilon\pm 2\\ \epsilon'\end{bmatrix}(\zeta;\tau) &= \sum_n \exp\pi i\left\{\begin{array}{c}\tau\left(n+\frac{\epsilon}{2}\pm 1\right)^2 + 2\left(n+\frac{\epsilon}{2}\pm 1\right)\\ \left(\zeta+\frac{\epsilon'}{2}\right)\end{array}\right\}\\ &= \theta\begin{bmatrix}\epsilon\\ \epsilon'\end{bmatrix}(\zeta;\tau)\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Buradan

$$\theta\begin{bmatrix}\epsilon\\ \epsilon'\end{bmatrix}(\zeta;\tau) = \begin{bmatrix}\breve{E}\\ \breve{E}'\end{bmatrix}(\zeta,\tau)$$

'ya ulaşılır.Sonra ε' yerine $\varepsilon' \pm 2$ yazılsın. Tekrar (30)'dan

$$\begin{aligned}\theta\begin{bmatrix}\epsilon\\ \epsilon'\pm 2\end{bmatrix}(\zeta;\tau) &= \sum_n \exp\pi i\left\{\tau\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2 + 2\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)\left(\zeta+\frac{\epsilon'}{2}\pm 1\right)\right\}\\ &= \sum_n \exp\pi i\left\{\tau\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2 + 2\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)\left(\zeta+\frac{\epsilon'}{2}\right)\right\}\\ &\quad \exp\left\{\pi i\left(2n+\epsilon\right)\right\}\\ &= (-1)^{\epsilon}\,\theta\begin{bmatrix}\epsilon\\ \epsilon'\end{bmatrix}(\zeta;\tau)\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Böylece (31) eşitliği bulunmuş olur.

Teorem 2.11.2: Çift veya tek olan $\begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix}$ bağlı olarak; $\theta \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (\zeta;\tau)$; ζ nun tek veya çift fonksiyonudur $\left(\theta \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (-\zeta;\tau) = + \text{ veya } -\theta \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (\zeta;\tau) \right)$.Daha doğrusu;

$$\theta \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (-\zeta;\tau) = (-1)^{\varepsilon\varepsilon'} \theta \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (\zeta;\tau) \tag{32}$$

elde edilir.

İspat: (30)'dan

$$\begin{aligned}
\theta \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (-\zeta;\tau) &= \sum_n \exp \pi i \left\{ \tau \left(n + \frac{\epsilon}{2} \right)^2 + 2 \left(n + \frac{\epsilon}{2} \right) \left(-\zeta + \frac{\epsilon'}{2} \right) \right\} \\
&= \sum_n \exp \pi i \left\{ \tau \left(-n + \frac{\epsilon}{2} \right)^2 + 2 \left(-n + \frac{\epsilon}{2} \right) \left(-\zeta + \frac{\epsilon'}{2} \right) \right\} \\
&= \sum_n \exp \pi i \left\{ \tau \left(-n - \frac{\epsilon}{2} \right)^2 + 2 \left(-n - \frac{\epsilon}{2} \right) \left(-\zeta + \frac{\epsilon'}{2} \right) \right\} \\
&= \sum_n \exp \pi i \left\{ \tau \left(n + \frac{\epsilon}{2} \right)^2 + 2 \left(n + \frac{\epsilon}{2} \right) \left(\zeta - \frac{\epsilon'}{2} \right) \right\} \\
&= \sum_n \exp \pi i \left\{ \tau \left(n + \frac{\epsilon}{2} \right)^2 + 2 \left(n + \frac{\epsilon}{2} \right) \left(\zeta + \frac{\epsilon'}{2} \right) \right\} \\
&\quad \exp \pi i \left\{ -\left(2n + \varepsilon\right) \varepsilon' \right\} \\
&= (-1)^{\varepsilon\varepsilon'} \theta \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (\zeta;\tau),
\end{aligned}$$

burada n yapay indeksi ile $n' = -n$ değiştirildiğinde, ikinci adımda $\frac{\epsilon}{2}$ ile $-\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$ değiştirildiğinde $-\epsilon$ bir tamsayı olur, dolayısıyla n' yapay indeksinin yerine $n'' = n' + \varepsilon$ yazıldığında ve son olarak $-\left(\frac{\epsilon'}{2}\right)$ ile $\frac{\epsilon'}{2}$ değiştirildiğinde ε' olur.

Şimdi

$$\begin{aligned}
\theta \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (\zeta + \pi\tau; \tau) &= q^{-1} \exp\{-2\zeta i\} \exp\{\epsilon \zeta i\}\, \theta \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (\zeta; \tau) \\
&= \exp\{-\pi\tau i + \epsilon' \pi i - 2\zeta i\}\, \theta \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (\zeta; \tau)
\end{aligned}$$

ile tanımlı theta fonksiyonlarının ζ ve τ'nun analitik fonksiyonları olduğunu ispatlamak için (30) ile verilen serinin yakınsaklığını göstermeliyiz. ζ düzleminin ve τ üst yarı düzleminin kompakt alt kümelerinde ζ ve $\operatorname{Im}(\tau) > 0$ eşitsizliğini sağlayan τ için (30) ile verilen serinin düzgün yakınsak olduğunu kabul edelim. O halde aşağıdaki teorem vardır.

Teorem 2.11.3: $\theta \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (\zeta; \tau)$; ζ düzlemi ve τ üst yarı düzleminin kartezyen çarpımındaki iki kompleks değişken olan ζ ve τ nun analitik bir fonksiyonudur.

İspat: Weierstrass M- testi ile $M > 0$, $\lambda > 0$ olmak üzere $|u| \leq M$, $\operatorname{Im}(\tau) > \lambda$ olan (30) ile tanımlı serinin terimlerinin, yakınsak pozitif serinin terimlerinden mutlak değerce küçük olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}
|\exp iz| &= |\exp\{i \operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z\}| = |\exp\{-\operatorname{Im} z\} \exp\{i \operatorname{Re} z\}| \\
&= |\exp\{-\operatorname{Im} z\}|\, |\exp\{i \operatorname{Re} z\}| \\
&= |\exp\{-\operatorname{Im} z\}|
\end{aligned}$$

$$= \exp\{-\operatorname{Im} z\}$$

eşitliğini serideki her bir terime uygularsak

$$\left|\exp\left\{\pi i \left(\tau \left(n + \frac{\epsilon}{2}\right)^2 + 2\left(n + \frac{\epsilon}{2}\right)\left(\zeta + \frac{\epsilon'}{2}\right)\right)\right\}\right|$$

$$= \exp\left\{-\pi \left(\operatorname{Im}\tau \left(n + \frac{\epsilon}{2}\right)^2 + 2\left(n + \frac{\epsilon}{2}\right) \operatorname{Im}\zeta\right)\right\}$$

$$= \exp\left\{-\pi \operatorname{Im}\tau \left(n + \frac{\epsilon}{2}\right)^2\right\} \exp\left\{(-2\pi)\left(n + \frac{\epsilon}{2}\right) \operatorname{Im}\zeta\right\}$$

eşitliğini elde ederiz. $\operatorname{Im}\tau \geq \lambda$ olduğundan

$$\operatorname{Im}\tau\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2 \geq \lambda\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2$$

veya

$$-\operatorname{Im}\tau\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2 \geq -\lambda\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2$$

ve

$$-2\pi\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)\operatorname{Im}\zeta \leq \left|2\pi\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)\operatorname{Im}\zeta\right|$$
$$= 2\pi\sqrt{\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2}\,|\operatorname{Im}\zeta| \leq 2\pi\sqrt{\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2}M$$

eşitsizlikleri vardır. M ve λ değerlerine bağlı sonlu sayıda n için

$$\left|n+\frac{\epsilon}{2}\right| = \sqrt{\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2} > \frac{4M}{\lambda}$$

eşitsizliği sağlandığında

$$1-\frac{2M}{\lambda\sqrt{\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2}} > \frac{1}{2}$$

olmak üzere üstel fonksiyonunun monotonluk özelliği kullanılırsa, (30) ile tanımlı serinin n. teriminin mutlak büyüklüğü için üst sınıra ulaşırız.

$$\begin{aligned}
&\exp\left\{-\pi\left(\lambda\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2 - 2M\sqrt{\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2}\right)\right\}\\
= \quad &\exp\left\{-\pi\lambda\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2\left[1-\frac{2M}{\lambda\sqrt{\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2}}\right]\right\}\\
&\leq \exp\left\{-\pi\frac{\lambda}{2}\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2\right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. O halde (30) ile tanımlı serinin her bir teriminin mutlak değerce büyüklüğü için bir üst sınır bulduğumuzdan ve

$$\sum \exp\left\{-\pi\frac{\lambda}{2}\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2\right\}$$

serisi Cauchy n. kök testi ile yakınsak olduğundan Weierstrass M testine göre (30) ile tanımlı seri yakınsak olur.

Teorem 2.11.4: Theta fonksiyonu için aşağıdaki fonksiyonel denklemler sağlanır.

a)

$$\theta \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (\zeta + 1; \tau) = (-1)^{\epsilon} \theta \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (\zeta; \tau) \tag{33}$$

b)

$$\theta \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (\zeta + \tau; \tau) = (-1)^{\epsilon'} e^{\pi i(-2\zeta - \tau)} \theta \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (\zeta; \tau) \tag{34}$$

İspat: a) (30)'dan

$$\theta \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (\zeta + 1; \tau) = \sum_n \exp \left\{ \pi i \left(\tau \left(n + \frac{\epsilon}{2} \right)^2 + 2 \left(n + \frac{\epsilon}{2} \right) \left(\zeta + 1 + \frac{\epsilon'}{2} \right) \right) \right\}$$

$$= \sum_n \exp \left\{ \pi i \left(\tau \left(n + \frac{\epsilon}{2} \right)^2 + 2 \left(n + \frac{\epsilon}{2} \right) \left(\zeta + \frac{\epsilon'}{2} \right) \right) \right\} \exp \left\{ \pi i \left(2n + \epsilon \right) \right\}$$

$$= (-1)^{\epsilon} \sum_n \exp \left\{ \pi i \left(\tau \left(n + \frac{\epsilon}{2} \right)^2 + 2 \left(n + \frac{\epsilon}{2} \right) \left(\zeta + \frac{\epsilon'}{2} \right) \right) \right\}$$

eşitliğini buluruz. (30) eşitliği ve bu eşitlikten,

$$\theta \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (\zeta + 1; \tau) = (-1)^{\epsilon} \theta \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (\zeta; \tau)$$

eşitliğini elde ederiz.

b) (30) ile tanımlı seride n yerine $n + 1$ yazarsak,

$$\theta \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (u; \tau) = \sum_n \exp \left\{ \pi i \left(\tau \left(n + 1 + \frac{\epsilon}{2} \right)^2 + 2 \left(n + 1 + \frac{\epsilon}{2} \right) \left(u + \frac{\epsilon'}{2} \right) \right) \right\}$$

$$\begin{aligned} = \quad & \sum_n \exp \left\{ \pi i \left(\tau \left(n + \frac{\epsilon}{2} \right)^2 + 2\tau \left(n + \frac{\epsilon}{2} \right) + 2 \left(n + \frac{\epsilon}{2} \right) \left(u + \frac{\epsilon'}{2} \right) \right) \right\} \\ & \exp \left\{ \pi i \left(\tau + 2u + \epsilon' \right) \right\} \end{aligned} \tag{35}$$

eşitliğini buluruz. (30) ile tanımlı seride ζ yerine $\zeta + \tau$ yazarsak,

$$\theta \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (\zeta + \tau; \tau) = \sum_n \exp \pi i \left\{ \tau \left(n + \frac{\epsilon}{2} \right)^2 + 2 \left(n + \frac{\epsilon}{2} \right) \left(\zeta + \tau + \frac{\epsilon'}{2} \right) \right\}$$

$$= \sum_n \exp \pi i \left\{ \tau \left(n + \frac{\epsilon}{2} \right)^2 + 2\tau \left(n + \frac{\epsilon}{2} \right) + 2 \left(n + \frac{\epsilon}{2} \right) \left(\zeta + \frac{\epsilon'}{2} \right) \right\} \tag{36}$$

eşitliğini buluruz. (a)ve (b) eşitliklerinden

$$\theta \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (\zeta + \tau; \tau) = \exp \{ -\pi i (\tau + 2\zeta + \epsilon') \} \theta \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (\zeta; \tau)$$

$$= (-1)^{\epsilon'} e^{\pi i (-\tau - 2\zeta)} \theta \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (\zeta; \tau)$$

eşitliğini buluruz.

Tanım 2.11.2: ε ve ε' birer tamsayı olmak üzere, $\left\{ \begin{matrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{matrix} \right\}$ olarak gösterilen bir periyot $\varepsilon' + \varepsilon\tau$ dur.

Tanım 2.11.3: Yarı periyot bir periyodun yarısıdır(özellikle kompleks vektörlerde) ve şöyle gösterilir:

$$\begin{pmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{pmatrix} \equiv df \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{matrix} \right\} = \frac{\epsilon'}{2} + \frac{\epsilon\tau}{2}.$$

İndirgenmiş yarı periyot; ϵ ve ϵ' nün 0 veya 1 e eşit olduğu bir yarı periyottur.

Teorem 2.11.5: $\begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix}$ herhangi bir karakteristik ve $\begin{pmatrix} \mu \\ \mu' \end{pmatrix}$ herhangi bir yarı periyot olsun. O zaman

$$\theta \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} \left(\zeta + \begin{pmatrix} \mu \\ \mu' \end{pmatrix}, \tau \right) \tag{37}$$

$$= \exp \pi i \left\{ -\frac{\tau\mu^2}{4} - \frac{1}{2}\mu (\epsilon' + \mu') - \mu\zeta \right\} \theta \begin{bmatrix} \epsilon + \mu \\ \epsilon' + \mu' \end{bmatrix} (\zeta; \tau).$$

İspat:

$$\begin{aligned}
&\theta\begin{bmatrix}\epsilon\\ \epsilon'\end{bmatrix}\left(\zeta+\frac{\mu'}{2}+\frac{\mu}{2}\tau;\tau\right)\\
=\ &\sum_n \exp\pi i\left\{\tau\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2+2\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)\left(\zeta+\frac{\mu'}{2}+\frac{\mu\tau}{2}+\frac{\epsilon'}{2}\right)\right\}\\
=\ &\sum_n \exp\pi i\left\{\tau\left(n+\frac{\epsilon+\mu}{2}\right)^2+2\left(n+\frac{\epsilon+\mu}{2}\right)\left(\zeta+\frac{\epsilon'+\mu'}{2}\right)\right\}\\
&\exp\pi i\left\{-\tau\frac{\mu^2}{4}-\frac{1}{2}\mu\left(\epsilon'+\mu'\right)-\mu\zeta\right\}.
\end{aligned}$$

$$C=\frac{\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(\frac{1}{2},\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)}{\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left(\frac{1}{2},\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)}$$

eşitliğindeki C sabitini elde ederiz. $\frac{1}{2}$ değeri theta fonksiyonları açısından değerlendirildiğinde

$$\begin{aligned}
&\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(\frac{1}{2},\tau\right)\\
=\ &\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(0+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\tau\right)\\
=\ &\theta\begin{bmatrix}0\\1+1\end{bmatrix}(0,\tau)\exp\pi i\left\{-\tau\frac{\mu^2}{4}-\frac{1}{2}\mu\left(\epsilon'+\mu'\right)-\mu\zeta\right\}.
\end{aligned}$$

Ancak $\mu=0$ ve aynı zamanda indirgeme formülü (31) ile $\theta\begin{bmatrix}0\\1+1\end{bmatrix}(\zeta,\tau)=\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\zeta,\tau)$ dur. Böylece

$$\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(\frac{1}{2},\tau\right)=\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left(\frac{1}{2},\tau\right) &= \theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left(0+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\tau\right)\\ &= \theta\begin{bmatrix}1\\1+1\end{bmatrix}\\ &= -\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$snu = -\frac{\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left(\frac{u}{2\Omega_1},\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)}{\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(\frac{u}{2\Omega_1},\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)} \tag{38}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$cnu = \frac{\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\left(\frac{u}{2\Omega_1},\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)}{\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(\frac{u}{2\Omega_1},\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)} \tag{39}$$

ve

$$dnu = \frac{\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\left(\frac{u}{2\Omega_1},\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)}{\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(\frac{u}{2\Omega_1},\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)} \tag{40}$$

bulunur.

Diğer dokuz Jacobi fonksiyonu şimdi tamamen mekanik yolla hesaplanabilir ve bunların üçünü aşağıdaki gibi listeleyebiliriz.

$$\frac{snu}{cnu} = -\frac{\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left(\frac{u}{2\Omega_1},\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)}{\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\left(\frac{u}{2\Omega_1},\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)},$$

$$\frac{snu}{dnu}=-\frac{\theta^2\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}}{\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}\frac{\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left(\frac{u}{2\Omega_1},\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)}{\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\left(\frac{u}{2\Omega_1},\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)},$$

$$\frac{cnu}{dnu}=\frac{\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}}{\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}\frac{\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\left(\frac{u}{2\Omega_1},\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)}{\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\left(\frac{u}{2\Omega_1},\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)}$$

snu nun hesaplamasını; u nun 0, ∞ ve 1 değerlerini kullanarak yapabiliriz. Aşağıdaki eşitliği elde etmek için, $u=\Omega_1+\Omega_2$ kalan değerine bakılabilir.

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{1}{\lambda}} &= sn\left(\Omega_1+\Omega_2\right)=-\frac{\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left(\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2},\tau\right)}{\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2},\tau\right)}\\ &= -\frac{\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}}{\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}\frac{\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\tau\right)}{\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\tau\right)}.\end{aligned}$$

(37) kullanılır ve

$$\sqrt{\frac{1}{\lambda}}=sn\left(\Omega_1+\Omega_2\right)=-\frac{\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\exp\pi i\left\{-\frac{\tau}{4}-\frac{1}{2}(2)-\zeta\right\}\theta\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}}{\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\exp\pi i\left\{-\frac{\tau}{4}-\frac{1}{2}(2)-\zeta\right\}\theta\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}}$$

$$=-\frac{\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}}{\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\left(-\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)}$$

$$= \frac{\theta^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{\theta^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

elde edilir. (30) dan

$$\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i \tau n^2},$$

$$\theta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i \tau \left(\frac{n+1}{2}\right)^2}.$$

$\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ve $\theta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ reel ve pozitif olduğunda, τ nun tamamen sanal olduğunu görürüz, nitekim bu λ dır.

$$\lambda = \frac{\theta^4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{\theta^4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}} = \frac{\theta^4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{\theta^4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \theta^4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \tag{41}$$

elde ederiz. Şimdi, ayrıca

$$\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \sum_n \exp \pi i \left(\tau n^2 + n\right) = \sum_n (-1)^n \exp \pi i \tau n^2.$$

τ tamamen sanal olduğundan son toplam şüphesiz reeldir ve bu nedenle, kesinlikle $\theta^4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ pozitiftir. Böylece, $\tau' > 0, \tau = i\tau'$ için $0 < \lambda < 1$ dir.

Teorem 2.11.6:

$$\begin{aligned} \phi(z + \pi) &= \phi(z) \\ \phi(z + \pi\tau) &= -e^{-2iz} \phi(z) \end{aligned}$$

eşitliklerini sağlayan $\phi(z)$ fonksiyonu

$$\phi(z) = e^{-\frac{\eta_1 z^3}{\pi} + iz} \sigma(z) \tag{42}$$

ile tanımlanır.

Teorem 2.11.7: C keyfi bir sabit olduğunda $\phi(z)$ fonksiyonu ;

$$\phi(z) = \mathrm{Ci} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{2(n+1)iz}$$

formunu Fourier gösterimi olarak kabul eder.

Tanım 2.11.4: $\theta_1(z)$ fonksiyonu,

$$\theta_1(z) = -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)iz}$$

kuvvet serisi ile tanımlanır.

Teorem 2.11.8: $\theta_1(z)$ için kuvvet serisi mutlak yakınsaktır.

Teorem 2.11.9: $\theta_1(z)$ fonksiyonu,

$$\begin{aligned} \theta_1(z+\pi) &= -\theta_1(z) \\ \theta_1(z+\pi\tau) &= -q^{-1} e_1^{-2iz} \theta(z) \\ \theta_1(z+\pi+\pi\tau) &= q^{-1} e_1^{-2iz} \theta(z) \end{aligned}$$

fonksiyonel eşitliklerini sağlar.

Teorem 2.11.10:

$$\begin{aligned} \theta_1(z) &= 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \sin(2n+1) z \\ &= 2q^{\frac{1}{4}} \sin z - 2q^{\frac{9}{4}} \sin 3z + 2q^{\frac{25}{4}} \sin 5z - ... \end{aligned}$$

Teorem 2.11.11: $\theta_1(z)$ ve $\sigma(z)$ arasındaki bağıntı

$$\sigma(z) = e^{\frac{\eta_1 z^2}{\pi}} \frac{\theta_1(z)}{\theta_1'(0)}$$

ile verilir.

Tanım 2.11.5 (n.Dereceden Theta Fonksiyonları): Eğer $\Theta_n \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (\zeta, \tau)$; n bir pozitif tamsayı ve $\begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix}$ karakteristiği için, $Im\tau > 0$ ile her τ için ,tüm ζ lar için ζ da analitiktir ve

$$\Theta_n \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (\zeta+1, \tau) = (-1)^{\epsilon} \Theta_n \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (\zeta, \tau) \qquad (43.1)$$

$$\Theta_n \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (\zeta+\tau,\tau) = (-1)^{\epsilon'} \exp \pi i n \{-2\zeta - \tau\} \Theta_n \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (\zeta,\tau) \quad (43.2)$$

karşılar, o zaman, τ teta periyodu, ζ argümenti, $\begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix}$ karakteristiği olmak üzere $\Theta_n \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (\zeta,\tau)$ n.dereceden theta fonksiyonudur.

Teorem 2.11.12: τ theta periyodu ve $\begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix}$ karakteristiği ile verilen n.dereceden theta fonksiyonları n kompleks bölgesinin lineer bir uzayıdır. Yani yukarıdaki tanımı sağlayan fonksiyonların lineer bir kombinasyonudur, ayrıca tanımı karşılar ve kompleks sabitler üzerindeki fonksiyonlar gibi n lineer bağımsız fonksiyonları vardır, yani ζ içindeki sabitlerdir.

İspat: $\Theta_n \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (\zeta,\tau)$ n.mertebeden bir theta fonksiyonu olsun. Tanımdaki (43.1) den

$$f(\zeta) = \exp \pi i (-\epsilon\zeta) \Theta_n \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (\zeta,\tau)$$

olduğu açıktır ki; $0 < p < R < \infty$ dan herhangi biri için $0 < p \leq |z| \leq R < \infty$ için $z = \exp 2\pi i\zeta$ içinde analitiktir ve tek değerlidir. $f(\zeta); 0 \leq \operatorname{Re}\zeta < 1$ yatay eksende tanımlıdır ve $z = \exp 2\pi i\zeta$ fonksiyonu 0 ve sonsuz için z düzlemindeki eksen haritalarını konformal bekler. Bir Laurent serisi olarak $f(\zeta) = g(z)$ yi göstermek mümkündür, aynı bölgede mutlak ve düzgün yakınsaktır, onların katsayıları $\Theta_n \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (\zeta,\tau)$ tarafından eşsiz olarak belirlenmiştir.Öyleki, C_m ζ ya bağlı olmadığı fakat τ ya bağlı olduğunda;

$$\begin{aligned} \Theta_n \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (\zeta,\tau) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m z^m \exp \pi i (\epsilon\zeta) \\ &= \sum_m C_m \exp \pi i \left\{ 2 \left(m + \frac{\epsilon}{2} \right) \zeta \right\}. \end{aligned}$$

Bu (43.1) i karşılar fakat her zaman (43.2) yi karşılamaz. (43.2) nin son genişlemesi eklenir ve

$$\begin{aligned} & \sum_m C_m \exp \pi i \left\{2\left(m+\frac{\epsilon}{2}\right)(\zeta+\tau)\right\} \\ = \ & \exp -\pi i \left\{2n\zeta + n\tau + \epsilon'\right\} \sum_1 C_1 \exp \pi i \left\{2\left(1+\frac{\epsilon}{2}\right)\zeta\right\} \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} & \sum_m C_m \exp \pi i \left\{2\left(m+\frac{\epsilon}{2}\right)\tau\right\} \exp \pi i \left\{2m\zeta\right\} \\ = \ & \exp -\pi i \left\{n\tau + \epsilon'\right\} \sum_1 C_1 \exp \pi i \left\{2\left(1-n\right)\zeta\right\}. \end{aligned}$$

Bir Laurent genişlemesinin tekliği ile, $l = m + n$ olarak belirlenerek,

$$C_m = \exp -\pi i \left\{2\left(m+\frac{\epsilon}{2}\right)\tau + n\tau + \epsilon'\right\} C_{m+n.}$$

$0 \leq v < n$ integral olduğu yerde, $m = nl + v$ olarak düzenlensin. O zaman

$$C_{nl+v} = \exp -\pi i \left\{2\left(nl+v+\frac{\epsilon}{2}\right)\tau + n\tau + \epsilon'\right\} C_{n(l+1)+v}$$

veya

$$C_{n(l+1)+v} = \exp \pi i \left\{2\left(nl+v+\frac{\epsilon}{2}\right)\tau + n\tau + \epsilon'\right\} C_{nl+v}.$$

elde edilir.

Eğer ζ daki $\Theta_n \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (\zeta, \tau)$ nun benzer şekilde sıfır olmadığını varsayarsak, o zaman Laurent genişlemesinin tekliğinin C_v lerin $v = 0, .., n-1$ sıfırlanmadığı anlamına gelir. v nin bazıları için $0 \leq v \leq n-1, C_v \neq 0$ olduğunu varsayalım. O zaman tüm l için $C_{nl+v} \neq 0$ dır. $\phi(l)$ 1.dereceden fark denklemini

$$\phi(l+1) - \phi(l) = n\left\{2\left(1+\frac{\left[v+\frac{\epsilon}{2}\right]}{n}\right)\tau + \tau + \frac{\epsilon'}{n}\right\}$$

sağlar, bundan dolayı $C_{nl+v} = C_v \exp \pi i \phi(l)$ belirlenebilir.Bu nedenle $\phi(l)$, elimizdeki sabit terim ile, l de ikinci dereceden(kuadratik) olması gerekir. İyi bir varsayım

$$\phi(l) = n\tau\left(1+\frac{\left[v+\frac{\epsilon}{2}\right]}{n}\right)^2 + n\left(1+\frac{\left[v+\frac{\epsilon}{2}\right]}{n}\right)\frac{\epsilon'}{n}$$

dir.

Bu nedenle,

$$\Theta_n \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (\zeta, \tau) = \sum C_m \exp \pi i \left\{ 2 \left(m + \frac{\epsilon}{2} \right) \zeta \right\}$$

$$= \sum_v C_v \sum_l \exp \pi i \left\{ \begin{array}{c} n\tau \left(l + \frac{\left[v + \frac{\epsilon}{2} \right]}{n} \right)^2 + n \left(l + \frac{\left[v + \frac{\epsilon}{2} \right]}{n} \right) \frac{\epsilon'}{n} \\ +2 \left(nl + v + \frac{\epsilon}{2} \right) \zeta \end{array} \right\}$$

elde edilir.

n parantez dışına alındığında, son parantez

$$2n \left[l + \frac{\left[v + \frac{\epsilon}{2} \right]}{n} \right] \zeta$$

olur. Nitekim son formül

$$\sum_v C_v \sum_l \exp \pi i \left\{ n\tau \left(l + \frac{\left[v + \frac{\epsilon}{2} \right]}{n} \right)^2 + 2n \left[l + \frac{\left[v + \frac{\epsilon}{2} \right]}{n} \right] \left(\zeta^2 + \frac{\epsilon'}{2n} \right) \right\}$$

olur. İç toplam

$$\begin{bmatrix} \frac{2 \left[v + \frac{\epsilon}{2} \right]}{n} \\ \epsilon' \end{bmatrix}$$

karakteristiği ve $n\zeta, n\tau$ argumentleri ile bu bölümün başında tanımlanan bir theta fonksiyonu gibi kabul edilmektedir. Son olarak

$$\Theta_n \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (\zeta, \tau) = \sum_v C_v \theta \begin{bmatrix} \frac{2 \left[v + \frac{\epsilon}{2} \right]}{n} \\ \epsilon' \end{bmatrix} (n\zeta, n\tau) \tag{44}$$

elde edilir. Gerçekten,

$$\theta \begin{bmatrix} \frac{2\left[v+\frac{\epsilon}{2}\right]}{n} \\ \epsilon' \end{bmatrix} (n\zeta, n\tau)$$

argumentleri ζ, τ ve karakteristiği $\begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix}$ olan n.mertebeden theta fonksiyonu olduğunu gösterelim. Bunu yapmak için, $n\zeta = \zeta'$ ve $n\tau = \tau'$ olarak düzenlendiğinde (33) ve (34) formülleri uygulandığında

$$\theta \begin{bmatrix} \frac{2\left[v+\frac{\epsilon}{2}\right]}{n} \\ \epsilon' \end{bmatrix} (n(\zeta+1); n\tau) = \theta \begin{bmatrix} \frac{2\left[v+\frac{\epsilon}{2}\right]}{n} \\ \epsilon' \end{bmatrix} (\zeta'+n; \tau')$$

$$= (-1)^{\frac{n(2-(\epsilon+2))}{n}} \theta \begin{bmatrix} \frac{2\left[v+\frac{\epsilon}{2}\right]}{n} \\ \epsilon' \end{bmatrix} (\zeta'; \tau')$$

$$= (-1)^{\epsilon} \theta \begin{bmatrix} \frac{2\left[v+\frac{\epsilon}{2}\right]}{n} \\ \epsilon' \end{bmatrix} (n\zeta, n\tau)$$

bir sonraki son eşitlik n defa (33) ün tekrarlanması ile elde edilir.

(34) e bakarak,

$$\theta \begin{bmatrix} \frac{2\left[v+\frac{\epsilon}{2}\right]}{n} \\ \epsilon' \end{bmatrix} (n(\zeta+\tau), n\tau) = \theta \begin{bmatrix} \frac{2\left[v+\frac{\epsilon}{2}\right]}{n} \\ \epsilon' \end{bmatrix} (\zeta'+\tau'; \tau')$$

$$= (-1)^{\epsilon'} \exp \pi i \left(-2\zeta' - \tau'\right) \theta \begin{bmatrix} \frac{2\left[v + \frac{\epsilon}{2}\right]}{n} \\ \epsilon' \end{bmatrix} (\zeta'; \tau')$$

$$= (-1)^{\epsilon'} \exp \pi i.n \left(-2\zeta - \tau\right) \theta \begin{bmatrix} \frac{2\left[v + \frac{\epsilon}{2}\right]}{n} \\ \epsilon' \end{bmatrix} (n\zeta, n\tau).$$

Tanım 3.11.6 (Toplam Formülleri): Aynı işlem tetanın kareleri arasındaki theta ilişkilerini türetmek için kullanılır. Şimdi sırasıyla ζ ve r_1 bağımsız değişkenleri cinsinden $\zeta + r_1$ ve $\zeta - r_1$ biçiminde ifade edilen theta fonksiyonu ile daha genel bir özellik türetilebilir. Trigonometrik fonksiyonlar için toplam formülleri ile belirlenmiş bir benzerlik vardır ve gerçekten, göreceğimiz gibi, katsayılar alınarak Riemann yüzeyi olduğunda ki onların sonları azalttığı düşüncesindeki trigonometrik fonksiyonlar için bu genellenen Jacobi fonksiyonları için toplam formüllerini elde ederiz. $\lambda = 0$ iken $w^2 = \sqrt{z(1-z)}$ nin Riemann yüzeyindeki S nin uygunluğu bozulur. Aksine theta toplam formüllerinin trigonometrik özellikleri, $\zeta + \eta, \zeta - \eta$ aynı anda kullanılmalıdır. snu nun toplam formülleri için gerekli iki özellik elde edilir. Bunların ilk eşitliği,

$$\theta^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (\zeta + \eta, \tau) \theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (\zeta - \eta, \tau) \tag{45}$$

$$= \theta^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (\zeta, \tau) \theta^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (\eta, \tau) - \theta^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (\zeta, \tau) \theta^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (\eta, \tau)$$

dur.

İspat: η sabiti için $\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (\zeta + \eta, \tau) \theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (\zeta - \eta, \tau)$ çarpımının, (43.1) ve (43.2) ile $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ karakteristiği ile ζ da 2.mertebeden bir theta fonksiyonu olduğu gözlemlenir. Aynısı $\theta^2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\zeta,\tau)$ ve $\theta^2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(\zeta,\tau)$ için de geçerlidir. Dolayısıyla Teorem 3.11.12 ye göre, C_1, C_2 ve C_3 tümü sıfır olmayan sabitleri vardır(sabitler η ve τ ya bağlı olabilir), böylece ζ da

$$C_1\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\zeta+\eta,\tau)\,\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\zeta-\eta,\tau)+C_2\theta^2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\zeta,\tau)$$

$$+C_3\theta^2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(\zeta,\tau)\equiv 0$$

dır. $\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(0,\tau)=0$ ve $\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(-\eta,\tau)=\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\eta,\tau)$ elde etmek için $\zeta=0$ olarak belirlensin,

$$C_1\theta^2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\eta,\tau)+C_2\theta^2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=0$$

veya

$$C_2=-C_1\frac{\theta^2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\eta,\tau)}{\theta^2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}.$$

Sonra $\zeta=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ alınsın, o zaman Teorem 2.11.5, (37) eşitliği ve yardımıyla, gerektiğinde ise indirgeme formülü ve (33) ve (34) ile

$$C_1\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(\eta,\tau)\exp\pi i\left\{-\frac{\tau}{4}-\frac{1}{2}(1)\right\}.\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(-\eta,\tau)\exp\pi i\left\{-\frac{\tau}{4}-\frac{1}{2}(1)\right\}$$

$$+C_2\theta^2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(0,\tau)\exp\pi i\left\{-\frac{\tau}{2}-1(1)\right\}+C_3\theta^2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(0,\tau)$$

$$\exp\pi i\left\{-\frac{\tau}{2}-1(1)\right\}=0$$

elde edilir veya $\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(\eta,\tau)$ tek olduğunda

$$\exp\pi i\left(-\frac{\tau}{2}\right).\left\{C_1\theta^2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(\eta,\tau)-C_3\theta^2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}=0$$

Böylece

$$C_3=C_1\frac{\theta^2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(\eta,\tau)}{\theta^2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}$$

bulunur.

Uygulama 2.11.1: (45) in aşağıdaki benzerleri türetilsin.

a)

$$\begin{aligned}&\theta^2\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\zeta+\eta,\tau)\,\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\zeta-\eta,\tau)\\ =\;&\theta^2\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\zeta,\tau)\,\theta^2\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\eta,\tau)+\theta^2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(\zeta,\tau)\,\theta^2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(\eta,\tau)\,.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}&\theta^2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(\zeta+\eta,\tau)\,\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(\zeta-\eta,\tau)\\ =\;&\theta^2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(\zeta,\tau)\,\theta^2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(\eta,\tau)-\theta^2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(\zeta,\tau)\,\theta^2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(\eta,\tau)\,.\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}&\theta^2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(\zeta+\eta,\tau)\,\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(\zeta-\eta,\tau)\\ =\;&\theta^2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(\zeta,\tau)\,\theta^2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\eta,\tau)-\theta^2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\zeta,\tau)\,\theta^2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(\eta,\tau)\,.\end{aligned}$$

(45) i veya yarı periyot değişimini elde etmek için uygulanan yöntem kullanılır.

Bir sonraki özellik

$$\begin{aligned} &\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(\zeta+\eta,\tau)\,\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\zeta-\eta,\tau) \qquad (46)\\ =\;&\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(\zeta,\tau)\,\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\zeta,\tau)\,\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(\eta,\tau)\,\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\eta,\tau)\\ &+\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(\eta,\tau)\,\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\eta,\tau)\,\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(\zeta,\tau)\,\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\zeta,\tau)\,. \end{aligned}$$

İspat: Teorem 2.11.12 ye göre $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ karakteristiği ile aşağıdaki her bir terim için 2.dereceden theta fonksiyonu olduğundan ζ dan bağımsız, tümü(hiç) sıfır olmayan C_1, C_2, C_3 sabitleri vardır, böylece

$$\begin{aligned} C_1\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(\zeta+\eta,\tau)\,\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\zeta-\eta,\tau)+C_2\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(\zeta,\tau)\,\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\zeta,\tau)\\ +C_3\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\zeta,\tau)\,\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\zeta,\tau)\equiv 0 \end{aligned}$$

$\zeta = 0$ olsun,

$$C_1\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(\eta,\tau)\,\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(-\eta,\tau)+C_3\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=0$$

veya

$$C_3=-C_1\frac{\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(\eta,\tau)\,\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\eta,\tau)}{\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}}$$

elde edilir. Şimdi $\zeta = -\eta$ alınsın, η nın birkaç istisnai değeri hariç tümü için geçerli olan

$$C_2\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(-\eta,\tau)\,\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(-\eta,\tau)+C_3\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(-\eta,\tau)\,\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(-\eta,\tau)=0$$

veya

$$C_2 = C_3 \frac{\theta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} (\eta, \tau) \, \theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (\eta, \tau)}{\theta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (\eta, \tau) \, \theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (\eta, \tau)}$$

elde edilir. Özellikteki C_2 ve C_3 yerine koyulduğunda, bu (31) denklemini verir.

Uygulama 2.11.2: (46) metodu kullanılarak aşağıdaki formüller türetilebilir.

a)

$$\begin{aligned} & \theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \theta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \theta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (\zeta + \eta, \tau) \, \theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (\zeta - \eta, \tau) \\ = \; & \theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (\zeta, \tau) \, \theta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (\zeta, \tau) \, \theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (\eta, \tau) \, \theta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} (\eta, \tau) \\ & + \theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (\zeta, \tau) \, \theta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} (\zeta, \tau) \, \theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (\eta, \tau) \, \theta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (\eta, \tau) \, . \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} & \theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \theta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (\zeta + \eta, \tau) \, \theta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} (\zeta - \eta, \tau) \\ = \; & \theta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} (\zeta, \tau) \, \theta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (\zeta, \tau) \, \theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (\eta, \tau) \, \theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (\eta, \tau) \\ & + \theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (\zeta, \tau) \, \theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (\zeta, \tau) \, \theta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} (\eta, \tau) \, \theta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (\eta, \tau) \, . \end{aligned}$$

Uygulama 2.11.3: (46) dan ve son uygulamadan, yarı periyot değiştirilmesiyle aşağıdaki sonuçlar çıkar:

a)

$$
\begin{aligned}
&\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(\zeta+\eta,\tau)\,\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\zeta-\eta,\tau)\\
= \ &\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\zeta,\tau)\,\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(\zeta,\tau)\,\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\eta,\tau)\,\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(\eta,\tau)\\
&-\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\zeta,\tau)\,\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(\zeta,\tau)\,\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\eta,\tau)\,\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(\eta,\tau)\,.
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
&\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\zeta+\eta,\tau)\,\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\zeta-\eta,\tau)\\
= \ &\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\zeta,\tau)\,\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\zeta,\tau)\,\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\eta,\tau)\,\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\eta,\tau)\\
&+\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(\zeta,\tau)\,\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(\zeta,\tau)\,\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(\eta,\tau)\,\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(\eta,\tau)\,.
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
&\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(\zeta+\eta,\tau)\,\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\zeta-\eta,\tau)\\
= \ &\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\zeta,\tau)\,\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(\zeta,\tau)\,\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\eta,\tau)\,\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(\eta,\tau)\\
&-\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\zeta,\tau)\,\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(\zeta,\tau)\,\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\eta,\tau)\,\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(\eta,\tau)\,.
\end{aligned}
$$

Bu uygulamalar ile (45) ve (46) formülleri, theta fonksiyonları için toplam teoremlerini oluşturur. Şimdi (38) e bakınız. $\zeta = u/2\Omega_1 \quad \eta = v/2\Omega_1$ ve $\tau = \Omega_2/\Omega_1$ vardır.

$$\frac{\theta^2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}{\theta^2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}sn\left(u+v\right)=-\frac{\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left(\zeta+\eta,\tau\right)}{\theta^2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(\zeta+\eta,\tau\right)}$$

Şimdi (46), (45) e bölündüğünde, önceki formül ve çıkan eşitliğin sol tarafından

$$\begin{aligned}&\frac{\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left(\zeta+\eta,\tau\right)\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(\zeta-\eta,\tau\right)}{\theta^2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(\zeta+\eta,\tau\right)\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(\zeta-\eta,\tau\right)} \qquad (47)\\ &= -\frac{\theta^2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}{\theta^2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}sn\left(u+v\right)\end{aligned}$$

elde edilir, eşitliğin sağ tarafından

$$\frac{\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left(\zeta,\tau\right)\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(\zeta,\tau\right)\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\left(\eta,\tau\right)\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\left(\eta,\tau\right)+\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left(\eta,\tau\right)\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(\eta,\tau\right)\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\left(\zeta,\tau\right)\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\left(\zeta,\tau\right)}{\theta^2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(\zeta,\tau\right)\theta^2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(\eta,\tau\right)-\theta^2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left(\zeta,\tau\right)\theta^2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left(\eta,\tau\right)}$$

elde edilir.Şimdi bu son formülde pay ve payda, paydanın ilk terimi ile bölünür, ve

$$\frac{\frac{\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(\zeta,\tau)}{\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\zeta,\tau)}\frac{\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(\eta,\tau)}{\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\eta,\tau)}\frac{\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\eta,\tau)}{\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\eta,\tau)}+\frac{\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(\eta,\tau)}{\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\eta,\tau)}\frac{\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(\zeta,\tau)}{\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\zeta,\tau)}\frac{\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\zeta,\tau)}{\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\zeta,\tau)}}{1-\frac{\theta^2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(\zeta,\tau)}{\theta^2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\zeta,\tau)}\frac{\theta^2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(\eta,\tau)}{\theta^2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\eta,\tau)}}$$

elde edilir. İlgili Jacobi eliptik fonksiyonu vasıtasıyla her theta katsayısı ile (38), (39) ve (40) dan elde edilen uygun theta sabit çarpanı değiştirilsin. O zaman formül (41) deki λ teta sabiti cinsinden verildiğinde ve (47) deki manipülasyon ve çapraz çarpım ile,

$$sn\,(u+v)=\frac{snu\ cnv\ dnv+snv\ cnu\ dnu}{1-\lambda sn^2u\ sn^2v}. \tag{48}$$

elde edilir. cnu ve dnu için toplam formülleri şöyledir:

$$cn\,(u+v)=\frac{cnu\ cnv\ -snu\ snv\ dnu\ dnv}{1-\lambda sn^2u\ sn^2v}. \tag{49}$$

$$dn\,(u+v)=\frac{dnu\ dnv\ -\lambda snu\ snv\ cnu\ cnv}{1-\lambda sn^2u\ sn^2v}. \tag{50}$$

Teorem 2.11.13: Theta fonksiyonları aşağıdaki toplam formüllerini sağlar.

$$\begin{aligned}\vartheta_1(y+z)\,\vartheta_1(y-z)\,\vartheta_4^2(0) &= \vartheta_3^2(y)\,\vartheta_2^2(z)-\vartheta_2^2(y)\,\vartheta_3^2(z)\\ &= \vartheta_1^2(y)\,\vartheta_4^2(z)-\vartheta_4^2(y)\,\vartheta_1^2(z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vartheta_2(y+z)\,\vartheta_2(y-z)\,\vartheta_4^2(0) &= \vartheta_4^2(y)\,\vartheta_2^2(z)-\vartheta_1^2(y)\,\vartheta_3^2(z)\\ &= \vartheta_2^2(y)\,\vartheta_4^2(z)-\vartheta_3^2(y)\,\vartheta_1^2(z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vartheta_3(y+z)\,\vartheta_3(y-z)\,\vartheta_4^2(0) &= \vartheta_4^2(y)\,\vartheta_3^2(z)-\vartheta_1^2(y)\,\vartheta_2^2(z)\\ &= \vartheta_3^2(y)\,\vartheta_4^2(z)-\vartheta_2^2(y)\,\vartheta_1^2(z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vartheta_4(y+z)\,\vartheta_4(y-z)\,\vartheta_4^2(0) &= \vartheta_3^2(y)\,\vartheta_3^2(z)-\vartheta_2^2(y)\,\vartheta_2^2(z)\\ &= \vartheta_4^2(y)\,\vartheta_4^2(z)-\vartheta_1^2(y)\,\vartheta_1^2(z)\end{aligned}$$

Tanım 2.11.7 (Theta fonksiyonu için Çarpım Açılımı):İlk olarak $\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\zeta,\tau)$ göz önüne alalım,onun $\zeta=\frac{1}{2}-\frac{\tau}{2}+m_1+m_2\tau=(2m_1+1)\frac{1}{2}+(2m_2+1)\left(\frac{\tau}{2}\right)$ de sıfırları vardır. Bu noktalar "latis" biçimindedir. $\zeta=(2m+1)\frac{1}{2}-(2k-1)\left(\frac{\tau}{2}\right)$ iken bu olağan(sıradan) uyumun (kongrüansın) çözümünde $(2k-1)\,\tau+2\zeta\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,2)$ veya eşdeğerlerindeki ζ noktalarında $1-\exp\pi i\,(2k-1)\,\tau+2\zeta$ nın sıfırlarının varlığı gözlemlenir. Bu nedenle bu fonksiyonun sıfırları; $m_2=-k$ ile $\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\zeta,\tau)$ nın sıfırları ile örtüşür veya, eşdeğeri olarak , $\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\zeta,\tau)$ için onların sıfırlarının, sıfırların $-k$.satır latisi vardır. Benzer şekilde $1+\exp\pi i\,\{(2k-1)\,\tau-2\zeta\}$ nın $(k-1)$ .satır latisi için de sıfırları vardır. Bundan dolayı $\Theta(\zeta,\tau)$ fonksiyonu

$$\Theta(\zeta,\tau)=\prod_1^\infty(1+\exp\pi i\,\{(2k-1)\,\tau-2\zeta\})\,.\prod_1^\infty(1+\exp\pi i\,\{(2k-1)\,\tau+2\zeta\})$$

ile tanımlanır, çarpımın yakınsaklığını sağlayan $\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\zeta,\tau)$ gibi tamamen aynı sıfırlara sahiptir. $\prod(1-a_k)$ sonsuz çarpımının mutlak yakınsaklığı için koşul $\sum|a_k|<\infty$ olmasıdır. Şimdi ilk çarpım için $a_k=\exp\pi i\,\{(2k-1)\,\tau-2\zeta\}$ dır. O zaman

$$\begin{aligned}|a_k| &= \exp-\pi\,\{(2k-1)\,\mathrm{Im}\,\tau-2\,\mathrm{Im}\,\zeta\}\\ &= \exp 2\pi\,\mathrm{Im}\,\zeta\,\exp-\pi\,(2k-1)\,\mathrm{Im}\,\tau.\end{aligned}$$

$$\sum|a_k|=\exp 2\pi\,\mathrm{Im}\,\zeta\sum\exp-\pi\,(2k-1)\,\mathrm{Im}\,\tau.$$

$\mathrm{Im}\,\tau>0$ olduğunda oranı birden az olan geometrik bir seri iken toplamın sağ tarafı yakınsaktır. Böylece $\mathrm{Im}\,\tau>0$ için bir sonsuz çarpım mutlak ve düzgün yakınsaktır. Benzer bir mantıkla, ikinci çarpım için aynı sonuç türetilebilir. Buna ek olarak, şimdi göstereceğimiz gibi $\Theta(\zeta,\tau)$ (33) ve (34) ü karşılar.

$$\begin{aligned}\Theta(\zeta+1,\tau) &= \prod_1^\infty (1+\exp \pi i\{(2k-1)\tau+2\zeta+2\}) \\ &\quad \prod_1^\infty (1+\exp \pi i\{(2k-1)\tau-2\zeta-2\}) \\ &= \Theta(\zeta,\tau)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Theta(\zeta+\tau,\tau) &= \prod_1^\infty (1+\exp \pi i\{(2k+1)\tau+2\zeta\}) \\ &\quad \prod_1^\infty (1+\exp \pi i\{(2k-3)\tau-2\zeta\}).\end{aligned}$$

$k'=k+1$ ve $k''=k-1$ olsun,

$$\begin{aligned}\Theta(\zeta+\tau,\tau) &= \prod_{k'=2}^\infty (1+\exp \pi i\{(2k'-1)\tau+2\zeta\}) \\ &\quad \prod_{k''=0}^\infty (1+\exp \pi i\{(2k''-1)\tau-2\zeta\}) \\ &= \frac{\Theta(\zeta,\tau)}{(1+\exp \pi i\{\tau+2\zeta\})}(1+\exp \pi i\{-\tau-2\zeta\}) \\ &= \Theta(\zeta,\tau)\frac{(1+\exp \pi i\{-\tau-2\zeta\})}{(1+\exp \pi i\{-\tau-2\zeta\})}\exp \pi i(-\tau-2\zeta).\end{aligned}$$

Bundan dolayı

$$\frac{\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\zeta,\tau)}{\Theta(\zeta,\tau)}$$

hiç kutbu yokken ve periyotları 1 ve τ iken çifte periyodiktir. Bunun için açıkça sıfırlanmayan, bir yakınsama çarpımı olan $C(q)\neq 0$ olduğunda, $C(q)\,\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\zeta,\tau)=\Theta(\zeta,\tau)$ dur.

$q=\exp \pi i\tau$ olarak düzenlendiğinde,

$$\Theta(\zeta,\tau)=\prod_1^\infty\left(1+q^{2k-1}\exp 2\pi i\zeta\right).\prod_1^\infty\left(1+q^{2k-1}\exp -2\pi i\zeta\right)$$

yazılabilir.

$C(q)$ sabitinin değerlendirilmesi, biraz uzun bir işlemdir. Jacobi ile,

$$\Theta_N(\zeta,\tau) = \prod_1^N \left(1+q^{2k-1}\exp 2\pi i\zeta\right).\prod_1^N \left(1+q^{2k-1}\exp -2\pi i\zeta\right)$$

olarak belirlenir ve

$$\begin{aligned}\Theta_N(\zeta+\tau,\tau) &= \prod_{k'=2}^{N+1}\left(1+q^{2k'-1}\exp 2\pi i\zeta\right) \\ &\quad \prod_{k''=0}^{N-1}\left(1+q^{2k''-1}\exp -2\pi i\zeta\right) \\ &= \frac{1+q^{(2N+1)}\exp 2\pi i\zeta}{1+q\exp 2\pi i\zeta}.\frac{1+q^{-1}\exp -2\pi i\zeta}{1+q^{2N-1}\exp -2\pi i\zeta}\Theta_N(\zeta,\tau) \\ &= \frac{1+q^{(2N+1)}\exp 2\pi i\zeta}{q\exp 2\pi i\zeta + q^{2N}}\Theta_N(\zeta,\tau)\end{aligned} \tag{51}$$

olduğu gözlemlenir. Bu son eşitliğin pay ve paydası $q\exp 2\pi i\zeta$ ile çarpılarak elde edilir.

Şimdi $z = \exp 2\pi i\zeta$ olduğu yerde $\Phi_N(z,\tau) = \Theta_N(\zeta,\tau)$ belirlensin. z; $\exp 2\pi i(\zeta+\tau) = q^2 z$ olduğunda

$$\Theta_N(\zeta+\tau,\tau) = \Phi_N\left(q^2 z,\tau\right) \tag{52}$$

dır.

Şimdi seri

$$\Phi_N(z) = \sum_{-N}^{N} a_k^N(q)\, z^k$$

biçimindedir. Bu sonuçların gerçeği olan Θ_N; $\left[1+\left(\frac{a}{z}\right)\right]$ formunun N faktörleri ile $(1+z)$ formunun N faktörlerinin çarpımıdır.

Dikkat:

$$(i) \quad \Phi_N\left(\frac{1}{z}\right) = \Theta_N(-\zeta) = \Theta_N(\zeta) = \Phi_N(z),$$

ve bundan dolayı $a_{-k}^N(q) = a_k^N(q)$;

$$(ii) \quad \lim_{N\to\infty}\Theta_N(\zeta) = C(q)\,\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\zeta,\tau),$$

ve

$$C\left(q\right)\sum_{-\infty}^{\infty}q^{n^2}z^n=C\left(q\right)+...$$

bundan dolayı

$$\lim_{N\to\infty}a_0^N\left(q\right)=C\left(q\right).$$

Şimdi,

$$\left(qz+q^{2N}\right)\Phi_N\left(q^2z\right)=\left(1+q^{2N+1}z\right)\Phi_N\left(z\right) \tag{53}$$

olduğunu iddia ediyoruz. Gerçekten de (25) ve (26) formüllerinin değişimi ile bu zilenir. Sol tarafta

$$\left(qz+q^{2N}\right)\sum_{-N}^{N}a_k^N\left(q\right)q^{2k}z^k=\sum_{-N}^{N}a_k^N\left(q\right)q^{2k+1}z^{k+1}+\sum_{-N}^{N}a_k^N\left(q\right)q^{2(N+k)}z^k$$

sağ tarafta

$$\sum_{-N}^{N}a_k^N\left(q\right)z^k+\sum_{-N}^{N}a_k^N\left(q\right)q^{2N+1}z^{k-1}$$

elde edilir. İlk ve son toplamlardaki $k\to k-1$ toplamı değiştirilerek ve diğer toplamların her birinin ilk terimi çıkarılarak

$$\begin{aligned}
&a_N^N\left(q\right)q^{2N+1}z^{N-1}+\sum_{-N-1}^{N}a_{k-1}^N\left(q\right)q^{2k-1}z^k+\sum_{-N+1}^{N}a_k^N\left(q\right)q^{2k+2N}z^k\\
&+a_{-N}^N\left(q\right)z^{-N}\\
=\;&a_{-N}^N\left(q\right)z^{-N}+\sum_{-N-1}^{N}a_k^N\left(q\right)z^k+\sum_{-N-1}^{N}a_{k-1}^N\left(q\right)q^{2N-1}z^k+a_N^N\left(q\right)q^{2N+1}z^{N-1}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Şimdi z^k nın katsayıları eşitlenerek, $k=-N+1,...,N$ için

$$a_{k-1}^N\left(q\right)q^{2k-1}+a_k^N\left(q\right)q^{2k-2N}=a_k^N\left(q\right)+a_{k-1}^N\left(q\right)q^{2N-1}$$

elde edilir.

$$a_k^N\left(q\right)\left(1-q^{2k+2N}\right)=a_{k-1}^N\left(q\right)q^{2k-1}\left(1-q^{2N-2k-2}\right) \tag{54}$$

veya

$$a_k^N\left(q\right)=a_{k-1}^N\left(q\right)q^{2k-1}\frac{\left(1-q^{2N-2k-2}\right)}{\left(1-q^{2k-2N}\right)}.$$

elde edilir. Şimdi tekrarı(yinelemesi) ile

$$a_k^N(q) = \frac{a_{k-2}^N q^{2k-1} q^{2k-3}\left(1-q^{2N-2k-2}\right)\left(1-q^{2N-2k-4}\right)}{\left(1-q^{2k+2N}\right)\left(1-q^{2N-2k-2}\right)}$$

$a_{-k}^N(q) = a_k^N(q)$ var olduğunda a_0^N teriminde durulur.

Bu nedenle

$$a_k^N(q) = a_0^N(q)\,\frac{q^{(2k-1)+(2k+3)+(2k-5)+...+1}\left(1-q^{2N-2k+2}\right)\left(1-q^{2N-2k+4}\right)...\left(1-q^{2N}\right)}{\left(1-q^{2k+2N}\right)\left(1-q^{2k+2N-2}\right)...\left(1-q^{2N+2}\right)}$$

elde edilir.

$1+3+5+...+2k-1 = k^2$, tümevarım ile kolayca gösterilebilir, böylece

$$a_k^N(q) = a_0^N(q)\,q^{k^2}\frac{\left(1-q^{2N-2k+2}\right)...\left(1-q^{2N}\right)}{\left(1-q^{2k+2N}\right)\left(1-q^{2N+2k-2}\right)...\left(1-q^{2N+2}\right)}$$

dir. $\Phi_N(z) = \Theta_N(\zeta)$ tanımından, z^N nin a^N katsayısının q^{N^2} olduğu görülür. Bundan dolayı $k = N$ olarak düzenlenerek,

$$q^{N^2} = a_0^N q^{N^2}\frac{\left(1-q^2\right)...\left(1-q^{2N}\right)}{\left(1-q^{2N+2}\right)...\left(1-q^{4N}\right)}$$

veya

$$a_0^N = \frac{\left(1-q^{2N+2}\right)...\left(1-q^{4N}\right)}{\left(1-q^2\right)...\left(1-q^{2N}\right)} = \frac{\prod\limits_{n=N+1}^{2N}\left(1-q^{2n}\right)}{\prod\limits_{n=1}^{N}\left(1-q^{2n}\right)}$$

elde edilir. Bundan dolayı $C(q)$ için istenen sonuç

$$\begin{aligned} C(q) &= \lim_{N\to\infty} a_0^N = \lim_{N\to\infty}\frac{\prod\limits_{n=N+1}^{2N}\left(1-q^{2n}\right)}{\prod\limits_{n=1}^{N}\left(1-q^{2n}\right)} \\ &= \frac{\lim_{N\to\infty}\prod\limits_{n=N+1}^{2N}\left(1-q^{2n}\right)}{\lim_{N\to\infty}\prod\limits_{n=1}^{N}\left(1-q^{2n}\right)} \end{aligned}$$

dir. Pay bir yakınsama çarpımının devamının sonudur ve bunun için bir olma eğilimindedir. $\Theta(\zeta)$ tanımlanan çarpım göz önüne alınarak bu yakınsamanın özünde ispatlanmıştır. Böylece

$$C(q) = \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n}\right)}$$

elde edilir ve son olarak

$$\begin{aligned}
\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\zeta,\tau) &= \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+q^{2k-1}e^{2\pi i\zeta}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+q^{2k-1}e^{-2\pi i\zeta}\right)\\
&= \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+q^{2k-1}\left(e^{2\pi i\zeta}+e^{-2\pi i\zeta}\right)+q^{4k-2}\right)\\
&= \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+2q^{2k-1}\cos 2\pi\zeta-q^{4k-2}\right). \qquad (55)
\end{aligned}$$

$Q_0 = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n}\right)$ olsun. Formül (5) in değişimi hatırlanarak,

$$\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\left(\zeta+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\tau\right) = \exp\pi i\left\{-\frac{\tau}{4}-\zeta\right\}\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(\zeta,\tau)$$

veya

$$\begin{aligned}
\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(\zeta,\tau) &= q^{\frac{1}{4}}e^{\pi i\zeta}Q_o\prod_{k=1}^{\infty}\left(\begin{array}{c}1+q^{2k-1}\left(e^{2\pi i\left(\zeta+\left(\frac{\tau}{2}\right)\right)}+e^{-2\pi i\left(\zeta+\left(\frac{\tau}{2}\right)\right)}\right)\\ +q^{4k-2}\end{array}\right)\\
&= q^{\frac{1}{4}}e^{\pi i\zeta}Q_o\prod_{1}^{\infty}\left(1+q^{2k}e^{2\pi i\zeta}\right)\prod_{1}^{\infty}\left(1+q^{2k+2}e^{-2\pi i\zeta}\right)\\
&= q^{\frac{1}{4}}e^{\pi i\zeta}Q_o\left(1+e^{-2\pi i\zeta}\right)\prod_{1}^{\infty}\left(1+q^{2k}\left(e^{2\pi i\zeta}+e^{-2\pi i\zeta}\right)+q^{4k}\right)\\
&= q^{\frac{1}{4}}\left(e^{\pi i\zeta}+e^{-\pi i\zeta}\right)Q_o\prod_{1}^{\infty}\left(1+2q^{2k}\cos 2\pi\zeta+q^{4k}\right)\\
&= 2q^{\frac{1}{4}}Q_o\cos\pi\zeta\prod_{1}^{\infty}\left(1+2q^{2k}\cos 2\pi\zeta+q^{4k}\right). \qquad (56)
\end{aligned}$$

Tekrar formül (37) kullanılarak,

$$\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\left(\zeta+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\tau\right) = \theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\zeta,\tau)$$

veya

$$\begin{aligned}\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\zeta,\tau) &= Q_o\prod_1^\infty\left(1+q^{2k-1}e^{2\pi i\left(\zeta+\left(\frac{1}{2}\right)\right)}\right)\prod_1^\infty\left(1+q^{2k-1}e^{-2\pi i\left(\zeta+\left(\frac{1}{2}\right)\right)}\right)\\ &= Q_o\prod_1^\infty\left(1-2q^{2k-1}\left(\cos 2\pi\zeta\right)+q^{4k-2}\right). \qquad (57)\end{aligned}$$

Şimdi

$$\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\left(\zeta+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\tau\right)=\exp\pi i\left\{-\frac{\tau}{4}-\frac{1}{2}-\zeta\right\}\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(\zeta,\tau)$$

veya

$$\begin{aligned}\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(\zeta,\tau) &= Q_oq^{\frac{1}{4}}e^{\pi i\zeta}e^{\frac{\pi i}{2}}\prod_1^\infty\left(1+q^{2k-1}e^{2\pi i\left(\zeta+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{\tau}{2}\right)\right)}\right)\\ &\quad\prod_1^\infty\left(1+q^{2k-1}e^{-2\pi i\left(\zeta+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{\tau}{2}\right)\right)}\right)\\ &= Q_oq^{\frac{1}{4}}e^{\frac{\pi i}{2}}e^{\pi i\zeta}\prod_1^\infty\left(1-q^{2k}e^{2\pi i\zeta}\right)\prod_1^\infty\left(1-q^{2k-2}e^{-2\pi i\zeta}\right)\\ &= Q_oq^{\frac{1}{4}}e^{\frac{\pi i}{2}}e^{\pi i\zeta}\left(1-e^{-2\pi i\zeta}\right)\prod_1^\infty\left(1-q^{2k}\left(e^{2\pi i\zeta}+e^{-2\pi i\zeta}\right)+q^{4k}\right)\\ &= -2q^{\frac{1}{4}}Q_o\sin\pi\zeta\prod_1^\infty\left(1-2q^{2k}\cos 2\pi\zeta+q^{4k}\right). \qquad (58)\end{aligned}$$

Q_0 tanımımız ile birlikte

$$\begin{aligned}Q_1 &= \prod_{n=1}^\infty\left(1+q^{2n}\right),\\ Q_2 &= \prod_{n=1}^\infty\left(1+q^{2n-1}\right),\\ Q_3 &= \prod_{n=1}^\infty\left(1-q^{2n-1}\right)\end{aligned}$$

tanımlanır.

$$\begin{aligned}Q_0Q_1Q_2Q_3 &= \prod_{m=1}^\infty\left(1-q^{4m}\right)\left(1-q^{4m-2}\right)\\ &= \prod_{m=1}^\infty\left(1-q^{2n}\right)=Q_0\end{aligned}$$

veya

$$Q_1Q_2Q_3 = 1$$

olduğu gözlemlenir.

Theta sabiti

$$\begin{aligned} \theta' \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} &= \theta' \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (0,\tau) \\ &= -2\pi q^{\frac{1}{4}} Q_0 \prod_{1}^{\infty} \left(1 - q^{2k}\right)^2 \\ &= -2\pi q^{\frac{1}{4}} Q_0^3 \end{aligned} \tag{59}$$

Theta sabiti

$$\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = Q_0 \prod_{1}^{\infty} \left(1 + q^{2k-1}\right)^2 = Q_0 Q_2^2, \tag{60}$$

$$\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = Q_0 \prod_{1}^{\infty} \left(1 - q^{2k-1}\right)^2 = Q_0 Q_3^2 \tag{61}$$

ve

$$\theta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2q^{\frac{1}{4}} Q_0 \prod_{1}^{\infty} \left(1 + q^{2n}\right)^2 = 2q^{\frac{1}{4}} Q_0 Q_1^2. \tag{62}$$

Böylece

$$\begin{aligned} \theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \theta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} &= 2q^{\frac{1}{4}} Q_0^3 \left(Q_1Q_2Q_3\right)^2 = 2q^{\frac{1}{4}} Q_0^3 \\ &= -\frac{1}{\pi}\theta' \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

veya

$$\theta' \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -\pi\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \theta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{63}$$

(37) nin ilk uygulaması aşağıdaki gibi yapılabilir. (5c) den

$$snu = -\frac{\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \theta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left(\frac{u}{2\Omega_1}, \tau\right)}{\theta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \theta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left(\frac{u}{2\Omega_1}, \tau\right)}.$$

(37) ile

$$2\Omega_1 = -\frac{\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\theta'\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}{\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}} = \pi\theta^2\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \tag{64}$$

veya

$$\lim_{u\to 0}\frac{sn'u\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\left(\frac{u}{2\Omega_1},\tau\right)}{\frac{1}{2\Omega_1}\theta'\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left(\frac{u}{2\Omega_1},\tau\right)} = 2\Omega_1\frac{\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}{\theta'\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}$$

L'Hospital kuralı ile sağlanan

$$-\frac{\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}}{\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}} = \lim_{u\to 0} snu\frac{\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(\frac{u}{2\Omega_1},\tau\right)}{\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left(\frac{u}{2\Omega_1},\tau\right)}$$

elde edilir.

2.12 DİĞER THETA FONKSİYONLARI:

Tanım 2.12.1: $\theta_2(z), \theta_3(z)$ ve $\theta_4(z)$ fonksiyonlar aşağıdaki bağıntılar ile tanımlanır.

$$\begin{aligned}
\theta_2(z) &= \theta_1\left(z+\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)iz} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)iz} + q^{\left(-n-1+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(-2n-2+1)iz} \right\} \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \cos(2n+1)z \\
&= 2q^{\frac{1}{4}}\cos z + 2q^{\frac{9}{4}}\cos 3z + 2q^{\frac{25}{4}}\cos 5z + ...
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\theta_3(z) &= q^{\frac{1}{4}} e_1^{iz} \theta\left(z + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi\tau}{2}\right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+1)^2} e^{2(n+1)iz} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2niz} \\
&= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos 2nz \\
&= 1 + 2q\cos 2z + 2q^4 \cos 4z + 2q^9 \cos 6z + \ldots\infty.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\theta_4(z) &= -iq^{\frac{1}{4}} e_1^{iz} \theta\left(z + \frac{\pi\tau}{2}\right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n+1} q^{(n+1)^2} e^{2(n+1)iz} \\
&= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos 2nz \\
&= 1 - 2q\cos 2z + 2q^4 \cos 4z - 2q^9 \cos 6z + \ldots\infty.
\end{aligned}
$$

Dipnot:$\theta_2(z), \theta_3(z)$ ve $\theta_4(z)$ tanımlarından onların z'nin bütün çift fonksiyonları olduğu sonucu çıkar.

Teorem 2.12.1: İlgili sigma fonksiyonları ve theta fonksiyonları arasındaki ilişki

$$
\begin{aligned}
\sigma_1(z) &= e^{\frac{\eta_1 z^2}{\pi}} \frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_2(0)} \\
\sigma_2(z) &= e^{\frac{\eta_1 z^2}{\pi}} \frac{\vartheta_4(z)}{\vartheta_4(0)} \\
\sigma_3(z) &= e^{\frac{\eta_1 z^2}{\pi}} \frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta_3(0)}
\end{aligned}
$$

ile verilir.

Teorem 2.12.2: Eğer $\vartheta_r(z)$ dört theta fonksiyonundan herhangi birini gösterir ve $\vartheta_r'(z)$ de onun türevi olursa o zaman,r=1,2,3,4 olduğunda

$$
\frac{\vartheta_r'(z+\pi)}{\vartheta_r(z+\pi)} = \frac{\vartheta_r'(z)}{\vartheta_r(z)}
$$

$$
\frac{\vartheta_r'(z+\pi\tau)}{\vartheta_r(z+\pi\tau)} = -2i + \frac{\vartheta_r'(z)}{\vartheta_r(z)}
$$

dir.

Teorem 2.12.3: Theta fonksiyonlarının bir hücrede yalnız bir sıfırı olabilir.

Teorem 2.12.4: $\vartheta_1(z), \vartheta_2(z), \vartheta_3(z)$ ve $\vartheta_4(z)$ fonksiyonları,sırasıyla $0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+\frac{\pi\tau}{2}$ ve $\frac{\pi\tau}{2}$ de sıfırları vardır.

Teorem 2.12.5: $\vartheta_r(z)$ fonksiyonlarının kareleri (r=1,2,3,4) aşağıdaki fonksiyonel eşitlikleri sağlar.

$$\vartheta_2^2(z)\,\vartheta_4^2(0) = \vartheta_4^2(z)\,\vartheta_2^2(0) - \vartheta_1^2(z)\,\vartheta_3^2(0) \tag{65.1}$$

$$\vartheta_3^2(z)\,\vartheta_4^2(0) = \vartheta_4^2(z)\,\vartheta_3^2(0) - \vartheta_1^2(z)\,\vartheta_2^2(0) \tag{65.2}$$

$$\vartheta_1^2(z)\,\vartheta_4^2(0) = \vartheta_3^2(z)\,\vartheta_2^2(0) - \vartheta_2^2(z)\,\vartheta_3^2(0) \tag{65.3}$$

$$\vartheta_4^2(z)\,\vartheta_4^2(0) = \vartheta_3^2(z)\,\vartheta_3^2(0) - \vartheta_2^2(z)\,\vartheta_2^2(0) \tag{65.4}$$

Teorem 2.12.6: G bir sabit olmak üzere, theta fonksiyonlarının sonsuz çarpımları,

$$\begin{aligned}
\vartheta_1(z) &= 2Gq^{\frac{1}{4}}\sin z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-2q^{2n}\cos 2z+q^{4n}\right)\\
\vartheta_2(z) &= 2Gq^{\frac{1}{4}}\cos z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+2q^{2n}\cos 2z+q^{4n}\right)\\
\vartheta_3(z) &= G\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+2q^{2n-1}\cos 2z+q^{4n-2}\right)\\
\vartheta_4(z) &= G\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-2q^{2n-1}\cos 2z+q^{4n-2}\right)
\end{aligned}$$

gibi gösterilebilir.

Tanım 2.12.2: Genelleştirilmiş Hermite theta fonksiyonları; μ, ν herhangi iki sayı olmak üzere

$$\Theta_{\mu,\nu}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2iz\left(n+\frac{\mu}{2}\right)+i\pi\tau\left(n+\frac{\mu}{2}\right)^2+i\pi n\nu}$$

gibi mutlak ve düzgün yakınsak seriler ile tanımlanabilir.

Aşikar olarak,

$$\begin{aligned}
\vartheta_1(z) &= -i\Theta_{1,1}(z) \\
\vartheta_2(z) &= \Theta_{1,0}(z) \\
\vartheta_3(z) &= \Theta_{0,0}(z) \\
\vartheta_4(z) &= \Theta_{0,1}(z)
\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 2.12.7: $\Theta_{\mu,\nu}(z)$ fonksiyonu,

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\Theta_{\mu,\nu}(z) = \frac{\pi}{4i}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Theta_{\mu,\nu}(z)$$

parabolik parçalı diferansiyel denklemini sağlar(karşılar).

Teorem 2.12.8: $\vartheta_1'(0) = \vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)\,\vartheta_4(0)$ iyi bilinen özelliği ispatlar.

Teorem 2.12.9: G sabitinin değeri

$$G = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - q^{2n}\right)$$

ile verilir.

Teorem 2.12.10: Her bir açılım, ilgili serilerin yakınsak olduğu z-düzleminin bölgesinde geçerli olmak üzere, theta fonksiyonunun logaritmik türevinin Fourier açılımları

$$\frac{\vartheta_1'(z)}{\vartheta_1(z)} = \cot z + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}\sin 2nz}{(1-q^{2n})} \tag{66.1}$$

$$\frac{\vartheta_2'(z)}{\vartheta_2(z)} = -\tan z + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{2n}\sin 2nz}{(1-q^{2n})} \tag{66.2}$$

$$\frac{\vartheta_3'(z)}{\vartheta_3(z)} = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{n}\sin 2nz}{(1-q^{2n})} \tag{66.3}$$

$$\frac{\vartheta_4'(z)}{\vartheta_4(z)} = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n}\sin 2nz}{(1-q^{2n})} \tag{66.4}$$

ile verilir.

Teorem 2.12.11 (Jacobi'nin Sanal Dönüşümü): Theta fonksiyonları; $\tau' = -\frac{1}{\tau}$ ve $(-i\tau)^{-\frac{1}{2}}$; $|\arg(-i\tau)| < \frac{\pi}{2}$ gibi alındığı yerde,aşağıdaki eşitlikleri

$$\begin{aligned}
\vartheta_1(z|\tau) &= -i(-i\tau)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{i\tau' z^2}{\pi}\right) \vartheta_1\left(z\tau'|\tau'\right), \\
\vartheta_2(z|\tau) &= (-i\tau)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{i\tau' z^2}{\pi}\right) \vartheta_4\left(z\tau'|\tau'\right), \\
\vartheta_3(z|\tau) &= (-i\tau)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{i\tau' z^2}{\pi}\right) \vartheta_3\left(z\tau'|\tau'\right), \\
\vartheta_4(z|\tau) &= (-i\tau)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{i\tau' z^2}{\pi}\right) \vartheta_2\left(z\tau'|\tau'\right),
\end{aligned}$$

sağlar.

Teorem 2.12.12 (Landen Dönüşümü): Theta fonksiyonları, aşağıdaki eşitlikleri

$$\begin{aligned}
\frac{\vartheta_3(z|\tau)\,\vartheta_4(z|\tau)}{\vartheta_4(2z|2\tau)} &= \frac{\vartheta_3(0|\tau)\,\vartheta_4(0|\tau)}{\vartheta_4(0|2\tau)}, \\
\frac{\vartheta_2(z|\tau)\,\vartheta_1(z|\tau)}{\vartheta_1(2z|2\tau)} &= \frac{\vartheta_3(0|\tau)\,\vartheta_4(0|\tau)}{\vartheta_4(0|2\tau)},
\end{aligned}$$

sağlar.

Teorem 2.12.13 (Theta Fonksiyonlarının Oranı): $\omega = \frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_4(z)}$ katsayı fonksiyonu,

$$\left(\frac{d\omega}{dz}\right)^2 = \left(\vartheta_2^2 - \omega^2\vartheta_3^2\right)\left(\vartheta_3^2 - \omega^2\vartheta_2^2\right)$$

non-lineer diferansiyel denklemini sağlar.

Teorem 2.12.14: Eğer α_r ve β_r $(r = 1, 2, 3, ..., n)$; $2\omega_1, 2\omega_2$ periyotlarının $f(z)$ eliptik fonksiyonunun kutupları ve sıfırları olduğu yerde $\sum_{r=1}^{n} \alpha_r = \sum_{r=1}^{n} \beta_r$ ise, o zaman A bir sabit olmak üzere

$$f(z) = \left\{ \frac{\vartheta_1\left(\frac{z\pi - \pi\alpha_r}{2\omega_1}; \pi, \pi\tau\right)}{\vartheta_1\left(\frac{z\pi - \pi\beta_r}{2\omega_1}; \pi, \pi\tau\right)} \right\}$$

dur.

Teorem 2.12.15: β_r kutuplarındaki $f(z)$ eliptik fonksiyonunun esas kısımları

$$\sum_{m=1}^{m_r} A_{r,m}\left(z-\beta_r\right)^{-m}$$

ile verilirse, o zaman A bir sabit olmak üzere,

$$f(z) = A + \sum_{r=1}^{n}\left\{\sum_{m=1}^{m_r} \frac{(-1)^{m-1} A_{r,m}}{(m-1)!}\frac{d^m}{dz^m}\log\vartheta_1\left(\frac{\pi z-\pi\beta_r}{2\omega_1};\pi,\pi\tau\right)\right\}$$

dur.

Tanım 2.12.3 (e_1, e_2, e_3 **ün Terimlerindeki Theta Fonksiyonlarının Gösterimi):**

$$\begin{aligned}
\sqrt{\wp(z)-e_1} &= \frac{\sigma_1(z)}{\sigma(z)} = \frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_2(0)}\frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_1(z)} \\
\sqrt{\wp(z)-e_2} &= \frac{\sigma_2(z)}{\sigma(z)} = \frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_4(0)}\frac{\vartheta_4(z)}{\vartheta_1(z)} \\
\sqrt{\wp(z)-e_3} &= \frac{\sigma_3(z)}{\sigma(z)} = \frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_3(0)}\frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta_1(z)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{e_3-e_1} &= \frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_2(0)}\frac{\vartheta_2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi\tau}{2}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi\tau}{2}\right)} = \frac{-i\vartheta_1'(0)\,\vartheta_4(0)}{\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)} = -i\vartheta_4^2(0) \\
\sqrt{e_1-e_2} &= \frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_4(0)}\frac{\vartheta_4\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\vartheta_1'(0)\,\vartheta_3(0)}{\vartheta_4(0)\,\vartheta_2(0)} = \vartheta_3^2(0) \\
\sqrt{e_3-e_2} &= \frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_4(0)}\frac{\vartheta_4\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi\tau}{2}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi\tau}{2}\right)} = \frac{\vartheta_1'(0)\,\vartheta_2(0)}{\vartheta_4(0)\,\vartheta_3(0)} = \vartheta_2^2(0)
\end{aligned}$$

Tanım 2.12.4: $\Theta(z)$ ve $H(z)$ fonksiyonları (Theta fonksiyonu için Jacobi'nin önceki sembolleri $\Theta(z)$ ve $H(z)$ dir.); $\pi\vartheta_3^2(0)$ ve $\pi\tau\vartheta_3^2(0)$ yukarıdaki fonksiyonlar ile ilişkili periyotlar olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\Theta(z) &= \vartheta_4\left(z\vartheta_3^{-2}(0)\,|\tau\right), \\
H(z) &= \vartheta_1\left(z\vartheta_3^{-2}(0)\,|\tau\right),
\end{aligned}$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.12.5: $\Theta(z)$ ve $H(z)$ fonksiyonları; $K = \frac{\pi}{2}\vartheta_3^2(0)$ ve $iK' = \frac{\pi\tau}{2}\vartheta_3^2(0)$ olmak üzere aşağıdaki ilişkiler ile tanımlanır.

$$\begin{aligned} \Theta_1(z) &= \Theta(z+K) = \vartheta_3\left(z\vartheta_3^{-2}(0)\,|\tau\right), \\ H_1(z) &= H(z+K) = \vartheta_2\left(z\vartheta_3^{-2}(0)\,|\tau\right). \end{aligned}$$

2.13 DEDEKIND ETA FONKSİYONU:

Sayılar teorisindeki eliptik modüler fonksiyonların birçok uygulamasında eta fonksiyonu merkezi bir rol oynar. Bu Dedekind tarafından 1877 de tanıtıldı ve $H = \{\tau : \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$ yarı düzleminde

$$\eta(\tau) = e^{\frac{\pi i \tau}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - e^{2\pi i n \tau}\right) \tag{67}$$

eşitliği ile tanımlandı. $x = e^{2\pi i \tau}$ olduğunda sonsuz çarpım $\prod(1 - x^n)$ formundadır. Eğer $\tau \in H$ ise o zaman $|x| < 1$ dir yani çarpım mutlak yakınsar ve sıfır değildir. Dahası, H nin kompakt alt kümeleri üzerinde yakınsama düzgün olduğundan, $\eta(\tau)$ H üzerinde analitiktir.

$T\tau = \tau + 1$ için

$$\eta(\tau+1) = e^{\frac{\pi i(\tau+1)}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - e^{2\pi i n(\tau+1)}\right) = e^{\frac{\pi i}{12}} \eta(\tau) \tag{68}$$

elde edilir. Sonuç olarak, herhangi bir b tamsayısı için,

$$\eta(\tau+b) = e^{\frac{\pi i b}{12}} \eta(\tau) \tag{69}$$

elde edilir. (68) eşitliği 1 periyoduna sahip $\eta^{24}(\tau)$ nun periyodik olduğunu gösterir.

3 BULGULAR VE TARTIŞMA

Weierstrass'ın $\wp(z), \zeta(z)$ ve $\sigma(z)$ fonksiyonlarının şimdiye kadar kabul edilen sonsuz seri açılımlarının sayısal hesaplamaları için daha uygun açılımlar vardır. Bu , $\theta(z,\tau)$ ile tanımlanan, sonsuz serilerde hızlıca yakınsayan bir açılıma sahip ve Weierstrass'ın sigma fonksiyonu ile doğrudan bağlantılı başka bir fonksiyonu tanıtabilmek için bir avantajdır. $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} \neq$ real, $\operatorname{Im}\tau > 0$ ve $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ için $\omega = m\omega_1 + n\omega_2$ olmak üzere τ ve z kompleks değişkenler olsunlar.

$\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \pmod 2$, ε ve ε' tamsayılar ve n , $(-\infty, \infty)$ aralığındaki tüm tamsayılar olmak üzere; $\theta(z,\tau)$ fonksiyonunu

$$\theta \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix} (z,\tau) = \sum_n \exp\left\{ \left(n + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \pi i \tau + 2\pi i \left(n + \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(z + \frac{\varepsilon'}{2}\right) \right\} \tag{70}$$

şeklindeki seri ile tanımlarız [1].

(70) serisi, z-kompleks düzlemindeki kompakt kümeler üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır ve bu nedenle z'nin bir tam fonksiyonunu temsil etmektedir [4].

Eğer $\operatorname{Im}\tau > 0$ iken (ω_1, ω_2) kompleks sayıların bir çifti, ve $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ iken $\omega = m\omega_1 + n\omega_2$ ise, o zaman $|z| \leq R$ için,

$$\sum_{|\omega|>2R>0} \left| K\left(\frac{z}{\omega}\right) - 1 \right| \leq 2 \sum_{|\omega|>2R>0} \left|\frac{z}{\omega}\right|^3$$

elde edilir, ve son seri her sonlu $R > 0$ için $|z| \leq R$ çemberinin içinde düzgün yakınsar. Böylece

$$z \prod_{\omega \neq 0} \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) \exp\left(\frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2}\right)$$

sonsuz çarpımı, her sonlu $R > 0$ için $|z| \leq R$ çemberinin içinde mutlak ve düzgün yakınsar. Eğer

$$\sigma(z,\omega) = z \prod_{\omega \neq 0} \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) \exp\left(\frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2}\right) \tag{71}$$

olarak tanımlanırsa, o zaman $\sigma(z,\omega)$, z nin bir tam fonksiyonudur, sabit değildir, dolayısıyla eliptik de değildir. $\sigma(z,\omega)$, z nin bir tek fonksiyonu olduğundan $\sigma(-z,\omega)=\sigma(z,\omega)$ dır. Açık olarak $z=\omega$ noktalarında basit sıfırları vardır [6]. Aşağıdaki Weierstrass $\zeta(z,\omega)$ fonksiyonunun

$$\zeta(z,\omega)=\frac{d}{dz}\log\sigma(z,\omega)=\frac{\sigma'(z,\omega)}{\sigma(z,\omega)}=\frac{1}{z}+\sum_{\omega}\left(\frac{1}{z-2\omega}+\frac{1}{2\omega}+\frac{z}{4\omega^2}\right)$$

bağıntısının olduğuna dikkat edildiğinde, $\eta_1=\zeta\left(\frac{\omega_1}{2}\right)$ ve $\eta_2=\zeta\left(\frac{\omega_2}{2}\right)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\zeta(z,\omega_1) &= \zeta(z)+\eta_1\\ \zeta(z,\omega_2) &= \zeta(z)+\eta_2\end{aligned}$$

gibi $\log\sigma(z,\omega)$ nın birçok değeri türev ile çıkarılabilir.

Teorem 3.1: $z=0$ daki z ye göre $\theta(z,\tau)$ nun türevi $\theta'(0,\tau)$ ve $\operatorname{Im}\tau>0$, $\eta_1=\zeta\left(\frac{z}{\omega_1}\right)$, (ω_1,ω_2) Weierstrass $\wp(z)$ eliptik fonksiyonunun periyotlarının basit veya indirgenmiş çifti olmak üzere,

$$\sigma(z,\omega)=\theta\left(\frac{z}{\omega_1},\tau\right)\frac{1}{\theta'(0,\tau)}\omega_1\exp\left(\frac{z^2}{\omega_1}\eta_1\right)$$

bağıntısı mevcuttur [6].

Aşağıda alternatif theta fonksiyonlarını görebiliriz.

Yıldız [9] da $\mu=\exp\left\{-\frac{1}{4^r}(\tau+2)\pi i-\frac{1}{2^r}(2z+\varepsilon')\pi i\right\}$ ve $\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}\equiv$ $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\operatorname{mod}2)$, ε ve ε' birer tamsayı olmak üzere,

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}\left(z+\frac{1}{2^r}+\frac{\tau}{2^r},\tau\right)=\mu\theta\begin{bmatrix}\varepsilon+\frac{1}{2^{r-1}}\\ \varepsilon'+\frac{1}{2^{r-1}}\end{bmatrix}\tag{72}$$

dir.

Rauch [4] de $\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\operatorname{mod}2)$, ε ve ε' birer tamsayı ve n $(-\infty,\infty)$ aralığındaki tamsayılar olmak üzere,

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(z,\tau)=\sum_{n}\exp\left\{\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\pi i\tau+2\pi i\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(z+\frac{\varepsilon'}{2}\right)\right\}\tag{73}$$

dir.

Duval [2] de $\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (\operatorname{mod} 2)\,, \varepsilon$ ve ε' birer tamsayı ve n $(-\infty, \infty)$ aralığındaki tamsayılar olmak üzere,

$$\theta \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix} (z, \tau) = \sum_n \exp \left\{ \left(n + \frac{\varepsilon}{2} \right)^2 \pi i \tau + 2i \left(n + \frac{\varepsilon}{2} \right) \left(z - \frac{\varepsilon'}{2} \pi \right) \right\} \tag{74}$$

dir.

Eğer $\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (\operatorname{mod} 2)$ ise, o zaman

$$\theta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (z, \tau) = -i \sum_n (-1)^n \exp \left\{ \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \pi i \tau + (2n + 1) \pi i z \right\} \tag{75}$$

dir. Bu $\theta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (z, \tau)$ fonksiyonu, Komaravolu [6] dakinin alternatif formülüdür.

Eğer $\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (\operatorname{mod} 2)$ ve $z = 0$ ise, o zaman

$$\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (0, \tau) = \sum_n \exp \left(n^2 \pi i \tau \right) \tag{76}$$

dur. Bu $\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (0, \tau)$ fonksiyonu, Gregory [1] dekinin alternatif formülüdür.

Tanım 3.1: $\left\{ \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right\}$ olarak belirtilen bir periyot $b + a\tau$ dur. Çeyrek periyot; bir periyodun çeyreğidir ve

$$\frac{1}{4} \left\{ \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right\} = \frac{b}{4} + \frac{a\tau}{4}$$

olarak yazılır. İndirgenmiş çeyrek periyot, a ve b nin 0 veya 1 e eşit olduğu bir çeyrek periyottur [9]. Yukarıdaki bu alternatif formül (72) nin yardımı ile, çeyrek periyotlara bağlı aşağıdaki eşitlikleri elde edebiliriz.

Teorem 3.2:

a)

$$\varkappa\left(\theta, \begin{matrix}\varepsilon \\ \varepsilon'\end{matrix}\right) = \frac{\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left(z+\frac{1}{4}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}, \tau\right)}{\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\left(z+\frac{1}{4}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}, \tau\right)}$$

$$= \frac{ie^{-\frac{\pi i\tau}{4}}\sum\limits_n (-1)^n \exp\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi i\tau + (2n+1)\pi iz + \frac{n\pi i}{2} + \frac{n\pi i\tau}{2} + \frac{\pi i\tau}{4} + \frac{\pi i}{4}\right\}}{e^{-\frac{\pi i\tau}{4}}\sum\limits_n \exp\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi i\tau + (2n+1)\pi iz + \frac{n\pi i}{2} + \frac{n\pi i\tau}{2} + \frac{\pi i\tau}{4} + \frac{\pi i}{4}\right\}}$$

fonksiyonunda;

i.Eğer n; 0 veya çift tamsayı ise, o zaman

$$\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left(z+\frac{1}{4}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}, \tau\right) = i\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\left(z+\frac{1}{4}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}, \tau\right)$$

ii.Eğer n tek tamsayı ise, o zaman

$$\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left(z+\frac{1}{4}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}, \tau\right) = -i\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\left(z+\frac{1}{4}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}, \tau\right)$$

dur.

b)

$$\varrho\left(\theta, \begin{matrix}\varepsilon \\ \varepsilon'\end{matrix}\right) = \frac{\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(z+\frac{1}{4}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}, \tau\right)}{\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\left(z+\frac{1}{4}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}, \tau\right)}$$

$$= \frac{\sum\limits_n (-1)^n \exp\left\{n^2\pi i\tau + 2n\pi iz + \frac{n\pi i}{2} + \frac{n\pi i\tau}{2}\right\}}{\sum\limits_n \exp\left\{n^2\pi i\tau + 2n\pi iz + \frac{n\pi i}{2} + \frac{n\pi i\tau}{2}\right\}}$$

fonksiyonunda;

i.Eğer n; 0 veya çift tamsayı ise, o zaman

$$\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(z+\frac{1}{4}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}, \tau\right) = \theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\left(z+\frac{1}{4}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}, \tau\right).$$

$ii.$Eğer n tek tamsayı ise, o zaman

$$\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(z+\frac{1}{4}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix},\tau\right)=-\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\left(z+\frac{1}{4}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix},\tau\right)$$

dur.

İspat:

a) Eğer $\begin{bmatrix}\varepsilon\\\varepsilon'\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\pmod 2$ ise, o zaman

$$\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left(z+\frac{1}{4}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix},\tau\right)=\sum_n\exp\left\{\begin{array}{c}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi i\tau+2\pi i\left(n+\frac{1}{2}\right)\\\left(z+\frac{1}{4}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}+\frac{1}{2}\right)\end{array}\right\}$$

$$=ie^{-\frac{\pi i\tau}{4}}\sum_n(-1)^n\exp\left\{\begin{array}{c}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi i\tau+(2n+1)\pi iz+\frac{n\pi i}{2}+\frac{n\pi i\tau}{2}\\+\frac{\pi i\tau}{4}+\frac{\pi i}{4}\end{array}\right\}\tag{77}$$

dür.

Eğer $\begin{bmatrix}\varepsilon\\\varepsilon'\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\pmod 2$ ise, o zaman

$$\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\left(z+\frac{1}{4}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix},\tau\right)=\sum_n\exp\left\{\begin{array}{c}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi i\tau+2\pi i\left(n+\frac{1}{2}\right)\\\left(z+\frac{1}{4}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}\right)\end{array}\right\}$$

$$=e^{-\frac{\pi i\tau}{4}}\sum_n\exp\left\{\begin{array}{c}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi i\tau+(2n+1)\pi iz+\frac{n\pi i}{2}+\frac{n\pi i\tau}{2}\\+\frac{\pi i\tau}{4}+\frac{\pi i}{4}\end{array}\right\}\tag{78}$$

dür.

(77) ve (78) eşitlikleri kullanılarak

$$\varkappa\left(\theta,\begin{array}{c}\varepsilon\\\varepsilon'\end{array}\right)=\frac{\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left(z+\frac{1}{4}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix},\tau\right)}{\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\left(z+\frac{1}{4}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix},\tau\right)}$$

$$= \frac{ie^{-\frac{\pi i\tau}{4}}\sum_n (-1)^n \exp\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \pi i\tau + (2n+1)\pi iz + \frac{n\pi i}{2} + \frac{n\pi i\tau}{2} + \frac{\pi i\tau}{4} + \frac{\pi i}{4}\right\}}{e^{-\frac{\pi i\tau}{4}}\sum_n \exp\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \pi i\tau + (2n+1)\pi iz + \frac{n\pi i}{2} + \frac{n\pi i\tau}{2} + \frac{\pi i\tau}{4} + \frac{\pi i}{4}\right\}}$$

elde edilir. Burada;

i. Eğer n; 0 veya çift tamsayı ise, o zaman

$$\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left(z+\frac{1}{4}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix},\tau\right) = i\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\left(z+\frac{1}{4}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix},\tau\right)$$

ii. Eğer n tek tamsayı ise, o zaman

$$\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left(z+\frac{1}{4}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix},\tau\right) = -i\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\left(z+\frac{1}{4}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix},\tau\right)$$

dur.

b) Eğer $\begin{bmatrix}\varepsilon\\\varepsilon'\end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \pmod 2$ ise, o zaman

$$\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(z+\frac{1}{4}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix},\tau\right) = \sum_n \exp\left\{\begin{matrix} n^2\pi i\tau + 2n\pi i \\ \left(z+\frac{1}{4}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}+\frac{1}{2}\right)\end{matrix}\right\}$$

$$= \sum_n (-1)^n \exp\left\{n^2\pi i\tau + 2n\pi iz + \frac{n\pi i}{2} + \frac{n\pi i\tau}{2}\right\} \tag{79}$$

dir.

Eğer $\begin{bmatrix}\varepsilon\\\varepsilon'\end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \pmod 2$ ise, o zaman

$$\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\left(z+\frac{1}{4}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix},\tau\right) = \sum_n \exp\left\{\begin{matrix} n^2\pi i\tau + 2n\pi i \\ \left(z+\frac{1}{4}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}\right)\end{matrix}\right\}$$

$$= \sum_n \exp\left\{n^2\pi i\tau + 2n\pi iz + \frac{n\pi i}{2} + \frac{n\pi i\tau}{2}\right\} \tag{80}$$

dir.

(79) ve (80) eşitliklerinden,

$$\varrho\left(\theta, \begin{array}{c}\varepsilon \\ \varepsilon'\end{array}\right) = \frac{\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(z+\frac{1}{4}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix},\tau\right)}{\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\left(z+\frac{1}{4}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix},\tau\right)}$$

$$= \frac{\sum\limits_{n}(-1)^n \exp\left\{n^2\pi i\tau + 2n\pi iz + \frac{n\pi i}{2} + \frac{n\pi i\tau}{2}\right\}}{\sum\limits_{n}\exp\left\{n^2\pi i\tau + 2n\pi iz + \frac{n\pi i}{2} + \frac{n\pi i\tau}{2}\right\}}$$

elde edilir. Burada;

i. Eğer n; 0 veya çift tamsayı ise, o zaman

$$\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(z+\frac{1}{4}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix},\tau\right) = \theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\left(z+\frac{1}{4}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix},\tau\right)$$

ii. Eğer n tek tamsayı ise, o zaman

$$\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(z+\frac{1}{4}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix},\tau\right) = -\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\left(z+\frac{1}{4}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix},\tau\right)$$

dur.

Teorem 3.3: Komaravolu [6] da tanımlanan $\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(z,\tau)$ fonksiyonu z nin tek fonksiyonudur ve $c = \prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{2n\pi i\tau}\right), \operatorname{Im}\tau > 0$ olduğunda

$$\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(z,\tau) = ce^{\frac{\pi i\tau}{4}}2\sin\pi z\prod_{n=1}^{\infty}\left\{1-e^{2(n\tau+z)\pi i}\right\}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{1-e^{2(n\tau-z)\pi i}\right\}$$

sonsuz çarpımı ile ifade edilebilir.

$$\varphi(z,\tau) = \prod_{n=1}^{\infty}\left\{1-e^{[(2n-1)\tau+2z]\pi i}\right\}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{1-e^{[(2n-1)\tau-2z]\pi i}\right\}$$

çarpımı ile ifade edilen $\varphi(z,\tau)$ fonksiyonunu ele alalım.

Teorem 3.4 : $\psi(z,\tau) = \dfrac{\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(z,\tau)}{\varphi(z,\tau)}$ fonksiyonu, 1 ve τ periyotlarına sahip bir eliptik fonksiyondur [9].

İspat:

$$\psi(z,\tau) = \frac{\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(z,\tau)}{\varphi(z,\tau)}$$

olsun. Teorem 3.3 den $\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(z,\tau) = -\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(-z,\tau)$ olduğundan

$$\psi(z+1,\tau) = \frac{\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(z+1,\tau)}{\varphi(z+1,\tau)} = \frac{-\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(z,\tau)}{\varphi(z,\tau)} = \frac{\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(-z,\tau)}{\varphi(z,\tau)}$$

dur.

$$\begin{aligned}
\psi(z+\tau,\tau) &= \frac{\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(z+\tau,\tau)}{\varphi(z+\tau,\tau)} = \frac{-e^{-(2z+\tau)\pi i}\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(z,\tau)}{e^{-(2z+\tau)\pi i}\varphi(z,\tau)} \\
&= \frac{\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(z,\tau)}{\varphi(z,\tau)}
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
\varphi(z+\tau,\tau) &= \prod_{n=1}^{\infty}\left\{1-e^{(2n-1)\tau\pi i+2\pi i(z+\tau)}\right\}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{1-e^{(2n-1)\tau\pi i-2\pi i(z+\tau)}\right\} \\
&= \prod_{n=1}^{\infty}\left\{1-e^{(2n+1)\tau\pi i+2\pi iz}\right\}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{1-e^{(2n-3)\tau\pi i-2\pi iz}\right\} \\
&= \prod_{n=1}^{\infty}\left\{1-e^{[2(n+1)-1]\tau\pi i+2\pi iz}\right\}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{1-e^{[2(n-1)-1]\tau\pi i-2\pi iz}\right\} \\
&= \prod_{m=2}^{\infty}\left\{1-e^{(2m-1)\tau\pi i+2\pi iz}\right\}\prod_{m=0}^{\infty}\left\{1-e^{(2m-1)\tau\pi i-2\pi iz}\right\}
\end{aligned}$$

$$= \prod_{m=1}^{\infty} \left\{1 - e^{(2m-1)\tau\pi i + 2\pi i z}\right\} \prod_{m=1}^{\infty} \left\{1 - e^{(2m-1)\tau\pi i - 2\pi i z}\right\} \left\{1 - e^{-(\pi i\tau + 2\pi i z)}\right\}$$
$$\left\{1 - e^{(\pi i \tau + 2\pi i z)}\right\}^{-1}$$

$$= -e^{-(2z+\tau)\pi i}\varphi(z,\tau)$$

burada $n = m$ dir. $\theta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (z,\tau)$; $\varphi(z,\tau)$ ile aynı periyodiklik faktörlerine sahip olduğu gerçeğinden dolayı, ne sıfırlara ne de kutuplara sahip olmayan,1 ve τ periyotlarına sahip $\psi(z,\tau)$ fonksiyonu çifte periyodiktir. Bundan dolayı, tüm meromorfik fonksiyonların kümesi bir alan formunda olduğundan $\psi(z,\tau)$ fonksiyonu bir eliptik fonksiyondur ve 1 ile τ periyotlarına sahip $\psi(z,\tau)$ meromorfik ve periyodiktir. Weierstrass'ın $\zeta(z,\tau)$ fonksiyonu,

$$\zeta(z,w) \equiv \zeta(z;\omega_1,\omega_2) = \frac{1}{z} + \sum_{w\neq 0}\left[\frac{1}{z-w} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2}\right]$$

serisi ile tanımlanır ve ω_1, ω_2 kompleks sayılar olmak üzere, $(\omega_1,\omega_2) \neq (0,0)$ dır ki $w = m\omega_1 + n\omega_2$ ve $m,n \in \mathbb{Z}$,ve $\tau = \frac{\omega_1}{\omega_2} \neq reel$ ve $\operatorname{Im}\tau > 0$ olduğunda; bu fonksiyon çifte periyodik olmadığından eliptik de değildir. $z \neq w$ için ve her sonlu $R > 0$ için seri mutlak yakınsaktır, $|z| \leq R$ dairesinin içinde seri düzgün yakınsar. Dolayısıyla tüm latis noktalarında 1.dereceden sıfıra sahip Weierstrass σ-sigma fonksiyonu,

$$\sigma(z) \equiv \sigma(z;w) \equiv \sigma(z;\omega_1,\omega_2) = z\prod_{w\neq 0}\left(1 - \frac{z}{w}\right)e^{\frac{z}{w} + \left(\frac{z}{2w}\right)^2}$$

Weierstrass'ın sonsuz çarpımı ile yazılır. Logaritmik türevin alınması, $\zeta(z,\tau)$ fonksiyonunu verir,

$$\zeta(z,\tau) = \frac{d}{dz}Log\sigma(z,w)$$

bu fonksiyonun -1.derecesi homojendir, yani

$$\zeta(\lambda z, \lambda w) = \lambda^{-1}\zeta(z,w)$$

ve bu fonksiyon çifte periyodik olmadığından eliptik de değildir [9].

Bu tezde, $\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \pmod 2$ ve ε, ε' birer tamsayı olmak üzere,

$$\theta \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix} (z,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left\{ \left(n + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \pi i \tau + 2\pi i \left(n + \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(z + \frac{\varepsilon'}{2}\right) \right\}$$

$\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix}$ karakteristiğine sahip θ fonksiyonunun özel bir değeri sunulmuştur.

Böylece, aşağıdaki bağıntılar

$$\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (z,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(n^2 \pi i \tau + 2n\pi i z\right)$$

$$\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (z,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left(n^2 \pi i \tau + 2n\pi i z\right)$$

elde edilir.

Teorem 3.5: Weierstrass'ın eliptik fonksiyonu $\wp(z;\omega_1,\omega_2)$ nin periyotlarının bir çifti (ω_1,ω_2), ve $\eta_1 = \zeta\left(\frac{\omega_1}{2}\right)$ olmak üzere, Weierstrass σ-fonksiyonu bir theta fonksiyonudur ki σ-fonksiyonu ve θ-fonksiyonu arasındaki bağıntı

$$\sigma(z;\omega_1,\omega_2) = \theta\left(\frac{z}{\omega_1},\tau\right) \frac{\omega_1}{\theta'(0,\tau)} . e^{\frac{z^2}{\omega_1}\eta_1}$$

ile kurulur [2].

Şimdi,

$$\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (z,\tau) = \sum_{n} \exp\left(n^2 \pi i \tau + 2n\pi i z\right)$$

olduğunu gözlemleyebiliriz.

O halde, Gregory [1] deki seri ile tanımlanan $\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (0,\tau)$ fonksiyonu ; $\theta \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix} (z,\tau)$ nun alternatif bir formülü olduğu görülür. $z \neq 0$ olmak üzere bu tezde $\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (z,\tau)$ ve $\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (z,\tau)$ formülleri kullanıldı.

İlk olarak, mutlak yakınsayan

$$\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(z,\tau) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{2n\pi i\tau}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+e^{(2n-1)\pi i\tau+2\pi iz}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+e^{(2n-1)\pi i\tau-2\pi iz}\right)$$

sonsuz çarpımı görülmektedir [4].

Teorem 3.6: $\operatorname{Im}\tau>0$ ve k bir tamsayı olmak üzere,

$$\eta(z)=e^{\frac{\pi iz}{12}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{2n\pi iz}\right)$$

sonsuz çarpımı ile tanımlanan Dedekind's η-fonksiyonu ve $\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(z,\tau)$, $\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(z,\tau)$ fonksiyonları arasında

a)

$$\eta(z)=e^{\frac{\pi iz}{12}}\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\left(\frac{z+1}{2},3z+2k\right)$$

b)

$$\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(\frac{z+4}{4},\frac{3}{2}z\right)=e^{-\frac{\pi iz}{12}}\eta(z)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{(2n-1)\pi iz}\right)$$

bağıntıları mevcuttur.

İspat:

a)

$$\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(z,\tau) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{2n\pi i\tau}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+e^{(2n-1)\pi i\tau+2\pi iz}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+e^{(2n-1)\pi i\tau-2\pi iz}\right)$$

formülünü hatırlayalım. Eğer k tamsayı ise, o zaman

$$\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\left(\frac{z+1}{2},3z+2k\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{2n\pi i(3\tau+2k)}\right)$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+e^{(2n-1)\pi i(3\tau+2k)+2\pi i\left(\frac{z+1}{2}\right)}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+e^{(2n-1)\pi i(3\tau+2k)-2\pi i\left(\frac{z+1}{2}\right)}\right)$$

$$=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{6n\pi iz}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+e^{6n\pi iz-2\pi iz-(2k-1)\pi i}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+e^{6n\pi iz-4\pi iz-(2k+1)\pi i}\right)$$

$$=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{6n\pi iz}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{6n\pi iz-2\pi iz}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{6n\pi iz-4\pi iz}\right)$$

elde edilir. Eğer $R=e^{2\pi iz}$ olarak belirlenirse, o zaman

$$\begin{aligned}\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\left(\frac{z+1}{2},3z+2k\right) &= \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-R^{3n}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-R^{3n-1}\right)\\ &\quad\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-R^{3n-2}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan, $n=n'+1$ olarak belirleyebiliriz, o zaman

$$\begin{aligned}\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\left(\frac{z+1}{2},3z+2k\right) &= \prod_{n'=1}^{\infty}\left(1-R^{3n'+3}\right)\prod_{n'=1}^{\infty}\left(1-R^{3n'+2}\right)\\ &\quad\prod_{n'=1}^{\infty}\left(1-R^{3n'+1}\right)\\ &= (1-R)\left(1-R^{2}\right)\left(1-R^{3}\right)\left(1-R^{4}\right)...\\ &= \prod_{m=1}^{\infty}\left(1-R^{m}\right)\\ &= \prod_{m=1}^{\infty}\left(1-e^{2m\pi iz}\right)\end{aligned}$$

dir. Yukarıdakilere göre,

$$\eta(z)=e^{\frac{\pi iz}{12}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{2n\pi iz}\right)$$

sonsuz çarpımı ile tanımlanan Dedekind η-fonksiyonundan

$$\eta(z)=e^{\frac{\pi iz}{12}}\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\left(\frac{z+1}{2},3z+2k\right)$$

elde edilir.

b)

$$\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(z,\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\exp\left(n^2\pi i\tau+2n\pi iz\right)$$

eşitliğine göre, $|x|<1$ ve beşgen sayılar olarak bilinen $\frac{1}{2}n\,(3n+1)$, $n=-1,-2,-3,...$ için $x=e^{\pi iz}$ olmak üzere,

$$\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(\frac{z+4}{4},\frac{3}{2}z\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\exp\left[\frac{1}{2}n\,(3n+1)\,\pi iz\right]$$

$$\begin{aligned}
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left\{\exp\left[\frac{1}{2}n\,(3n-1)\,\pi iz\right]+\exp\left[\frac{1}{2}n\,(3n+1)\,\pi iz\right]\right\}\\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[x^{\frac{1}{2}n(3n-1)}+x^{\frac{1}{2}n(3n+1)}\right]\\
&= 1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+...
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(\frac{z+4}{4},\frac{3}{2}z\right) &= (1-x)\left(1-x^2\right)\left(1-x^3\right)...\\
&= \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)
\end{aligned}$$

$x=e^{\pi iz}$ olarak kabul edildiğinden;

$$\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(\frac{z+4}{4},\frac{3}{2}z\right)==\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{n\pi iz}\right)$$

elde edilir.

Bu sonuçlar, θ-theta fonksiyonu ve Dedekind η-fonksiyonu arasındaki ilişki ile ilgili önümüzdeki çalışmalarda, önemli bir rol oynayacaktır.

Aslında, teoremin uygulaması: Teorem 3.6 nın ispatındaki (a) ile elde edilen ilişki , Teorem 3.6 nın ispatındaki (b) de kurulan beşgen sayılar üzerindeki Dedekind η-fonksiyonu bilindiğinden,

$$\frac{\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(\frac{z+4}{4},\frac{3}{2}z\right)}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{(2n-1)\pi iz}\right)} = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\exp\left(\frac{1}{2}n\left(3n+1\right)\pi iz\right)}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{(2n-1)\pi iz}\right)}$$

$$= \frac{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{n\pi iz}\right)}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{(2n-1)\pi iz}\right)}$$

$$= \frac{\left(1-e^{\pi iz}\right)\left(1-e^{2\pi iz}\right)\left(1-e^{3\pi iz}\right)\left(1-e^{4\pi iz}\right)\left(1-e^{5\pi iz}\right)\left(1-e^{6\pi iz}\right)...}{\left(1-e^{\pi iz}\right)\left(1-e^{3\pi iz}\right)\left(1-e^{5\pi iz}\right)\left(1-e^{7\pi iz}\right)...}$$

$$= \left(1-e^{2\pi iz}\right)\left(1-e^{4\pi iz}\right)\left(1-e^{6\pi iz}\right)...$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{2n\pi iz}\right)$$

elde edilir. Dedekind eta fonksiyonu,

$$\eta\left(z\right) = e^{\frac{\pi iz}{12}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{2n\pi iz}\right)$$

olarak bilindiğinden,

$$\frac{\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(\frac{z+4}{4},\frac{3}{2}z\right)}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{(2n-1)\pi iz}\right)} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{2n\pi iz}\right)$$

$$\frac{\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(\frac{z+4}{4},\frac{3}{2}z\right)}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{(2n-1)\pi iz}\right)} = e^{-\frac{\pi iz}{12}}\eta\left(z\right)$$

elde edilir. Bundan dolayı,

$$\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(\frac{z+4}{4},\frac{3}{2}z\right) = e^{-\frac{\pi iz}{12}}\eta\left(z\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{(2n-1)\pi iz}\right)$$

dir.

4 SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Son yıllarda diferansiyel denklemlerde seri çözümleri daha çok kullanılmaktadır. Theta serisinin yardımı ile Dedekind eta fonksiyonu kullanılarak ilk defa bu tezde elde edilen eliptik fonksiyonun da diferansiyel denklem çözümlerinde kullanılacağı düşünülmektedir.

Sonuç olarak, daha önce Jacobi tarafından kullanılan $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ karakteristiği ve $\frac{z+1}{2}$ değişkeni yerine, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ karakteristiği ve $\frac{z+4}{4}$ değişkeni kullanılarak θ-theta fonksiyonu ve Dedekind η-fonksiyonu arasındaki ilişki ilk defa bu çalışmada elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

.

[1]Gregory L.W., A family of modular functions Arising from the theta function, *London Math. Soc*, London, **(1987)**.

[2]Duval P., *Elliptic Functions and Elliptic Curves*, Cambridge University, London, **(1973),**15-93.

[3]Apostol T.M., *Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory*, Springer, New York, **(1976)**.

[4]Rauch E.H., Lebowitz, A., *Elliptic Functions, Theta Functions and Riemann Surfaces*, The Williams and Wilkins Company, Baltimore,**(1973)**.

[5]Dutta M., Debnath L., *Elements of the Theory of Elliptic and Associated Functions with Applications*, The World Press Calcutta, West Bengal (India), **(1965),**1-171.

[6]Komaravolu C., *Elliptic Functions*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo, Germany, **(1985)**.

[7]Yıldız İ., *Kompleks Analiz*, Atatürk Üniversitesi Yayınları Serisi:875, Erzurum, **(1998),**1-188.

[8]Yıldız İ., Weierstrass Eliptik ve Yarı-Eliptik Fonksiyonlarının $\frac{1}{2^r}$ Periyod Katlarına Göre Değer Değişimleri, *Doktora Tezi*, Erzurum,**(1989),**1-10.

[9]Yıldız İ., On extension of the modular transformations over the modular group by reflection, *J. Applied Mathematics and computation*, **(2004)**, 111-116.

[10]Yıldız İ., On the elliptic function arising from the theta functions and Dedekind's eta function, *Journal of Mathematics and Statistics*, **(2005)**, 153-159.

[11]Franz M., Theta Functions,*Irish Math. Soc. Bulletin* 60, **(2007)**,91-112.

[12]Burdurlu E., θ Fonksiyonlarının $\left(\frac{\pi}{2^r}, \frac{\pi\tau}{2^r}\right)$ Periyot Çiftlerine Göre Dönüşüm leri, *Yükseklisans Tezi*, Fen Bilimleri Enstitüsü, **(2011).**

.

.

[13]Erkoç N.Ş.,Teta Fonksiyonlarının Periyotlarının $\frac{1}{2^r}$ Katlarına Göre Değer Değişimleri ve Bu Yolla Elde Edilen Eliptik Fonksiyon, *Yükseklisans Tezi*, Fen Bilimleri Enstitüsü, **(2012)**.

[14]Zengin P.,Weierstrass Pe-eliptik Fonksiyonunun n. Mertebeden Türevleri İle Zeta-yarı Eliptik Fonksiyonu Arasındaki Bağıntılar,*Yükseklisans Tezi*, Fen Bilimleri Enstitüsü, **(2012)**.

[15]Mc Gettrick A.D., A Result Theory of Weierstrass Elliptic Functions, *Proc. Math. Soc.25*, London, **(1972),**41-54.

[16]Cayley A., *An Elementary Treatise on Elliptic Functions*, Dover Publ., New York, **(1962),**1-27.

[17]Lang S., *Elliptic Functions*, Yale University, New Haven, **(1973),**5-239.

[18]Schoeneberg B., *Elliptic Modular Functions*, New York, **(1974)**,1-221.

[19]Berndt B.C. , Yee A.J., A page on Eisenstein series in Ramanujan's Lost Notebook, *Glasg. Math. J. 45*, **(2003)**,123-129.

[20]Borwein J.M., Garvan F.G., *Approximations to π via the Dedekind Eta Function*, Cambridge University Press, Cambridge, **(2010),**394-417.

[21]San N., Eliptik Fonksiyonlara Ait Periyodların Jacobi Fonksiyonlarının Değerleri Üzerindeki Etkileri, *Atatürk Üniversitesi Yayınları 338*, Ankara, **(1974)**.

[22]Horie T., Kanou N.,Certain Modular Functions Similar to the Dedekind eta Function, *Mathematical Institute of the University of Hamburg*, **(2002)**,89-117.

[23]Gavrilov A., *On the Sigma Function Identity*, Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics, Russia, **(2006)**.

[24]Knopp M.I., Rational Period Functions of the Moduler Group, *Duke Mathematical Journal*, Vol.45, No:1, **(1978),**47-62.

.

[25]Liu Z.G., A theta function identity and its implications, *Trans.Amer. Math.Soc.357*, **(2005),**825-835.

[26]Ocak R., Eliptik Fonksiyonların Teşkili Üzerine Bir Çalışma, *Profesörlük Takdim Tezi*, Erzurum, **(1989)**.

[27]Ocak R., *Kompleks Analiz*, Atatürk Üniversitesi Yayınları No:750, Erzurum, **(2001),**1-226.

[28]Şeker A., Weierstrass ve Jacobi Fonksiyonlarının Eşlenik Kompleks Periyodları ve Yarı Period için Değer Değişimleri, Doktora Tezi, Erzurum, **(1976)**.

[29]Sat M., Ters Ünivalent Fonksiyonların Katsayıları, *Yükseklisans Tezi*, Fen Bilimleri Enstitüsü, **(2007)**.

[30]Polatoğlu Y., Bolcan M., Şen A., *Konu ve Problemleriyle Kompleks Fonksiyonlar Teorisi*, İKÜ Yayınları, İstanbul, **(2004)**.

[31]Bertola M., *Riemann Surfaces and Theta Functions*, Concordia University, Canada, **(2010)**.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı,Adı : SAKALLI, Nuray

Uyruğu : T.C.

Doğum Tarihi ve Yeri : 16.04.1983 / ANKARA

Telefon : 0 505 821 34 06

e-mail : nuraysakalli@gmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Yüksek Lisans	Düzce Ü. / Matematik B.	2013
Lisans	Gazi Ü. / İlköğretim B.	2005
Lise	Mamak Anadolu Lisesi	2001

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2005-2007	Ekincik İlköğretim Okulu	Matematik Öğretmeni
2007-2012	Mustafa Kemal İlköğretim O.	Matematik Öğretmeni
2012-Halen çalışıyor	Yahya Çavuş İlkokulu	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce