T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

PREINVEX VE LOG-PREINVEX FONKSİYONLAR İÇİN HERMITE-HADAMARD TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NECMETTİN ALP

HAZİRAN 2013

DÜZCE

KABUL VE ONAY BELGESİ

Necmettin ALP tarafından hazırlanan Preinvex ve Log-Preinvex Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikleri üzerine isimli Lisansüstü tez çalışması, Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 03/06/2013 tarih ve 2013/467 sayılı kararı ile oluşturulan jüri tarafından Matematik Ana Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Üye
(Tez Danışmanı)
Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Düzce Üniversitesi

Üye
Prof. Dr. İsmet YILDIZ
Düzce Üniversitesi

Üye
Yrd. Doç. Dr. Mahmut AKYİĞİT
Sakarya Üniversitesi

Tezin Savunulduğu Tarih : 13/06/2013

<u>ONAY</u>

Bu tez ile Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Necmettin ALP'ın Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans derecesini almasını onamıştır.

Prof. Dr. Haldun MÜDERRİSOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

13 Haziran 2013

Necmettin ALP

Sevgili Aileme

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim ve bu tezin hazırlanmasında süresince gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA'ya en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca dualarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme ve çalışma arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

13 Haziran 2013 **Necmettin ALP**

İÇİNDEKİLER **<u>Sayfa</u>**

SİMGELER VE KISALTMALAR

R	Reel Sayılar Kümesi
R^n	n boyutlu Öklit Uzayı
I	R nin içinde bir aralık
I^o	I nin içi
f'	f in birinci türevi
f''	f in ikinci türevi
$\lvert f \rvert$	f in mutlak değeri
L.O= $L(.,.)$	Logaritmik Ortalama
AO= $A(.,.)$	Aritmetik Ortalama
GO= $G(.,.)$	Geometrik Ortalama
$H.-H.$	Hermite-Hadamard Eşitsizliği

ÖZET

PREINVEX VE LOG-PREINVEX FONKSİYONLAR İÇİN HERMITE-HADAMARD TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ ÜZERİNE

Necmettin ALP
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimler Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danşman: Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Haziran 2013, 74 sayfa

Konvexlik kavramı ve genelleştirilmiş konvexlik kavramları matematiksel programlamada, mühendislikte, denge problemlerinde, varyasyonel problemlerde ve özellikle optimizasyon teorisinde çok önemli bir yer tutmaktadır. Konvexlik, invexlik ve preinvexlik için tanımlanan Hermite-Hadamard eşitsizliği matematiksel analiz, optimizasyon ve bir çok integral eşitsizliği için önemli bir köşetaşı haline gelmiştir. Son zamanlarda Hermite-Hadamard tipli eşitsizliklerin sağ tarafıyla ilgili bazı çalışmalar yapılmıştır. Bu tezde türevlerinin mutlak değerleri preinvex ve log-preinvex olan fonksiyonlar için Hermite-Hadamart tipli eşitsizliklerin sol tarafıyla ilgili bazı sonuçlar elde edilmiş ve bu sonuçlar çok değişkenli fonksiyonlar için genelleştirilmiştir.

Anahtar sözcükler : Hermite-Hadamard eşitsizliği, konvexlik, invexlik, preinvex fonksiyonlar, log-preinvex fonksiyonlar

ABSTRACT

ON HERMITE-HADAMARD TYPE INTEGRAL INEQUALITIES FOR PREINVEX AND LOG-PREINVEX FUNCTIONS

Necmettin ALP
Düzce University
Graduate School of Natural and Applied Science, Department of Mathematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. M.Zeki SARIKAYA
June 2013, 74 pages

Convexity and the generalization of convexity are one of the most important aspects in mathematical programming, optimization theory, equilibrum problems and variational problems. Hermite-Hadamard type inequality has become an important cornerstone in mathematical analysis and optimization and many other inequalities for convexity, invexity and preinvexity. Recently, it has been establihed some results of the right hand side of a Hermite-Hadamard type inequality. In this thesis, Some results of the left hand side of a Hermite- Hadamard type inequality were obtained for nonconvex functions whose derivatives absolute values are preinvex and log-preinvex, and those ressults were extened to several variables functions.

Keywords : Convexity, invexity, Hermite-Hadamard inequality, preinvex functions, log-preinvex functions.

EXTENDED ABSTRACT

ON HERMITE-HADAMARD TYPE INTEGRAL INEQUALITIES FOR PREINVEX AND LOG-PREINVEX FUNCTIONS

Necmettin ALP
Düzce Üniversity
Graduate School of Natural and Applied Science, Department of Mathematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. M.Zeki SARIKAYA
June 2013, 74 pages

Convexity and the generalization of convexity are one of the most important aspects in mathematical programming, optimization theory, equilibrum problems and variational problems. Hermite-Hadamard type inequality has become an important cornerstone in mathematical analysis and optimization and many other inequalities for convexity, invexity and preinvexity. Recently, it has been establihed some results of the right hand side of a Hermite-Hadamard type inequality. In this thesis, first of all we gave the history of convexty and Hermite-Hadamard type inequality with definitions and the basic theorems which are necessary in this work. Then we mentioned properties of convex functions, preinvex functions, quasi functions and log-preinvex functions. At the same time we mentioned strongly α-preinvex functions and gave relations among (pseudo, quasi) α-preinvexity, (strict, strong, pseudo, quasi) α-invexity and (strict, strong, pseudo, quasi) $\alpha\eta$-monotonicity. We obtained some results of the left hand side of a Hermite- Hadamard type inequality for nonconvex functions whose derivatives absolute values are preinvex and log-preinvex by giving solution methods related to these inequalities. Finally we extened results of the left hand side of a Hermite- Hadamard type inequality to several variables functions.

1. GİRİŞ

20. yüzyılın ortalarında matematiğin önemli bir alanı olarak görülülen konvex fonksiyonların ilk olarak 19. yüzyılın sonlarında düzenli olarak araştırılmaya başlanmıştır. Konvex kümeler ve konvex fonksiyonlar matematik dünyasında matematik ve geometri konuları arasında artık önemli bir yer teşkil etmektedir. Konvexlik, geometri, analiz, lineer cebir ve topolojide kullanılmakla beraber sayı teorisi, klasik ekstremum problemleri, lineer programlama, oyun teorisi ve eşitsizlikler teorisi (lineer, klasik ve matris) gibi çeşitli konularda önemli rol oynar. Son yüzyılda gelişen disiplini ve artan uygulamalarıyla matematiksel analizin merkezi alanlarından biri olarak yerini almıştır, [Dragomir 2000].

Konvex terimine ilk olarak, 1881 de Ch. Hermite (1822-1901) in Mathesis 3(1883, s.82) dergisine gönderdiği mektupta rastlanmıştır. Mektupta, Sur deux limites d'une intégrale définie. Soit $f(x)$ une fonction qui varie toujours dans le même sens de $x = a$, á $x = b$. On aura les relations

$$(b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \int_a^b f(x)dx < (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

ou bien

$$(b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \int_a^b f(x)dx > (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

suivant que la courbe $y = f(x)$ tourne sa convexit´e ou sa concavit´e vers l'axe esabcisses. En faisant dans ces formules $f(x) = 1/(1+x), a = 0, b = x$ il vient

$$x - \frac{x^2}{2+x} < \log(1+x) < x - \frac{x^2}{2(1+x)},$$

yazılıydı ama maalesef Hermite'in temel çalışmaları sık sık onun orjinal yazar kimliği verilmeden belirtilmiştir. Bu bağlamda temel matematikte ilgi çeken/çekmekte olan Hermite-Hadamard eşitsizliğinin geometrik yorumu ve çoğu uygulamasıyla konvex fonksiyonun ilk temel sonucu olduğu söyleyenebilir. Çoğu matematikçi farklı konvex fonksiyon sınıflar (quasi-convex fonksiyonlar, fonksiyonların Godunova-Levin sınıfı, log-convex ve r-convex fonksiyonlar, p-convex fonksiyonlar, vb.) ve özel ortalamalar (p-logarithmic ortalamalar, identric ortalama, Stolarsky ortalamalar, vb.) için onu uygulamaya, genişletmeye, sadeleştirmeye ve genelleştirmeye çalışmaktadır, [Dragomir 2000].

O. Hölder (1889), eğer $f''(x)>0$ ise daha sonraları Jensen eşitsizliği olarak bilinen eşitsizliği f in sağladığını ispatladı. O. Stolz (1893), eğer f, $[a,b]$ de sürekliyse ve

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\frac{1}{2}[f(x)+f(y)]$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, bu takdirde (a,b) nin her noktasında sağ ve sol türevlere sahip olduğunu gösterdi. J. Hadamard(1893), $[a,b]$ de artan türevlere sahip olan fonksiyonlar için temel integral eşitsizlikleri oluşturdu. 20. yüzyılda ilk kez J. L. W. V. Jensen (1905,1906) konvex fonksiyonların sistematik araştırmasının öneminin farkına vardı. Jensen yukarıdaki eşitsizliği kullanarak konvexliği tanımladı ve f in sürekliliğini dolaylı olarak gösteren ve yukarıdaki eşitsizliği de içine alan uzun seriler üretti. AO-GO eşitsizliği, Young eşitsizliği, Hölder eşitsizliği ve Minkowski eşitsizliği gibi önemli eşitsizliklerin çoğu konvex fonksiyonlar için Jensen eşitsizliğinin sonuçlarıdır, [Dragomir 2000].

Hardy, Littlewood ve Polya tarafından 1934 yılında yazılan "Inequalities" adlı eser eşitsizlikler teorisi için temel başvuru kaynağıdır. Okuyucu bu eserde konvex fonksiyonlarla ilgili klasik ve yeni eşitsizlikleri, problemleri, ispat yöntemlerini ve sonuçlar bulabilir. Buna ek olarak Beckenbach ve Bellman'n 1965 de yazdığı "Inequalities" adlı eser ve Mitrinovic'in 1970 de yazdığı "Analytic Inequalities" adlı eser de söylenebilir, [Dragomir 2000].

M. A. Hanson, 1981 yılında konvex fonksiyonların önemli bir genellemesi olarak invex fonksiyonları tanıtmıştır. M. A. Hanson'un bu ilk çalışması sonradan lineer olmayan optimizasyon ve diğer salt ve uygulamalı bilimlerin alt dallarında invexliğin uygulamaları ve rolünün genişletilmesi çalışmalarına büyük bir ilham kaynağı olmuştur, [Hanson 1981].

Daha sonra konvex fonksiyonlar daha kapsamlı bir şekilde A. W. Roberts ve D. E. Varberg tarafından "Convex Functions" adlı eserde kaleme alındı, [Roberts 1973].

Ayrıca okuyucu çeşitli konvex fonksiyon sınıfları için, Hermite-Hadamard eşitsizliğinin detaylı anlatımını S.S. Dragomir ve C.E.M Pearce tarafından "Selected Topics on Hermite - Hadamard Inequalities and Applications" adlı eserde bulabilir.

T. Weir ve B. Mond 1988 yılında yayımladıkları "Preinvex functions in multiobjective optimization" adlı eserde [Weir 1988] ve M. Aslam Noor'un yayımladığı "Variational-like inequalities" [Noor 1994] ile "Invex equalibrium problems" [Noor 2005] adlı eserlerde denge problemlerinde, varyasyonel eşitsizliklerde ve optimizasyonda preinvex fonksiyonların temel özelliklerini ve rollerini incelemişlerdir.

Yine M. A. Noor ve K. L. Noor'un 2006 yılında yayımladıkları "Some characterizations of strongly preinvex functions" [Noor 2006] adlı eserde konvexliği ve monotonluğu daha da genelleştirerek α-preinvexliği, α-invexliği ve $\alpha\eta$-monotonluğu tanıtmışlardır. Bundan esinlenerek Liya Fan ve Yunlian Gua "On strongly α-preinvex functions" [Fan 2007] adlı eserde (pseudo, quasi) α-preinvexite, (strict, strong, pseudo, quasi) α-invexite ve (strict, strong, pseudo, quasi) $\alpha\eta$-monotonluk arasındaki ilişkiyi incelemişlerdir.

Tüm bunlarla birlikte preinvexliğin daha özel durumu saylabilecek log-preinvexlik tanımlanmıştır. M. Aslam Noor bu preinvex ve log-preinvex fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler kurmuştur [Noor 2007]. Benzer biçimde konvex fonksiyonlarn daha özel durmu olan log-konvexlik de tanımlanmıştır. Konvex fonksiyonların daha genel bir durumu olan h-konvex fonksiyonlar için M. Z. Sarikaya "*On some Hadamard-type inequalities for h-convex functions*" [Sarikaya 2008] adlı eserde Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikleri tanıtmıştır.

Konvexlik matematik programlamada, mühendislikte ve optimizasyon teorisinde önemli bir role sahiptir. Konvexliğin genellemesi matematiksel programlama ve optimizasyon teorisinin en önemli unsurlarndan biridir. Literatürde konvexlik varsayımlarını zayıflatmak için birçok girişim olmuştur. Pini, invex fonksiyonların bir genellemesi olarak quasi-preinvex fonksiyon kavramını tanıtmıştır [Pini 1991]. Noor preinvex ve log-preinvex fonksiyonlar için baz Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler kurmuştur.Yeni makalelerde Barani, Ghazanfari ve Dragomir, bazı preinvex fonksiyonlar içeren bir Hermite-Hadamard tipli eşitsizliğin sağ tarafıyla ilgili baz bulgular sunmuşlardır, [Dragomir 2000].

Bu çalışmada preinvex ve log-preinvex fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sol tarafıyla ilgili bazı teoremler ve sonuçlar elde edilmiştir. Elde edilen bu teorem ve sonuçlar da çok değişkenli fonksiyonlar için genişletilmiştir, [Sarikaya-Alp 2012].

2. KURAMSAL KAVRAMLAR

2.1. GENEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezimiz için gerekli olan tanım ve teoremler verilerek gerekli görülen bazı önemli teoremlerin ispatları da verilmiştir.

Tanım 2.1.1. (Özel Ortalamalar) α, β reel sayılar ve $\alpha \neq \beta$ olmak üzere,

$$G(\alpha,\beta) = \sqrt{\alpha\beta}, \quad \alpha,\beta \in \mathrm{R}/\{0\} \quad \textit{Harmonik Ortalama}$$
$$A(\alpha,\beta) = \tfrac{\alpha+\beta}{2}, \quad \alpha,\beta \in \mathrm{R} \quad \textit{Aritmetik Ortalama}$$
$$\overline{L}(\alpha,\beta) = \tfrac{\beta-\alpha}{\ln|\beta|-\ln|\alpha|} \quad \alpha,\beta \in \mathrm{R}/\{0\} \quad \textit{Logaritmik Ortalama}$$

Şeklindedir, [Dragomir 2000].

Teorem 2.1.1. (Jensen Eşitsizliği) f fonksiyonu (a,b) aralığında konvex ve $x_i \in (a,b)$ olsun. Bu durumda $\alpha_i > 0$ ve $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ ise,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

eşitsizliği geçerlidir, [Jensen 1906].

İspat. Tümevarım yöntemiyle ispatı yapalım.
$i = 2$ için f konvex olduğundan

$$f(a_1 x_1 + a_2 x_2) \leq a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2)$$

olduğu açıktır.. Şimdi $i = n$ için

$$f(a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n) \leq a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + ... + a_n f(x_n)$$

doğru olduğunu kabul edelim. Şimdi $i = n+1$ için doğru olduğunu gösterelim. $\alpha_i > 0$ için f in konvexliğinden

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i\right) \leq f\left(a_1 x_1 + (1-a_{1)}) \sum_{i=2}^{n+1} \frac{a_i}{1-a_1} x_i\right) \leq a_1 f(x_1) + (1-a_{1)}) f\left(\sum_{i=2}^{n+1} \frac{a_i}{1-a_1} x_i\right)$$

yazabiliriz. $\sum_{i=2}^{n+1} \dfrac{a_i}{1-a_1} = 1$ olduğundan eşitsizlik $i = n+1$ için doğrudur ve

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right)\le\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i)$$

eşitsizliği gerçeklenir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.1.2. (AO-GO Eşitsizliği) Eğer her $i=1,2,...,n$ için $x_i\ge 0$, $\alpha_i>0$ ve $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$ ise

$$\prod_{i=1}^{n}x_i^{\alpha_i}\le\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$$

eşitsizliği geçerlidir, [Lin 2012].

İspat. En az bir i için $x_i=0$ ise ispat aşikardır. $x_i>0$ durumunda, $y_i=\log x_i$ seçilirse,

$$\prod_{i=1}^{n}x_i^{\alpha_i}=\exp\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i\right)$$

olup $f(t)=e^t$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ ’de konvex olduğundan Jensen eşitsizliğini uygularsak,

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n}x_i^{\alpha_i} &= f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i\right)\\ &\le\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(y_i)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\end{aligned}$$

elde edilip ispat tamamlanmış olur. Özel olarak $n=2$, $\alpha_1=\frac{1}{p}$, $\alpha_2=\frac{1}{q}$, $x_1=x^p$ ve $x_2=y^q$ seçilirse Young eşitsizliği olarak bilinen

$$xy\le\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}y^q$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 2.1.3. (Hölder Eşitsizliği) $x_1,...,x_n,y_1,...,y_n>0$, $p,q>1$ öyleki $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{n}x_i y_i\le\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

ifadesine Hölder eşitsizliği denir. Özel olarak $p=q=2$ seçilirse yukarıdaki eşitsizlik Cauchy-Buniakowsky-Schwartz eşitsizliği elde edilir, [Hardy 1934].

İspat. Yukardaki eşitsizlikte x_i ve y_i lerden ikisinin de sıfırdan farklı olduğunu düşünebiliriz. O halde $u=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$ ve $v=\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$ her ikiside pozitiftir, Young eşitsizliğinde $x = x_i / u$ ve $y = y_i / v$ seçersek,

$$\frac{x_i}{u}\cdot\frac{y_i}{v}\le\frac{1}{p}\left(\frac{x_i}{u}\right)^p+\frac{1}{q}\left(\frac{y_i}{v}\right)^q$$

elde edilir. Son eşitsizlik $1 \le i \le n$ için düzenlenip taraf tarafa toplanırsa,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{uv}\le\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

olur. Bu da Hölder eşitsizliğini verir.

Tanım 2.1.2. (İntegraller İçin Hölder Eşitsizliği) $p>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olsun. f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir, [Hardy 1934].

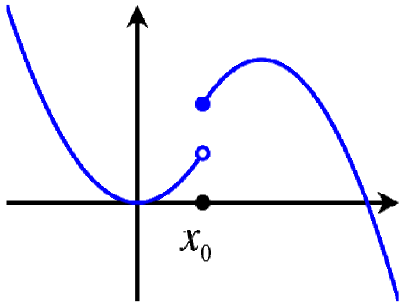
Tanım 2.1.3. (Üstten Yarısürekli Fonksiyon) $f : K \to \mathbb{R}$ reel değerli bir fonksiyon olmak üzere $x_0 \in K$ nın komşuluğunda $\forall\ x \in K$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için

$$f(x) \le f(x_0)+\varepsilon$$

veya

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) \le f(x_0)$$

oluyorsa f ye $x_0 \in K$ noktasında üstten yarısürekli fonksiyon denir, [Krzysztof 2001]. Üstten yarısürekli bir fonksiyonu aşağıdaki gibi grafikle gösterilebilir.



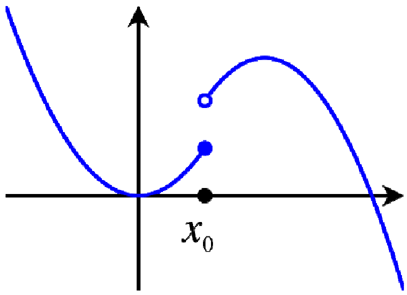
Tanım 2.1.4. (Alttan Yarısürekli Fonksiyon) $f : K \to \mathbb{R}$ reel değerli bir fonksiyon olmak üzere $x_0 \in K$ nın komşuluğunda $\forall\ x \in K$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için

$$f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon$$

veya

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0)$$

oluyorsa f ye $x_0 \in K$ noktasında üstten yarısürekli fonksiyon denir, [Krzysztof 2001]. Alttan yarısürekli bir fonksiyonu aşağıdaki gibi grafikle gösterilebilir.



Teorem 2.1.4. (Hermite-Hadamard Eşitsizliği) $f : I \to \mathrm{R}$ konvex fonksiyon olmak üzere, $\forall\ a,b \in I$ ve $a < b$ için,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.1}$$

eşitsizliğine Hermite Hadamard eşitsizliği denir. Burada f fonksiyonunun konkav olması eşitsizliği tersine çevirir, [Dragomir 2000].

İspat. f fonksiyonu sürekli ve sınırlı olduğundan dolayı $[a,b]$ aralığında integrallenebilirdir. Konvexlik tanımından,

$$f(ta+(1-t)b) \le tf(a)+(1-t)f(b)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğin her iki tarafının $[0,1]$ aralığında t ye göre integrali alınırsa,

$$\int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right)dt \le \int_0^1 tf(a)dt + \int_0^1 (1-t)f(b)dt = \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

elde edilip soldaki eşitsizlikte $x = ta+(1-t)b,\ t\in[0,1]$ dönüşümü uygulanırsa $H.-H.$ eşitsizliğinin sağ tarafı elde edilir. Sol tarafını ispat etmek için,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{b-a}\left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx\right]$$

eşitliğinin sağındaki integrallere sırasıyla $x = a + t(b-a)/2$ ve $x = b - t(b-a)/2$ değişken değişimi uygulanırsa,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1\left[f\left(a+\frac{t(b-a)}{2}\right)+f\left(b-\frac{t(b-a)}{2}\right)\right]dt \ge f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

elde edilip $H.-H.$ eşitsizliğinin sol tarafı ispatlanmış olur.

Tanım 2.1.5. (Kuvvet Ortalama Eşitsizliği) $q \ge 1$ olsun. f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \le \left(\int_a^b |f(x)|dx\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. KONVEX FONKSİYON ÖZELLİKLERİ, LOG-KONVEX VE QUASİ-KONVEX FONKİSYONLAR

Bu bölümde konvex, log-konvex ve quasi-konvex fonksiyonların tanım ve özellikleri incelenmiştir.

Tanım 3.1.1. (Konvex Küme) $K \subseteq \mathbb{R}^n$ boştan farklı bir küme olsun. K kümesinin herhangi iki elemanın birleştiren doğru parçası K kümesine ait ise veya başka bir ifadeyle $\forall a,b \in K$ ve $t \in [0,1]$ için

$$ta + (1-t)b \in K$$

oluyorsa K kümesine konvex küme denir, [Niculescu 2006].

Tanım 3.1.2. (Konvex Fonksiyon) $\forall\ a,b \in I$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t) f(b)$$

eşitsizliğini sağlayan $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna konvex fonksiyon denir (eşdeğer olarak t, $(0,1)$ aralığında da seçilebilir). Geometrik olarak bu eşitsizlik, f fonksiyonunun grafiği kirişlerinin altından geçtiği anlamına gelmektedir.

Aşağıdaki kriterler konvex fonksiyon tanımına eşdeğerdir.

a) I aralığı üzerinde f fonksiyonunun konvex olması için gerek ve yeter şart herhangi bir $c \in I$ noktası için, $f(x) - f(c)/(x-c)$ fonksiyonunun I aralığında artan olmasıdır.

b) $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun konvex olması için gerek ve yeter şart her $c, x \in (a,b)$ için

$$f(x) - f(c) = \int_c^x g(t)dt$$

olacak şekilde $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ artan fonksiyonun olmasıdır.

c) f diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere, f in konvex olması için gerek ve yeter şart f' fonksiyonunun artan olmasıdır.

d) f'', (a,b) de mevcut olsun. Bu durumda f nin konvex olması için gerek ve yeter şart $f''(x) \geq 0$ olmasıdır.

e) $f : (a,b) \to \mathrm{R}$ fonksiyonunun konvex olması için gerek ve yeter şart her $x_0 \in (a,b)$ için f fonksiyonun en az bir support doğrusuna sahip olmasıdır. Yani

$$f(x) \geq f(x_0) + \lambda(x - x_0)$$

eşitsizliğini sağlamasıdır. Burada λ, x_0 a bağlıdır ve eğer f' varsa o zaman $\lambda = f'(x_0)$ ya da $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$ ise $\lambda \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$ dir.

f) $f : (a,b) \to \mathrm{R}$ fonksiyonunun konvex olması için gerek ve yeter şart P, Q ve R noktaları f fonksiyonun grafiği üzerinde herhangi üç nokta olmak üzere,

$$eğimPQ \leq eğimPR \leq eğimQR$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır, [Niculescu 2006].

Konvex Fonksiyonun Özellikleri

i) Kapalı aralıkta tanımlı konvex fonksiyon sınırlıdr.

ii) $f : I \to \mathrm{R}$ konvex fonksiyon ise, I^0 (I nın içi) inde herhangi bir $[a,b]$ kapalı aralığında Lipschitz şartını sağlar. Bu nedenle f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli ve I^0 de süreklidir.

iii) $f : I \to \mathrm{R}$ konvex fonksiyon ise I^0 de $f'_-(x)$ ve $f'_+(x)$ vardır ve artandır.

iv) $f : I \to \mathrm{R}$ fonksiyonu I açık aralığında konvex ise, sayılabilir bir E kümesi haricinde f' mevcuttur ve süreklidir.

v) k tane fonksiyon $\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ de konvex fonksiyon olsun. Bu takdirde;

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} a_j f_j(x),\ a_j > 0;\ (j = 1, 2, ..., k)$$

fonksiyonu da konvextir.

vi) $g : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ azalmayan ve konvex fonksiyon ayrıca $h : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ konvex olsun. Bu takdirde; $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$, $f(x) = (g \circ h)(x)$ olarak tanımlanan f bileşke fonksiyonu da konvextir.

vii) $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ konvex ve h, $h(x) = Ax + B$ formunda $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex olmak üzere

$$f(x) = g(h(x))$$

fonksiyonu konvex fonksiyondur. Burada A uygun matristir, [Niculescu 2006].

Tanım 3.1.3. (Logaritmik Konvex Fonksiyon) $f : I \to [0, \infty)$ fonksiyonu,

i) $\forall$ $a, b \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$fta + (1-t)b) \leq [f(a)]^t [f(b)]^{1-t}$$

ii) $\log f$ konvex şartlarından birini sağlıyorsa f fonksiyonuna logaritmik konvex fonksiyon denir, [Niculescu 2006].

Teorem 3.1.1. $f : I \to [0, \infty)$ fonksiyonu logaritmik konvex ise konvextir.

İspat. f fonksiyonu logaritmik konvex fonksiyon olduğundan, $\log f$ fonksiyonu I aralığında konvextir ve $g(x) = e^x$ fonksiyonu tüm reel sayılar kümesinde artan ve konvex bir fonksiyon olduğundan, özellik vi. den dolayı,

$$f = \exp(\log f)$$

olup f fonksiyonu konvex olur, [Niculescu 2006].

Teorem 3.1.2. $f : I \to \mathbb{R}$ logaritmik konvex fonksiyon, $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \exp\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx\right] \\ &\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b G(f(x), f(a+b-x))dx \\ &\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \\ &\leq L(f(a), f(b)) \end{aligned}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Burada $G(a,b)$ pozitif reel saylar için geometrik ortalama ve $L(p,q)$ ayrık pozitif reel sayılar için logaritmik ortalama anlamındadır, [Dragomir 2000].

Tanım 3.1.4. (Quasi Konvex Fonksiyon) $\forall$ $a, b \in I$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$f(ta + (1-t)b) \leq \max\{f(a), f(b)\}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $f : I \to R$ fonksiyonuna quai-konvex fonksiyon denir, [Niculescu 2006].

AO-GO eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} f(ta+(1-t)b) &\le [f(a)]^t [f(b)]^{1-t} \\ &\le tf(a)+(1-t)f(b) \\ &\le \max\{f(a), f(b)\} \end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Yani quasi-konvex fonksiyon ailesi konvex fonksiyon ailesini, konvex fonksiyon ailesi de log-konvex fonksiyon ailesini kapsar.

Teorem 3.1.3. $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere eğer $|f'|$ dönüşümü $[a,b]$ üzerinde konvex ise,

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \le \frac{b-a}{4} \left(\frac{|f'(a)| + |f'(b)|}{2} \right).$$

Olur, [Kirmaci 2004].

3.2. PREINVEKS FONKSİYONLARIN ÖZELLİKLERİ

K, R^n de boş olmayan kapalı bir küme olmak üzere $f : K \to R$ ve $\eta(.,.) : K \times K \to R$, sürekli fonksiyonlar olmak üzere bu bilgiler kullanılarak aşağıdaki tanımlar ve özellikler verilmiştir.

Tanım 3.2.1. (Inveks Küme) $\forall a, b \in K$ ve $t \in [0,1]$ için

$$a + t\eta(b,a) \in K,$$

oluyorsa K ya η-e göre invex bir küme denir, [Yang 2001].

Not 3.2.1. Bir invex küme tanımnın net bir geometrik yorumununun olduğunu belirtmek isteriz. Bu tanım, esasen K 'da yer alan bir a noktasından başlayan bir yol olduğunu söyler. Bu v noktasının yolun uç noktalarndan bir tanesi olması gerekmiyor. Bu gözlem, bizim analizlerimizde önemli bir rol oynar. Ayrıca $\forall a, b \in K$ noktaları için b yolun uç noktası olmak üzere ve $\eta(b,a) = b - a$ olarak alırsak, invexlik sonuçta konvexliğe dönüşür.

Bu yüzden $\eta(b,a)=b-a$ ile ilgili olarak her konvex küme aynıı zamanda bir invex kümedir fakat tersi her zaman doğru değildir, [Noor 2006].

Tanım 3.2.2. (İnveks Fonksiyon) f türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $\forall a,b\in K$ için

$$f(b)-f(a)\geq \langle f'(a),\eta(b,a)\rangle$$

oluyorsa f ye K kümesi üzerinde η -e göre invex bir fonksiyon denir, [Yang 2001].

Tanım 3.2.3. (Preinvex Fonksiyon) K, η -e göre bir invex bir küme olmak üzere $\forall a,b\in K$ ve $t\in[0,1]$ için eğer

$$f(a+t\eta(b,a))\leq(1-t)f(a)+tf(b)$$

oluyorsa, f ye K kümesi üzerinde preinvex bir fonksiyon denir. $-f$ preinvex bir fonksiyon ancak ve ancak f prekonkav bir fonksiyondur. Ayrıca her konvex fonksiyon bir preinvex fonksiyondur fakat tersi doğru değildir, [Yang 2001].

Örnek 3.2.1.

$$\eta(b,a)=\begin{cases} b-a, & a.b\geq 0 \text{ ise} \\ a-b, & a.b<0 \text{ ise}\end{cases}$$

η -e göre $f(x)=-|x|$ fonksiyonu preinvextir fakat konvex değildir. Gerçekten, $t\in[0,1]$ olmak üzere $a.b<0$ için $f(a+t(a-b)=f((1+t)a-tb)\neq f((1-t)a+tb)$ olduğundan konvexlik tanımına aykırı olduğundan konvex değildir. Şimdi $t\in[0,1]$ olmak üzere f nin preinvex olduğunu gösterelim.

i) $a.b\geq 0$ için iki durum söz konusudur:

a) $a\geq 0$ ve $b\geq 0$ ise

$$\begin{aligned} f(a+t\eta(b,a)) &= f(a+t(b-a))=f((1-t)a+tb)=-|(1-t)a+tb| \\ &= -((1-t)a+tb)=(1-t)(-|a|)+t(-|b|)=(1-t)f(a)+tf(b)\end{aligned}$$

eşitliğinden $f(a+t\eta(b,a))\leq(1-t)f(a)+tf(b)$ olur.

b) $a\leq 0$ ve $b\leq 0$ ise

$$\begin{aligned} f(a+t\eta(b,a)) &= f(a+t(b-a))=f((1-t)a+tb)=-|(1-t)a+tb| \\ &= ((1-t)a+tb)=(1-t)(-|a|)+t(-|b|)=(1-t)f(a)+tf(b)\end{aligned}$$

eşitliğinden $f(a+t\eta(b,a)\leq(1-t)f(a)+tf(b)$ olur.

ii) $a.b<0$ için iki durum söz konusudur:

a) $a>0$ ve $b<0$ ise

$$\begin{aligned} f(a+t\eta(b,a)) = f(a+t.(a-b)) &= -\left|(a+t.(a-b))\right| , \qquad (a-b>0) \\ &= -(a+t.(a-b)) = -a-ta+tb \\ &\le -a+ta+tb = -(1-t)a+tb \\ &= (1-t)(-a)+tb = (1-t)(-|a|)+t(-|b|) \\ &= (1-t)f(a)+tf(b) \end{aligned}$$

eşitsizliğinden $f(a+t\eta(b,a)) \le (1-t)f(a)+tf(b)$ olur.

b) $a<0$ ve $b>0$ ise

$$\begin{aligned} f(a+t\eta(b,a)) = f(a+t.(a-b)) &= -\left|(a+t.(a-b))\right| , \qquad (a-b<0) \\ &= (a+t.(a-b)) = a+ta-tb \\ &\le a-ta-tb = (1-t)a+t(-b) \\ &= (1-t)(-|a|)+t(-|b|) \\ &= (1-t)f(a)+tf(b) \end{aligned}$$

eşitsizliğinden $f(a+t\eta(b,a)) \le (1-t)f(a)+tf(b)$ olur. Bu da f nin preinvex fonksiyon olduğunu gösterir.

Tanım 3.2.4. K, η-e göre bir invex küme olmak üzere $\forall a,b \in K$, $\forall t \in (0,1)$ ve $f(a) \neq f(b)$ için eğer

$$f(a+t\eta(b,a)) \le (1-t)f(a)+tf(b)$$

oluyorsa f ye semistrictly preinvex fonksiyon denir, [Yang 2001].

"*On invex set and preinvex*" isimli makalesinden yararlanarak Mohan and Neogy η fonksiyonuna ilişkin aşağıdaki koşulu verebiliriz.

Koşul C . $K \subseteq \mathrm{R}$, $\eta : K \times K \to \mathrm{R}$ ile ilgili olarak bir açık invex altküme olsun. Herhangi $a,b \in K$ ve herhangi $t \in [0,1]$ için

$$\eta(b,b+t\eta(a,b)) = -t\eta(a,b)$$
$$\eta(a,b+t\eta(a,b)) = (1-t)\eta(a,b)$$

yazılır. Ayrıca her $a,b \in K$ ve her $t_1,t_2 \in [0,1]$ için C şartından

$$\eta(b+t_2\eta(a,b), b+t_1\eta(a,b)) = (t_2-t_1)\eta(a,b)$$

eşitliği yazılabilir.

Örnek 3.2.2. Aşağıdaki fonksiyon Koşul C yi sağlar.

$$\eta(a,b)=\begin{cases} a-b, & (a\geq 0, b\geq 0) \\ a-b, & (a<0, b<0) \\ -2-b, & (a>0, b\leq 0) \\ 2-b, & (a\leq 0, b>0) \end{cases}$$

Lemma 3.2.1. f alttan yarısürekli ve $\forall x,y\in K$ için $f(y+\eta(x,y))\leq f(x)$ sağlansın. Ayrıca η $:\mathrm{R}^n\times\mathrm{R}^n\to\mathrm{R}^n$ fonksiyonu Koşul C i sağlasn. Bu durumda $\forall x,y\in K$ çifti için

$$f(y+t\eta(x,y))\leq tf(x)+(1-t)f(y) \qquad (3.1)$$

olacak şekilde $t\in(0,1)$ varsa, $\forall x,y\in K$ için

$$A(x,y)=\{\alpha\in[0,1] \mid f(y+\alpha\eta(x,y))\leq\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)\}$$

kümesi $[0,1]$ aralığında yoğun bir kümedir, [Yang 2001].

İspat. $x\neq y$ olmak üzere $x,y\in K$ verilsin. A kümesinin $[0,1]$ aralığında yoğun olmadığını kabul edelim.

$$A(x,y)\cap(\overline{\alpha}-\varepsilon,\overline{\alpha}+\varepsilon)=\phi$$

olacak şekilde $\overline{\alpha}\in(0,1)$ ve $\varepsilon>0$ vardır. $f(y+\eta(x,y))\leq f(x)$ $(\forall x,y\in K)$ için $0\in A(x,y)$ ve $1\in A(x,y)$ olur. Şimdi

$$u=\sup\{\alpha\in A(x,y):\ \alpha<\overline{\alpha}\}$$
$$v=\inf\{\alpha\in A(x,y):\ \alpha>\overline{\alpha}\}$$

olarak tanımlayalım. $u_1\leq u_2\leq\ldots\leq u_k\leq\ldots$ alalım. $\forall k$ için $u_k\in A(x,y)$ ve $k\to\infty$ için $u_k\to u$ olduğunu kabul edelim. Burdan da

$$f(y+u_k\eta(x,y))\leq u_k f(x)+(1-u_k)f(y)$$

$$\liminf_{k\to\infty} f(y+u_k\eta(x,y))\leq\liminf_{k\to\infty}[u_k f(x)+(1-u_k)f(y)] \qquad (3.2)$$

yazalım. f alttan yarısürekli bir fonksiyon olduğundan

$$f(y+u\eta(x,y))\leq\liminf_{k\to\infty} f(y+u_k\eta(x,y)) \qquad (3.3)$$

olarak yazılır. Bu son iki eşitsizlikten $f(y+u\eta(x,y)) \le uf(x)+(1-u)f(y)$ elde ederiz. Bu yüzden $u\in A(x,y)$ olur. Benzer biçimde $v\in A(x,y)$ olduğunu elde ederiz.

u ve v nin yukardaki tanımlarından $0\le u<\overline{\alpha}<v\le 1$ ve

$$\alpha u+(1-\alpha)v\notin A(x,y), \forall\alpha\in(0,1) \tag{3.4}$$

ifadelerini elde ederiz. Şimdi $x_u = y+u\eta(x,y)$, $y_v = y+v\eta(x,y)$ olarak tanımlayalım. Bu durumda (3.1) eşitsizliği altında

$$f(y_v+t\eta(x_u,y_v)) \le tf(x_u)+(1-t)f(y_v) \tag{3.5}$$

olacak şekilde bir $t\in(0,1)$ vardır.

Koşul C den

$$\begin{aligned} y_v+t\eta(x_u,y_v) &= y+v\eta(x,y)+t\eta(y+u\eta(x,y), y+v\eta(x,y)) \\ &= y+v\eta(x,y)+t\eta(y+u\eta(x,y), y+u\eta(x,y)-(u-v)\eta(x,y)) \\ &= y+[tu+(1-t)v]\eta(x,y) \end{aligned}$$

olarak yazabiliriz. Böylece (3.5) ve $u,v\in A(x,y)$ yardımıyla,

$$\begin{aligned} f(y+[tu+(1-t)v]\eta(x,y)) &= f(y_v+t\eta(x_u,y_v)) \\ &\le tf(x_u)+(1-t)f(y_v) \\ &\le [tu+(1-t)v]f(x)+[1-(tu+(1-t)v)]f(y) \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz ki bu $tu+(1-t)v\in A(x,y)$ olmasını gerektirir ve bu ise (3.4) ile çelişir. Yani kabülümüz yanlış olup $A(x,y)$ kümesi $[0,1]$ de yoğundur.

Teorem 3.2.2. f bir alttan yarısürekli bir fonksiyon ve $\forall x,y\in K$ için $f(y+\eta(x,y))\le f(x)$ sağlansın ve $\eta : \mathrm{R}^n\times\mathrm{R}^n\to\mathrm{R}^n$ fonksiyonu Koşul C i sağlasın. Eğer $\forall x,y\in K$ çifti için (3.1) eşitsizliği sağlanacak şekilde $t\in(0,1)$ varsa bu durumda f fonksiyonu K kümesi üzerinde preinvex bir fonksiyondur, [Yang 2001].

İspat. Lemma 3.2.1 ile $\forall x,y\in K$ için verilen $A(x,y)$ kümesinin $[0,1]$ üzerinde yoğundur. Bu durumda $k\to\infty$ iken $\alpha_k\to\overline{\alpha}$ için

$\forall\ \overline{\alpha}\in(0,1), \exists\{\overline{\alpha}\}\subseteq(0,1)\cap A(x,y)$ olur.

$f(y+\alpha_k\eta(x,y))\le\alpha_k f(x)+(1-\alpha_k)f(y)$ olduğundan,

$$\liminf_{k\to\infty} f(y+\alpha_k\eta(x,y)) \le \liminf_{k\to\infty}[\alpha_k f(x)+(1-\alpha_k)f(y)]$$

yazabiliriz. f bir alttan yarısürekli bir fonksiyon olduğundan,

$$f(y+\overline{\alpha}\eta(x,y)) \leq \liminf_{k\to\infty} f(y+\alpha_k\eta(x,y))$$

olur. Böylece,

$$f(y+\overline{\alpha}\eta(x,y)) \leq \overline{\alpha} f(x) + \left(1-\overline{\alpha}\right) f(y)$$

olduğu görülür. $t = 0,1$ olduğunda $f(y+\eta(x,y)) \leq f(x)$ $\left(\forall x, y \in K\right)$ şartından

$$f(y+t\eta(x,y)) \leq tf(x) + (1-t) f(y)$$

yazabiliriz. Bu yüzden K kümesi üzerinde f preinvex bir fonksiyon olur.

Not 3.2.2. Preinvex fonksiyonların bir kriteri Teorem 3.2.2 ile verilebilir.(Yang.2001) ile kıyaslandığında sonuç için basitleştirilmiş başka bir ispat verelim, [Yang 2001].

Teorem 3.2.3. Koşul C yi sağlayan $K \subseteq \mathrm{R}^n$, $\eta : \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$ e göre bir invex küme ve aynıı η -e göre $f : K \to \mathrm{R}$ preinvex fonksiyon olsun. Eğer tüm $x, y \in K$ için $f(x) \neq f(y)$ olmak üzere

$$f(y+\alpha\eta(x,y)) < \alpha f(x) + \left(1-\alpha\right) f(y) \tag{3.6}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\alpha \in (0,1)$ varsa, f, η -e göre K kümesi üzerinde semistrictly preinvex fonksiyondur, [Yang 2001].

İspat. Tersine olarak, $f(x) \neq f(y)$ ve

$$f(y+t\eta(x,y)) \geq tf(x) + (1-t) f(y) \tag{3.7}$$

olacak şekilde $x, y \in K$, $t \in (0,1)$ olduğunu kabul edelim. Genelliği bozmadan $f(x) < f(y)$ ve $z = y + t\eta(x,y)$ olsun. (3.7) eşitsizliğinden

$$f(z) \geq tf(x) + (1-t) f(y) > f(x) \tag{3.8}$$

yazılır. f preinvex fonksiyon olduğu için

$$f(z) \leq tf(x) + (1-t) f(y)$$

olur. Buradan da (3.8) eşitsizliği ile birlikte

$$f(x) < f(z) = tf(x) + (1-t) f(y) \tag{3.9}$$

elde ederiz. Şimdi

$$z_1 = z + \alpha\eta(x,z)$$
$$z_2 = z + \alpha\eta(z_1,z)$$
$$\ldots$$
$$z_k = z + \alpha\eta(z_{k-1},z), \forall k \in N$$

olsun. (3.6) ve (3.9) eşitsizlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} f(z_1) &= f\left(z+\alpha\eta(x,z)\right) < f(z) \\ f\left(z_2\right) &= f\left(z+\alpha\eta(z_1,z)\right) < f(z) \\ &\ldots \\ f\left(z_k\right) &= f\left(z+\alpha\eta(z_{k-1},z)\right) < f(z) \end{aligned} \tag{3.10}$$

yazabiliriz. Koşul C den

$$z_k = z + \alpha^k\eta(x,z) = y + \left[t + \alpha^k(1-t)\right]\eta(x,y)$$

elde edilir.

$$\frac{\alpha^{k_1}}{1-\alpha} < \frac{t}{1-t}$$

olacak şekilde $k_1 \in N$ olsun. $\beta_1 = t + \alpha^{k_1}(1-t)$, $\beta_2 = t - \frac{\alpha^{k_1+1}}{1-\alpha}(1-t)$, $\bar{x} = y + \beta_1\eta(x,y)$, $\bar{y} = y + \beta_2\eta(x,y)$ olsun. Bu durumda

$$0 \le \beta_2 \le t \le \beta_1 \le 1, \quad t = \alpha\beta_1 + (1-\alpha)\beta_2$$

yazabiliriz. Böylece Koşul C den

$$\begin{aligned} z + \alpha^{k_1}\eta(x,z) &= y + t\eta(x,y) + \alpha^{k_1}\eta(x, y + t\eta(x,y)) \\ &= y + \left[t + \alpha^{k_1}(1-t)\right]\eta(x,y) \\ &= y + \beta_1\eta(x,y) = \bar{x}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

olur. Dolayısyla (3.10) ve (3.11) den

$$f(\bar{x}) = f(z + \alpha^{k_1}\eta(x,z)) = f(z_{k_1}) < f(z) \tag{3.12}$$

elde ederiz. Burada dikkate alınması gereken iki durum vardır.

i) $f(\bar{x}) \ge f(\bar{y})$ olduğunda Koşul C den şu eşitliği yazabiliriz,

$$\begin{aligned} \bar{y} + \alpha\eta(\bar{x},\bar{y}) &= y + \beta_2\eta(x,y) + \alpha\eta(y + \beta_1\eta(x,y), y + \beta_2\eta(x,y)) \\ &= y + \beta_2\eta(x,y) + \alpha\left(\beta_1 - \beta_2\right)\eta(x,y) \\ &= y + \left[\alpha\beta_1 + (1-\alpha)\beta_2\right]\eta(x,y) = y + t\eta(x,y) = z \end{aligned}$$

yazılır. f preinvex fonksiyon olduğundan

$$f(z) \le \alpha f(\bar{x}) + (1-\alpha) f(\bar{y}) \le f(\bar{x})$$

olur ki bu da (3.12) ile çelişir.

ii) $f(\bar{x}) < f(\bar{y})$ olun. $\bar{y} + \alpha\eta(\bar{x}, \bar{y}) = y + t\eta(x, y) = z$ olduğundan (3.6) yardımıyla

$$f(z) < \alpha f(\bar{x}) + (1-\alpha) f(\bar{y}) \tag{3.13}$$

elde edilir. Yine $\bar{x} = y + \beta_1\eta(x, y)$, $\bar{y} = y + \beta_2\eta(x, y)$ ve f preinvex fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &\leq \beta_1 f(x) + (1-\beta_1) f(y) \\ f(\bar{y}) &\leq \beta_2 f(x) + (1-\beta_2) f(y) \end{aligned} \tag{3.14}$$

yazabiliriz. (3.13) ve (3.14) e göre

$$f(z) < tf(x) + (1-t) f(y)$$

yazabiliriz ve bu da (3.9) ile çelişir böylece ispat tamamlanır.

$x \in K$ ya $f(x)$ in minimum problemi olarak (P) diye isimlendirelim. Şimdi (P) problemi için preinvex fonksiyonlarn bir uygulamasını gösterelim.

Teorem 3.2.4. $K \subseteq \mathrm{R}^n$, $\eta : \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$ ile ilgili boş olmayan bir invex küme ve $f : K \to \mathrm{R}$, η-e göre bir preinvex fonksiyon olsun. Eğer $\bar{x}$, (P) probleminin bir yerel minimumu ise $\bar{x}$ mutlak minimum olur, [Yang 2001].

İspat. Eğer $\bar{x}$, (P) probleminin bir yerel minimumu ise $\bar{x} \in U \subset \mathrm{R}^n$ nun bir komşuluğu vardır ve

$$f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in K \cap U \tag{3.15}$$

yazabiliriz. $\bar{x}$ in (P) nin mutlak minimumu olmadığını varsayalım. O zaman

$$f(\hat{x}) < f(\bar{x})$$

olacak şekilde $\hat{x} \in K$ vardır. $K \subseteq \mathrm{R}^n$, $\eta : \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$ ile ilgili boş olmayan bir invex küme ve $f : K \to \mathrm{R}$, η-e göre bir preinvex fonksiyon olduğundan $\forall t \in (0,1)$ için

$$f(\bar{x} + t\eta(\hat{x}, \bar{x})) \leq tf(\hat{x}) + (1-t) f(\bar{x}) < f(\bar{x})$$

olur. $\forall t \in (0,1)$ için

$$f(\bar{x} + t\eta(\hat{x}, \bar{x})) < f(\bar{x})$$

yazılır. Buradan da $\lim_{t\to 0}(\bar{x}+t\eta(\hat{x},\bar{x}))=\bar{x}$ bu yüzden $\bar{x}+t\eta(\hat{x},\bar{x})\in K\cap U$ ile tüm $t\in(0,\delta)$ için bir δ $(0<\delta<1)$ vardır ve bu (3.15) ile çelişir ve ispat tamamlanır.

Not 3.2.3. Teorem 3.2.4 den matematik programlamada preinvex fonksiyonların, konvex fonksiyonların önemli bir genellemesini teşkil ettiğini söyleyebiliriz.

Aşağıdaki teoremde Noor, preinvex fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğini ispatlamıştır.

Teorem 3.2.5. $a,b\in K^0$ ve $a<a+\eta(b,a)$ olmak üzere K^0 (K nın içi) reel sayı aralığı üzerinde $f\ :\ K=[a,a+\eta(b,a)]\to(0,\infty)$ bir preinvex fonksiyon olsun. O zaman aşağıdaki eşitsizlik sağlanır

$$f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)\leq\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)dx\leq\frac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2}\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}\qquad(3.16)$$

,[Noor 2009].

İspat. $\forall\ a,b\in K^0$ için preinvex tanımından

$$\begin{aligned}f(a+t\eta(b,a))&=f((1-t)a+t(a+\eta(b,a)))\\&\leq(1-t)f(a)+tf(a+\eta(b,a))\end{aligned}$$

eşitsizliğin iki tarafı da $t\in[0,1]$ e göre integre edilirse,

$$\int_0^1 f(a+t\eta(b,a))dt\leq\int_0^1((1-t)f(a)+tf(a+\eta(b,a)))dt$$

$x=a+t\eta(b,a)\Rightarrow dx=\eta(b,a)dt$ dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)dx&\leq f(a)\int_0^1(1-t)dt+f(a+\eta(b,a))\int_0^1 tdt\\&=f(a)\frac{1}{2}+f(a+\eta(b,a))\frac{1}{2}=\frac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2}\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $f(a+t\eta(b,a))\leq(1-t)f(a)+tf(b)$ eşitsizliğinde $t=1$ alınırsa $f(a+\eta(b,a))\leq f(b)$ olur buradan da

$$\frac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2}\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

sağ taraf elde edilir. Şimdi Jensen eşitsizliği kullanılırsa

$$f\left(\int_0^1 \left(a+t\eta(b,a)\right)dt\right) \le \int_0^1 f\left(a+t\eta(b,a)\right)dt$$

$$f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right) \le \frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx$$

sol taraf elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

3.3. LOG-PREINVEX VE QUASI-PREINVEX FONKSİYONLAR

Bu bölümde log-invex, log-preinvex ve quasi-preinvex fonksiyonlarına ait tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 3.3.1. (Logaritmik Preinvex Fonksiyon) K, η ile ilgili olarak bir invex bir küme ve $f(.) > 0$ olmak üzere

$$f\left(a+t\eta(b,a)\right) \le \left(f(a)\right)^{1-t}\left(f(b)\right)^{t}, \quad a,b \in K, t \in [0,1]$$

oluyorsa f ye K kümesi üzerinde logaritmik preinvex bir fonksiyon denir, [Mohan 1995].

Tanım 3.3.2. (Quasi-preinvex Fonksiyon) K, η ile ilgili olarak bir invex bir küme olmak üzere eğer

$$f\left(a+t\eta(b,a)\right) \le \max\{f(a), f(b)\}, \quad a,b \in K,$$

$t \in [0,1]$. oluyorsa f ye K kümesi üzerinde quasi-preinvex bir fonksiyon denir, [Mohan 1995].

Yukardaki tanımlardan şunu elde ederiz,

$$\begin{aligned} f\left(a+t\eta(b,a)\right) &\le \left(f(a)\right)^{1-t}\left(f(b)\right)^{t} \\ &\le (1-t)f(a)+tf(b) \\ &\le \max\{f(a), f(b)\}. \end{aligned}$$

O halde her log-preinvex fonksiyon aynıı zamanda preinvex fonksiyon ve her preinvex fonksiyon aynıı zamanda quasi-preinvex fonksiyondur.

Tanım 3.3.3. (Log-invex Fonksiyon) f, K invex kümesi üzerinde türevlenebilir olmak üzere $\forall a,b \in K$ eğer,

$$\log f(b) - \log f(a) \geq \left\langle \frac{d}{dt}(\log f(a)), \eta(b,a) \right\rangle$$
$$= \left\langle \frac{f'(a)}{f(a)}, \eta(b,a) \right\rangle$$

oluyorsa f ye η -e göre log-invex fonksiyon denir, [Noor 2007].

Yukardaki eşitsizliğin doğruluğunu gösterelim. Log-preinvex fonksiyon tanımından

$$f(a + t\eta(b,a)) \leq (f(a))^{1-t} (f(b))^{t}$$
$$\log f(a + t\eta(b,a)) \leq \log\left((f(a))^{1-t} (f(b))^{t}\right)$$
$$= (1-t)\log f(a) + t\log f(b)$$
$$= \log f(a) - tf(u) + t\log f(b)$$
$$\frac{\log f(a + t\eta(b,a)) - \log f(a)}{t} \leq \frac{t\log f(b) - t\log f(a)}{t}$$
$$\eta(b,a) \lim_{t\to 0} \frac{[\log f(a + t\eta(b,a)) - \log f(a)]}{t\eta(b,a)} \leq \log f(b) - \log f(a)$$
$$\eta(b,a)(\log f(a))' \leq \log f(b) - \log f(a)$$
$$\left\langle (\log f(a))', \eta(b,a) \right\rangle \leq \log f(b) - \log f(a)$$
$$\left\langle \frac{f'(a)}{f(a)}, \eta(b,a) \right\rangle \leq \log f(b) - \log f(a)$$

eşitsizliğin doğru olduğunu göstermiş oluruz.

Her türevlenebilir log-preinvex aynı zamanda log-invex fonksiyon olur. Fakat bunun tersi doğru değildir. $\eta(b,a) = b - a$ olarak seçersek preinvex, invex ve log-preinvex fonksiyonlar konvex ve log-konvex fonksiyonlara dönüşür.

Lemma 3.3.1. $f : I^{\circ} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $a, b \in I^{\circ}$ (I°, I kümesinin iç kümesi) $a < b$ olmak üzere eğer $f' \in L([a,b])$ ise

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) = (b-a)\left[\int_0^{\frac{1}{2}} tf'(ta + (1-t)b)dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (t-1) f'(ta + (1-t)b)dt\right].$$

eşitliğini elde edilir, [Kirmaci 2004].

[Dragomir 2011]'de Barani ve Dragomir aşağıdaki şu iki teoremi ispatlamışlardır.

Teorem 3.3.1. $\eta : A \times A \to \mathbb{R}$ ile ilgili olarak $A \subseteq \mathbb{R}$ açık bir invex küme olsun. Farzedelim ki $f : A \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $p \in \mathbb{R}$ ve $p > 1$ olmak üzere eğer $|f'|^{\frac{p}{p-1}}$, A kümesi üzerinde bir quasi-preinvex fonksiyon ise $\forall a, b \in A$ için

$$\left| \frac{f(a) + f(a+\eta(b,a))}{2} - \frac{1}{\eta(a,b)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx \right| \leq \frac{\eta(b,a)}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left[\sup\left\{ |f'(a)|^{\frac{p}{p-1}}, |f'(b)|^{\frac{p}{p-1}} \right\} \right]^{\frac{p}{p-1}}$$

eşitsizliği sağlanır, [Barani,Dragomir 2011].

Teorem 3.3.2. $\eta : A \times A \to \mathbb{R}$ ile ilgili olarak $A \subseteq \mathbb{R}$ açık bir invex küme olsun.Farzedelim ki $f : A \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer A kümesi üzerinde $|f'|$ bir quasi-preinvex fonksiyon ise $\forall a, b \in A$ için

$$\left| \frac{f(a) + f(a+\eta(b,a))}{2} - \frac{1}{\eta(a,b)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx \right| \leq \frac{\eta(b,a)}{4} \max\left\{ |f'(a)|, |f'(b)| \right\}$$

eşitsizliği sağlanır, [Barani,Dragomir 2011].

M. A. Noor' un preinvex ve log-invex ile ilgili elde ettiği teoremler aşağıda verilmiştir

Teorem 3.3.3. f , $[a, a+\eta(b,a)]$ aralığında log-preinvex olsun. $L(.,.)$ logaritmik ortalama olmak üzere

$$\frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx \leq \frac{f(a) - f(b)}{\log f(a) - \log f(b)} = L(f(a), f(b))$$

eşitsizliği vardır, [Noor 2007].

İspat. $\forall a, b \in K,$ için

$$f(a + t\eta(b,a)) \leq (f(a))^{1-t} (f(b))^{t}$$

eşitsizliğinin iki tarafını $t \in [0,1]$ için integralini alırsak

$$\int_0^1 f\left(a+t\eta(b,a)\right)dt \le \int_0^1 \left(\left(f(a)\right)^{1-t}\left(f(b)\right)^t\right)dt$$

$$\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx \le f(a)\int_0^1\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right)^t dt$$

$$= f(a)\left[\frac{\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right)^t}{\log(\frac{f(b)}{f(a)})}\right]_0^1 = \frac{f(a)-f(b)}{\log f(a)-\log f(b)} = L(f(a),f(b))$$

ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.3.4. $a,b\in K^0$ ve $a<a+\eta(b,a)$ olmak üzere K^0 (K nın içi) reel sayı aralığı üzerinde $f,g\ :\ K=\left[a,a+\eta(b,a)\right]\to(0,\infty)$ preinvex fonksiyonlar olsun. O zaman

$$\frac{4}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)g(x)\,dx \le [f(a)+f(b)]L\left(f(a),f(b)\right)+[g(a)+g(b)]L\left(g(a),g(b)\right).$$

eşitsizliği sağlanır, [Noor 2007].

İspat. f ve g preinvex fonksiyonlar olsun. O halde

$$f(a+t\eta(b,a)) \le \left(f(a)\right)^{1-t}\left(f(b)\right)^t$$
$$g(a+t\eta(b,a)) \le \left(g(a)\right)^{1-t}\left(g(b)\right)^t$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikler ve AO-GO yardımıyla

$$\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)g(x)\,dx = \eta(b,a)\int_0^1 f(a+t\eta(b,a))g(a+t\eta(b,a))dt$$

$$\le \frac{\eta(b,a)}{2}\int_0^1\left[\{f(a+t\eta(b,a))\}^2+\{g(a+t\eta(b,a))\}^2\right]dt$$

$$\le \frac{\eta(b,a)}{2}\int_0^1\left[\left[\left(f(a)\right)^{1-t}\left(f(b)\right)^t\right]^2+\left[\left(g(a)\right)^{1-t}\left(g(b)\right)^t\right]^2\right]dt$$

$$= \frac{\eta(b,a)}{2}\left\{[f(a)]^2\int_0^1\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right)^{2t}dt+[g(a)]^2\int_0^1\left(\frac{g(b)}{g(a)}\right)^{2t}dt\right\}$$

$$= \frac{\eta(b,a)}{4}\left\{[f(a)]^2\int_0^1\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right)^{w}dw+[g(a)]^2\int_0^1\left(\frac{g(b)}{g(a)}\right)^{w}dw\right\}$$

$$= \frac{\eta(b,a)}{4}\left\{[f(a)]^2\left[\frac{\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right)^t}{\log(\frac{f(b)}{f(a)})}\right]_0^2 + [g(a)]^2\left[\frac{\left(\frac{g(b)}{g(a)}\right)^t}{\log(\frac{g(b)}{g(a)})}\right]_0^2\right\}$$

$$= \frac{\eta(b,a)}{4}\left\{\frac{[f(a)+f(b)][f(b)-f(a)]}{\log f(b)-\log f(a)} + \frac{[g(a)+g(b)][g(b)-g(a)]}{\log g(b)-\log g(a)}\right\}$$

$$= \frac{\eta(b,a)}{4}\{[f(a)+f(b)]L(f(a),f(b)) + [g(a)+g(b)]L(g(a),g(b))\}$$

Eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Türevlenebilir log-invex fonksiyonlar için aşağıdaki sonuç verilebilir..

Teorem 3.3.5. $a < a+\eta(b,a)$ olmak üzere $f,g\ :\ [a,a+\eta(b,a)] \to (0,\infty)$ türevlenebilir log-invex fonksiyonlar olsun. O zaman aşağıdaki eşitsizlik sağlanır

$$\frac{2}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)g(x)\,dx$$

$$\geq \frac{1}{\eta(b,a)} f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)\int_a^{a+\eta(b,a)} g(x)\exp\left[\left\langle \frac{f'\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)}{f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)}, \eta(x,\frac{2a+\eta(b,a)}{2})\right\rangle\right]dx \qquad (3.17)$$

$$+\frac{1}{\eta(b,a)} g\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)\exp\left[\left\langle \frac{g'\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)}{g\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)}, \eta(x,\frac{2a+\eta(b,a)}{2})\right\rangle\right]dx$$

, [Noor 2007]..

İspat. f ve g türevlenebilir log-invex fonksiyonlar olsun. O halde $\forall x,y \in K$ için

$$\log f(x) - \log f(y) \geq \left\langle \frac{d}{dt}(\log f(y)), \eta(x,y)\right\rangle$$

$$\log g(x) - \log g(y) \geq \left\langle \frac{d}{dt}(\log g(y)), \eta(x,y)\right\rangle$$

yazılabilir bu da

$$\log\frac{f(x)}{f(y)} \geq \left\langle \frac{f'(y)}{f(y)}, \eta(x,y)\right\rangle,\ \log\frac{g(x)}{g(y)} \geq \left\langle \frac{g'f(y)}{g(y)}, \eta(x,y)\right\rangle$$

eşitsizliklerini gerektirir. Bu eşitsizliklerden

$$f(x) \geq f(y)\exp\left[\left\langle \frac{f'(y)}{f(y)}, \eta(x,y) \right\rangle\right]$$
$$g(x) \geq g(y)\exp\left[\left\langle \frac{g'(y)}{g(y)}, \eta(x,y) \right\rangle\right]$$

olduğu görülür. Bu son iki eşitsizliği sırasıyla $g(x)$ ve $f(x)$ ile çarpıp taraf tarafa toplarsak

$$2f(x)g(x) \geq g(x)f(y)\exp\left[\left\langle \frac{f'(y)}{f(y)}, \eta(x,y) \right\rangle\right] + f(x)g(y)\exp\left[\left\langle \frac{g'(y)}{g(y)}, \eta(x,y) \right\rangle\right]$$

elde edilir. $y = \frac{2a+\eta(b,a)}{2}$ olarak alalım. Bu durumda son eşitsizlik

$$2f(x)g(x) \geq g(x)f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)\exp\left[\left\langle \frac{f'\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)}{f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)}, \eta\left(x, \frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right) \right\rangle\right]$$
$$+ f(x)g\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)\exp\left[\left\langle \frac{g'\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)}{g\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)}, \eta\left(x, \frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right) \right\rangle\right]$$

halini alır. Bu eşitsizlikse $[a, a+\eta(b,a)]$ aralığında x e göre integrali alınıp $\eta(b,a)$ ile bölünürse (3.17) ifadesi elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

3.4. STONGLY α-PREİNVEX FONKSİYONLAR

Bu bölümde ilk olarak $\alpha-$preinvexlik, pseudo $\alpha-$preinvexlik ve quasi $\alpha-$preinvexlik; ikinci olarak $\alpha-$invexlik, pseudo $\alpha-$invexlik ve quasi $\alpha-$invexlik; üçüncü olarak (pseudo,quasi) $\alpha-$preinvexlik ve (pseudo,quasi) $\alpha-$invexlik; dördüncü olarak $\alpha\eta-$, pseudo $\alpha\eta-$ ve quasi $\alpha\eta-$monotonluk, son olarak da $\alpha-$invexlik ve $\alpha\eta-$monotonluk arasndaki ilişkiyi incelenmiştir, [Fan 2006].

H bir hilbert uzayı ve K boş olmayan H nın bir alt kümesi olsun. $F : K \to \mathbb{R}$ ve $\alpha : K \times K \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ iki reel değerli fonksiyonlar ve $\eta : K \times K \to H$ sürekli olmak zorunda olmayan bir vektör değerli dönüşüm olsun. $\forall u, v \in K$ için eğer $\alpha(v,u) = \alpha(u,v)$ ise $\alpha(.,.)$ simetrik fonksiyon ve eğer $\eta(v,u) + \eta(u,v) = 0$ ise $\eta(.,.)$ asimetrik fonksiyon olarak isimlendirilir

Tanım 3.4.1. (α -invex küme) $\forall u,v\in K$ ve $\forall t\in[0,1]$ için

$$u+t\alpha(v,u)\ \eta(v,u)\in K$$

oluyorsa K ya η ve α -ya göre α -invex bir küme denir. Aynı zamanda K kümesine $\alpha\eta$ -e göre invex küme denir. $\alpha(v,u)=1$ seçtiğimizde her α -invex küme bir invex küme olur fakat bunun tersi doğru değildir. Benzer biçimde $\alpha(v,u)=1$ ve $\eta(v,u)=v-u$ olarak seçersek her α -invex küme bir konvex küme olur fakat bunun tersi doğru değildir.
Aşağıda aksi belirtilmedikçe boş olmayan bir K kümesi η ve α -ya göre α -invex bir küme olarak alınacaktır.

1) $\alpha-$preinvexlik, pseudo $\alpha-$preinvexlik ve quasi $\alpha-$preinvexlik arasındaki ilişki

Tanım 3.4.2. Herhangi $u,v\in K$ ve $\forall t\in[0,1]$ için

i)

$$F(u+t\alpha(v,u)\eta(v,u))\leq(1-t)F(u)+tF(v)$$

oluyorsa F ye η ve α -ya göre α -preinvex fonksiyon denir.

ii)

$$F(v)\leq F(u)\Rightarrow F(u+t\alpha(v,u)\eta(v,u))\leq F(u)+t(t-1)b(u,v) \tag{3.18}$$

olacak şekilde eğer $b\ :\ K\times K\rightarrow \mathrm{R}^{++}$ bir strictly pozitif fonksiyonu varsa F ye η ve α -ya göre pseudo α -preinvex fonksiyon denir.

iii)

$$F(u+t\alpha(v,u)\eta(v,u))\leq \max\{F(u),F(v)\} \tag{3.19}$$

oluyorsa F ye η ve α -ya göre quasi α -preinvex fonksiyon denir.

Lemma 3.4.1. α -preinvexlik, pseudo α -preinvexliği gerektirmez aynı şekilde pseudo α -preinvexlik, α -preinvexliği gerektirmez. Bunların ikisi de tamamıyla farklı kavramlardır.

İki örnekle bunu gösterelim.

Örnek 3.4.1. $K=\mathrm{R}$ ve $c\in\mathrm{R}$ bir sabit reel sayı olmak üzere $F(u)=c$, $\alpha(v,u)=1$, $\eta(v,u)=e^{v}-e^{u}$ olsun. $\forall u,v\in K$, $\forall t\in[0,1]$ için

$$F(u+t\alpha(v,u)\eta(v,u))=(1-t)F(u)+tF(v)$$

olduğundan K üzerinde F, η ve α-ya göre α-preinvex fonksiyon olur.

Öte yandan herhangi $t \in (0,1)$ ve herhangi strictly pozitif bir $b : K \times K \to \mathrm{R}^{++}$ fonksiyonu için $F(u) = F(v)$ ve

$$F(u) + t(t-1)b(u,v) < F(u) = F\big(u + t\alpha(v,u)\eta(v,u)\big)$$

olacağndan K üzerinde F, η ve α-ya göre pseudo α-preinvex fonksiyon olmaz.

Örnek 3.4.2. $K = [-1,0]$ ve $\forall u,v \in K$ için $\alpha(v,u) = -\frac{u}{2}$, $\eta(v,u) = 1$, $b(u,v) = -\frac{u}{3}$, $F(u) = 1 - u$ olsun. $b(u,v)$ bir strictly pozitif fonksiyon ve $\forall t \in [0,1]$ için

$$u + t\alpha(v,u)\eta(v,u) = \left(1 - \frac{t}{2}\right)u \in K$$

olduğundan K, η ve α-ya göre α-invex bir küme olur.

$F(v) \leq F(u)$ olduğunu varsayalım. Öyleyse $u \leq v$ ve

$$F\big(u + t\alpha(v,u)\eta(v,u)\big) - F(u) = \frac{t}{2}u < \frac{t}{3}u = -tb(u,v) \leq t(t-1)b(u,v)$$

olur ki F nin η ve α-ya göre pseudo α-preinvex fonksiyon olduğunu gösterir. Öte yandan $\forall u,v \in K$, $\forall t \in [0,1]$ için

$$F\big(u + t\alpha(v,u)\eta(v,u)\big) - (1-t)F(u) - tF(v) = t\left(v - \frac{u}{2}\right)$$

elde ederiz. $v = -\frac{1}{3}$, $u = -\frac{1}{2}$, ve $t = \frac{1}{2}$ alrsak

$$F\big(u + t\alpha(v,u)\eta(v,u)\big) - (1-t)F(u) - tF(v) = \frac{1}{40} > 0$$

elde ederiz ve bu da F nin η ve α-ya göre α-preinvex fonksiyon olmadığını gösterir.

Lemma 3.4.2. α-preinvexlik, quasi α-preinvexliği gerektirir fakat tersi doğru değildir.

İspat. F, K üzerinde η ve α-ya göre bir α-preinvex fonksiyon olsun. Öyleyse $\forall u,v \in K$ ve $\forall t \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} F\big(u + t\alpha(v,u)\eta(v,u)\big) &\leq (1-t)F(u) + tF(v) \\ &\leq (1-t)\max\{F(u), F(v)\} + t\max\{F(u), F(v)\} \\ &= \max\{F(u), F(v)\} \end{aligned}$$

elde ederiz bu da F nin η ve α-ya göre quasi α-preinvex fonksiyon olduğunu gösterir.

Örnek 3.4.3. $K=[-1,0)$ ve $\forall u,v\in K$ için $\alpha(v,u)=-\frac{u}{2}$, $\eta(v,u)=1$, $F(u)=1-u$ olsun. Örnek 3.4.2. den dolayı K nın η ve α-ya göre bir α-invex ve K üzerinde F nin α-preinvex fonksiyon olmadığını biliyoruz. Ayrıca $\forall u,v\in K$, $\forall t\in[0,1]$ için

$$F\left(u+t\alpha(v,u)\eta(v,u)\right)=1-u+\frac{t}{2}u\le F(u)\le \max\{F(u),F(v)\}$$

elde ederiz. Böylece K üzerinde F, η ve α-ya göre quasi α-preinvex fonksiyon olur.

Lemma 3.4.3. Pseudo α-preinvexlik, quasi α-preinvexliği gerektirmez aynı şekilde quasi α-preinvexlik, pseudo α-preinvexliği gerektirmez. Bunların ikisi de tamamıyla farklı kavramlardır.

Bunu iki örnekle izah edelim.

Örnek 3.4.4. $K=(-\infty,0)$ olmak üzere $\forall u,v\in K$ için $\eta(v,u)=1$, $b(u,v)=-\frac{u}{3}$, $F(u)=1-u$ ve

$$\alpha(v,u)=\begin{cases}2(v-u), & v<u \text{ ise}\\ -\frac{u}{2}, & v\ge u \text{ ise}\end{cases}$$

olsun. Öyleyse $b(u,v)$ bir strictly pozitif fonksiyon ve $\forall t\in[0,1]$ için

$$u+t\alpha(v,u)\eta(v,u)=\begin{cases}u+2t(v-u), & v<u \text{ ise}\\ (1-\frac{u}{2})u, & v\ge u \text{ ise}\end{cases}\in K$$

olduğundan K, bir α-invex küme olur. Eğer $F(v)\le F(u)$ ise $u\le v$ ve

$$F\left(u+t\alpha(v,u)\eta(v,u)\right)=F(u)+\frac{t}{2}u<F(u)-tb(u,v)\le F(u)+t(t-1)b(u,v)$$

olduğundan F, K üzerinde η ve α-ya göre pseudo α-preinvex fonksiyon olur.

Öte yandan $\forall u,v\in K$, $v<u$ ve $t=\frac{3}{4}$ için $F(u)<F(v)$ ve

$$F\left(u+\frac{3}{4}\alpha(v,u)\eta(v,u)\right)-\max\{F(u),F(v)\}$$

$$=F\left(u+t\alpha(v,u)\eta(v,u)\right)-F(v)=-\frac{1}{2}(v-u)>0$$

elde ederiz bu da bize K üzerinde F nin η ve α-ya göre quasi α-preinvex fonksiyon olmadığını gösterir.

Örnek 3.4.5. K, $\alpha(v,u)$, $\eta(v,u)$ ve $F(u)$ örnek 3.4.1 deki gibi olsun. K nın η ve α-ya göre bir α-invex ve K üzerinde F nin pseudo α-preinvex fonksiyon olmadığını biliyoruz. Ayrıca $\forall u,v\in K$, $\forall t\in[0,1]$ için

$$F(u+t\alpha(v,u)\eta(v,u))=c=\max\{F(u),F(v)\}$$

olur bu yüzden K üzerinde F, η ve α-ya göre quasi α-preinvex fonksiyon olur.

2) α-invexlik, pseudo α-invexlik ve quasi α-invexlik arasındaki ilişki

Bu bölümde kullanılan $F : K\to \mathrm{R}$ olarak tanımlanan F, K üzerinde türevlenebilir olsun.

Tanım 3.4.3. K bir α-invex küme olmak üzere,

i) $u\in K$ noktasında türevi $F'(u)$ olan ve $\forall u,v\in K$ için

$$F(v)-F(u)\geq\left\langle \alpha(v,u)F'(u),\eta(v,u)\right\rangle$$

oluyorsa K üzerinde F ye η ve α-ya göre α-invex fonksiyon denir.

ii) $\forall u,v\in K$ için

$$F(v)-F(u)>\left\langle \alpha(v,u)F'(u),\eta(v,u)\right\rangle$$

oluyorsa K kümesi üzerinde F ye η ve α-ya göre strictly α-invex fonksiyon denir.

iii) $\forall u,v\in K$ için

$$F(v)-F(u)\geq\left\langle \alpha(v,u)F'(u),\eta(v,u)\right\rangle+\mu\|\eta(v,u)\|^2$$

olacak şekilde bir $\mu>0$ sabiti varsa K üzerinde F ye η ve α-ya göre strongly α-invex fonksiyon denir.

iv) $\forall u,v\in K$ için

$$\left\langle \alpha(v,u)F'(u),\eta(v,u)\right\rangle\geq 0\Rightarrow F(v)\geq F(u)$$

oluyorsa K üzerinde F ye η ve α-ya göre pseudo α-invex fonksiyon denir.

v) $\forall u,v\in K$ için

$$\left\langle \alpha(v,u)F'(u),\eta(v,u)\right\rangle\geq 0\Rightarrow F(v)>F(u)$$

oluyorsa K üzerinde F ye η ve α-ya göre strictly pseudo α-invex fonksiyon denir.

vi) $\forall u,v\in K$ için

$$\left\langle \alpha(v,u)F'(u),\eta(v,u)\right\rangle+\mu\|\eta(v,u)\|^2\geq 0\Rightarrow F(v)\geq F(u)$$

olacak şekilde bir $\mu>0$ sabiti varsa K üzerinde F ye η ve α-ya göre strongly pseudo α-invex fonksiyon denir.

vii) $\forall u,v\in K$ için

$$F(v)\leq F(u)\Rightarrow\left\langle \alpha(v,u)F'(u),\eta(v,u)\right\rangle\leq 0$$

oluyorsa K üzerinde F ye η ve α-ya göre quasi α-invex fonksiyon denir.

Lemma 3.4.4. α-invexlik, pseudo α-invexliği gerektirir. Fakat bunun tersi doğru değildir.

Örnek 3.4.6. $K=\mathrm{R}$ ve $\forall u,v\in K$ için $\alpha(v,u)=\frac{3}{2}$, $\eta(v,u)=v-u$, $F(u)=\frac{1}{3}u$ olsun. Bu durumda K, η ve α-ya göre α-invex bir küme olur. $\left\langle \alpha(v,u)F'(u),\eta(v,u)\right\rangle\geq 0$ olduğunu varsayalm. Bu durumda $v-u\geq 0$ ve $F(v)-F(u)=\frac{1}{3}(v-u)\geq 0$ olur. Bu da K üzerinde F nin η ve α-ya göre pseudo α-invex fonksiyon olduğunu gösterir.

Öte yandan $\bar{u}=0$ ve $\bar{v}=1$ için

$$F(\bar{v})-F(\bar{u})-\left\langle \alpha(\bar{v},\bar{u})F'(\bar{u}),\eta(\bar{v},\bar{u})\right\rangle=-\frac{1}{6}<0$$

elde ederiz. Bu yüzden K üzerinde F, η ve α-ya göre α-invex fonksiyon değildir.

Lemma 3.4.5. α-invexlik, quasi α-invexliği gerektirir. Fakat bunun tersi doğru değildir.

Örnek 3.4.7. K, $\alpha(v,u)$, $\eta(v,u)$ ve $F(u)$ Örnek 3.4.6. daki şartları sağlasın. α-invex K üzerinde F nin η ve α-ya göre α-invex fonksiyon olmadığını biliyoruz. Ayrıca $\forall u,v\in K$ için eğer $F(v)\leq F(u)$ ise $v\leq u$ ve

$$\left\langle \alpha(v,u)F'(u),\eta(v,u)\right\rangle=\frac{1}{2}(v-u)\leq 0$$

olacağından K üzerinde F, η ve α-ya göre quasi α-invex fonksiyon olur.

Lemma 3.4.6. Pseudo α-invexlik, quasi α-invexliği gerektirmez aynı şekilde quasi α-invexlik, pseudo α-invexliği gerektirmez. Bunların ikisi tamamıyla farklı kavramlardır.

Bunu iki örnekle izah edelim.

Örnek 3.4.8. $K=\mathrm{R}$ ve $\forall u,v\in K$ için $\eta(v,u)=1$, $F(u)=u$ ve

$$\alpha(v,u)=\begin{cases}-1, & v\neq u \text{ ise}\\ 1, & v=u \text{ ise}\end{cases}$$

olsun. Bu durumda K, η ve α-ya göre α-invex bir küme ve

$$\langle\alpha(v,u)F'(u),\eta(v,u)\rangle=\begin{cases}-1, & v\neq u \text{ ise}\\ 1, & v=u \text{ ise}\end{cases}$$

olur. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}\langle\alpha(v,u)F'(u),\eta(v,u)\rangle\geq 0 &\Rightarrow \langle\alpha(v,u)F'(u),\eta(v,u)\rangle=1\\ &\Leftrightarrow v=u\\ &\Leftrightarrow F(v)=F(u)\end{aligned}$$

olur ki bu da K üzerinde F nin pseudo α-invex fonksiyon olmasını gerektirir. Fakat quasi α-invex fonksiyon olmasını gerektirmez.

Örnek 3.4.9. $K=\mathrm{R}$ ve $\forall u,v\in K$ için $F(u)=u$ ve

$$\alpha(v,u)=\begin{cases}-1, & v\geq u \text{ ise}\\ 1, & v<u \text{ ise}\end{cases},\quad \eta(v,u)=\begin{cases}1, & v>u \text{ ise}\\ -1, & v=u \text{ ise}\\ 0, & v<u \text{ ise}\end{cases}$$

olsun. Bu durumda K, η ve α-ya göre α-invex bir küme ve

$$\langle\alpha(v,u)F'(u),\eta(v,u)\rangle=\begin{cases}1, & v>u \text{ ise}\\ -1, & v=u \text{ ise}\\ 0, & v<u \text{ ise}\end{cases}$$

olur. Sonuç olarak,

$$F(v)\leq F(u)\Rightarrow v\leq u\Rightarrow\langle\alpha(v,u)F'(u),\eta(v,u)\rangle\leq 0$$

$$\langle\alpha(v,u)F'(u),\eta(v,u)\rangle=0\Rightarrow F(v)<F(u)$$

olur ki bu da K üzerinde F nin quasi α-invex fonksiyon olmasını gerektirir. Fakat pseudo α-invex fonksiyon olmasını gerektirmez.

3) (pseudo,quasi) α-preinvexlik ve (pseudo,quasi) α-invexlik arasındaki ilişki

Lemma 3.4.7. Pseudo α -preinvexlik, pseudo α-invexliği gerektirir. Fakat bunun tersi doğru değildir.

İspat. F, K üzerinde η ve α-ya göre pseudo α-preinvex fonksiyon olsun. O zaman strictly pozitif bir $b : K \times K \to \mathrm{R}^{++}$ fonksiyonu vardır öyle ki $\forall u,v \in K$ ve $t \in [0,1]$ için (3.18) sağlansın. Eğer $\left\langle \alpha(v,u)F'(u), \eta(v,u) \right\rangle \geq 0$ oluyorsa

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(u + t\alpha(v,u)\eta(v,u)) - F(u)}{t} = \left\langle \alpha(v,u)F'(u), \eta(v,u) \right\rangle \qquad (3.20)$$

eşitliğinden $\forall t \in (0, t_0)$ için

$$F(u + t\alpha(v,u)\eta(v,u)) - F(u) \geq 0$$

olacak şekilde $t_0 \in (0,1)$ vardır. Sonuç olarak $\forall t \in (0, t_0)$ için

$$F(u + t\alpha(v,u)\eta(v,u)) > F(u) + t(t-1)b(u,v)$$

elde edilir. (3.18) yardımıyla $F(v) > F(u)$ ve F, K üzerinde η ve α-ya göre pseudo α-invex fonksiyon olur.

Örnek 3.4.10. $K = \mathrm{R}$ ve $\forall u,v \in K$ için $F(u) = u$ ve

$$\alpha(v,u) = \begin{cases} 1, & v > u \text{ ise} \\ -1, & v \leq u \text{ ise} \end{cases} \qquad \eta(v,u) = \begin{cases} 1, & v \neq u \text{ ise} \\ 0, & v = u \text{ ise} \end{cases}$$

olsun. Bu durumda K, η ve α-ya göre α-invex bir küme ve

$$\alpha(v,u)\eta(v,u) = \begin{cases} 1, & v > u \text{ ise} \\ 0, & v = u \text{ ise} \\ -1, & v < u \text{ ise} \end{cases}$$

olur. Sonuç olarak,

$$\left\langle \alpha(v,u)F'(u), \eta(v,u) \right\rangle \geq 0 \Rightarrow v \geq u \Rightarrow F(v) \geq F(u)$$

elde edilir ki bu da K üzerinde F nin η ve α-ya göre pseudo α-invex fonksiyon olduğunu gösterir.

Öte yandan eğer $F(v) = F(u)$ olursa o zaman $v = u$, herhangi $b : K \times K \to \mathrm{R}^{++}$ strictly pozitif bir fonksiyonu ve herhangi $t \in (0,1)$ için

$$F(u+t\alpha(v,u)\eta(v,u))-F(u)=0>t(t-1)b(u,v)$$

elde edilir ki bu da K üzerinde F nin η ve α-ya göre pseudo α-preinvex fonksiyon olmadığını gösterir.

Lemma 3.4.8. Pseudo α-preinvexlik, quasi α-invexliği gerektirir. Fakat bunun tersi doğru değildir.

İspat. F, K üzerinde η ve α-ya göre pseudo α-preinvex fonksiyon olsun. O zaman strictly pozitif bir $b\,:\,K\times K\to \mathrm{R}^{++}$ fonksiyonu vardır öyle ki $\forall u,v\in K$ ve $t\in[0,1]$ için (3.18) sağlansın.

Keyfi olarak $u,v\in K$ ve $F(v)\geq F(u)$ olsun. (3.18) yardımıyla $\forall t\in(0,1)$ için

$$\frac{F(u+t\alpha(v,u)\eta(v,u))-F(u)}{t}\leq (t-1)b(u,v)$$

yazabiliriz. $t\to 0$ için (3.20) yardımıyla

$$\left\langle \alpha(v,u)F'(u),\eta(v,u)\right\rangle \leq -b(u,v)<0$$

olur. Bundan dolayı K üzerinde F, η ve α-ya göre quasi α-invex fonksiyon olur.

Örnek 3.4.11. $K=[0,\infty)$ ve $\forall u,v\in K$ için $F(u)=u$, $\alpha(v,u)=1$ ve

$$\eta(v,u)=\begin{cases}1, & v>u \text{ ise}\\ 0, & v\leq u \text{ ise}\end{cases}$$

olsun. O zaman $\forall\ t\in[0,1]$ için

$$u+t\alpha(v,u)\eta(v,u)=\begin{cases}u+t, & v>u \text{ ise}\\ u, & v\leq u \text{ ise}\end{cases}\in K$$

olduğundan K, η ve α-ya göre bir α-invex küme olur.

Eğer $F(v)\leq F(u)$ ise o zaman $v\leq u$, herhangi $b\,:\,K\times K\to \mathrm{R}^{++}$ strictly pozitif bir fonksiyonu ve herhangi $t\in(0,1)$ için,

$$\left\langle \alpha(v,u)F'(u),\eta(v,u)\right\rangle =0$$

$$F(u+t\alpha(v,u)\eta(v,u))-F(u)=0>t(t-1)b(u,v)$$

olur ki bu da K üzerinde F nin η ve α-ya göre quasi α-invex fonksiyon olduğunu fakat pseudo α-preinvex olmadığını gösterir.

Lemma 3.4.9. Quasi α-preinvexlik, quasi α-invexliği gerektirir. Fakat bunun tersi doğru değildir.

İspat. F, K üzerinde η ve α-ya göre quasi α-preinvex fonksiyon olsun. $\forall u, v \in K$ ve $t \in (0,1)$ için (3.19) sağlansın. Kabul edelim ki $F(v) \leq F(u)$ olsun.
(3.19) ve (3.20) yardımıyla

$$\left\langle \alpha(v,u) F'(u), \eta(v,u) \right\rangle \leq 0$$

yazabiliriz. Bu da bize K üzerinde F nin η ve α-ya göre quasi α-invex fonksiyon olduğunu gösterir.

Örnek 3.4.12. K, $\alpha(v,u)$, $\eta(v,u)$ ve $F(u)$ örnek 3.4.10. deki gibi olsun. Örnek 3.4.10. yardımıyla K nın η ve α-ya göre bir α-invex küme ve

$$F(v) \leq F(u) \Rightarrow \alpha(v,u)\eta(v,u) \leq 0 \Rightarrow \left\langle \alpha(v,u) F'(u), \eta(v,u) \right\rangle \leq 0$$

olduğunu biliyoruz. Bu yüzden K üzerinde F , η ve α-ya göre quasi α-invex fonksiyon olur.
Öte yandan keyfi olarak $u \in K$, $t \in (0,1)$ ve $v = u + \frac{t}{2}$ alalım. Böylece,

$$F\big(u + t\alpha(v,u)\eta(v,u)\big) = u + t > u + \frac{t}{2} = \max\{F(u), F(v)\}$$

elde ederiz ki bu da K üzerinde F nin η ve α-ya göre quasi α-preinvex fonksiyon olmasını gerektirmez.

Lemma 3.4.10. Quasi α-preinvexlik, pseudo α-invexliği gerektirmez. Benzer şekilde pseudo α-invexlik, quasi α-preinvexliği gerektirmez.

İki örnekle bunu gösterelim.
Örnek 3.4.13. K, $\alpha(v,u)$, $\eta(v,u)$ ve $F(u)$ Örnek 3.4.10. deki gibi olsun. Örnek 3.4.10. ve Örnek 3.4.12. yardımıyla K üzerinde F nin η ve α-ya göre pseudo α-invex olduğunu fakat quasi α-preinvex olmadığını biliyoruz.

Örnek 3.4.14. $K = \mathrm{R}$ ve $\forall u, v \in K$ için $F(u) = u$ ve

$$\alpha(v,u)=\begin{cases}-1, & v\geq u \text{ ise}\\ \ \ 1, & v<u \text{ ise}\end{cases},\quad \eta(v,u)=\begin{cases}1, & v\geq u \text{ ise}\\ 0, & v<u \text{ ise}\end{cases}$$

olsun. O halde K, η ve α-ya göre bir α-invex küme ve

$$\alpha(v,u)\eta(v,u)=\begin{cases}-1, & v\geq u \text{ ise}\\ \ \ 0, & v<u \text{ ise}\end{cases}$$

olur. Sonuç olarak,

$$\left\langle \alpha(v,u)F^{'}(u),\eta(v,u)\right\rangle \geq 0 \Rightarrow \alpha(v,u)\eta(v,u)=0 \Rightarrow v<u \Rightarrow F(v)<F(u)$$

Yazılır. Bu da K üzerinde F nin η ve α-ya göre pseudo α-invex olmadığını gösterir. Öte yandan $\forall u,v\in K$ ve $t\in[0,1]$ için

$$F\left(u+t\alpha(v,u)\eta(v,u)\right)=\begin{cases}u-t\leq F(v), & v\geq u \text{ ise}\\ u=F(u), & v<u \text{ ise}\end{cases}\leq \max\{F(u),F(v)\}$$

yazılır. Bu yüzden K üzerinde F, η ve α-ya göre quasi α-preinvex olur.

4) $\alpha\eta$-,pseudo $\alpha\eta$- ve quasi $\alpha\eta$-monotonluk arasındaki ilişki

Bu bölümde $\alpha\eta$-monotonluk, pseudo $\alpha\eta$-monotonluk ve quasi $\alpha\eta$-monotonluk arasındaki ilişki incelenmiştir.

Tanım 3.4.4. K, α-invex kümesi üzerinde tanımlı $T\ :\ K\rightarrow H$ operatörü, $\forall u,v\in K$ için

i) Eğer

$$\left\langle \alpha(v,u)T(u),\eta(v,u)\right\rangle+\left\langle \alpha(u,v)T(v),\eta(u,v)\right\rangle\leq 0$$

oluyorsa $\alpha\eta$-monoton

ii) Eğer

$$\left\langle \alpha(v,u)T(u),\eta(v,u)\right\rangle+\left\langle \alpha(u,v)T(v),\eta(u,v)\right\rangle< 0$$

oluyorsa strictly $\alpha\eta$-monoton

iii) Eğer $\beta>0$ sabiti varsa ve

$$\left\langle \alpha(v,u)T(u),\eta(v,u)\right\rangle+\left\langle \alpha(u,v)T(v),\eta(u,v)\right\rangle\leq -\beta\left\{\left\|\eta(v,u)\right\|^{2}+\left\|\eta(u,v)\right\|^{2}\right\}$$

oluyorsa strongly $\alpha\eta$-monoton

iv) Eğer

$$\langle \alpha(v,u)T(u),\eta(v,u)\rangle \geq 0 \Rightarrow \langle \alpha(u,v)T(v),\eta(u,v)\rangle \leq 0$$

oluyorsa pseudo $\alpha\eta$ -monoton

v) Eğer

$$\langle \alpha(v,u)T(u),\eta(v,u)\rangle \geq 0 \Rightarrow \langle \alpha(u,v)T(v),\eta(u,v)\rangle < 0$$

oluyorsa strictly pseudo $\alpha\eta$ -monoton

vi) Eğer $\mu > 0$ sabiti varsa ve

$$\langle \alpha(v,u)T(u),\eta(v,u)\rangle + \mu\|\eta(v,u)\|^2 \geq 0 \Rightarrow \langle \alpha(u,v)T(v),\eta(u,v)\rangle \leq 0$$

oluyorsa strongly pseudo $\alpha\eta$ -monoton

vii) Eğer

$$\langle \alpha(v,u)T(u),\eta(v,u)\rangle > 0 \Rightarrow \langle \alpha(u,v)T(v),\eta(u,v)\rangle \leq 0$$

oluyorsa quasi $\alpha\eta$ -monoton

denir.

Lemma 3.4.11. Strict ve strong $\alpha\eta$ -monotonluk, $\alpha\eta$ -monotonluğu gerektirir. Fakat bunun tersi doğru değildir.

Örnek 3.4.15. $K = [0,1]$ ve $\forall u,v \in K$ için $\alpha(v,u) = 1,\ \eta(v,u) = v - u$ ve $T(u) = 1$ olsun. O zaman K, η ve α -ya göre bir α -invex küme ve T, K üzerinde $\alpha\eta$ -monoton olur. Fakat T, ne strictly ne de strongly $\alpha\eta$ -monoton olur.

Lemma 3.4.12. Strict $\alpha\eta$ -monotonluk, strong $\alpha\eta$ -monotonluğu gerektirmez. Benzer biçimde strong $\alpha\eta$ -monotonluk, Strict $\alpha\eta$ -monotonluğu gerektirmez.

Bu durumu iki örnekle izah edelim.

Örnek 3.4.16. $K = \mathrm{R}$ ve $\forall u,v \in K$ için $\alpha(v,u) = 1,\ T(u) = 1$ ve

$$\eta(v,u) = \begin{cases} u - v, & v > u \text{ ise} \\ -1, & v = u \text{ ise} \\ 0, & v < u \text{ ise} \end{cases}$$

olsun. O halde $\forall t \in [0,1]$ için

$$u+t\alpha(v,u)\eta(v,u)=\begin{cases}(1+t)u-tv, & v>u \text{ ise}\\ u-t, & v=u \text{ ise}\\ u, & v<u \text{ ise}\end{cases} \in K,$$

$$\langle\alpha(v,u)T(u),\eta(v,u)\rangle+\langle\alpha(u,v)T(v),\eta(u,v)\rangle=\begin{cases}u-v, & v>u \text{ ise}\\ -2, & v=u \text{ ise}\\ v-u, & v<u \text{ ise}\end{cases}<0$$

olur ki bu da K nın η ve α-ya göre bir α-invex küme ve T nin K üzerinde strictly $\alpha\eta$-monoton olduğunu gösterir.

Öte yandan $\forall\beta>0$ ve $\forall u\in K$ için $v=u+\frac{2}{\beta}$ alalım. O halde

$$\langle\alpha(v,u)T(u),\eta(v,u)\rangle+\langle\alpha(u,v)T(v),\eta(u,v)\rangle=-\frac{2}{\beta}$$

$$-\beta\left\{\|\eta(v,u)\|^2+\|\eta(u,v)\|^2\right\}=-\frac{8}{\beta}$$

olduğunu gösterebiliriz. Bu yüzden K üzerinde T, strongly $\alpha\eta$-monoton değildir.

Örnek 3.4.17. $K=(-\infty,-1)$ ve $\forall u,v\in K$ için $\alpha(v,u)=1$, $T(u)=1$ ve

$$\eta(v,u)=\begin{cases}0, & v\neq u \text{ ise}\\ -1, & v=u \text{ ise}\end{cases}$$

olsun. O halde K, η ve α-ya göre bir α-invex küme olur. $\beta=\frac{1}{2}$ ve $\forall u,v\in K$ için

$$\langle\alpha(v,u)T(u),\eta(v,u)\rangle+\langle\alpha(u,v)T(v),\eta(u,v)\rangle=\begin{cases}0, & v\neq u \text{ ise}\\ -2, & v=u \text{ ise}\end{cases}$$

$$-\beta\left\{\|\eta(v,u)\|^2+\|\eta(u,v)\|^2\right\}=\begin{cases}0, & v\neq u \text{ ise}\\ -1, & v=u \text{ ise}\end{cases}$$

olduğunu gösterebiliriz. Bu yüzden K üzerinde T, strongly $\alpha\eta$-monoton iken strictly $\alpha\eta$-monoton değildir.

Lemma 3.4.13. $\alpha\eta$-monotonluk, pseudo ve quasi $\alpha\eta$-monotonluğu gerektirir. Fakat bunun tersi doğru değildir.

Örnek 3.4.18. $K = \mathbb{R}$ ve $\forall u,v \in K$ için $\eta(v,u) = 1$, $T(u) = 1$ ve

$$\alpha(v,u) = \begin{cases} 1, & v > u \text{ ise} \\ -\frac{1}{2}, & v \le u \text{ ise} \end{cases}$$

olsun. O halde K, η ve α-ya göre bir α-invex küme ve

$$\langle \alpha(v,u)T(u), \eta(v,u) \rangle = \alpha(v,u) = \begin{cases} 1, & v > u \text{ ise} \\ -\frac{1}{2}, & v \le u \text{ ise} \end{cases}$$

olur. Bunun sonucu olarak,

$$\langle \alpha(v,u)T(u), \eta(v,u) \rangle \ge 0 \Rightarrow v > u \Rightarrow \langle \alpha(u,v)T(v), \eta(u,v) \rangle < 0$$

$$\langle \alpha(v,u)T(u), \eta(v,u) \rangle + \langle \alpha(u,v)T(v), \eta(u,v) \rangle = \begin{cases} \frac{1}{2}, & v \ne u \text{ ise} \\ -1, & v = u \text{ ise} \end{cases}$$

yazabiliriz. Bu yüzden K üzerinde T, hem pseudo hem quasi $\alpha\eta$-monoton iken $\alpha\eta$-monoton değildir.

Lemma 3.4.14. Pseudo $\alpha\eta$-monotonluk, quasi $\alpha\eta$-monotonluğu gerektirir. Fakat bunun tersi doğru değildir.

Örnek 3.4.19. $K = \mathbb{R}$ ve $\forall u,v \in K$ için $\alpha(v,u) = 1$, $\eta(v,u) = e^v - e^u$ ve

$$T(u) = \begin{cases} 0, & u \ge 0 \text{ ise} \\ -u, & u < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olsun. O halde K, η ve α-ya göre bir α-invex küme ve

$$\langle \alpha(v,u)T(u), \eta(v,u) \rangle = \begin{cases} 0, & u \ge 0 \text{ ise} \\ -u(e^v - e^u), & u < 0 \text{ ise} \end{cases} \quad \begin{cases} = 0, & u \ge 0 \text{ veya } v = u \text{ ise} \\ > 0, & u < 0 \text{ ve } v > u \text{ ise} \\ < 0, & u < 0 \text{ ve } v < u \text{ ise} \end{cases}$$

olur. Eğer $\langle \alpha(v,u)T(u), \eta(v,u) \rangle > 0$ ise o halde $v > u$ ve

$$\langle \alpha(v,u)T(u), \eta(v,u) \rangle = \begin{cases} 0, & u \ge 0 \text{ ise} \\ -u(e^v - e^u), & u < 0 \text{ ise} \end{cases} \le 0$$

olur. Bu da K üzerinde T nin quasi $\alpha\eta$-monoton olduğunu gösterir.

Öte yandan $u, v \in K$: $v < 0 < u$ için

$$\langle \alpha(v,u)T(u), \eta(v,u) \rangle = 0 \text{ ve } \langle \alpha(u,v)T(v), \eta(u,v) \rangle > 0$$

elde ederiz. Bu yüzden K üzerinde T, pseudo $\alpha\eta$-monoton değildir.

5) α-invexlik ve $\alpha\eta$-monotonluk arasındaki ilişki

Bu bölümde türevlenebilir $F(u)$ nin (strict, strong, pseudo, quasi) α-invexliği ile türevi $F'(u)$ nin (strict, strong, pseudo, quasi) $\alpha\eta$-monotonluğu arasındaki ilişki incelenmiştir.

Lemma 3.4.15. Eğer F sırasıyla strictly, strongly α-invex ise, o zaman türevi $F'(u)$ sırasıyla strictly, strongly $\alpha\eta$-monoton olur.

Teorem 3.4.1. K üzerinde $\beta > 0$ modülü ile $F'(u)$ strongly $\alpha\eta$-monoton olsun. $\forall u, v \in K$ ve $t \in [0,1]$ için

i)

$$\alpha(u, u + t\alpha(v,u)\eta(v,u)) = t\alpha(v,u) \tag{3.21}$$

oluyorsa α simetrik bir fonksiyondur.

ii)

$$\eta(u, u + t\alpha(v,u)\eta(v,u)) = -t\eta(v,u) \tag{3.22}$$

oluyorsa η asimetrik bir fonksiyondur.

iii) $$F(u + \alpha(v,u)\eta(v,u)) \le F(v)$$

varsayımlar sağlanıyorsa K üzerinde 2β modülü ile F, strongly α-invex olur.

İspat. Keyfi olarak $u, v \in K$ ve $t \in [0,1]$ alalım ve $v_t = u + t\alpha(v,u)\eta(v,u)$ olsun. K nın α-invexliği ve $F'(u)$ nin strong $\alpha\eta$-monotonluğu yardımıyla $v_t \in K$ ve

$$\langle \alpha(v_t,u)F'(u), \eta(v_t,u)\rangle + \langle \alpha(u,v_t)F'(v_t), \eta(u,v_t)\rangle \le -\beta\left\{\|\eta(v_t,u)\|^2 + \|\eta(u,v_t)\|^2\right\}$$

olduğunu biliyoruz. (3.21) ve (3.22) den

$$\langle \alpha(v,u)F'(v_t), \eta(v,u)\rangle \ge \langle \alpha(v,u)F'(u), \eta(v,u)\rangle + 2\beta\|\eta(v,u)\|^2 \tag{3.23}$$

yazılır. $\forall t \in [0,1]$ için $g(t) = F(u + t\alpha(v,u)\eta(v,u))$ olsun. O halde (3.23) den

$$g'(t) = \langle \alpha(v,u)F'(v_t), \eta(v,u)\rangle \ge \langle \alpha(v,u)F'(u), \eta(v,u)\rangle + 2\beta\|\eta(v,u)\|^2$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)dt \ge \langle \alpha(v,u)F'(u), \eta(v,u)\rangle + 2\beta\|\eta(v,u)\|^2$$

yazarız. iii) varsayımından

$$F(v)-F(u)\geq\langle\alpha(v,u)F'(u),\eta(v,u)\rangle+2\beta\|\eta(v,u)\|^2$$

elde ederiz ki bu da K üzerinde 2β modülü ile F nin strongly α-invex olduğunu gösterir.

Teorem 3.4.2. K üzerinde $F'(u)$ sırasıyla $\alpha\eta$-monoton veya strictly $\alpha\eta$-monoton olsun. Eğer Teorem 3.4.1. deki i)-iii) hipotezler sağlanırsa F, sırasıyla α-invex veya strictly α-invex olur.

Aşağıdaki lemma strictly pseudo α-invexlik ve strictly pseudo $\alpha\eta$-monotonluk tanımlarının direkt bir sonucudur.

Lemma 3.4.16. K üzerinde eğer F, strictly pseudo α-invex ise o zaman türevi $F'(u)$, strictly pseudo $\alpha\eta$-monoton olur.

Bunun tersiyle ilgili olarak şu teoremi verelim.

Teorem 3.4.3. K üzerinde $F'(u)$ sırasıyla pseudo $\alpha\eta$-monoton veya strictly pseudo $\alpha\eta$-monoton olsun. Eğer Teorem 3.4.1. deki i)-iii) hipotezler sağlanıyorsa F, sırasıyla pseudo α-invex veya strictly pseudo α-invex olur.

İspat. Keyfi olarak $u,v\in K$ ve $t\in[0,1]$ alalım ve $\langle\alpha(v,u)F'(u),\eta(v,u)\rangle\geq 0$ olsun. O halde $v_t=u+t\alpha(v,u)\eta(v,u)\in K$ olduğunda

$$\left\langle\alpha(v_t,u)F'(u),\eta(v_t,u)\right\rangle=t^2\left\langle\alpha(v,u)F'(u),\eta(v,u)\right\rangle\geq 0$$

yazılır. $F'(u)$, pseudo $\alpha\eta$-monoton ve $\langle\alpha(v,u)F'(v_t),\eta(v,u)\rangle\geq 0$ olduğundan

$$\langle\alpha(u,v_t)F'(v_t),\eta(u,v_t)\rangle=-t^2\langle\alpha(v,u)F'(v_t),\eta(v,u)\rangle\leq 0 \tag{3.24}$$

yazabiliriz. $\forall t\in[0,1]$ için $g(t)=F(u+t\alpha(v,u)\eta(v,u))$ olsun. O halde

$$F(v)-F(u)\geq g(1)-g(0)=\int_0^1 g'(t)dt=\int_0^1\langle\alpha(v,u)F'(v_t),\eta(v,u)\rangle dt\geq 0$$

olur. Bu yüzden F, pseudo α-invex olur.

Örnek 3.4.20. $K = \mathrm{R}$ ve $\forall u, v \in K$ için $F(u) = u, \quad \eta(v,u) = v - u$ ve

$$\alpha(v,u) = \begin{cases} -1, & v \geq u \text{ ise} \\ 1, & v < u \text{ ise} \end{cases}$$

olsun. O halde K, η ve α-ya göre bir α-invex küme ve

$$\alpha(v,u)\eta(v,u) = \begin{cases} u - v, & v \geq u \text{ ise} \\ v - u, & v < u \text{ ise} \end{cases}$$

olur. $\langle \alpha(v,u)F'(u), \eta(v,u) \rangle + \|\eta(v,u)\|^2 \geq 0$ olsun. O zaman $\alpha(v,u)(v-u) + (v-u)^2 \geq 0$ ve

$$\langle \alpha(u,v)F'(v), \eta(u,v) \rangle = \begin{cases} u - v \leq -1, & v > u \text{ ise} \\ 0, & v = u \text{ ise} \\ v - u \leq -1, & v < u \text{ ise} \end{cases}$$

yazılır. Bu da K üzerinde $\mu = 1$ modülü ile $F'(u)$ nin strongly pseudo $\alpha\eta$-monoton olduğunu gösterir.

Ayrıca $\forall u, v \in K, \quad v < u$ ve $t \in [0,1]$ için eğer $\langle \alpha(v,u)F'(u), \eta(v,u) \rangle + \|\eta(v,u)\|^2 \geq 0$ ise o zaman $F(v) \leq F(u) - 1 < F(u)$ olur. Bu F nin K üzerinde strongly pseudo α-invex olmadığını gösterir.

Teorem 3.4.4. $F'(u)$, K üzerinde $\mu > 0$ modülü ile strongly pseudo $\alpha\eta$-monoton olsun. Eğer Teorem 3.4.1. deki i)-iii) hipotezler sağlanyorsa o zaman F, K üzerinde $\mu > 0$ modülü ile strongly pseudo α-invex olur.

İspat. $\forall u, v \in K$ ve $t \in [0,1]$ için $v_t = u + t\alpha(v,u)\eta(v,u)$ ve

$$\langle \alpha(v,u)F'(u), \eta(v,u) \rangle + \mu\|\eta(v,u)\|^2 \geq 0$$

olsun. K nın α-invexliği yardımıyla $F'(u)$ strongly pseudo $\alpha\eta$-monoton olduğundan $v_t \in K$ ve

$$\begin{aligned} &\langle \alpha(v_t,u)F'(u), \eta(v_t,u) \rangle + \mu\|\eta(v,u)\|^2 \\ &= t^2\left(\langle \alpha(v,u)F'(u), \eta(v,u) \rangle + \mu\|\eta(v,u)\|^2\right) \geq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise (3.24) eşitsizliğini sağlar. Teorem3.4.3. teki tekniği kullanarak F nin K üzerinde $\mu > 0$ modülü ile strongly pseudo α-invex olduğunu gösterebiliriz.

Şimdi vereceğimiz lemma quasi α-invexlik ve quasi $\alpha\eta$-monotonluğun direkt bir sonucudur.

Lemma 3.4.17. K üzerinde eğer F, quasi α-invex ise o zaman türevi $F'(u)$, quasi $\alpha\eta$-monoton olur.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde elde edilen teorem ve sonuçlar çözüm yöntemleri ile birlikte üç bölüm altında verilmiştir.

4.1. PREINVEX FONKSİYONLAR İÇİN HERMITE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

İlk olarak Teorem 3.2.5. deki (3.16) eşitsizliğinin sol tarafı dikkate alınarak aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 4.1.1. $\eta : K \times K \to \mathbb{R}$ ile ilgili olarak $K \subseteq \mathbb{R}$ açık bir invex küme olsun. Farzedelim ki $f : K \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer K kümesi üzerinde $|f'|$ bir preinvex fonksiyon ise $\forall a, b \in K$ için

$$\left| \frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx - f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2} \right) \right| \le \frac{\eta(b,a)}{8} \left[|f'(a)| + |f'(b)| \right]$$

eşitsizliği sağlanır, [Sarikaya-Alp 2012].

İspat. $a, a+\eta(b,a) \in K$ kabul edelim. η ile ilgili olarak K bir invex küme olduğundan $\forall t \in [0,1]$ için aşağıdaki integrali parçalı biçimde yazabiliriz:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} tf'(a+t\eta(b,a))dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (t-1) f'(a+t\eta(b,a))dt =$$

$$= \left[\frac{tf(a+t\eta(b,a))}{\eta(b,a)} \right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{(t-1) f(a+t\eta(b,a))}{\eta(b,a)} \right]_{\frac{1}{2}}^{1} - \frac{1}{\eta(b,a)} \int_0^1 f(a+t\eta(b,a))dt$$

$$= \frac{1}{\eta(b,a)} f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2} \right) - \frac{1}{[\eta(b,a)]^2} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx. \tag{4.1}$$

$|f'|$ preinvex fonksiyon ve yukardaki (4.1) eşitliği yardımıyla aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz

$$\left|\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx - f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)\right|$$
$$\le \eta(b,a)\left[\int_0^{\frac{1}{2}} t\left|f'(a+t\eta(b,a))\right|dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)\left|f'(a+t\eta(b,a))\right|dt\right]$$
$$\le \eta(b,a)\left[\int_0^{\frac{1}{2}} t\left[(1-t)\left|f'(a)\right|+t\left|f'(b)\right|\right]dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)\left[(1-t)\left|f'(a)\right|+t\left|f'(b)\right|\right]dt\right]$$
$$\le \eta(b,a)\left[\frac{\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|}{8}\right]$$

Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.2. $\eta : K\times K \to \mathbb{R}$ ile ilgili olarak $K\subseteq \mathbb{R}$ açık bir invex küme olsun. Farzedelim ki $f : K\to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $p\in \mathbb{R}$ ve $p>1$ olmak üzere eğer K kümesi üzerinde $|f'|^{\frac{p}{p-1}}$ preinvex fonksiyon ise $\forall a,b\in K$ için

$$\left|\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx - f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)\right|$$
$$\le \frac{\eta(b,a)}{16}\left(\frac{4}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(3\left|f'(a)\right|^{\frac{p}{p-1}}+\left|f'(b)\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}+\left(\left|f'(a)\right|^{\frac{p}{p-1}}+3\left|f'(b)\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right] \tag{4.2}$$

eşitsizliği sağlanır, [Sarikaya-Alp 2012].

İspat. $a,a+\eta(b,a)\in K$ olsun. Hölder eşitsizliği (4.1) eşitliği yardımıyla aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz

$$\left|\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx - f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)\right|$$

$$\leq \eta(b,a)\left[\int_0^{\frac{1}{2}} t\left|f'(a+t\eta(b,a))\right|dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)\left|f'(a+t\eta(b,a))\right|dt\right]$$

$$\leq \eta(b,a)\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int^{\frac{1}{2}}\left|f'(a+t\eta(b,a))\right|^{\frac{p}{p-1}}dt\right)^{\frac{p-1}{p}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|f'(a+t\eta(b,a))\right|^{\frac{p}{p-1}}dt\right)^{\frac{p-1}{p}}\right]$$

$$\leq \frac{\eta(b,a)}{2^{1+\frac{1}{p}}(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left[(1-t)\left|f'(a)\right|^{\frac{p}{p-1}}+t\left|f'(b)\right|^{\frac{p}{p-1}}\right]dt\right)^{\frac{p-1}{p}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left[(1-t)\left|f'(a)\right|^{\frac{p}{p-1}}+t\left|f'(b)\right|^{\frac{p}{p-1}}\right]dt\right)^{\frac{p-1}{p}}\right]$$

$$=\frac{\eta(b,a)}{16}\left(\frac{4}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(3\left|f'(a)\right|^{\frac{p}{p-1}}+\left|f'(b)\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}+\left(\left|f'(a)\right|^{\frac{p}{p-1}}+3\left|f'(b)\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right]$$

Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.3. $\eta : K\times K \to \mathrm{R}$ ile ilgili olarak $K \subseteq \mathrm{R}$ açık bir invex küme olsun. Farzedelim ki $f : K \to \mathrm{R}$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $p \in \mathrm{R}$ ve $p > 1$ olmak üzere eğer K kümesi üzerinde $\left|f'\right|^{\frac{p}{p-1}}$ preinvex fonksiyon ise $\forall a,b \in K$ için

$$\left|\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx - f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)\right| \leq \frac{\eta(b,a)}{16}\left(\frac{4}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}(3^{\frac{p-1}{p}}+1)\left[\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right].$$

eşitsizliği sağlanır, [Sarikaya-Alp 2012].

İspat. (4.2) eşitsizliğini dikkate alırsak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left|\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx - f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{\eta(b,a)}{16}\left(\frac{4}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(3\left|f'(a)\right|^{\frac{p}{p-1}}+\left|f'(b)\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}+\left(\left|f'(a)\right|^{\frac{p}{p-1}}+3\left|f'(b)\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right].$$

$a_1 = 3\left|f'(a)\right|^{\frac{p}{p-1}}$, $b_1 = \left|f'(b)\right|^{\frac{p}{p-1}}$, $a_2 = \left|f'(a)\right|^{\frac{p}{p-1}}$, $b_2 = 3\left|f'(b)\right|^{\frac{p}{p-1}}$ olsun. Burada $p > 1$ için $0 < (p-1)/p < 1$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizliği,

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^s \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^s + \sum_{k=1}^{n} b_k^s$$

ve $(0 \leq s < 1)$ için $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$, $b_1, b_2, ..., b_n \geq 0$ olduğunu dikkate alırsak

$$\frac{\eta(b,a)}{16}\left(\frac{4}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(3\left|f'(a)\right|^{\frac{p}{p-1}}+\left|f'(b)\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}+\left(\left|f'(a)\right|^{\frac{p}{p-1}}+3\left|f'(b)\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right]$$

$$\leq \frac{\eta(b,a)}{16}\left(\frac{4}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(3^{\frac{p-1}{p}}+1\right)\left[\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right]$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.4. $\eta : K \times K \to \mathbb{R}$ ile ilgili olarak $K \subseteq \mathbb{R}$ açık bir invex küme olsun. Farzedelim ki $f : K \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $q \in \mathbb{R}$ ve $q \geq 1$ olmak üzere eğer K kümesi üzerinde $\left|f'\right|^q$ preinvex fonksiyon ise $\forall a, b \in K$ için

$$\left|\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx - f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)\right| \tag{4.3}$$

$$\leq \frac{\eta(b,a)}{8}\left[\left(\frac{2\left|f'(a)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q}{3}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\left|f'(a)\right|^q+2\left|f'(b)\right|^q}{3}\right)^{\frac{1}{q}}\right].$$

eşitsizliği sağlanır, [Sarikaya-Alp 2012].

İspat. $a, a+\eta(b,a) \in K$ olsun. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere iyi bilinen kuvvet ortalama eşitsizliğini ve (4.1) eşitliğini kullanırsak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\left|\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx - f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)\right|$$

$$\leq \eta(b,a)\left[\int_0^{\frac{1}{2}} t\left|f'(a+t\eta(b,a))\right|dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)\left|f'(a+t\eta(b,a))\right|dt\right]$$

$$\leq \eta(b,a)\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} tdt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t\left|f'(a+t\eta(b,a))\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)\left|f'(a+t\eta(b,a))\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$\leq \frac{\eta(b,a)}{8^{\frac{1}{p}}}\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t\left[(1-t)\left|f'(a)\right|^q + t\left|f'(b)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)\left[(1-t)\left|f'(a)\right|^q + t\left|f'(b)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$= \frac{\eta(b,a)}{8}\left[\left(\frac{2\left|f'(a)\right|^q + \left|f'(b)\right|^q}{3}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{\left|f'(a)\right|^q + 2\left|f'(b)\right|^q}{3}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.5. $\eta : K\times K \to \mathbb{R}$ ile ilgili olarak $K \subseteq \mathbb{R}$ açık bir invex küme olsun. Farzedelim ki $f : K \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $q\in \mathbb{R}$ ve $q \geq 1$ olmak üzere eğer K kümesi üzerinde $\left|f'\right|^q$ preinvex fonksiyon ise $\forall a,b\in K$ için

$$\left|\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx - f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)\right| \leq \frac{\eta(b,a)}{8}\left(\frac{2^{\frac{1}{q}}+1}{3^{\frac{1}{q}}}\right)\left[\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right]$$

eşitsizliği sağlanır, [Sarikaya-Alp 2012].

İspat. (4.3) eşitsizliğini dikkate alınırsa

$$\left|\frac{1}{\eta(b,a)}\int_{a}^{a+\eta(b,a)} f(x)dx - f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)\right|$$
$$\leq \frac{\eta(b,a)}{8}\left[\left(\frac{2|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{3}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{|f'(a)|^q + 2|f'(b)|^q}{3}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

yazılır. Kabul edelim ki $a_1 = 2|f'(a)|^q/3$, $b_1 = |f'(b)|^q/3$ ve $a_2 = |f'(a)|^q/3$, $b_2 = 2|f'(b)|^q/3$ olsun. Burada $q \geq 1$ için $0 < 1/q \leq 1$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^s \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^s + \sum_{k=1}^{n} b_k^s.$$

eşitsizliğini kullanarak ve $(0 \leq s < 1)$, $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$, $b_1, b_2, ..., b_n \geq 0$, için

$$\frac{\eta(b,a)}{8}\left[\left(\frac{2|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{3}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{|f'(a)|^q + 2|f'(b)|^q}{3}\right)^{\frac{1}{q}}\right] \leq \frac{\eta(b,a)}{8}\left(\frac{2^{\frac{1}{q}}+1}{3^{\frac{1}{q}}}\right)\left[|f'(a)| + |f'(b)|\right].$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece ispat tamamlanmış olur.

4.2. LOG-PREINVEX FONKSİYONLAR İÇİN HERMITE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde log-preinvex fonksiyonlar için Teorem 3.2.5. deki (3.16) eşitsizliğinin sol tarafı dikkate alınarak aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 4.2.1. $\eta : K \times K \to \mathbb{R}$ ile ilgili olarak $K \subseteq \mathbb{R}$ açık bir invex küme olsun. Farzedelim ki $f : K \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer K kümesi üzerinde $|f'|$ log-preinvex fonksiyon ise $\forall a, b \in K$ için

$$\left|\frac{1}{\eta(b,a)}\int_{a}^{a+\eta(b,a)} f(x)dx - f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)\right| \leq \eta(b,a)\left(\frac{|f'(b)|^{\frac{1}{2}} - |f'(a)|^{\frac{1}{2}}}{\log|f'(b)| - \log|f'(a)|}\right)^2$$

eşitsizliği sağlanır, [Sarikaya-Alp 2012].

İspat. $a, a+\eta(b,a) \in K$ alalım. (4.1) eşitliği dikkate alınırsa aşağıdaki integral parçalı olarak yazılabilir.

$$\left|\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx - f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)\right|$$

$$\leq \eta(b,a)\left[\int_0^{\frac{1}{2}} t\left|f'(a+t\eta(b,a))\right|dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)\left|f'(a+t\eta(b,a))\right|dt\right]$$

$$\leq \eta(b,a)\left[\int_0^{\frac{1}{2}} t\left|f'(a)\right|^{1-t}\left|f'(b)\right|^{t} dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)\left|f'(a)\right|^{1-t}\left|f'(b)\right|^{t} dt\right]$$

$$= \eta(b,a)\left[\int_0^{\frac{1}{2}} \left|f'(a)\right| t\left(\frac{\left|f'(b)\right|}{\left|f'(a)\right|}\right)^{t} dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)\left|f'(b)\right|\left(\frac{\left|f'(b)\right|}{\left|f'(a)\right|}\right)^{1-t} dt\right]$$

$$= \eta(b,a)\left[\frac{\left|f'(a)\right|}{\log\left|f'(b)\right|-\log\left|f'(a)\right|}\left[-\frac{1}{\log\left|f'(b)\right|-\log\left|f'(a)\right|}\left(\frac{\left|f'(b)\right|}{\left|f'(a)\right|}\right)^{t}\right]_0^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.+\left[\frac{1}{\log\left|f'(b)\right|-\log\left|f'(a)\right|}\left(\frac{\left|f'(b)\right|}{\left|f'(a)\right|}\right)^{t}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}\right]$$

$$= \eta(b,a)\left[\frac{-2\left|f'(a)\right|^{\frac{1}{2}}\left|f'(b)\right|^{\frac{1}{2}}}{\left(\log\left|f'(b)\right|-\log\left|f'(a)\right|\right)^2} + \frac{\left|f'(a)\right|}{\left(\log\left|f'(b)\right|-\log\left|f'(a)\right|\right)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{\left|f'(a)\right|}{\left(\log\left|f'(b)\right|-\log\left|f'(a)\right|\right)^2}\right]$$

$$= \eta(b,a)\left[\frac{\left|f'(b)\right|^{\frac{1}{2}}-\left|f'(a)\right|^{\frac{1}{2}}}{\log\left|f'(b)\right|-\log\left|f'(a)\right|}\right]^2$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.2. $\eta : K\times K \to \mathbb{R}$ ile ilgili olarak $K\subseteq \mathbb{R}$ açık bir invex küme olsun. Farzedelim ki $f : K\to\mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $q\in\mathbb{R}$ ve $q\geq 1$ olmak üzere eğer K kümesi üzerinde $|f'|^q$ log-preinvex fonksiyon ise $\forall a,b\in K$ için

$$\left|\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx - f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)\right| \leq \eta(b,a)\left[\frac{|f'(a)|^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{p}}(p+1)^{\frac{1}{p}}q^{\frac{1}{q}}}\left(\frac{|f'(b)|^{\frac{q}{2}}-|f'(a)|^{\frac{q}{2}}}{\log|f'(b)|-\log|f'(a)|}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

eşitsizliği sağlanır, [Sarikaya-Alp 2012].

İspat. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere Hölder eşitsizliği ve (4.1) eşitliğini kullanılarak

$$\left|\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx - f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)\right|$$

$$\leq \eta(b,a)\left[\int_0^{\frac{1}{2}} t|f'(a+t\eta(b,a))|dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)|f'(a+t\eta(b,a))|dt\right]$$

$$\leq \eta(b,a)\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}|f'(a+t\eta(b,a))|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} dt + \left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}|f'(a+t\eta(b,a))|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$\leq \eta(b,a)\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left(|f'(a)|^{1-t}|f'(b)|^t\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(|f'(a)|^{1-t}|f'(b)|^t\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$=\eta(b,a)\left[\frac{|f'(a)|^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{p}}(p+1)^{\frac{1}{p}}q^{\frac{1}{q}}}\left(\frac{|f'(b)|^{\frac{q}{2}}-|f'(a)|^{\frac{q}{2}}}{\log|f'(b)|-\log|f'(a)|}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Klasik log-preinvex fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği'nin sol tarafıyla yardımıyla aşağıdaki sonuçlar verilmiştir.

Sonuç 4.2.1. Teorem 4.2.1. şartı altında $\eta(b,a)=b-a$ olarak seçilirse

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq (b-a)\left(\frac{|f'(b)|^{\frac{1}{2}} - |f'(a)|^{\frac{1}{2}}}{\log|f'(b)| - \log|f'(a)|}\right)^2$$

eşitsizliği elde edilir, [Sarikaya-Alp 2012].

Sonuç 4.2.2. Teorem 4.2.2. şartı altında $\eta(b,a)=b-a$ olarak seçilirse

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq (b-a)\left[\frac{|f'(a)|^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{p}}(p+1)^{\frac{1}{p}} q^{\frac{1}{q}}}\left(\frac{|f'(b)|^{\frac{q}{2}} - |f'(a)|^{\frac{q}{2}}}{\log|f'(b)| - \log|f'(a)|}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

eşitsizliği elde edilir, [Sarikaya-Alp 2012].

4.3. ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARA GENİŞLETME

Bu bölümde Sonuç 4.2.1. ve Sonuç 4.2.2. $\mathbb{R}^n$ nin invex alt kümelerinde tanımlanan çok değişkenli fonksiyonlara genişletilmiştir.

$K \subseteq \mathbb{R}^n$, $\eta : K \times K \to \mathbb{R}^n$ e göre invex küme olsun. $\forall x, y \in K$ için x ve $v := x + \eta(y,x)$ noktalarını birleştiren η -path P_{xv} aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$P_{xv} = \{z : z = x + t\eta(y,x) : t \in [0,1]\}.$$

Önerme 4.3.1. $K \subseteq \mathbb{R}^n$, $\eta : K \times K \to \mathbb{R}^n$ e göre invex bir küme ve $f : K \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. K üzerinde η koşul C şartını sağlasın. $\forall x, y \in K$ için η -path P_{xv} üzerinde η -e göre f log-preinvex fonksiyondur ancak ve ancak $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ aşağıdaki gibi tanımlanan

$$\varphi(t) := f(x + t\eta(y,x)),$$

φ, $[0,1]$ üzerinde log-konvex fonksiyondur.

İspat. φ, $[0,1]$ üzerinde log-konvex ve $z_1 := x + t_1\eta(y,x) \in P_{xv}$, $z_2 := x + t_2\eta(y,x) \in P_{xv}$ olsun. $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere koşul C yi kullanılarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir

$$
\begin{aligned}
f(z_1+\lambda\eta(z_2,z_1)) &= f(x+((1-\lambda)t_1+\lambda t_2)\eta(y,x)) \\
&= \varphi((1-\lambda)t_1+\lambda t_2) \\
&\le [\varphi(t_1)]^{(1-\lambda)}[\varphi(t_2)]^{\lambda} \\
&= [f(z_1)]^{(1-\lambda)}[f(z_2)]^{\lambda}
\end{aligned}
$$

Bu yüzden η-path P_{xv} üzerinde η ile ilgili olarak f log-preinvex fonksiyon olur.

Tersine $x,y\in K$ ve η-path P_{xv} üzerinde η-e göre f log-preinvex fonksiyon olsun. Farzedelim ki $t_1,t_2\in[0,1]$ olsun. $\forall\lambda\in[0,1]$ için

$$
\begin{aligned}
\varphi((1-\lambda)t_1+\lambda t_2) &= f(x+((1-\lambda)t_1+\lambda t_2)\eta(y,x)) \\
&= f(x+t_1\eta(y,x)+\lambda\eta(x+t_2\eta(y,x),x+t_1\eta(y,x))) \\
&\le [f(x+t_1\eta(y,x))]^{(1-\lambda)}[f(x+t_2\eta(y,x))]^{\lambda} \\
&= [\varphi(t_1)]^{(1-\lambda)}[\varphi(t_2)]^{\lambda}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir.

Bu yüzden φ, $[0,1]$ üzerinde log-konvex fonksiyon olur ve ispat tamamlanmış olur.

Aşağıdaki teorem, sonuç 4.2.1. in çok değişkenli fonksiyonlara genelleştirilmişidir.

Teorem 4.3.1. $K\subseteq \mathbb{R}^n$, $\eta : K\times K\to \mathbb{R}^n$ e göre invex bir küme ve $f : K\to \mathbb{R}^+$ bir fonksiyon olsun. K üzerinde η koşul C şartını sağlasın. $\forall x,y\in K$ için η-path P_{xv} üzerinde η-e göre f log-preinvex fonksiyon. $\forall a,b\in(0,1)$ olmak üzere $a<b$ için

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b\left(\int_0^s f(x+t\eta(y,x))dt\right)ds-\int_0^{\frac{a+b}{2}} f(x+s\eta(y,x))ds\right| \\
&\le (b-a)\left[\frac{[f(x+b\eta(y,x))]^{\frac{1}{2}}-[f(x+a\eta(y,x))]^{\frac{1}{2}}}{\log f(x+b\eta(y,x))-\log f(x+a\eta(y,x))}\right]^2 .
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

eşitsizliği elde edilir, [Sarikaya-Alp 2012].

İspat. $x,y\in K$ ve $a,b\in(0,1)$ ile $a<b$ olsun. η-path P_{xv} üzerinde η ile ilgili olarak f log-preinvex olduğundan Önerme 4.3.1 i kullanarak $\varphi : [0,1]\to \mathbb{R}^+$ için,

$$\varphi(t) := f(x+t\eta(y,x))$$

şeklinde tanımlanan φ fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde log-konvex olur.

Şimdi $\phi : [0,1] \to \mathrm{R}^+$ fonksiyonu

$$\phi(t) := \int_0^t \varphi(s)ds = \int_0^t f(x + s\eta(y,x))ds$$

olarak tanımlansın.

Açık olarak her $\forall t \in (0,1)$ için

$$\phi'(t) = \varphi(t) = f(x + t\eta(y,x)) \geq 0$$

eşitsizliği elde edilir.

Bu yüzden $|\phi'(t)| = \phi'(t)$ olur. Sonuç 4.2.1. in uygulanmasıyla

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b \phi(t)dt - \phi\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leq (b-a) \left(\frac{|\phi'(b)|^{\frac{1}{2}} - |\phi'(a)|^{\frac{1}{2}}}{\log|\phi'(b)| - \log|\phi'(a)|} \right)^2$$

eşitsizliği ϕ yi sağlar. Böylece (4.4) elde edilir.

Uyar 4.3.1. $\varphi : [0,1] \to \mathrm{R}^+$ bir fonksiyon ve q bir pozitif reel sayı olsun. φ log-konvex fonksiyon ancak ve ancak $\varphi^q : [0,1] \to \mathrm{R}^+$ log-konvex fonksiyondur. Gerçekten $\forall x, y \in [0,1]$ için

$$\left[[\varphi(x)]^{1-t} [\varphi(y)]^t \right]^q = [\varphi^q(x)]^{1-t} [\varphi^q(y)]^t$$

eşitliği kolayca görülür.

Bu nedenle eğer $t \in [0,1]$ ise

$$\varphi(tx + (1-t)y) \leq [\varphi(x)]^{1-t} [\varphi(y)]^t \Leftrightarrow \varphi^q(tx + (1-t)y) \leq [\varphi^q(x)]^{1-t} [\varphi^q(y)]^t$$

elde edilir.

Aşağıdaki teorem, Sonuç 4.2.2. nin çok değişkenli fonksiyonlara genelleştirilmişidir.

Teorem 4.3.2. $K \subseteq \mathrm{R}^n$, $\eta : K \times K \to \mathrm{R}^n$ e göre invex bir küme ve $f : K \to \mathrm{R}^+$ bir fonksiyon olsun. K üzerinde η koşul C şartını sağlasın. $\forall x, y \in K$ için η-path P_{xv} üzerinde η-e göre f log-preinvex fonksiyon. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ şartıyla her $p > 1$ ve $a, b \in (0,1)$ ile $a < b$ olmak üzere

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b\left(\int_0^s f\left(x+t\eta(y,x)\right)dt\right)ds-\int_0^{\frac{a+b}{2}} f\left(x+s\eta(y,x)\right)ds\right|$$

$$\leq (b-a)\left[\frac{\left[f\left(x+a\eta(y,x)\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{p}}(p+1)^{\frac{1}{p}}q^{\frac{1}{q}}}\left(\frac{\left[f\left(x+b\eta(y,x)\right)\right]^{\frac{q}{2}}-\left[f\left(x+a\eta(y,x)\right)\right]^{\frac{q}{2}}}{\log f\left(x+b\eta(y,x)\right)-\log f\left(x+a\eta(y,x)\right)}\right)^{\frac{1}{q}}\right] \tag{4.5}$$

eşitsizliği elde edilir, [Sarikaya-Alp 2012].

İspat. $x,y\in K$ ve $a,b\in(0,1)$ ile $a<b$ olsun. ϕ ve φ Teorem 4.3.1. de tanımlanan fonksiyonlar olsun. $|\phi'|:[0,1]\to \mathrm{R}^+$ fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde log-konvex olduğundan Uyarı 4.3.1. yardımıyla $|\phi'|^q$ fonksiyonu da $[0,1]$ üzerinde log-konvex olur. Şimdi sonuç 4.2.2. nin ϕ 'ye uygulanmasyla

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b \phi(x)dx-\phi\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq (b-a)\left[\frac{|\phi'(a)|^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{p}}(p+1)^{\frac{1}{p}}q^{\frac{1}{q}}}\left(\frac{|\phi'(b)|^{\frac{q}{2}}-|\phi'(a)|^{\frac{q}{2}}}{\log|\phi'(b)|-\log|\phi'(a)|}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

(4.5) eşitsizsliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmamızda preinvex ve log-preinvex fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Eşitsizliğinin sol tarafıyla alakalı teoremler ve sonuçlar elde ettik. Benzer biçimde quasi preinvex ve quasi konvex fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Eşitsizliğinin sol tarafıyla ilgili teoremler ve sonuçlar elde edilebilir. Bizim elde ettiğimiz teorem ve sonuçlar optimizasyon teoerisinde kullanılabilir. Yine bununla ilgili matematik programlamada ve mühendislikte uygulama alanları araştırılabilir.

6. KAYNAKLAR

Barani A., Ghazanfari A.G. and Dragomir S.S., *Hermite-Hadamard inequality through prequsiinvex functions*, (**2011**).

Ben-Israel A. and Mond B., *What is invexity?*, J. Austral. Math. Soc., Ser. B, 28, No. 1, 1-9, (**1986**).

Dragomir S.S. and Agarwal R.P., *Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and trapezoidal formula*, Appl. Math. Lett., 11(5) 91—95, (**1998**).

Dragomir S.S. and Pearce C.E.M., *Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications*, RGMIA Monographs, Victoria University, (**2000**).

Fan L., and Guo Y., *On strongly α-preinvex functions*, J Math. Anal. Appl. 330 (**2007**) 1412-1425

Hanson M. A., *On sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions*, J. Math. Anal. Appl. 80 545-550, (**1981**).

Hardy G. H., Littlewood J. E. and Polya G., *Inequalities,* Cambridge Universite Press (**1934**).

Jensen J. L. W. V., *Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes*, Acta Mathematica, Volume 30, Issue 1, pp 175-193 (**1906**).

Kirmaci U. S., *Inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to midpoint formula,* Appl. Math. Comp., 147, 137-146, (**2004**).

Kirmaci U. S. and Ozdemir M. E., *On some inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to midpoint formula*, Appl. Math. Comp., 153, 361-368, (**2004**).

Kirmaci U. S., *Improvement and further generalization of inequalities for differentiable mappings and applications,* Computers and Math. with Appl., 55, 485-493, (**2008**).

Krzysztof C K., *Convergence and efficiency of subgradient methods for quasiconvex minimization*, Math. Program. 90, no. 1, Ser. A, 1–25, (**2001**).

Lin M., *The AM-GM Inequality and CBS Inequality Are Equivalent*, The Math. Intelligencer, Volume 34, Issue 2, p 6 (**2012**).

Mohan S. R. and Neogy S. K., *On invex sets and preinvex functions*, J. Math. Anal. Appl. 189, 901—908, (**1995**).

Niculescu, C. P. and Persson L-E., *Convex Functions and Their Applications*, Canadian Math Society, (**2006**).

Noor M. A., *Variational-like inequalities*, A Jour. Math. Prog. and Op. R., Volume 30, Issue 4(**1994**).

Noor M. A., *Invex equilibrium problems*, J. Math. Anal. Appl. Volume 302, Issue 2, Pages 463–475 (**2005**).

Noor M. A., *Some new classes of nonconvex functions*, Nonl. Funct. Anal. Appl., 11,165-171, (**2006**).

Noor M. A., and Noor K. L., *Some characterizations of strongly preinvex functions*, , J. Math. Anal. Appl. Volume 316, Issue 2, Pages 697–706 (**2006**).

Noor M. A., *On Hadamard integral inequalities involving two log-preinvex functions*, J. Inequal. Pure Appl. Math., 8 , No. 3, 1-6, Article 75, (**2007**).

Noor M. A., *Hadamard integral inequalities for product of two preinvex function*, Nonl. Anal. Forum, 14, 167-173, (**2009**).

Pearce C. E. M. and Pečarić J., *Inequalities for differentiable mappings with application to special means and quadrature formulae*, Appl. Math. Lett., 13(2), 51—55, (**2000**).

Peng Z., *Remarks on new properties of preinvex functions*, Modern Applied Science Vol. 3, No.11 (**2009**).

Pini R., *Invexity and generalized Convexity*, Optimization 22, 513-525, (**1991**).

Roberts A.W. and Varberg D.E. *Convex functions*, AP, (ISBN 0125897405), (**1973**).

Saglam A., Sarikaya M.Z. and Yildirim H., *Some new inequalities of Hermite-Hadamard's type*, Kyungpook Math. Jour., 50, 399-410, (**2010**).

Sarikaya M. Z., Saglam A. and Yildirim H., *New inequalities of Hermite-Hadamard type for functions whose second derivatives absolute values are convex and quasi-convex*, Inter. Jour. of Open Prob. in Comp. Science and Math., (IJOPCM), 5(3), (**2012**).

Sarikaya M. Z., Saglam A. and Yildirim H., *On some Hadamard-type inequalities for h-convex functions*, Jour. of Math. Ineq., Volume 2, Number 3, 335-341, (**2008**).

Sarikaya M. Z., Avci M. and Kavurmaci H., *On some inequalities of Hermite-Hadamard type for convex functions*, ICMS Inter. Conf. on Math. Science. AIP Conference Proceedings 1309, 852 (**2010**).

Sarikaya M. Z. and Aktan N., *On the generalization some integral inequalities and their applications*, Math. and Comp. Modelling, Volume 54, Issues 9-10, Pages 2175-2182, (**2011**).

Sarikaya M. Z., Set E. and Ozdemir M. E., *On some new inequalities of Hadamard type involving h-convex functions*, Acta Mathematica Universitatis Comenianae, Vol. LXXIX, 2, pp. 265-272, (**2010**).

Sarikaya M. Z., Alp N., and Bozkurt H., *On Hermite-Hadamard type integral inequalities for preinvex and log-preinvex functions*, ICAAM First Inter. Confer. on Anal. and App. Math, (**2012**).

Weir T. and Mond B., *Preinvex functions in multiobjective optimization*, J. Math. Anal. Appl., 136, pp. 29–38, (**1988**).

Yang X. M. and Li D., *On properties of preinvex functions*, J. Math. Anal. Appl. 256, 229-241, (**2001**).

7. EKLER

Tezin oluşumunda önemli bir rol oynayan preinvex ve log-preinvex fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sol tarafıyla alakalı oluşturduğumuz eşitsizlikler aşağıdaki kaynaklarda sunulmuştur.

1) **M. Zeki Sarikaya,** Necmettin Alp and Hakan Bozkurt, On Hermite-Hadamard Type Integral Inequalities for preinvex and log-preinvex functions, **Contemporary Analysis and Applied Mathematics,** in press .

2) **M. Zeki Sarikaya,** Hakan Bozkurt and Necmettin Alp, On Hadamard Type Integral Inequalities for nonconvex Functions, **Mathematical Sciences And Applications E-Notes,** in press .

3) **M. Zeki Sarıkaya**, Necmettin Alp ve Hakan Bozkurt, "*On Hermite-Hadamard type integral inequalities for preinvex and log-preinvex functions*"**, ICAAM First International Conference on Analysis and Applied Mathematics,** (2012)

4) **M. Zeki Sarıkaya**, Hakan Bozkurt ve Necmettin Alp, "*On Hadamard type integral inequalities for nonconvex functions*"**, ICAAM First International Conference on Analysis and Applied Mathematic**s, (2012)

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	: ALP, Necmettin
Uyruğu	: T.C
Doğum tarihi ve Yeri	: 10.11.1985/ Gerger
Telefon	: (0537) 898 40 62
e-mail	: placenn@gmail.com, necmettinalp@outlook.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Lisans	Selçuk Ü. /Matematik Öğr.	2009
Lise	Plevne Lisesi	2005

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2009-2010	Gümüşova Lisesi	Matematik Öğrt.
2010-2011	Mehmetçik Dersanesi	Matematik Öğrt.
2011-2013	Gümüşova Lisesi	Matematik Öğrt.

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1) **M. Zeki Sarikaya,** Necmettin Alp and Hakan Bozkurt, On Hermite-Hadamard Type Integral Inequalities for preinvex and log-preinvex functions, **Contemporary Analysis and Applied Mathematics,** in press .

2) **M. Zeki Sarikaya,** Hakan Bozkurt and Necmettin Alp, On Hadamard Type Integral Inequalities for nonconvex Functions, **Mathematical Sciences And Applications E-Notes,** in press .

3) **M. Zeki Sarıkaya**, Necmettin Alp ve Hakan Bozkurt, "*On Hermite-Hadamard type*

*integral inequalities for preinvex and log-preinvex functions***”, ICAAM First International Conference on Analysis and Applied Mathematics,** (2012)

4) **M. Zeki Sarıkaya**, Hakan Bozkurt ve Necmettin Alp, “*On Hadamard type integral inequalities for nonconvex functions***”, ICAAM First International Conference on Analysis and Applied Mathematic**s**,** (2012)