T.C.

DÜZCE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HEMEN HEMEN KENMOTSU f -MANİFOLDLARIN BİR GENELLEŞTİRİLMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YAVUZ SELİM BALKAN

HAZİRAN 2013

DÜZCE

KABUL VE ONAY BELGESİ

Yavuz Selim BALKAN tarafından hazırlanan ‘’Hemen Hemen Kenmotsu f-Manifoldların Bir Genelleştirilmesi’’ isimli lisansüstü tez çalışması, Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun 03.06.2013 tarih ve2013285 sayılı kararı ile oluşturulan jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Üye

(Tez Danışmanı)

Doç. Dr. Nesip AKTAN

Düzce Üniversitesi

Üye	Üye
Prof. Dr. Murat TOSUN	Prof. Dr. İsmet YILDIZ
Sakarya Üniversitesi	Düzce Üniversitesi

Tezin Savunulduğu Tarih : 10.06.2013

ONAY

Bu tez ile Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yavuz Selim BALKAN’ın Matematik Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans derecesini almasını onamıştır.

Prof. Dr. Haldun MÜDERRİSOĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

10 Haziran 2013

Yavuz Selim BALKAN

Sevgili Aileme ve Hatice'ye

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmamı hazırlarken her konuda yardımını esirgemeyen ve bana yol gösteren Sayın Danışman Hocam Doç. Dr. Nesip AKTAN'a ve bu zorlu süreçte bana destek olan çalışma arkadaşlarıma sonsuz teşekkür ediyorum.

10 Haziran 2013 **Yavuz Selim BALKAN**

İÇİNDEKİLER **Sayfa**

SİMGELER VE KISALTMALAR

D	Değme dağılımı
div	Divergens operatörü
J	Hemen hemen kompleks yapı
B	İkinci temel form
$M^n(c)$	c sabit eğrilikli uzay form
$\nabla, \widetilde{\nabla}$	Levi-Civita konneksiyonu
L	Lie türev operatörü
$\chi(M)$	M üzerindeki C^∞ vektör alanları uzayı
TM	M üzerindeki tanjant demeti
$TM^\perp$	M üzerindeki tanjant demetlerinin ortogonal tümleyeni
N	Nijenhuis tensör alanı
$O(s)$	Ortogonal grup
R	Riemann eğrilik tensörü
$U(n)$	Üniter grup
$[,]$	Lie parantez operatörü
Q	Ricci operatörü
S	Ricci tensor alanı

ÖZET

HEMEN HEMEN KENMOTSU f-MANİFOLDLARIN BİR GENELLEŞTİRİLMESİ

Yavuz Selim BALKAN
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Doç. Dr. Nesip AKTAN
Haziran 2013, 72 sayfa

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılarak genel bir literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölümde, gerekli temel kavramlardan söz edilmiştir. Üçüncü bölümde, 1963 yılında Goldberg ve Yano tarafından tanımlanan f-manifold kavramı düşünülmüştür. $(2n+1)$-boyutta yapılan tüm çalışmalar $(2n+s)$-boyuta genelleştirilmiş ve daha genel sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca bazı eğrilik özellikleri, skaler ve kesitsel eğriliği hesaplanmıştır. Son olarak çalışmalarımızı destekleyen iki örnek verilmiştir. Son bölüm olan dördüncü bölüm ise sonuç ve önerilere ayrılarak, konu ile ilgili açık problemlere yer verilmiştir. Bu çalışmadaki amaç ise $(2n+s)$-boyutlu manifoldların bir sınıfı olan hemen hemen Kenmotsu f-manifoldun bazı temel eğrilik özelliklerini hesaplayıp ilerde bu konuda çalışma yapmak isteyenlere yardımcı olmaktır.

Anahtar sözcükler: Kenmotsu manifold, hemen hemen Kenmotsu f-manifold, D-homotetik dönüşümler, çatılı manifoldlar

ABSTRACT

A GENERALIZATION OF ALMOST KENMOTSU f-MANİFOLDS

Yavuz Selim BALKAN
Duzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Departmant of Mathematic
Master of Science Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Nesip AKTAN
June 2013, 72 pages

This thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction section and provide a generel knowledge of literature. In the second chapter, we have given about the basic concepts needed. In the third chapter, considering the concept of f-manifolds defined by Golberg and Yano. All studies in $(2n+1)$-dimensional is generalized to $(2n+s)$-dimensional. Moreover, some curvature properties, scalar and sesctional curvatures are computed. The last chapter is devoted into results and recommondations. Our purpose in this study, we help to another people who want to study in the future computing some basic curvature properties of almost Kenmotsu f-manifolds

Keywords: Kenmotsu manifolds, almost Kenmotsu manifolds, D-homothteic transformations, framed manifolds

EXTENDED ABSTRACT

A GENERALIZATION OF ALMOST KENMOTSU f-MANİFOLDS

Yavuz Selim BALKAN
Duzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Departmant of Mathematic
Master of Science Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Nesip AKTAN
June 2013, 72 pages

1. INTRODUCTION:

In the manifold theory, almost contact manifolds are so important. A differentiable (C^{∞}) $(2n+1)$-dimensional manifold M is called an almost contact manifold if the structural group of its tangent boundle is reducible to $U(n)\times 1$. Firstly, in 1959, Gray defined almost contact structure on odd dimensional manifold. According to this definition, $(2n+1)$-dimensional almost contact structure is constructed by (φ,ξ,η)-triple such that φ is type of $(1,1)$ tensor field, ξ is a vector field and η is a 1-form and this triple satisfies the following properties:

$$\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi \text{ , } \eta(\xi) = 1,$$

where I denotes the identity map. In 1960, Sasaki, defining a smooth metric on (φ,ξ,η) almost contact structure, which is satisfies the following properties,

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y),$$

$$\eta(X) = g(X,\xi)$$

exactly defined almost contact metric structure. In 1961, Sasaki and Hatakeyama prove the normality condition, for almost contact manifolds, which J comlex structure $J^2 = -I$ is integrable.

In 1972, Kenmotsu defined a new class of almost contact metric manifolds. He studied the scalar curvature tensor, the Ricci curvature tensor and some basic properties about this new class manifold. Later, this new maifold was called Kenmotsu manifold.

In 1963, Yano defined f-structure which is a generalization of almost contact structures and almost complex structures.

In 1971, Goldberg and Yano defined that global framed structures are f-structures and global framed manifolds are f-manifolds.

In 2006, Falcitelli and Pastore defined $(2n+s)$-dimensional almost Kenmotsu f-manifolds. In 2009, Hakan Öztürk defined almost α-cosymplectic f-manifolds in Ph.D thesis. In our thesis, we generalize the definition of almost Kenmotsu f-manifolds which was defined by Falcitelli and Pastore.

In this thesis, we consider almost Kenmotsu f-manifolds and we obtain some curvature properties.

2. MATERIAL AND METHODS:

We give some basic contept of manifolds. In first part of this chapter we introduce some fundamental conncetp of manifold theory. First part includes two subsection. In the first subsection, we give Riemannian manifolds and some basic properties. In the second subsection, we introduce some fundamental concept of almost contact metric manifolds. In the second part, we give some basic properties of almost Kenmotsu manifolds.

3. RESULTS AND DISCUSSIONS:

We recall definition of almost Kenmotsu f-manifolds and we obtain some curvature properties. In first part of this chapter, we introduce almost Kenmotsu f-structures. In the second part, we get some basic properties of specific tensor fields. In third part, we give Riemannian properties and we obtain some equalities related with Riemannian tensor properties.

4. CONCLUSION AND OUTLOOK:

In this study, we have a generalization of almost Kenmotsu f-manifolds and some curvature properties. Submanifolds of almost Kenmotsu f-manifolds and symmetry properties are open problems, one can obtain very important results.

1. GİRİŞ

Manifold teorisinde hemen hemen değme manifoldlar çok önemli bir yere sahiptir. $(2n+1)$-boyutlu bir C sınıfından diferensiyellenebilir M manifoldunun tanjant demetlerinin grup yapısı $U(n)\times 1$ tipine indirgenebiliyorsa M ye hemen hemen değme manifold denir. İlk olarak, 1959 yılında J.Gray tek boyutlu manifoldlar üzerinde yaptığı çalışmada $U(n)\times 1$ yapısal grubunun bir indirgenmesiyle hemen hemen değme yapıları tanımlamıştır. Buna göre, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme yapısı

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi, \quad \eta(\xi) = 1$$

denklemlerini sağlayan $(1,1)$-tipli bir tensör alanı φ, bir vektör alanı ξ ve bir $1-$form olan η ile oluşturulan $(\varphi,\xi,\eta)-$üçlüsüyle ifade edilir. Daha sonra 1960 yılında Sasaki (φ,ξ,η) hemen hemen değme yapısı üzerinde

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

$$\eta(X) = g(X,\xi)$$

eşitlikleriyle verilen uygun bir g metriği tanımlayarak hemen hemen değme metrik yapıyı tam olarak ifade etmiştir. 1961 yılında Sasaki ve Hatakeyama hemen hemen değme manifoldlar için normallik şartının J kompleks yapısının $J^2 = -I$ integrallenebilmesi olduğunu ispatlamışlardır.

1972 yılında Kenmotsu hemen hemen değme metrik manifoldların yeni bir sınıfını tanımlamıştır. Eğrilik tensörü ve ricci eğrilik tensörü başta olmak üzere manifoldla ilgili bazı temel kavramlar üzerinde çalışmıştır. Tanımlanan bu manifold daha sonra Kenmotsu manifold olarak isimlendirilmiştir.

1963 de Yano, hemen hemen kompleks ve hemen hemen değme yapıların bir genellemesi olan f-yapıyı tanımladı.1971 de Golberg ve Yano, global çatılandırılan yapıların f-yapı, global çatılandırılan manifoldların f-manifold olduğunu tanımladılar.

2006 yılında Falcitelli ve Pastore almost Kenmotsu manifoldları (2n+s) boyuta taşıyıp hemen hemen Kenmotsu f-manifoldları tanımlamışlardır. 2009 tarihinde Hakan Öztürk doktora tezinde hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldları tanımlamıştır. Biz ise bu tezimizde, Falcitelli ve Pastore tarafından yapılan hemen hemen Kenmotsu f-manifoldların tanımını biraz daha genelleştireceğiz.

İkinci bölümde, manifoldlar ile ilgili temel kavramlar tanıtılacaktır. Bu bölümün ilk kısmında, manifold teorisi ile ilgili temel kavramlar verilmiştir. İlk kısım iki alt kısımdan oluşmaktadır. Birinci alt kısımda, Riemann manifoldlar ve bazı temel özellikleri tanıtılmıştır. İkinci alt kısımda, hemen hemen değme metrik manifoldlar ile ilgili temel kavramlar verilmiştir. İkinci kısımda, hemen hemen Kenmotsu manifoldlar hakkında temel kavramlar tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde, hemen hemen Kenmotsu f-manifoldlar göz önüne bazı eğrilik özellikleri elde edilmiştir. Bu bölümün ilk kısmında; hemen hemen Kenmotsu f-yapılar tanıtılmıştır. İkinci kısımda, bazı özel tensör alanlarının temel özellikleri verilmiştir. Üçüncü kısımda, Riemann eğrilik tensörü özellikleri verilerek bu özelliklerle ilgili bazı eşitlikler elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde ise hemen hemen Kenmotsu f-manifoldlar ile ilgili bazı açık uçlu problemlere yer verilmiştir.

Bu tez çalışmamızda hemen hemen Kenmotsu f- manifoldlar göz önüne alınıp bazı eğrilik özellikleri elde edilmiştir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, diğer bölümlerde çalışmamız için gerekli olan manifoldlar ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

2.1. RİEMANN MANİFOLDLAR

Bu kısımda, Riemann manifoldların temel kavramlar tanıtılacaktır.

Tanım 2.1.1. M, n-boyutlu bir C^∞ manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonlarının halkası $C^\infty(M,\Re)$ olmak üzere,

$$g:\chi(M)\times\chi(M)\rightarrow C^\infty(M,\Re)$$

simetrik, 2-lineer ve pozitif tanımlı bir g dönüşümüne M üzerinde bir Riemann metrik tensörü ve (M,g) ikilisiyle verilen manifolda bir Riemann manifoldu denir (O'neill 1983). M manifoldunun herhangi iki p ve p noktası için M üzerinde bu noktalar birleştiren bir eğri bulunabiliyorsa, M ye bağlantılı manifold adı verilir (O'neill 1983).

Tanım 2.1.2. M bir C^∞ manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\nabla:\chi(M)\times\chi(M)&\rightarrow\chi(M)\\ (X,Y)&\rightarrow\nabla(X,Y)=\nabla_X Y\end{aligned}$$

dönüşümü, $\forall f,g\in C^\infty(M,\Re)$ ve $\forall X,Y\in\chi(M)$için,

(1) $\nabla_X(Y+Z)=\nabla_X Y+\nabla_X Z$,

(2) $\nabla_{(fX+gY)}Z=f\nabla_X Z+g\nabla_Y Z$,

$(3)\quad \nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$

özellikleri sağlanıyorsa ∇ ya M üzerinde bir afin konneksiyon denir (O'neill 1983).

Tanım 2.1.3. (M,g), n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde bir afin konneksiyon olsun. O zaman, ∇ dönüşümü; $\forall X,Y \in \chi(M)$ için,

(1) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$ (Konneksiyonun sıfır torsiyon özeliği),

(2) $Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ (Konneksiyonun metrikle bağdaşma özeliği),

şartlarını sağlıyorsa ∇ ya M üzerinde sıfır torsiyonlu bir Riemann konneksiyonu veya M nin Levi-Civita konneksiyonu denir (O'neill 1983).

Tanım 2.1.4. (M,g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu olsun. O zaman

$$\begin{aligned} R &: \chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M)\to\chi(M) \\ &(X,Y,Z)\to R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \end{aligned} \tag{2.1}$$

ile tanımlanan (1.3)-tipli tensör alanı R ye M nin Riemann eğrilik tensörü denir.

Ayrıca, $\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ olmak üzere, R Riemann eğrilik tensörü

(1) $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$,

(2) $g(R(X,Y)Z,W) = -g(R(X,Y)W,Z)$,

(3) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$,

(4) $g(R(X,Y)Z,W) = g(R(Z,W)X,Y)$

özelliklerini sağlar (O'neill 1983).

Önerme 2.1.1. (M,g) bir Riemann manifoldu, ∇ da M üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu ve φ, $(1,1)$-tipli bir tensör alanı olsun. O zaman,

$$(\nabla_X \varphi)Y = \nabla_X(\varphi Y) - \varphi(\nabla_X Y)$$

dır (O'neill 1983).

Önerme 2.1.2. (M,g) bir Riemann manifoldu olsun. F simetrik bir tensör alan olmak üzere, her X,Y,Z vektör alanları için,

$$g((\nabla_X F)Y,Z) = g(Y,(\nabla_X F)Z)$$

eşitliği geçerlidir (O'neill 1983).

Önerme 2.1.3. (M,g) bir Riemann manifoldu olsun. G ters simetrik bir tensör alanı olmak üzere, her X,Y,Z vektör alanları için,

$$g((\nabla_X G)Y,Z) = -g(Y,(\nabla_X G)Z)$$

dır (O'neill 1983).

Tanım 2.1.5. (M,g) bir Riemann manifoldu olsun. T_pM tanjant uzayının iki boyutlu alt uzay $\prod$ ve $V,W \in \prod$ vektörleri üzerine kurulan paralel kenarın alanı

$$g(V,V)g(W,W) - (g(V,W))^2 \neq 0$$

olsun. O zaman,

$$K(V,W) = \frac{g(R(V,W)W,V)}{g(V,V)g(W,W) - (g(V,W))^2}$$

eşitliğine $\prod$ nin kesit eğriliği denir ve $K(\prod)$ ile gösterilir (O'neill 1983).

Tanım 2.1.6. (M,g) bir Riemann manifoldu ve $\{e_1,...,e_n\}$ lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere,

$$\begin{aligned} S:\chi(M)\times\chi(M)&\to\Re \\ (X,Y)\to S(X,Y)&=\sum_{i=1}^{n} g(R(e_i,X)Y,e_i) \end{aligned} \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlı $(0,2)$-tipindeki S tensör alanına M üzerinde Ricci eğrilik tensörü denir. Ayrca, $(0,2)$-tipli Q Ricci operatörü

$$S(X,Y)=g(QX,Y)$$

eşitliği ile tanımlıdır (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.7. (M,g) bir Riemann manifoldu ve $\{e_1,...,e_n\}$ lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere,

$$r=\sum_{i=1}^{n} S(e_i,e_i)$$

değerine M nin skaler eğriliği denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.9. (M,g) bir Riemann manifoldu ve M üzerinde bir pozitif fonksiyon ρ olsun. Bu durumda, $g^* = \rho^2 g$ eşitliği M üzerinde metrik değişimini tanımlar. Burada her bir noktadaki iki vektör arasındaki açı değişmezdir. Bu nedenle, bu şekilde tanımlanan metrik değişimine metriğin bir konformal değişimi denir. Eğer ρ fonksiyonu sabit ise konformal dönüşüm homotetik olarak adlandırılır. Eğer ρ fonksiyonu özdeş olarak 1'e eşit ise bu dönüşüm bir izometri olarak adlandırılır.

Ayrıca, eğer bir g Riemann metriği lokal düzlemsel olan bir g^* Riemann metriği ile konformal olarak ilişkili ise o zaman, M Riemann manifolduna konformal düzlemsel denir (Yano ve Kon 1984).

Teorem 2.1.1. (M,g) bir Riemann manifoldu olsun. M nin konformal düzlemsel olması için gerekli ve yeterli koşul $n>3$ için $C=0$ ve $n=3$ için $C=0$ olmasıdır (Yano ve Kon 1984).

Teorem 2.1.2. (M,g) bir sabit κ eğriliğine sahip olan bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda, M üzerindeki herhangi X,Y,Z vektör alanlar için,

$$R(X,Y)Z=\kappa[g(Y,Z)X-g(X,Z)Y]$$

dır (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.11. κ sabit eğrilikli, tam ve bağlantılı manifoldlara uzay form denir. n-boyutlu bir M uzay formu $M(\kappa)$ ile gösterilir (Yano ve Kon 1984).

Sonuç 2.1.1. (M,g) bir sabit κ eğrilikli bir uzay form olsun. Bu durumda, $n\geq 2$ için,

$$M(\kappa)=\begin{cases} \kappa=0 & ise \quad M(\kappa)=E^n \ Euclid\ uzayı \\ \kappa=\dfrac{1}{r^2} & ise \quad M(\kappa)=S^n(r)\,küresi \\ \kappa=-\dfrac{1}{r^2} & ise \quad M(\kappa)=H^n(r)\,hiperbolik\ uzay \end{cases}$$

dır (O'neill 1983).

Tanım 2.1.12. M bir C^∞ manifold olmak üzere,

$$\begin{aligned} \phi : I\times M &\to M \\ (t,p) &\to \phi_t(p) \end{aligned}$$

Dönüşümü

(1) $\forall t\in I$ ve $\forall P\in M$ için, $\phi_t : P\to\phi_t(P)$ diffeomorfizm,

(2) $\forall t,s\in I$ ve $\forall P\in M$ için, $\phi_{t+s}(P)=\phi_t(\phi_s(P))$

şartlarını sağlıyorsa ϕ ye M nin diferensiyellenebilir bir 1-parametreli grubu denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.13. M bir C^{∞} manifold ve M üzerindeki bir vektör alanı X olmak üzere, X ile gerilmiş lokal dönüşümlü bir 1-parametreli grup ϕ_t olsun. O zaman, K bir tensör alanı ve $p \in M$ için,

$$\left(L_X K\right)_p = \lim_{t \to o} \frac{1}{t}\left[K_p - \left(\phi_t K\right)_p\right]$$

şeklinde tanımlanan $\left(L_X K\right)$ dönüşümüne X yönünde K nın Lie türevi denir ve $L_X K$ ile gösterilir (Yano ve Kon 1984).

Önerme 2.1.4. M bir C^{∞} manifold ve M üzerindeki bir X vektör alanı yönündeki Lie türevi için,

(1) $L_X\left(Y \otimes Z\right) = \left(L_X Y\right) \otimes Z + Y \otimes \left(L_X Z\right)$ $(Y, Z$ keyfi tensör alanları),

(2) $L_X f = X(f)$ $(f, K$ cismi üzerinde bir fonksiyon),

(3) $L_X V = \left[X, V\right]$ $V \in \chi(M)$,

özellikleri geçerlidir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.14. (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. Her X vektör alanı için, $L_X g = 0$ ise X vektör alanına bir Killing vektör alanı denir (Yano ve Kon 1984).

2.2. HEMEN HEMEN DEĞME MANİFOLDLAR

Bu kısımda, hemen hemen değme manifoldları ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

Tanım 2.2.1. M , $(2n+1)$-boyutlu bir manifold, φ, ξ, η da M üzerinde, sırasıyla, $(1,1)$-tipinde bir tensör alanı, bir vektör alan ve 1 -form olsunlar. Eğer φ, ξ, η için, M üzerinde herhangi bir vektör alanı X olmak üzere

$$\eta(\xi)=1$$
$$\varphi^2 X=-X+\eta(X)\xi \tag{2.3}$$

eşitlikleri sağlanıyorsa o zaman, (φ,ξ,η) üçlüsüne M üzerinde bir hemen hemen değme yap ve bu yap ile birlikte M ye bir hemen hemen değme manifold denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.2. $(2n+1)$-boyutlu M manifoldu (φ,ξ,η) hemen hemen değme yapsı ile verilsin. M üzerinde bir g Riemann metriği,

$$\eta(X)=g(X,\xi)$$
$$g(\varphi X,\varphi Y)=g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y) \tag{2.4}$$

şartlarını sağlıyorsa g metriğine M üzerinde hemen hemen değme metrik, (φ,ξ,η,g) yapısına hemen hemen değme metrik yapı ve (φ,ξ,η,g) yapısı ile M ye de hemen hemen değme metrik manifold denir (Yano ve Kon 1984).

Sonuç 2.2.1. M, (φ,ξ,η,g) hemen hemen değme metrik yapsı ile verilsin. Bu durumda,

$$g(\varphi X,Y)=-g(X,\varphi Y) \tag{2.5}$$

dır (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.3. M üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı (φ,ξ,η,g) olmak üzere,

$$\Phi(X,Y)=g(X,\varphi Y) \tag{2.6}$$

şeklinde tanımlı Φ dönüşümüne hemen hemen değme metrik yapısının temel 2-formu denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.4. (M,ξ,η,g), $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. Eğer η kapalı yani $d\eta=0$ ve $d\Phi=2d\eta\wedge\Phi$ ise (M,ξ,η,g) ye bir hemen hemen Kenmotsu manifold denir (1972 Kenmotsu).

Teorem 2.2.1. (M,ξ,η,g), $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. M nin bir hemen hemen Kenmotsu manifold olması için gerekli ve yeterli koşul

$$(\nabla_X\varphi)Y=-g(\varphi X+hX,Y)\xi-\eta(Y)(\varphi X+hX)$$

olmasıdır (1972 Kenmotsu).

Teorem 2.2.2. (M,ξ,η,g), $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen Kenmotsu manifold olsun. O halde

$$\nabla_X\xi=-\varphi^2X-\varphi hX$$

dır (1972 Kenmotsu).

Tanım 2.2.5. (M,g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $x_1,\dots,x_n$ M nin lokal koordinatları olsun. $w=\sqrt{|g|}dx_1\wedge dx_2\wedge\dots\wedge dx_n$ ve $g(x)>0$ ise w ye M üzerindeki bir hacim form denir. Burada dx_i, M üzerindeki kotanjant uzayda 1-formlar ve $|g|$ M üzerinde metrik tensörün determinantıdır (Spivak 1965).

Tanım 2.2.6. (M,g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. M üzerinde bir hacim form mevcut ise M ye yönlendirilebilirdir denir (Gallot, Hulin, Lafontaine 2004).

Sonuç 2.2.2. Φ temel 2-formu ters simetrik ve Tanım 2.2.3. yardımıyla $\eta\wedge\Phi^n\neq 0$ dır. Böylece Tanım 2.2.5. gereğince (M,φ,ξ,η,g) hemen hemen değme metrik manifoldu yönlendirilebilirdir (Gonzalez 1990).

Tanım 2.2.7. M n-boyutlu bir C^∞ manifold olsun. Eğer w 1-form ise, keyfi X,Y vektör alanları için,

$$2dw(X,Y)=X(w(Y))-Y(w(X))-w([X,Y])$$

dır. Eğer w, 2 -form ise,

$$3dw(X,Y,Z)=X(w(Y,Z))+Y(w(Z,X))+Z(w(X,Y))$$
$$-w([X,Y],Z)-w([Y,Z],X)-w([Z,X],Y)$$

dır (Yano ve Kon 1984).

Önerme 2.2.1. (M,φ,ξ,η,g), $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifold ve ∇ bir Riemann konneksiyonu olsun. Keyfi X,Y,Z vektör alanları için,

(i) $(\nabla_X\Phi)(Y,Z)=g(Y,(\nabla_X\varphi)Z)$,

(ii) $(\nabla_X\Phi)(Y,Z)+(\nabla_X\Phi)(\varphi Y,\varphi Z)=\eta(Z)(\nabla_X\eta)\varphi Y-\eta(Y)(\nabla_X\eta)\varphi Z$,

(iii) $(\nabla_X\eta)Y=g(Y,\nabla_X\xi)=(\nabla_X\Phi)(\xi,\varphi Y)$,

(iv) $2d\eta(X,Y)=(\nabla_X\eta)Y-(\nabla_Y\eta)X$,

(v) $3d\Phi(X,Y,Z)=\underset{X,Y,Z}{\oplus}(\nabla_X\Phi)(Y,Z)$

eşitlikleri geçerlidir. Burada $\underset{X,Y,Z}{\oplus}$, X,Y,Z vektör alanları üzerinden alınan devirli toplam göstermektedir.

Ayrıca, $\{X_i,\varphi X_i,\xi\}$ $i=1,2,...,n$ olmak üzere, M nin açık bir alt cümlesi üzerinde tanımlanan bir lokal ortonormal baz olsun. O zaman, δ operatörü

$$\delta n=-\sum_{i=1}^{n}\{(\nabla_{X_i}\eta)X_i+(\nabla_{\varphi X_i}\eta)\varphi X_i\}$$

şeklinde elde edilir (Gonzalez 1990).

Tanım 2.2.8. M , n-boyutlu bir reel differensiyellenebilir manifold olsun. Eğer M nin her p noktası için $J^2 = -I$ olacak şekilde T_pM tanjant uzayının bir J endomorfizması mevcut ise, o zaman M üzerindeki J tensör alanına bir hemen hemen kompleks yapı adı verilir. Bir J hemen hemen kompleks yapısı ile verilen manifolda bir hemen hemen kompleks manifold denir (Yano ve Kon 1984).

M üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapsı (φ,ξ,η,g) ile verilsin. O zaman, $M \times \Re$ üzerinde herhangi bir vektör alanı

$$\left(X, f\frac{d}{dt}\right)$$

şeklinde tanımlanır. Burada X , M manifolduna teğet bir vektör alan; t , $\Re$ nin bir koordinat ve f , $M \times \Re$ üzerinde bir C^∞ fonksiyondur.

M üzerinde (φ,ξ,η,g) bir hemen hemen değme metrik yapı olsun. Böylece $M \times \Re$ üzerindeki bir hemen hemen kompleks yapı

$$J\left(X, f\frac{d}{dt}\right) = \left(\varphi X - f\xi, \eta(X)\frac{d}{dt}\right)$$

biçiminde tanımlanır. Kolayca $J^2 = -I$ elde edilir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.9. M , n-boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere, M üzerinde $(1,1)$-tipli bir tensör alanı φ olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$N_\varphi(X,Y) = \varphi^2[X,Y] + [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y]$$

şeklinde tanımlı N_φ tensör alana φ tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörü denir (Yano ve Kon 1984).

J , M üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı olsun. Tanım 2.2.8 yardımıyla M üzerinde J tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörü

$$N_J(X,Y) = J^2[X,Y] + [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY]$$

$$= -[X,Y] + [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY]$$

şeklindedir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.10. (M,J) $2n$-boyutlu hemen hemen kompleks manifold olsun. O zaman, $N_J = 0$ ise J dönüşümüne integrallenebilirdir denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.11. M , $2n$-boyutlu bir manifold olmak üzere, eğer $M \times \Re$ üzerindeki bir J hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir ise (φ,ξ,η) hemen hemen değme yapısına normaldir denir (Yano ve Kon 1984).

Önerme 2.2.2. $(2n+1)$-boyutlu M , üzerinde (φ,ξ,η) hemen hemen değme yapısının normal olması için gerek ve yeter koşul

$$N_\varphi + 2d\eta \otimes \xi = 0$$

eşitliğinin sağlamasıdır. Burada N_φ, φ tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörüdür (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.12. (M,J) $2n$-boyutlu bir hemen hemen kompleks manifold olsun. M üzerinde $\forall X,Y \in \chi(M)$ için,

$$g(JX,JY) = g(X,Y)$$

şeklinde verilen g Riemann metriğine Hermit metriği denir. Hermit metriği ile verilen bir hemen hemen kompleks manifolda bir hemen hemen Hermit manifoldu denir. Hermit metriği ile verilen kompleks manifolda ise Hermit manifoldu denir (Blair 2002).

Tanım 2.2.13. (M,J,g) $2n$-boyutlu bir hemen hemen Hermit manifoldu olsun. Her X,Y vektör alanları için,

$$\Omega(X,Y)=g(X,JY)$$

eşitliği ile tanımlanan Ω 2-formuna hemen hemen Hermit yapısının temel 2-formu denir. Eğer $d\Omega=0$ ise (J,g) yapısına hemen hemen Kaehler yapı denir. Bu yapı ile elde edilen manifolda ise hemen hemen Kaehler manifoldu denir. Bir Kaehler yapı ile verilen kompleks manifolda Kaehler manifoldu denir. Bir Hermit manifoldunun bir Kaehler manifold olması için gerekli ve yeterli koşul $\nabla J=0$ eşitliğinin sağlamasıdır (Blair 2002).

Örnek 2.2.1. E^4 Kaehler manifoldunun 3-boyutlu bir reel hiperküresi S^3 olsun. E^4 de S^3 bir birim normali C olmak üzere E^4 ün hemen hemen kompleks tensör alanı J

$$J\ :\ E^4\rightarrow E^4$$

$$JC=-\xi$$

biçiminde tanımlansın. Ozaman ξ, S^3 üzerinde bir birim vektör alanı olur.Yani $\xi\in\chi\left(S^3\right)$ dir. S^3e teğet her bir X vektör alanı için $\eta(X)=g(X,\xi)$ olmak üzere η $1-$formu iyi tanımlıdır. Üstelik $\eta(\xi)=1$ dir. Diğer yandan,

$$JX=\phi X+\eta(X)C$$

eşitliği ile ϕ lineer dönüşümünü tanımlayalım. Buna göre $\forall p=(p_1,p_2,p_3,p_4)\in S^3$ için;

$$J=\begin{bmatrix}0&-I_2\\I_2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$

yapısı yardımı ile;

$$J(C(p))=J(p_1,p_2,p_3,p_4)=(-p_3,-p_{4,}\ p_1,p_2)=-\xi$$

elde edilir. Burada;

$$\xi = \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

dir.

Şimdi $g(X,\xi)\xi$ için;

$$g(X,\xi)\xi = < \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

olduğundan,

$$g(X,\xi)\xi = (x_1 p_3 + x_2 p_4 - x_3 p_1 - x_4 p_2) \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece;

$$\lambda = (x_1 p_3 + x_2 p_4 - x_3 p_1 - x_4 p_2)$$

olmak üzere;

$$g(X,\xi) = \lambda \xi$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca,

$$\phi(\phi X) = J(\phi X) - \eta(\phi X)C$$

$$\phi(\phi X) = J(JX - \eta(X)C) - \eta(JX - \eta(X)C)C$$

$$= J(\begin{bmatrix} -x_3 \\ -x_4 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}) - g(JX - \eta(X)C, \xi)C$$

$$= \begin{bmatrix} -x_1 + \lambda p_3 \\ -x_2 + \lambda p_4 \\ -x_3 - \lambda p_1 \\ -x_4 - \lambda p_2 \end{bmatrix} - < \begin{bmatrix} -x_3 - \lambda p_1 \\ -x_4 - \lambda p_2 \\ -x_1 - \lambda p_3 \\ -x_2 - \lambda p_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \\ -x_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\lambda p_3 - \left[(x_3 - \lambda p_1)p_3 + (x_4 - \lambda p_2)p_4 + (x_1 + \lambda p_3)p_1 + (x_2 + \lambda p_4)p_2\right] p_1 \\ -\lambda p_4 - \left[(x_3 - \lambda p_1)p_3 + (x_4 - \lambda p_2)p_4 + (x_1 + \lambda p_3)p_1 + (x_2 + \lambda p_4)p_2\right] p_2 \\ -\lambda p_1 - \left[(x_3 - \lambda p_1)p_3 + (x_4 - \lambda p_2)p_4 + (x_1 + \lambda p_3)p_1 + (x_2 + \lambda p_4)p_2\right] p_3 \\ -\lambda p_2 - \left[(x_3 - \lambda p_1)p_3 + (x_4 - \lambda p_2)p_4 + (x_1 + \lambda p_3)p_1 + (x_2 + \lambda p_4)p_2\right] p_4 \end{bmatrix}$$

dir. O zaman

$$\phi(\phi X) = -\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi$$

elde edilir. Bununla birlikte,

$$\phi\xi = J\xi - \eta(\xi)C$$

olduğundan,

$$\phi\xi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = 0$$

bulunur. Böylece;

$$\eta(\phi X) = g(\phi X, \xi)$$

$$= g(JX - \eta(X)C, \xi) = 0$$

olduğu da açıkça görülür.

Sonuç olarak (ϕ, ξ, η, g) yapısı S^3 üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı oluşturur (Blair 2002).

2.3. HEMEN HEMEN f-MANİFOLDLAR

Tanım 2.3.1. M, $(2n+s)$-boyutlu bir manifold olsun. M nin tanjant demeti TM olmak üzere, TM üzerinde

$$\varphi^3 + \varphi = 0$$

ve

$$rank\varphi = 2n$$

şartını sağlayan $(1,1)$ tipindeki φ tensör alanına f-yapı denir (Yano ve Kon, 1984). $s = 0$ ise f-yapı bir hemen hemen kompleks yapı eğer $s = 1$ ise f-yapı hemen hemen değme yapıdır.

$$i)P = -\varphi^2 \qquad ii)Q = \varphi^2 + I \tag{2.7}$$

ile tanımlanan iki bütünleyen projeksiyon operatörlere karşılık $boyD = 2n$ ve

$boyD^{\perp} = s$ olacak şekilde D ve $D^{\perp}$ bütünleyen dağılımları vardır (Yano ve Kon, 1984).

Teorem 2.3.1. M, $(2n+s)$-boyutlu bir manifold olsun. φ, M üzerinde bir f-yapı, P ve Q yukarıda tanımlanan bütünleyen projeksiyonlar olmak üzere

$$i)\ \varphi P = P\varphi = \varphi \quad ii)\ \varphi Q = Q\varphi = 0 \quad iii)\ \varphi^2 P = -P \quad iv)\ \varphi^2 Q = 0 \qquad (2.8)$$

eşitlikleri vardır (Ishihara ve Yano, 1964).

(2.8) koşulunu sağlayan P ve Q projeksiyonları yardımı ile TM, biri $2n$ diğeri s boyutlu olan iki dağılımın toplamı olarak,

$$TM = D \oplus D^{\perp}, \quad D \cap D^{\perp} = \{0\} \qquad (2.9)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $D = \mathrm{Im}\varphi$ ve $D^{\perp} = çek\varphi$ dir (Ishihara ve Yano, 1964).

Tanım 2.3.2. M, $(2n+s)$-boyutlu bir manifold ve φ de M üzerinde bir f-yapı olsun. M üzerinde s-tane vektör alanı ξ_i ve s-tane η_i 1-formları olmak üzere

$$\varphi^2 = -I + \sum_{i=1}^{s} \eta_i \otimes \xi_i, \quad \eta_i(\xi_j) = \delta_i^j \qquad (2.10)$$

olacak şekilde $(1,1)$ tipinde bir φ tensör alanı varsa M ye global çatılandırılan manifold ya da kısaca çatılı manifold denir ve $M(\varphi, \xi_i, \eta^i)$ şeklinde gösterilir (Goldberg ve Yano, 1970).

Teorem 2.3.2. $M(\varphi, \xi_i, \eta^i)$ çatılandırılan manifold olsun. Bu durumda

$$i)\ \varphi\xi_i = 0, \quad ii)\ \eta_i \circ \varphi = 0, \quad iii)\ rank\varphi = 2n \qquad (2.11)$$

dir (Goldberg ve Yano, 1970). $M(\varphi, \xi_i, \eta^i)$ global çatılandırılan manifoldu $f.pk$-

manifold olarak isimlendirilmiştir. Bu tanıma denk olarak yapılan $f.pk$-manifold tanımı verilecektir.

Tanım 2.3.3. M, $(2n+s)$-boyutlu bir manifold ve φ de M üzerinde bir f-yapı olsun. Eğer *çek*φ paralelleştirilebilirse (yani $1 \leq i \leq s$ için ξ_i ler paralel ise) M ye çekirdeği paralelleştirilebilen bir f-manifold veya kısaca $f.pk$-manifold denir (Goldberg ve Yano, 1970).

Tanım 2.3.4. $M\left(\varphi, \xi_i, \eta^i\right)$, $(2n+s)$-boyutlu bir çatılandırılan manifold olsun.

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \sum_{i=1}^{s} \eta_i(X)\eta_i(Y) \tag{2.12}$$

$$\eta_i(X) = g(X, \xi_i) \tag{2.13}$$

olacak şekilde bir g Riemann metriği varsa $M\left(\varphi, \xi_i, \eta^i, g\right)$ ye bir çatılandırılan metrik manifold veya kısaca metrik $f.pk$-manifold denir (Ishihara ve Yano, 1964).

Sonuç 2.3.1. $M\left(\varphi, \xi_i, \eta^i, g\right)$ çatılandırılan metrik manifold olsun. Bu durumda

$$g(\varphi X, Y) = -g(X, \varphi Y) \tag{2.14}$$

dir (Ishihara ve Yano, 1964).

Tanım 2.3.5. $M\left(\varphi, \xi_i, \eta^i, g\right)$ bir çatılandırılan metrik manifold olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\Phi(X, Y) = g(X, \varphi Y)$$

ise Φ ye $M\left(\varphi, \xi_i, \eta^i, g\right)$ çatılandırılan metrik manifold üzerinde temel 2-formu denir (Yano ve Kon, 1984).

2.4. HEMEN HEMEN f -MANİFOLDLARIN TORSİYON TENSÖRÜ

$M\left(\varphi,\xi_i,\eta^i,g\right)$, $(2n+s)$-boyutlu bir çatılandırılan metrik manifold olsun. $M\times R^s$, $(2n+s)$-boyutlu bir çarpım manifoldudur. R^s üzerindeki vektör alanları

$$\chi\left(R^s\right)=\left\{\sum_{i=1}^{s} f_i\frac{\partial}{\partial t_i} : f_i\in C^\infty\left(R^s,R\right), 1\leq i\leq s\right\} \tag{2.15}$$

şeklindedir.

$\left(X, f_1\frac{\partial}{\partial t_1},\ldots,f_s\frac{\partial}{\partial t_{s1}}\right)$ ile $M\times R^s$ deki vektör alanları gösterilmektedir. Burada X, M^{2n+s} de bir vektör alanı, $\left(t_1,..t_s\right)$ ile R^s de koordinat sistemi, $f_i\in C^\infty\left(R^s,R\right)$ dir. Ayrıca $M\times R^s$ üzerinde hemen hemen kompleks yapı J yi

$$J:\chi\left(M\times R^s\right)\times\chi\left(M\times R^s\right)$$

$$\left(X,\sum_{i=1}^{s} f_i\frac{\partial}{\partial t_i}\right)\rightarrow J\left(X,\sum_{i=1}^{s} f_i\frac{\partial}{\partial t_i}\right)=\left(\varphi X-\sum_{i=1}^{s} f_i\xi_i,\sum_{i=1}^{s}\eta_i(X)\frac{\partial}{\partial t_i}\right)$$

olarak tanımlanır (Sağbaş, 2010).

Lemma 2.4.1. J dönüşümü lineerdir ve $J^2=-I$ dır (Sağbaş, 2010).

Lemma 2.4.2. $M\left(\varphi,\xi_i,\eta^i,g\right)$, $(2n+s)$-boyutlu bir çatılandırılan metrik manifold olsun. Bu durumda $\left(M\times R^s,J\right)$ bir hemen hemen kompleks manifolddur (Sağbaş, 2010).

Tanım 2.4.1. $M\left(\varphi,\xi_i,\eta^i,g\right)$, $(2n+s)$-boyutlu bir çatılandırılan metrik manifold ve $\left(M\times R^s,J\right)$ bir hemen hemen kompleks manifold olsun. Hemen hemen kompleks yapı J nin Nijenhuis tensörü;

$$N_J\left(\left(X,\sum_{i=1}^{s} f_i\frac{\partial}{\partial t_i}\right),\left(Y,\sum_{i=1}^{s} g_i\frac{\partial}{\partial t_i}\right)\right)=J^2\left(\left(X,\sum_{i=1}^{s} f_i\frac{\partial}{\partial t_i}\right),\left(Y,\sum_{i=1}^{s} g_i\frac{\partial}{\partial t_i}\right)\right)$$

$$+\left(J\left(X,\sum_{i=1}^{s} f_i\frac{\partial}{\partial t_i}\right),J\left(Y,\sum_{i=1}^{s} g_i\frac{\partial}{\partial t_i}\right)\right)$$

$$-J\left(J\left(X,\sum_{i=1}^{s} f_i\frac{\partial}{\partial t_i}\right),\left(Y,\sum_{i=1}^{s} g_i\frac{\partial}{\partial t_i}\right)\right)$$

$$-J\left(\left(X,\sum_{i=1}^{s} f_i\frac{\partial}{\partial t_i}\right),J\left(Y,\sum_{i=1}^{s} g_i\frac{\partial}{\partial t_i}\right)\right)$$

dir (SAĞBAŞ).

Tanım 2.4.2. $(M\times R^s,J)$ bir hemen hemen kompleks manifold olsun. $M\times R^s$ üzerinde

$$[,]:\chi(M\times R^s)\times\chi(M\times R^s)\to\chi(M\times R^s)$$

olmak üzere

$$\left[\left(X,\sum_{i=1}^{s} f_i\frac{\partial}{\partial t_i}\right),\left(Y,\sum_{i=1}^{s} g_i\frac{\partial}{\partial t_i}\right)\right]=\left([X,Y],\sum_{i=1}^{s}\left(X(g_i)-Y(f_i)\right)\frac{\partial}{\partial t_i}\right)\tag{2.16}$$

şeklinde tanımlanan operatöre braklet operatörü denir (Sağbaş, 2010).

Lemma 2.4.3. $(M\times R^s,J)$ bir hemen hemen kompleks manifold ve J hemen hemen kompleks yapının Nijenhuis torsiyon N_J olmak üzere

$$N_J\left((X,0,\ldots,0),(Y,0,\ldots,0)\right)=\left\{N^{(1)}(X,Y),N^{(2)}(X,Y)\frac{\partial}{\partial t_i}\right\}$$

ve

$$N_J\left((X,0,\ldots,0),(0,0,\ldots,0)\right)=\left\{N^{(3)}(X),N^{(4)}(X)\right\}$$

dir. Burada

$$N^{(1)}(X,Y)=[\varphi,\varphi](X,Y)+2\sum_{i=1}^{s}d\eta_i(X,Y)\xi_i$$

$$N^{(2)}(X,Y)=(L_{\varphi X}\eta_i)Y-(L_{\varphi Y}\eta_i)X$$

$$N^{(3)}(X)=(L_{\xi_i}\varphi)X$$

$$N^{(4)}(X)=(L_{\xi_i}\eta_i)X$$

dir (Sağbaş, 2010).

Tanım 2.4.3. $M(\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$, bir çatılandırılan metrik manifold ve $(M\times R^s,J)$ hemen hemen kompleks manifold olsun. J nin Nijenhuis tensör alanı $N_J=0$ ise $M(\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ çatılandırılan metrik manifolduna normaldir denir (Yano ve Kon, 1984).

Teorem 2.4.1. $M(\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$, bir çatılandırılan metrik manifold olsun. Bu yapının normal olabilmesi için gerek ve yeter koşul $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, $N^{(3)}$ ve $N^{(4)}$ tensörlerinin sıfır olmasıdır (Sağbaş, 2010).

Teorem 2.4.2. $M(\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$, bir çatılandırılan metrik manifold olsun. Eğer $N^{(1)}=0$ ise $N^{(2)}=N^{(3)}=N^{(4)}=0$ dır (Sağbaş, 2010).

Teorem 2.4.3. $M(\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$, bir çatılandırılan metrik manifold olsun. $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$2g((\nabla_X\varphi)Y,Z)=3d\Phi(X,\varphi Y,\varphi Z)-3d\Phi(X,Y,Z)+g(N^{(1)}(Y,Z),\varphi X)$$
$$+\sum_{i=1}^{s}\{N^{(2)}(Y,Z)\eta_i(X)+2d\eta_i(\varphi Y,X)\eta_i(Z)-2d\eta_i(\varphi Z,X)\eta_i(Y)\}$$

dir (Sağbaş, 2010).

Teorem 2.4.4. $M\left(\varphi,\xi_i,\eta^i,g\right)$, $(2n+s)$-boyutlu bir f-manifold olsun. $M\left(\varphi,\xi_i,\eta^i,g\right)$ normal ise aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$i)$ $L_{\xi_i}\eta_i=0$

$ii)$ $L_{\xi_i}\varphi=0$

$iii)$ $d\eta_i(X,\varphi Y)=-d\eta_i(\varphi X,Y)$

$iv)$ $\nabla_{\xi_i}\xi_j\in D$

dir (Yano ve Kon, 1984).

2.5. HEMEN HEMEN KENMOTSU f-MANİFOLDLAR

Bu kısımda öncelikle hemen hemen Kenmotsu f-yapılar tanıtılarak, gerekli literatür bilgisi verilmiştir. Bundan sonraki kısımlarda $\overline{\xi}:=\xi_1+...+\xi_s$, $\overline{\eta}:=\eta_1+...+\eta_s$ ve $\overline{\delta}:=\delta_i^1+...+\delta_i^s$ alınacaktır.

Tanım 2.5.1. $M\left(\varphi,\xi_i,\eta^i,g\right)$, $(2n+s)$-boyutlu bir metrik f-manifold olsun. $(1\leq i\leq s)$ olmak üzere her η^i 1-formları ve Φ 2-formu için eğer η^i 1-formları kapalı yani $d\eta^i=0$ ve $d\Phi=2\overline{\eta}\wedge\Phi$ eşitlikleri sağlanıyorsa M ye hemen hemen Kenmotsu f-manifold denir (H. Öztürk, 2009).

M bir hemen hemen Kenmotsu f-manifold olsun. D dağılımı intgrallenebilir olduğundan herhangi bir $X\in\Gamma(\mathrm{D})$ için $L_{\xi_i}\eta^j=0$, $\left[\xi_i,\xi_j\right]\in D$ ve $\left[X,\xi_i\right]\in D$ olur. ∇ Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere, her $X,Y,Z\in\Gamma(TM)$ için

$$2g((\nabla_X\varphi)Y,Z)=2\left(\sum_{j=1}^{s}\left(g(\varphi X,Y)\xi_j-\eta^j(Y)\varphi X,Z\right)\right)+g\left(N(Y,Z),\varphi X\right)\tag{2.17}$$

özelliği sağlanır. Bu denklemde X yerine ξ_i alırsak $\nabla_{\xi_i}\varphi = 0$ elde ederiz. Bu ise $\nabla_{\xi_i}\xi_j \in D^{\perp}$ olduğunu vurgular. $\left[\xi_i, \xi_j\right] = 0$ olduğundan $\nabla_{\xi_i}\xi_j = \nabla_{\xi_j}\xi_i$ bulunur. L, Lie türev operatörünü göstermek üzere $A_i X = -\nabla_X \xi_i$ ve $h_i = \frac{1}{2}\left(L_{\xi_i}\varphi\right)$ operatörlerini tanımlayalım.

Önerme 2.5.1. Her $i \in \{1,...,s\}$ için A_i tensor alanı simetrik bir operatordür ve aşağıdaki özellikleri sağlar (H. Öztürk, 2009).

(1) Her $i \in \{1,...,s\}$ için $A_i\left(\xi_j\right) = 0$ dır.

(2) $A_i \circ \varphi + \varphi \circ A_i = -2\varphi.$

(3) $tr\left(A_i\right) = -2n.$

Önerme 2.5.2. Her $i \in \{1,...,s\}$ için h_i tensör alanı simetrik bir operatördür ve aşağıdaki özellikleri sağlar.

(i) Her $j \in \{1,...,s\}$ için $h_i \xi_j = 0$ dir.

(ii) $h_i \circ \varphi + \varphi \circ h_i = 0.$

(iii) $izh_i = 0.$

(iv) $iz\varphi h_i = 0.$

(Blair 1970)

Önerme 2.5.3. $\nabla\varphi$ operatörü,

$$\left(\nabla_X \varphi\right)Y + \left(\nabla_{\varphi X}\varphi\right)\varphi Y = -\sum_{i=1}^{s}\left[\eta^i(Y)\varphi X + 2g(X,\varphi Y)\xi_i + \eta^i(Y)h_i X\right] \tag{2.18}$$

bağıntısını sağlar (H. Öztürk, 2009).

Önerme 2.5.4. (M,ξ_i,η^j,g), $(2n+s)$-boyutlu bir hemen hemen Kenmotsu f-manifold olsun. O zaman, her $i\in\{1,...,s\}$

$$h_i=0\Leftrightarrow\nabla\xi_i=0$$

eşitliği sağlanır (Pastore ve Dileo 2007) (Kim ve Pak 2005).

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, daha önceki bölümlerde tanıtılan hemen hemen Kenmotsu f-manifold ve bazı Riemann eğrilik özellikleri incelenecek ve hemen hemen Kenmotsu f-manifoldun nulluk tanımı verilip bazı özellikleri elde edilecektir. Rici, skaler ve bazı kesitsel özellikleri elde edilip iki tane örnek verilecektir.

Çalışmanın bundan sonraki kısmı tamamen orijinaldir

3.1. ξ_i KARAKTERİSTİK VEKTÖR ALANI NULLUK DAĞILIMINA AİT OLAN HEMEN HEMEN KENMOTSU f-MANİFOLDLAR

Tanım 3.1.1. M bir hemen hemen Kenmotsu f-manifold ve κ,μ,ν birer reel sabit sayı olsun. Her $i\in\{1,...,s\}$ ve her $X,Y\in\Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} R(X,Y)\xi_i &= \kappa\left(\bar{\eta}(X)\varphi^2 Y-\bar{\eta}(Y)\varphi^2 X\right) \\ &\quad+\mu\left(\bar{\eta}(Y)h_i X-\bar{\eta}(X)h_i Y\right) \qquad (3.1) \\ &\quad+\nu\left(\bar{\eta}(Y)\varphi h_i X-\bar{\eta}(X)\varphi h_i Y\right) \end{aligned}$$

eşitliği sağlanıyorsa M hemen hemen Kenmotsu f-manifoldu (κ,μ,ν)-nulluk şartını sağlıyor denir.

Lemma 3.1.1. M, bir (κ,μ,ν)-nulluk şartını sağlayan $(2n+s)$-boyutlu hemen hemen Kenmotsu f-manifold olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) Her $i,j\in\{1,...,s\}$ $h_i\circ h_j=h_j\circ h_i$ olur.

(ii) $\kappa\le -1$.

(iii) Eğer $\kappa<-1$ ise her $i\in\{1,...,s\}$ için h_i simetrik operatörü $0,\pm\sqrt{-(\kappa+1)}$ özdeğerlerine sahiptir.

İspat. (3.1) eşitliği kullanılarak her $X \in \Gamma(TM)$ ve $i, j \in \{1,...,s\}$ için $R(\xi_j, X)\xi_i - \varphi R(\xi_j, \varphi X)\xi_i = 2\kappa\varphi^2 X$ olduğu bulunur.

$$R(\xi_j, X)\xi_i - \varphi R(\xi_j, \varphi X)\xi_i = 2\left[-\varphi^2 X + (h_i \circ h_j)X\right]$$

Eşitliği göz önünde bulundurularak

$$(h_i \circ h_j)X = (\kappa + 1)\varphi^2 X = (h_j \circ h_i)X \tag{3.2}$$

olduğu elde edilir. Böylece (i) ifadesi ispatlanmış olur. (3.2) eşitliğinde h_j yerine h_i alınarak, keyfi $X \in \Gamma(D)$ için

$$h_i^2 X = (\kappa + 1)\varphi^2 X \tag{3.3}$$

$$h_i^2 X = -(\kappa + 1)X \tag{3.4}$$

eşitlikleri bulunur. Önerme 2.5.2. ve (3.4) eşitliğini kullanarak h_i^2 tensor alanına karşılık gelen matrisin özdeğerlerinin 0 ve $-(\kappa + 1)$ oldukları elde edilir. Ayrıca h_i simetrik bir operatör olduğundan $\|h_i X\|^2 = -(\kappa + 1)\|X\|^2$ olur. Buradan $\kappa \leq -1$ bulunur. Son olarak t, h_i nin reel bir özdeğeri ve X de bu özdeğere karşılık gelen bir özvektör olsun. Bu durumda $t\|X\|^2 = -(\kappa + 1)\|X\|^2$ ve $t = \pm\sqrt{-(\kappa + 1)}$ olur. Önerme 2.5.2. göz önünde bulundurularak (iii) elde edilir. Bu ise ispatımızı tamamlar.

Önerme 3.1.1. M, bir (κ, μ, ν)-nulluk şartını sağlayan $(2n + s)$-boyutlu hemen hemen Kenmotsu f-manifold olsun. Bu durumda

$$h_1 = ... = h_s \tag{3.5}$$

dır.

İspat. Eğer $\kappa = -1$ ise (3.3) denkleminden ve her $i \in \{1,...,s\}$ için h_i operatörlerinin simetri özelliğinden $h_1 = ... = h_s = 0$ elde edilir. Şimdi $\kappa < -1$ olsun. Bir tane $x \in M$ seçilip sabitlensin. Her $i \in \{1,...,s\}$ için h_i operatörleri simetrik olduğundan $D_x = (D_+)_x \oplus (D_-)_x$ şeklinde yazılabilir. Burada $(D_+)_x$, h_i operatörünün $\lambda = \sqrt{-(\kappa+1)}$ pozitif özdeğerine karşılık gelen öz uzayı ve $(D_-)_x$ de h_i operatörünün $-\lambda$ negatif özdeğerine karşılık gelen öz uzayıdır. Eğer $X \in D_x$ ise $X_+ \in (D_+)_x$ ve $X_- \in (D_-)_x$ olmak üzere $X = X_+ + X_-$ yazılabilir. Böylece $h_i X = \lambda(X_+ + X_-)$olur. $i \neq j$ olacak şekilde $j \in \{1,...,s\}$ seçelim. $L_{\xi_i}\varphi = A_i \circ \varphi - \varphi \circ A_i$ ifadesinden

$$h_j X = h_j(X_+ + X_-) = h_j\left(\frac{1}{\lambda}h_i X_+ - \frac{1}{\lambda}h_i X_-\right) = \frac{1}{\lambda}(h_j \circ h_i)(X_+ + X_-) = \lambda(X_+ + X_-) = h_i X$$

elde edilir. Önerme 2.5.2 göz önüne alınırsa istenen eşitlik bulunur.

Bundan sonraki kısımlarda, (3.1) eşitliği $h := h_1 = ... = h_s$ alınarak

$$\begin{aligned} R(X,Y)\xi_i &= \kappa\left(\bar{\eta}(X)\varphi^2 Y - \bar{\eta}(Y)\varphi^2 X\right) \\ &+ \mu\left(\bar{\eta}(Y)hX - \bar{\eta}(X)hY\right) \\ &+ \nu\left(\bar{\eta}(Y)\varphi hX - \bar{\eta}(X)\varphi hY\right) \end{aligned} \tag{3.6}$$

şeklinde kullanılacaktır.

Ayrıca (3.6) kullanılarak, eğrilik tensörünün ve φ^2 operatörünün simetri özelliği

dikkate alnarak

$$\begin{aligned} R(\xi_i, X)Y &= \kappa\left(\bar{\eta}(X)\varphi^2 Y - g(X, \varphi^2 Y)\bar{\xi}\right) \\ &+ \mu\left(g(X, hY)\bar{\xi} - \bar{\eta}(Y)hX\right) \\ &+ \nu\left(g(\varphi hX, Y)\bar{\xi} - \bar{\eta}(Y)\varphi hX\right) \end{aligned} \tag{3.7}$$

ifadesi elde edilir.

M bir (κ,μ,ν)-nulluk şartını sağlayan ve $\kappa \neq -1$ olan hemen hemen Kenmotsu f-manifold olsun. D_+ ve D_- ile sırasıyla $\lambda = \sqrt{-(\kappa+1)}$ ve $-\lambda$ özdeğerlerine ait olan öz uzayların n-boyutlu dağılımlarını gösterelim. D_+ ve D_- birbiriyle ortogonaldir. Ayrıca φ, h ile değişmeli olmadığından $\varphi(D_+) = D_-$ ve $\varphi(D_-) = D_+$ olur.

Önerme 3.1.2. M bir (κ,μ,ν)-nullity şartını sağlayan hemen hemen Kenmotsu f-manifold olsun. M hemen hemen Kenmotsu f-manifoldun bir Kenmotsu f-manifold olması için gerekli ve yeterli koşul $\kappa = -1$ olmasıdır.

İspat. Bir hemen hemen Kenmotsu f-manifoldun Kenmotsu f-manifold olması için gerekli yeterli koşul verilen manifoldun normal olmasıdır. Bir manifol normal Nijenhuis Torsiyon tensörü sıfır olmalıdır. Buradan, h tensör alanının sıfır olduğu elde edilir. (3.3) eşitliğinden ise h tensör alanının sıfır olması için gerekli ve yeterli koşulun $\kappa = -1$ olması elde edilir.

3.2. D-HOMOTETİK DÖNÜŞÜMLER

İlk olarak değme metrik manifoldlar için tanımlanan D-homotetik dönüşüm kavramı S. Tanno tarafından yoğun olarak çalışılmıştır (S. Tanno 1968) . Şimdi ise bu kavram metrik $f.pk$-manifoldlara özellikle hemen hemen Kenmotsu f-manifoldlara genelleştirilecektir.

Tanım 3.2.1. (φ,ξ_i,η_j,g), $(2n+s)$-boyutlu M manifoldu üzerinde bir f-yapı ve α, bir reel pozitif sayı olsun. Bu α sabiti ile oluşturduğumuz D-homotetik dönüşüm kavramı ile her $i \in \{1,...,s\}$ olmak üzere

$$\widetilde{\varphi} = \varphi, \quad \widetilde{\eta}_i = \alpha\eta_i, \quad \widetilde{\xi}_i = \frac{1}{\alpha}\xi_i, \quad \widetilde{g} = \alpha g + \alpha(\alpha-1)\sum_{j=1}^{s}\eta_j \otimes \eta_j \tag{3.8}$$

tensör alanı değişiklikleri kastediliyor.

M manifoldu üzerindeki (φ,ξ_i,η^i,g), f-yapısından D-homotetik dönüşümü yardımıyla elde edilen $(\widetilde{\varphi},\widetilde{\xi}_i,\widetilde{\eta}_j,\widetilde{g})$, yapısı bir f-yapıdır. $(\widetilde{\varphi},\widetilde{\xi}_i,\widetilde{\eta}_j,\widetilde{g})$, yapısının bir

f-yapı olması için gerekli ve yeterli koşul (φ,ξ_i,η_j,g) yapısının bir f-yapı olmasıdır.

Lemma 3.2.1. M, $(2n+s)$-boyutlu bir hemen hemen Kenmotsu f-manifold ve $i,j\in\{1,...,s\}$, olmak üzere $(\widetilde{\varphi},\widetilde{\xi}_i,\widetilde{\eta}_j,\widetilde{g})$, yapısı (φ,ξ_i,η_j,g) yapısından D-homotetik dönüşümü yardımıyla elde edilen bir f-yapı olsun.Her $i\in\{1,...,s\}$, $X,Y\in\Gamma(TM)$ ve $\widetilde{h}_i=\frac{1}{2}L_{\widetilde{\xi}}\widetilde{\varphi}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\alpha\widetilde{h}_i=h_i \tag{3.9}$$

$$\alpha\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\xi}_i=\nabla_X\xi_i+(\alpha-1)\varphi^2X \tag{3.10}$$

$$\eta_i(\widetilde{\nabla}_XY)=X\eta_i(Y)+g(Y,\varphi^2X+\varphi\widetilde{h}_iX) \tag{3.11}$$

$$\alpha\widetilde{\nabla}_XY=\alpha\nabla_XY+(\alpha-1)\sum_{i=1}^{s}g(Y,\varphi^2X+\varphi h_iX)\xi_i \tag{3.12}$$

Burada, $\widetilde{\nabla}$ ve ∇ sırasıyla g ve $\widetilde{g}$ metrikleri üzerinde tanımlı Levi-Civita konneksiyonlarıdır.

İspat. (3.9) eşitliği h_i ve $\widetilde{h}_i$ operatörlerinin tanımından direk elde edilir. $-A_iX=-\varphi^2X-\varphi h_iX$ eşitliğinden basit bir hesaplama ile ve (3.9) eşitliği kullanılarak (3.10) ifadesi bulunur. $\eta_i(X)=g(X,\xi_i)$ olduğundan, her $i\in\{1,...,s\}$ ve $X\in\Gamma(TM)$ için (3.9) ifadesi de göz önüne alınırsa (3.11) eşitliği elde edilir. Son olarak, Kozsul formulü uygulanırsa, $\widetilde{\nabla}$ ve ∇ Levi-Civita konneksiyonları ve $d\eta_1=...=d\eta_s=0$ ifadesi için

$$2\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_XY,Z)=2\alpha g(\nabla_XY,Z)+\alpha(\alpha-1)\sum_{i=1}^{s}(X\eta_i(Y))Z$$

eşitliği elde edilir. Sonra olarak, $\widetilde{g}$ metriğinin (3.8) ifadesindeki tanımı ve (3.11) eşitliği göz önüne alınır ve $d\eta_1=...=d\eta_s=0$ olmasını kullanılırsa (3.12) eşitliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Önerme 3.2.1. M, $(2n+s)$-boyutlu bir hemen hemen Kenmotsu f-manifold ve $i,j\in\{1,...,s\}$, olmak üzere $(\widetilde{\varphi},\widetilde{\xi}_i,\widetilde{\eta}_j,\widetilde{g})$, yapısı (φ,ξ_i,η_j,g) yapısından D-homotetik dönüşümü yardımıyla elde edilen bir f-yapı olsun. Her $i\in\{1,...,s\}$, $X,Y\in\Gamma(TM)$ için

$$\alpha\widetilde{R}_{XY}\widetilde{\xi}_i=R_{XY}\xi_i \tag{3.13}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $-A_iX=-\varphi^2X-\varphi h_iX$ eşitliği, (3.10), (3.12) ve h_i operatörünün simetri özelliğini kullanılırsa istenilen eşitlik kolayca elde edilir.

3.3. BAZI EĞRİSEL ÖZELLİKLER

M (φ,ξ_i,η_j,g) $(2n+s)$-boyutlu bir hemen hemen Kenmotsu f-manifold olsun. Her $i,j\in\{1,...,s\}$ ve $X\in\Gamma(TM)$ için

$$l_{ij}=R_{.\xi_i}\xi_j$$

$(1,1)$-tipindeki tensor alanı tanımlansın ve $l_i=l_{ii}$ olsun.

Lemma 3.3.1 Her $i,j,k\in\{1,...,s\}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.

$$\varphi\circ l_{ji}\circ\varphi-l_{ji}=2\left[h_i\circ h_j-\varphi^2\right], \tag{3.14}$$

$$\eta_k\circ l_{ji}=0, \tag{3.15}$$

$$l_{ji}(\xi_k)=0, \tag{3.16}$$

$$\nabla_{\xi_j}h_i=-\varphi\circ l_{ji}-\varphi-(h_j+h_i)-\varphi\circ h_j\circ h_i, \tag{3.17}$$

$$\nabla_{\xi_i}h_i=-\varphi\circ l_{ji}-\varphi-2h_i-\varphi\circ h_i^2. \tag{3.18}$$

İspat. Riemann eğrilik tensörünün tanımı ve (3.13) eşitliğinin sağ tarafındaki ifade kullanılırsa

$$l_{ji}(X) = R(X,\xi_j)\xi_i = \varphi(\nabla_{\xi_j} h_i)X + \varphi^2 X + (\varphi \circ h_i)X + (\varphi \circ h_j)X - (h_i \circ h_j)X$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafına φ uygulanıp X yerine φX alınıp ilk elde edilen ifade eksi ile çarpılıp toplanırsa (3.14) denklemi elde edilir. (3.15) ve (3.16) eşitlikleri (3.14) den direk görülür. Bu ispatta elde edilen ilk eşitliğin her tarafına φ uygulanırsa (3.17) direk elde edilir. (3.17) de $i = j$ alınırsa (3.18) bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.3.1 M bir (κ,μ,ν)-nulluk şartını sağlayan hemen hemen Kenmotsu f-manifold olsun. Bu durumda her $i, j \in \{1,...,s\}$ için

$$l_{ji} = -\kappa\varphi^2 + \mu h + \nu\varphi h \tag{3.19}$$

olduğu bulunur. Bundan sonraki bölümlerde l_{ji} yerine l alınacaktır.

Lemma 3.3.2 M bir (κ,μ,ν)- nulluk şartını sağlayan hemen hemen Kenmotsu f-manifold olsun. Her $X,Y \in \Gamma(TM)$ ve her $i \in \{1,...,s\}$ için

$$\nabla_{\xi_i} h = -\mu\varphi \circ h + \nu h - 2h \tag{3.20}$$

$$l \circ \varphi - \varphi \circ l = 2\mu\varphi \circ h + 2\nu h \tag{3.21}$$

$$l \circ \varphi + \varphi \circ l = 2\kappa\varphi \tag{3.22}$$

$$Q\xi_i = 2n\kappa\overline{\xi} \tag{3.23}$$

eşitlikleri sağlanır. Burada Q Ricci operatörüdür.

İspat. (3.18) eşitliğinde (3.19) ifadesi kullanılırsa (3.20) elde edilir. (3.19) ifadesinde

$h \circ \varphi = -\varphi \circ h$ olması göz önüne (3.21) ve (3.22) eşitliklerini direk olarak elde edilir. Şimdi (3.23) nin ispatı verilsin. Bir $x \in M$ noktası verilsin. $\{E_1, ..., E_{2n+s}\}$, bu x noktasının komşuluğunda $E_{2n+1} = \xi_1, ..., E_{2n+s} = \xi_s$ olacak şekilde bir φ-tabanı olsun. (3.7) eşitliği kullanılırsa ve $iz(h) = 0$ olması göz önüne alınırsa,

$$Q\xi_i = \sum_{j=1}^{2n} R_{\xi_i E_j} E_j = \sum_{j=1}^{2n} \kappa g(\varphi^2 E_j, E_j)\overline{\xi} = \kappa \sum_{j=1}^{2n} \delta_{jj} \overline{\xi},$$

ifadesi elde edilir.

Lemma 3.3.3 M $(\varphi, \xi_i, \eta_j, g)$ $(2n+s)$-boyutlu bir hemen hemen Kenmotsu f-manifold olsun. R, eğrilik tensörü her $i \in \{1, ..., s\}$ ve $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

$$\begin{aligned} g(R_{\xi_i X} Y, Z) = & \sum_{j=1}^{s} \eta_j(Z) g(\varphi^2 Y, X) - \sum_{j=1}^{s} \eta_j(Y) g(\varphi^2 Z, X) \\ & + \sum_{j=1}^{s} \eta_j(Z) g(\varphi h_j Y, X) - \sum_{j=1}^{s} \eta_j(Y) g(\varphi h_j Z, X) \\ & + g((\nabla_Z \varphi h_i) Y - (\nabla_Y \varphi h_i) Z, X), \end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned} & g(R_{\xi_i X} Y, Z) - g(R_{\xi_i X} \varphi Y, \varphi Z) + g(R_{\xi_i \varphi X} Y, \varphi Z) + g(R_{\xi_i \varphi X} \varphi Y, Z) \\ & = 2g((\nabla_{h_i X} \varphi) Y, Z) + 2\overline{\eta}(Z) g(h_i X - \varphi X, \varphi Y) - 2\overline{\eta}(Y) g(h_i X - \varphi X, \varphi Z). \end{aligned} \tag{3.25}$$

İspat. Riemann eğrilik tensörünün tanımı ve (2.18) ifadesini kulanılırsa (3.24) eşitliği elde edilir. Şimdi (3.25) ifadesinin ispatı verilsin. Öncelikle $i \in \{1, ..., s\}$ ve $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ olmak üzere A ve B_i operatörleri tanmlansın.

$$A(X, Y, Z) := 2\overline{\eta}(Y) g(\varphi X, \varphi Z) - 2\overline{\eta}(Z) g(\varphi X, \varphi Y) \tag{3.26}$$

$$B_i(X,Y,Z) := -g(\varphi X, (\nabla_Y(\varphi \circ h_i))(\varphi Z)) - g(\varphi X, (\nabla_Y(\varphi \circ h_i))Z)$$
$$- g(X, (\nabla_Y(\varphi \circ h_i))Z) + g(X, (\nabla_{\varphi Y}(\varphi \circ h_i))(\varphi Z)) \tag{3.27}$$

Direk hesaplama ve (3.24) kullanılarak, (3.25) eşitliğinin sol tarafının

$$A(X,Y,Z) + B_i(X,Y,Z) - B_i(X,Z,Y)$$

ifadesine eşit olduğu bulunur.

$$\eta_j((\nabla_{\varphi Y} h_i)Z) = \eta_j(\nabla_{\varphi Y}(h_i Z))$$

olduğundan,

$$B_i(X,Y,Z) =$$
$$-g(X, (\nabla_Y(\varphi \circ h_i)Z)) + g(X, (\varphi \circ h_i)(\nabla_Y Z))$$
$$+ g(X, (\nabla_{\varphi Y}(\varphi \circ h_i \circ \varphi)Z)) + g(X, (\varphi \circ h_i)(\nabla_{\varphi Y} \varphi Z))$$
$$- g(\varphi X, (\nabla_Y(\varphi \circ h_i \circ \varphi)Z)) + g(\varphi X, (\varphi \circ h_i)(\nabla_Y(\varphi Z)))$$
$$- g(\varphi X, (\nabla_{\varphi Y}(\varphi \circ h_i)Z)) + g(\varphi X, (\varphi \circ h_i)(\nabla_{\varphi Y}(h_i Z)))$$
$$= -g(X, (\nabla_Y \varphi)(h_i Z)) + g(X, h_i((\nabla_Y \varphi)Z))$$
$$+ g(X, (h_i \circ \varphi)((\nabla_{\varphi Y} \varphi)Z)) + g(X, \varphi((\nabla_{\varphi Y} \varphi)(h_i Z)))$$
$$+ \sum_{j=1}^{s} \eta_j((\nabla_{\varphi Y} h_i)Z)\eta_j(X) \tag{3.28}$$

yazılabilir. Ayrıca, $-A_i X = -\varphi^2 X - \varphi h_i X$ ifadesi, (2.18) ve Önerme 2.5.1. den

$$\left(\varphi\circ\left(\nabla_{\varphi X}\varphi\right)\right)Y=\left(\nabla_{\varphi X}\varphi^{2}\right)Y-\left(\nabla_{\varphi X}\varphi\right)\left(\varphi Y\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{s}\left(\left(\nabla_{\varphi X}\eta_{j}\right)Y\xi_{j}\right)+\sum_{j=1}^{s}\left(\eta_{j}\left(Y\right)\nabla_{\varphi X}\xi_{j}\right)$$

$$-\left(\nabla_{\varphi X}\varphi\right)\left(\varphi Y\right)=\sum_{j=1}^{s}(\left(\nabla_{\varphi X}\right)\left(g\left(\xi_{j},Y\right)\right)\xi_{j}$$

$$-g\left(\nabla_{\varphi X}Y,\xi_{j}\right)\xi_{j})+\sum_{j=1}^{s}\eta_{j}\left(Y\right)\left(\varphi X-h_{j}X\right)$$

$$+\sum_{j=1}^{s}\eta_{j}\left(Y\right)h_{j}X+\overline{\eta}\left(Y\right)\varphi X+2g\left(X,\varphi Y\right)\overline{\xi}+\left(\nabla_{X}\varphi\right)Y$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}\left(\varphi\circ\left(\nabla_{\varphi X}\varphi\right)Y\right)&=\sum_{j=1}^{s}g\left(X,\varphi Y\right)\xi_{j}-\sum_{j=1}^{s}g\left(Y,h_{j}X\right)\xi_{j}\\&+\sum_{j=1}^{s}\eta_{j}\left(Y\right)\varphi X+\left(\nabla_{X}\varphi\right)Y\end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan, (2.18) ifadesinden her $i\in\{1,\dots,s\}$ için

$$\begin{aligned}\eta_{i}\left(\left(\nabla_{\varphi Y}h_{j}\right)Z\right)&=\eta_{i}\left(\nabla_{\varphi Y}\left(h_{j}Z\right)\right)=\left(\nabla_{\varphi Y}\eta_{i}\right)\left(h_{j}Z\right)\\&=-g\left(h_{j}Z,\nabla_{\varphi Y}\xi_{i}\right)=g\left(h_{j}Z,h_{i}Y-\varphi Y\right)\end{aligned}\tag{3.29}$$

eşitliği elde edilir. Buradan, (3.28) ve (3.29) kullanılarak

$$\begin{aligned}B_{i}\left(X,Y,Z\right)&=-g\left(X,\left(\nabla_{Y}\varphi\right)\left(h_{i}Z\right)\right)+g\left(X,h_{i}\left(\left(\nabla_{Y}\varphi\right)Z\right)\right)+2\overline{\eta}\left(Z\right)g\left(h_{i}X,\varphi Y\right)\\&+g\left(h_{i}X,\left(\nabla_{Y}\varphi\right)Z\right)+\overline{\eta}\left(X\right)g\left(Y,\varphi h_{i}Z\right)-\sum_{j=1}^{s}\overline{\eta}\left(X\right)g\left(h_{i}Z,h_{j}Y\right)\\&+\sum_{j=1}^{s}\eta_{j}\left(X\right)g\left(h_{i}Z,h_{j}Y\right)+g\left(X,\left(\nabla_{Y}\varphi\right)\left(h_{i}Z\right)\right)-\overline{\eta}\left(X\right)g\left(\varphi Y,h_{i}Z\right)\\&=2\left(g\left(h_{i}X,\left(\nabla_{Y}\varphi\right)Z\right)+\overline{\eta}\left(Z\right)g\left(h_{i}X,\varphi Y\right)-\overline{\eta}\left(X\right)g\left(\varphi Y,h_{i}Z\right)\right)\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. En son elde edilen ifade de Y ile Z nin yerleri değiştirilerek $B_i(X,Z,Y) = 2\left(g(h_i X,(\nabla_Z \varphi)Y) + \overline{\eta}(Y) g(h_i X,\varphi Z) - \overline{\eta}(X) g(\varphi Z,h_i Y)\right)$ eşitliği bulunur. Buradan

$$A(X,Y,Z) + B_i(X,Y,Z) - B_i(X,Z,Y)$$

$$= 2(\nabla_Y \Phi)(h_i X,Z) - 2(\nabla_Z \Phi)(h_i X,Y)$$

$$+ 2\overline{\eta}(Z) g(h_i X - \varphi X,\varphi Y) - 2\overline{\eta}(Y) g(h_i X - \varphi X,\varphi Z)$$

bulunur ve buradan istenen eşitlik elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.3.2. $M\ (\varphi,\xi_i,\eta_j,g)$ $(2n+s)$-boyutlu bir hemen hemen Kenmotsu f-manifold olsun. (3.25) den her $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ için $(\nabla_{h_i X}\Phi)(Y,Z) = -g((\nabla_{h_i X}\varphi)Y,Z)$ ve

$$(\nabla_{h_i X}\varphi)Y = \frac{1}{2}\left(\varphi R_{\xi_i \varphi X} Y - R_{\xi_i \varphi X}\varphi Y - \varphi R_{\xi_i X}\varphi Y - R_{\xi_i X} Y\right)$$

$$+ g(h_i X - \varphi X,\varphi Y)\overline{\xi} + \overline{\eta}(Y)\left(\varphi h_i X - \varphi^2 X\right) \tag{3.30}$$

dır.

Lemma 3.3.4. M bir (κ,μ,ν)-nullity şartını sağlayan hemen hemen Kenmotsu f-manifold olsun.

$$(\nabla_X \varphi)Y = g(\varphi X + hX,Y)\overline{\xi} - \overline{\eta}(Y)(\varphi X + hX), \tag{3.31}$$

$$(\nabla_X h)Y - (\nabla_Y h)X = (\kappa+1)\left(\overline{\eta}(Y)\varphi X - \overline{\eta}(X)\varphi Y + 2g(\varphi X,Y)\overline{\xi}\right)$$

$$+ \mu\left(\overline{\eta}(Y)\varphi hX - \overline{\eta}(X)\varphi hY\right) \tag{3.32}$$

$$+ (1-\nu)\left(\overline{\eta}(Y)hX - \overline{\eta}(X)hY\right),$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. (3.30) den

$$(\nabla_{hX}\varphi)Y = -(\kappa+1)g(X,Y)\overline{\xi} + (\kappa+1)\overline{\eta}(Y)X + \overline{\eta}(Y)\varphi hX + g(hX,\varphi Y)\overline{\xi}$$

bulunur. Burada X yerine hX yazalım. $L_{\xi_i}\varphi = A_i \circ \varphi - \varphi \circ A_i$ ve (3.33) eşitliklerini göz önüne bulundurarak gerekli hesaplamaları yaparsak (3.31) i elde ederiz. h ve φ^2 operatörleri self-adjoint olduğundan (3.31) eşitliğinden

$$(\nabla_X(\varphi \circ h))Y - (\nabla_Y(\varphi \circ h))X = \varphi((\nabla_X h)Y - (\nabla_Y h)X)$$

elde edilir. (3.24) ve (3.31) kullanılarak her $Z \in \Gamma(TM)$

$$\begin{aligned} g(R_{XY}\xi_i, Z) = {} & \overline{\eta}(Y)g(\varphi^2 X + \varphi hX, Z) \\ & -\overline{\eta}(X)g(\varphi^2 Y + \varphi hY, Z) \\ & + g(\varphi((\nabla_Y h)X - (\nabla_X h)Y), Z) \end{aligned} \tag{3.33}$$

(3.33) ve h ve φ^2 operatörlerinin simetri özelliğinden

$$\begin{aligned} \varphi((\nabla_Y h)X - (\nabla_X h)Y) = {} & R_{XY}\xi_i - \overline{\eta}(Y)(\varphi^2 X + \varphi hX) \\ & + \overline{\eta}(X)(\varphi^2 Y + \varphi hY) \end{aligned}$$

elde edilir. Eğer son bulunan eşitlikte her iki tarafa φ uygulanıp (3.6) ifadesi

kullanılırsa ve her $l \in \{1,...,s\}$ için

$$\eta_l((\nabla_Y h)X - (\nabla_X h)Y) = -2(\kappa+1)g(\varphi X, Y)$$

olması göz önünde bulundurulursa istenen eşitlik elde edilir.

Teorem 3.3.1. M (φ,ξ_i,η_j,g) $(2n+s)$-boyutlu bir hemen hemen Kenmotsu f-manifold ve $(\widetilde{\varphi},\widetilde{\xi}_i,\widetilde{\eta}_j,\widetilde{g})$, yapısı (φ,ξ_i,η_j,g) hemen hemen f-yapısından α sabitinin

D-homotetik dönüşümü yardımıyla elde edilen bir hemen hemen f-yapı olsun. κ,μ,ν ler reel sabit sayılar olmak üzere, eğer $M\ (\varphi,\xi_i,\eta_j,g)$ yapısı (κ,μ,ν)-nullity şartını sağlıyorsa $M\ (\widetilde{\varphi},\widetilde{\xi}_i,\widetilde{\eta}_j,\widetilde{g})$ yapısı da $(\widetilde{\kappa},\widetilde{\mu},\widetilde{\nu})$- nulluk şartını sağlar ve

$$\widetilde{\kappa}=\frac{\kappa}{\alpha},\qquad \widetilde{\mu}=\frac{\mu}{\alpha},\qquad \widetilde{\nu}=\frac{\nu}{\alpha},$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat. (3.5) ve (3.9) ifadelerinden $\widetilde{h}_1=\ldots=\widetilde{h}_s$ olduğu görülür. (3.13) ve (3.31) eşitlikleri kullanılarak gerekli işlemler yapılırsa istenen elde edilir.

Lemma 3.3.5 M bir (κ,μ,ν)-nulluk şartını sağlayan hemen hemen Kenmotsu f-manifold olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

$$X,Y\in\Gamma(D_+)\Rightarrow\nabla_X Y\in\Gamma(D_+), \tag{3.34}$$

$$X,Y\in\Gamma(D_-)\Rightarrow\nabla_X Y\in\Gamma(D_-), \tag{3.35}$$

$$X\in\Gamma(D_+),\ Y\in\Gamma(D_-)\Rightarrow\nabla_X Y\in\Gamma(D_-\oplus çek(\varphi)),$$
(3.36)

$$X\in\Gamma(D_-),\ Y\in\Gamma(D_+)\Rightarrow\nabla_X Y\in\Gamma(D_+\oplus çek(\varphi)).$$
(3.37)

İspat. (3.32) eşitliğinden her $X,Y,Z\in\Gamma(D_+)$ için

$$g((\nabla_X h)\varphi Z-(\nabla_{\varphi Z}h)X,Y)=0$$

bulunur. Diğer taraftan, h operatörü simetrik olduğundan $g((\nabla_X h)\varphi Z-(\nabla_{\varphi Z}h)X,Y)=-2\lambda g(\nabla_X(\varphi Z),Y)$

eşitliğini elde ederiz. Buradan $g(\varphi Z,\nabla_X Y)=-g(\nabla_X(\varphi Z),Y)$ bulunur. Bu ise $\nabla_X Y$ nin

D_- ye dik olduğu anlamına gelir. Ayrıca, $-A_i X = -\varphi^2 X - \varphi h_i X$ ifadesinden her $i \in \{1,...,s\}$ için $g(\nabla_X Y, \xi_i) = -g(Y, \nabla_X \xi_i) = 0$ olduğu görülür. Buradan, (3.34) i elde edilir. (3.35) ifadesinin ispatı da benzer şekilde yapılır. Eğer $X \in \Gamma(D_+), Y \in \Gamma(D_-)$ alınırsa, (3.34) den her $Z \in \Gamma(D_+)$ için $g(\nabla_X Y, Z) = -g(Y, \nabla_X Z) = 0$ bulunur. Bu ise (3.36) ın ispatını tamamlar. (3.37) in ispatı da benzer biçimde yapılır.

Lemma 3.3.6. M bir (κ, μ, ν)-nulluk şartını sağlayan hemen hemen Kenmotsu f-manifold olsun. Bu durumda, her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$
\begin{aligned}
(\nabla_X h)Y = {} & (\kappa+1) g(\varphi X, Y)\bar{\xi} - g(hX, Y)\bar{\xi} \\
& - \eta(Y) h(X + h\varphi X) - \mu \eta(X) \varphi h Y \\
& + (\nu - 2)\eta(X) hY
\end{aligned}
\tag{3.38}
$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $X, Y \in \Gamma(D)$ olsun. $h_i \xi_j = 0$ olduğundan $g(h_i Y, \xi_j) = 0$ olduğu bulunur. Bu son eşitliğin X vektör alanı yönündeki türevini alınırsa

$$
(\nabla_X h)Y = -g(Y, h_i X + h_i^{\,2} \varphi X)\xi_j \tag{3.39}
$$

elde edilir. Ayrıca, M üzerindeki herhangi bir vektör alanı için $X = X_+ + \eta_i(X)\xi_j$ yazılabilir. Burada X_+ ile X vektör alanının D dağılımındaki pozitif kısmı kastediliyor. Şimdi (3.7) ve (3.20) eşitliklerini göz önüne alınsın. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
(\nabla_X h)Y &= (\nabla_{X_+} h)Y_+ + \bar{\eta}(Y)(\nabla_{X_+} h)\bar{\xi} + \bar{\eta}(X)(-\mu\varphi h + \nu h - 2h)Y \\
&= -g(Y, hX + h^2\varphi X)\bar{\xi} - \bar{\eta}(Y)(hX + h^2\varphi X) + \bar{\eta}(X)(-\mu\varphi hY + \nu hY - 2hY)
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

ifadesi elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Sonuç 3.3.4. M bir (κ, μ, ν)-nulluk şartını sağlayan hemen hemen Kenmotsu f-

manifold olsun. (3.4), (3.31) ve (3.38) eşitlikleri kullanılarak her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_X \varphi h)Y = (\kappa+1)g(\varphi^2 X, Y)\overline{\xi} + g(\varphi X, hY)\overline{\xi} - \overline{\eta}(Y)\varphi hX$$
$$+(\kappa+1)\overline{\eta}(Y)\varphi^2 X + \mu\overline{\eta}(X)hY + (\nu-2)\overline{\eta}(X)\varphi hY \tag{3.41}$$

olduğu elde edilir.

Lemma 3.3.7. M bir (κ,μ,ν)-nulluk şartını sağlayan hemen hemen Kenmotsu f-manifold olsun. O halde, her $X,Y,Z \in \Gamma(D)$ için R, Riemann eğrilik tensörü aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$R_{XY}hZ - hR_{XY}Z =$$
$$s[\kappa\{g(Z,\varphi Y)X - g(Z,\varphi Y)\varphi hX - g(Z,\varphi X)Y + g(Z,\varphi X)\varphi hY$$
$$+g(Z,X)\varphi Y - g(Z,\varphi hX)\varphi Y - g(Z,Y)\varphi X + g(Z,\varphi hY)\varphi X\}$$
$$+g(Z,\varphi Y)X - g(Z,\varphi Y)\varphi hX - g(Z,\varphi X)Y + g(Z,\varphi X)\varphi hY \tag{3.42}$$
$$-g(Z,hY)X + g(Z,hY)\varphi hX + g(Z,hX)Y - g(Z,hX)\varphi hY$$
$$-g(Z,X)hY + g(Z,X)\varphi Y + g(Z,\varphi hX)hY - g(Z,\varphi hX)\varphi Y$$
$$+g(Z,Y)hX - g(Z,Y)\varphi X - g(Z,\varphi hY)hX + g(Z,\varphi hY)\varphi X].$$

İspat. $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ olsun. (3.4), (3.38) ifadeleri ve $\nabla_X \varphi$ nin anti-simetri özelliği kullanılırsa

$$(\nabla_X\nabla_Y h)Z =$$

$$(\kappa+1)\left[g(\nabla_X Z,\varphi Y)\bar{\xi}+g(Z,(\nabla_X\varphi)Y)\bar{\xi}+g(Z,\varphi(\nabla_X Y))\bar{\xi}\right.$$

$$\left.+g(Z,\varphi Y)\left(-\varphi^2X-\varphi hX\right)\right]-g(\nabla_X Z,hY)\bar{\xi}-g(Z,(\nabla_X h)Y)\bar{\xi}$$

$$-g(Z,h(\nabla_X Y))\bar{\xi}+g(Z,hY)\left(\varphi^2X+\varphi hX\right)-g\left(\nabla_X Z,\bar{\xi}\right)\left(hY+h^2\varphi Y\right)$$

$$-\left(Z,\nabla_X\bar{\xi}\right)\left(hY+h^2\varphi Y\right)-\bar{\eta}(Z)(\nabla_X h)Y-\bar{\eta}(Z)h(\nabla_X Y)$$

$$+(\kappa+1)\left[\bar{\eta}(Z)(\nabla_X\varphi)Y+\bar{\eta}(Z)\varphi(\nabla_X Y)\right]-\mu\left[g\left(\nabla_X Y,\bar{\xi}\right)\varphi hZ\right.$$

$$\left.-g\left(Y,\nabla_X\bar{\xi}\right)\varphi hZ-\bar{\eta}(Y)(\nabla_X\varphi h)Z-\bar{\eta}(Y)\varphi h(\nabla_X Z)\right]$$

$$(\nu-2)\left[g\left(\nabla_X Y,\bar{\xi}\right)hZ+g\left(Y,\nabla_X\bar{\xi}\right)hZ+\bar{\eta}(Y)(\nabla_X h)Z+\bar{\eta}(Y)h(\nabla_X Z)\right]$$

eşitliği elde edilir. Buradan,

$$R_{XY}hZ-hR_{XY}Z=(\nabla_X\nabla_Y h)Z-(\nabla_Y\nabla_X h)Z-\left(\nabla_{[X,Y]}h\right)Z$$

Ricci özdeşliği $-A_iX=-\varphi^2X-\varphi h_iX$ ifadesinden ve (3.38) eşitliğinden ve $\nabla_X(h\circ\varphi)$ operatörünün simetri özelliği göz önüne alınırsa

$$R_{XY}hZ-hR_{XY}Z=$$

$$+(\kappa+1)\left[g(Z,(\nabla_X\varphi)Y-(\nabla_Y\varphi)X)\bar{\xi}-g(Z,\varphi Y)\left(\varphi^2X+\varphi hX\right)\right.$$

$$\left.+g(Z,\varphi X)\left(\varphi^2Y+\varphi hY\right)\right]-g(Z,(\nabla_X h)Y-(\nabla_Y h)X)\bar{\xi}$$

$$+g(Z,hY)\left(\varphi^2X+\varphi hX\right)-g(Z,hX)\left(\varphi^2Y+\varphi hY\right)$$

$$-g\left(Z,\nabla_X\bar{\xi}\right)\left(hY+h^2\varphi Y\right)+g\left(Z,\nabla_Y\bar{\xi}\right)\left(hX+h^2\varphi X\right)$$

$$-\bar{\eta}(Z)\left((\nabla_X h)Y-(\nabla_Y h)X\right)+(\kappa+1)\bar{\eta}(Z)\left((\nabla_X\varphi)Y-(\nabla_Y\varphi)X\right) \tag{3.43}$$

$$+\mu\left[\left(g\left(X,\nabla_Y\bar{\xi}\right)-g\left(Y,\nabla_X\bar{\xi}\right)\right)\varphi hZ-\bar{\eta}(Y)(\nabla_X\varphi h)Z+\bar{\eta}(X)(\nabla_Y\varphi h)Z\right]$$

$$+(\nu-2)\left[\left(g\left(Y,\nabla_X\bar{\xi}\right)-g\left(X,\nabla_Y\bar{\xi}\right)\right)hZ+\bar{\eta}(Y)(\nabla_X h)Z-\bar{\eta}(X)(\nabla_Y h)Z\right]$$

ifadesi elde edilir. Son olarak, eğer $X,Y,Z\in\Gamma(D)$ alınırsa, (3.3), (3.31) ve (3.41) eşitlikleri kullanılırsa istenen ifade bulunur.

Lemma 3.3.8. M bir (κ,μ,ν)-nulluk şartını sağlayan hemen hemen Kenmotsu f-manifold olsun. O halde, her $X,Y,Z\in\Gamma(TM)$ için R, Riemann eğrilik tensörü

$$R_{XY}\varphi Z-\varphi R_{XY}Z=$$

$$+\left[\kappa\left(\bar{\eta}(Y)g(\varphi X,Z)-\bar{\eta}(X)g(\varphi Y,Z)\right)+\mu\left(\bar{\eta}(Y)g(\varphi hX,Z)-\bar{\eta}(X)g(\varphi hY,Z)\right)\right.$$

$$\left.-\nu\left(\bar{\eta}(Y)g(hX,Z)-\bar{\eta}(X)g(hY,Z)\right)\right]\bar{\xi}+s\left[-g(Z,\varphi Y+hY)\left(\varphi^2X+\varphi hX\right)\right.$$

$$+g(Z,\varphi X+hX)\left(\varphi^2Y+\varphi hY\right)+g\left(Z,\varphi^2X+\varphi hX\right)(\varphi Y+hY)$$

$$\left.-g\left(Z,\varphi^2Y+\varphi hY\right)(\varphi X+hX)\right]-\bar{\eta}(Z)\left[\kappa\left(\bar{\eta}(Y)\varphi X-\bar{\eta}(X)\varphi Y\right)\right.$$

$$\left.+\mu\left(\bar{\eta}(Y)\varphi hX-\bar{\eta}(X)\varphi hY\right)-\nu\left(\bar{\eta}(Y)hX-\bar{\eta}(X)hY\right)\right]$$

eşitliğini sağlar.

İspat. Sabit bir $x\in M$ noktası verilsin. X,Y,Z ler, $x\in M$ noktasında $\nabla X=0$, $\nabla Y=0$ ve $\nabla Z=0$ olacak şekilde birer vektör alanı olsunlar. (3.31) eşitliğini ve (3.4) ifadesi kullanılırsa ve $\nabla\varphi^2$ nin simetri özelliği göz önünde bulundurulursa $x\in M$ noktasında

$$\nabla_X((\nabla_Y\varphi)Z)-\nabla_Y((\nabla_X\varphi)Z)=$$

$$+[g((\nabla_X\varphi)Y-(\nabla_Y\varphi)X,Z)+g((\nabla_X h)Y-(\nabla_Y h)X,Z)]$$

$$+s[g(Z,\varphi X+hX)(\varphi^2 Y+\varphi hY)-g(Z,\varphi Y+hY)(\varphi^2 X+\varphi hX)$$

$$+g(Z,\varphi^2 X+\varphi hX)(\varphi Y+hY)-g(Z,\varphi^2 Y+\varphi hY)(\varphi X+hX)]$$

$$-\overline{\eta}(Z)[((\nabla_X\varphi)Y-(\nabla_Y\varphi)X)+((\nabla_X h)Y-(\nabla_Y h)X)]$$

eşitliği elde edilir. Bulunan son eşitlikten, (3.32) eşitliği ve

$$R_{XY}\varphi Z-\varphi R_{XY}Z=\nabla_X(\nabla_Y\varphi)Z-\nabla_Y(\nabla_X\varphi)Z$$

olmasını göz önüne alınırsa istenen ifade elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.3.5. Özel olarak, M bir (κ,μ,ν)-nulluk şartını sağlayan bir Kenmotsu f-manifold olsun. Bu durmda, her $X,Y,Z\in\Gamma(TM)$ Lemma 3.3.8. aşağıdaki şekilde verilir.

$$R_{XY}\varphi Z-\varphi R_{XY}Z=$$

$$(\overline{\eta}(X)g(\varphi Y,Z)-\overline{\eta}(Y)g(\varphi X,Z))+s[-g(Z,\varphi Y)\varphi^2 X$$

$$+g(Z,\varphi X)\varphi^2 Y+g(Z,\varphi^2 X)\varphi Y-g(Z,\varphi^2 Y)\varphi X]$$

$$+\overline{\eta}(Z)[\kappa(\overline{\eta}(Y)\varphi X-\overline{\eta}(X)\varphi Y)].$$

Teorem 3.3.2. $\kappa<-1$ olmak üzere, M bir (κ,μ,ν)- nulluk şartını sağlayan bir Kenmotsu f-manifold olsun. Bu durumda, her $X_+,Y_+,Z_+\in\Gamma(D_+)$, $X_-,Y_-,Z_-\in\Gamma(D_-)$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\begin{aligned}R_{X_-Y_-}Z_+&=s(\kappa-1)[g(\varphi Y_-,Z_+)\varphi X_--g(\varphi X_-,Z_+)\varphi Y_-]\\&\quad+s\lambda[g(\varphi X_-,Z_+)Y_--g(\varphi Y_-,Z_+)X_-],\end{aligned}\tag{3.44}$$

$$R_{X_+Y_+}Z_+ = s[g(X_+,Z_+)Y_+ - g(Y_+,Z_+)X_+] + s\lambda[g(Y_+,Z_+)\varphi X_+ - g(X_+,Z_+)\varphi Y_+], \tag{3.45}$$

$$R_{X_+Y_+}Z_- = s\lambda[g(Z_-,\varphi Y_+)X_+ - g(Z_-,\varphi X_+)Y_+] + s(\kappa+1)[g(Z_-,\varphi Y_+)\varphi X_+ - g(Z_-,\varphi X_+)\varphi Y], \tag{3.46}$$

$$R_{X_+Y_-}Z_- = -sg(Y_-,Z_-)X_+ + s(\kappa+1)g(\varphi X_+,Z_-)\varphi Y_- + s\lambda[g(Y_-,Z_-)\varphi X_+ - g(\varphi X_+,Z_-)Y_-], \tag{3.47}$$

$$R_{X_+Y_-}Z_+ = sg(X_+,Z_+)Y_- - s(\kappa+1)g(\varphi Y_-,Z_+)\varphi X_+ + s\lambda[g(X_+,Z_+)\varphi Y_- - g(\varphi Y_-,Z_+)X_+], \tag{3.48}$$

$$R_{X_-Y_-}Z_- = s[g(X_-,Z_-)Y_- - g(Y_-,Z_-)X_-] - s\lambda[g(Y_-,Z_-)\varphi X_- - g(X_-,Z_-)\varphi Y_-]. \tag{3.49}$$

İspat. İlk olarak $X_+,Y_+,Z_+ \in \Gamma(D_+)$ verilsin. Lemma 3.3.7. göz önüne alınırsa

$$\lambda R_{X_+Y_+}Z_+ - hR_{X_+Y_+}Z_+ = -2\lambda s[g(X_+,Z_+)\varphi Y_+ - g(Y_+Z_+)\varphi X_+]$$

eşitliği bulunur. $W_- \in \Gamma(D_-)$ olsun. Bu ifadenin W_- ile iç çarpımı alınsın.

$$2\lambda g(R_{X_+Y_+}Z_+,W_-) = -2\lambda s[g(X_+,Z_+)g(\varphi Y_+,W_-) - g(Y_+Z_+)g(\varphi X_+,W_-)]$$

eşitliği elde edilir. $\lambda \neq 0$ olduğundan

$$g(R_{X_+Y_+}Z_+,W_-) = -\lambda s[g(X_+,Z_+)g(\varphi Y_+,W_-) - g(Y_+Z_+)g(\varphi X_+,W_-)] \tag{3.50}$$

bulunur. Benzer işlemlerler, $X_+,W_+ \in \Gamma(D_+)$ ve $Y_-,Z_- \in \Gamma(D_-)$ olmak üzere

$$g\left(R_{X_+Y_-}Z_-,W_+\right)=-sg\left(Y_-,Z_-\right)g\left(X_+,W_+\right)+(\kappa+1)sg\left(\varphi X_+,Z_-\right)g\left(\varphi Y_-,W_+\right) \tag{3.51}$$

elde edilir. (3.50) ifadesinden ve R Riemann eğrilik tensörünün simetri

özelliklerinden, her $X_+,Y_+,W_+\in\Gamma(D_+)$ ve $Z_-\in\Gamma(D_-)$ için

$$g\left(R_{X_+Y+}Z_-,W_+\right)=s\lambda\left[g\left(\varphi Y_+,Z_-\right)g\left(X_+,W_+\right)-g\left(\varphi X_+,Z_-\right)g\left(Y_+,W_+\right)\right] \tag{3.52}$$

eşitliği bulunur.

Şimdi, $e_i\in\Gamma(D_+)$ olmak üzere $\{e_1,...,e_n,\varphi e_1,...,\varphi e_n,\xi_1,...,\xi_s\}$ φ-bazı verilsin. Bu baz kullanılarak $R_{X_+Y+}Z_-$ ifadesi hesaplansın..

$$R_{X_+Y+}Z_-=\sum_{i=1}^{n}g\left(R_{X_+Y+}Z_-,e_i\right)e_i+\sum_{i=1}^{n}g\left(R_{X_+Y+}Z_-,\varphi e_i\right)\varphi e_i+\sum_{i=1}^{n}g\left(R_{X_+Y+}Z_-,\xi_i\right)\xi_i$$

yazılabilir. Nulluk şartı $g\left(R_{X_+Y+}Z_-,\xi_i\right)=0$ olduğunu vurgular. Birinci Bianchi özdeşliği kullanılırsa (3.51) ve (3.52) dan

$$g\left(R_{X_+Y_+}Z_+,e_i\right)=s\lambda\left[g\left(\varphi Y_+,Z_-\right)g\left(X_+,e_i\right)-g\left(\varphi X_+,Z_-\right)g\left(Y_+,e_i\right)\right],$$

$$g\left(R_{X_+Y_+}Z_-,\varphi e_i\right)=(\kappa+1)s\left[g\left(X_+,\varphi Z_-\right)g\left(Y,e_i\right)-g\left(\varphi Z_-,Y_+\right)g\left(X_+,e_i\right)\right],$$

eşitlikleri bulunur. i üzerinden toplam alınırsa $R_{X_+Y+}Z_-$ elde edilir. $R_{X\_Y-}Z_+$ ve $R_{X_+Y-}Z_-$ terimleri de benzer yolla hesaplanır. Şimdi Lemma 3.3.8. göz önüne alınsın.

Her $X_+,Y_+\in\Gamma(D_+)$ ve $Z_-\in\Gamma(D_-)$ için

$$R_{X_+Y_+}\varphi Z_-=s\left[g\left(\varphi Y_+,Z_-\right)X_+-g\left(\varphi X_+,Z_-\right)Y_+\right]-\lambda\left[g\left(\varphi Y_+,Z_-\right)\varphi X_+-g\left(\varphi X_+,Z_-\right)\varphi Y_+\right]$$

bulunur. Bu eşitlikte Z_- yerine φZ_+ alınırsa ve toplanabilirlik özelliği kullanılırsa $R_{X_+Y_+}Z_+$ terimi elde edilir. Benzer işlemlerle $R_{X\_Y\_}Z_-$ terimi de hesaplanır. Son olarak, (3.47) formülünden ve Lemma 3.3.8. den $R_{X_+Y_-}Z_+$ ifadesi elde edilir.

Teorem 3.3.3. $\kappa < -1$ olmak üzere, M bir (κ,μ,ν)-nulluk şartını sağlayan $(2n+s)$-boyutlu bir hemen hemen Kenmotsu f-manifold olsun. Bu durumda, M nin K kesitsel eğriliği

$$K(X,\xi_i) = \kappa g(X,X) + \mu g(hX,X) + \nu g(\varphi hX,X) = \begin{cases} \kappa + \mu\lambda, & X \in D_+ \ ise \\ \kappa - \mu\lambda, & X \in D_- \ ise \end{cases} \tag{3.53}$$

$$K(X,Y) = \begin{cases} s, & X,Y \in D_+ \ ise \\ -s, & X,Y \in D_- \ ise \\ -s - s(\kappa+1)\left(g(X,\varphi Y)\right)^2, & X \in D_+, Y \in D_- \ ise \end{cases}$$

(3.54)

şeklinde verilir. (3.53) eşitliği, (3.6) ifadesinden direk olarak elde edilir. (3.54) eşitliği ise sırasıyla (3.45), (3.49) ve (3.47) ifadelerinin bir sonucudur.

Sonuç 3.3.1. $\kappa < -1$ olmak üzere, M bir (κ,μ,ν)-nulluk şartını sağlayan $(2n+s)$-boyutlu bir hemen hemen Kenmotsu f-manifold olsun. Bu durumda, M nin Ricci operatörü Q aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

$$Q = s\left[-2\varphi^2 + \mu h + \left(2(n-1)+\nu\right)(\varphi \circ h)\right] + 2n\kappa\bar{\eta} \otimes \bar{\xi}, \tag{3.55}$$

$$Q \circ \varphi - \varphi \circ Q = 2s\left[\mu h \circ \varphi + (n-1+\nu)h\right], \tag{3.56}$$

İspat. $\{e_1,...,e_n\}$, D_+ nın bir bazı olacak şekilde $\{e_1,...,e_n,\varphi e_1,...,\varphi e_n,\xi_1,...,\xi_s\}$, yerel bir φ-baz olsun. $X = X_+ + X_- \in D_+ \oplus D_-$ vektör alanı verilsin. (3.6) ve (3.45), (3.47) eşitliklerinden

$$QX_+ = s\left[(-2+\mu\lambda)X_+ + \lambda\left(2(n-1)+\nu\right)\varphi X_+\right], \tag{3.57}$$

elde edilir. Diğer taraftan, (3.48) ve (3.49) ifadelerinden

$$QX_- = s[(-2-\mu\lambda)X_- - \lambda(2(n-1)+\nu)\varphi X_-], \tag{3.58}$$

eşitliği bulunur. (3.57), (3.58) eşitlikleri ve $Q\xi_i = 2nk\overline{\xi}$ ifadesi göz önüne alınırsa (3.55) elde edilir. Son olarak (3.56) eşitliği, (3.55) ifadesinden kolayca elde edilir.

Sonuç 3.3.2. $\kappa < -1$ olmak üzere, M bir (κ, μ, ν)-nulluk şartını sağlayan $(2n+s)$-boyutlu bir hemen hemen Kenmotsu f-manifold olsun. (M, g) nin skaler eğriliği sabittir ve aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$S = 2ns(\kappa(2-n)-2n).$$

İspat. $\{e_1,...,e_n\}$, D_+ nın bir bazı olacak şekilde $\{e_1,...,e_n,\varphi e_1,...,\varphi e_n,\xi_1,...,\xi_s\}$, yerel bir φ-baz olsun. (3.6) ve (3.44), (3.47) eşitliklerinden

$$g(Qe_i, e_i) = ksn + \mu\lambda sn - s(\kappa+1)n^2 - sn^2, \tag{3.59}$$

ifadesi elde edilir. Diğer taraftan, (3.6), (3.48) ve (3.49) ifadelerinden

$$g(Q\varphi e_i, \varphi e_i) = ksn - \mu\lambda sn - s(\kappa+1)n^2 - sn^2, \tag{3.60}$$

eşitliği bulunur. Buradan, (3.59), (3.60) ve $Q\xi_i = 2nk\overline{\xi}$ eşitliklerinden istenilen ifade elde edilir.

3.4. ÖRNEKLER

Örnek 3.4.1. R^{2n+s} in standart koordinatları $(x_1,...,x_n,y_1,...,y_n,z_1,...,z_s)$ ve $M = \{(x_1,...,x_n,y_1,...,y_n,z_1,...,z_s) | z_i \neq 0,\ 1 \leq i \leq s,\ n \in N,\ n \geq 1\}$ tarafından tanımlanan $M \subset R^{2n+s}$, $(2n+s)$-boyutlu manifoldunu alalım. $i = 1,...,n$ ve $k = 1,...,s$ olmak üzere, M nin bir bazı

$$X_i = \left(-(z_i+1) \pm \sqrt{(z_i+1)^2 + e^{2z_i}}\right)\frac{\partial}{\partial x_i} + e^{z_i}\frac{\partial}{\partial z_i},$$

$$Y_i = \left((z_i + 1) \pm \sqrt{(z_i + 1)^2 + e^{2z_i}} \right) \frac{\partial}{\partial y_i},$$

$$\xi_k = \frac{\partial}{\partial z_k}$$

olsun. Bu vektör alanlarının Lie parentezleri $\forall i, j \in \{1,...,n\}$ ve $\forall k \in \{1,...,s\}$ için

$$\left[X_i, Y_j\right] = e^{z_i}.\left((2z_i + 3) + 2e^{2z_i}\right)\frac{\partial}{\partial y_j}, \quad \left[Y_i, Y_j\right] = 0,$$

$$\left[X_i, \xi_i\right] = -\left(-(2z_i + 3) + 2e^{2z_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_i} - e^{z_i}\frac{\partial}{\partial z_i},$$

$$\left[Y_i, \xi_i\right] = -\left((2z_i + 3) + 2e^{2z_i}\right)\frac{\partial}{\partial y_i},$$

$$\left[X_i, X_j\right] = e^{z_i}\left(-(2z_i + 3) + 2e^{2z_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_j} - e^{z_i}\left(-(2z_i + 3) + 2e^{2z_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_i},$$

şeklindedir. Eğer

$$\eta_i = \frac{\partial}{\partial z_i},$$

$$g = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\left(-(z_i + 1) \pm \sqrt{(z_i + 1)^2 + e^{2z_i}}\right)^2} dx_i^{\,2} + \frac{1}{\left((z_i + 1) \pm \sqrt{(z_i + 1)^2 + e^{2z_i}}\right)^2} dy_i^{\,2} \right),$$

$$+ \sum_{j=1}^{s} dz_j^{\,2}$$

$$\varphi\xi_i = 0, \quad \varphi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = -\frac{\partial}{\partial y_i},$$

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{e^{z_i}}{(2z_i + 2) \pm \sqrt{(2z_i + 2)^2 + 4e^{2z_i}}}\frac{\partial}{\partial z_i}$$

olarak alırsa, M üzerinde $(\varphi, \xi_j, \eta_i, g)$ hemen hemen metrik f-yapısının sağlandığı görülür. Üstelik, $d\eta_i = 0$ koşunun sağlandığı aşikardır. Öte yandan,

$$\Phi_{ii} := g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \varphi\frac{\partial}{\partial y_i}\right) = -\frac{1}{\left(-(z_i+1) \pm \sqrt{(z_i+1)^2 + e^{2z_i}}\right)\left((z_i+1) \pm \sqrt{(z_i+1)^2 + e^{2z_i}}\right)}$$

dışındaki tüm Φ_{ij} ler sıfırdr, bu nedenle

$$\Phi_{ii} := g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \varphi\frac{\partial}{\partial y_i}\right) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\left(-(z_i+1) \pm \sqrt{(z_i+1)^2 + e^{2z_i}}\right)\left((z_i+1) \pm \sqrt{(z_i+1)^2 + e^{2z_i}}\right)} dx_i \wedge dy_i$$

olup, $d\Phi$ dış türevi

$d\Phi = 2\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{s} dz_j\right) \wedge dx_i \wedge dy_i = 2\overline{\eta} \wedge \Phi$ dir. Sonuç olarak, φ nin Nijenhuis tensörünün sıfır olmaması nedeniyle, manifold bir hemen hemen Kenmotsu f-manifolddur.

Örnek 3.4.2. R^{2n+s} in standart koordinatları $(x_1,...,x_n, y_1,...,y_n, z_1,...,z_s)$ ve $M = \{(x_1,...,x_n, y_1,...,y_n, z_1,...,z_s) | z_i \neq 0,\ 1 \leq i \leq s,\ n \in N,\ n \geq 1\}$ tarafından tanımlanan $M \subset R^{2n+s}$, $(2n+s)$-boyutlu manifoldunu alalım. $i = 1,...,n$ ve $k = 1,...,s$ olmak üzere, M nin bir bazı

$$X_i = \left(-1 \pm \sqrt{1 + e^{2z_i}}\right)\frac{\partial}{\partial x_i} + z_i^{\,2}\frac{\partial}{\partial z_i},$$

$$Y_i = \left(1 \pm \sqrt{1 + e^{2z_i}}\right)\frac{\partial}{\partial y_i},$$

$$\xi_k = \frac{\partial}{\partial z_k}$$

olsun. Bu vektör alanlarının Lie parentezleri $\forall i, j \in \{1,...,n\}$ ve $\forall k \in \{1,...,s\}$ için

$$\left[X_i, Y_j\right] = \pm 2 z_i^{\,2} e^{2z_i} \frac{\partial}{\partial y_j}, \quad \left[Y_i, Y_j\right] = 0\,,$$

$$\left[X_i, \xi_i\right] = -2 e^{2z_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - z_i^{\,2} \frac{\partial}{\partial z_i}\,,$$

$$\left[Y_i, \xi_i\right] = \pm 2 e^{2z_i} \frac{\partial}{\partial y_i}\,,$$

$$\left[X_i, X_j\right] = 2 z_i^{\,2} e^{2z_i} \frac{\partial}{\partial x_j} - 2 e^{2z_i} z_i^{\,2} \frac{\partial}{\partial x_i}\,,$$

şeklindedir. Eğer

$$\eta_i = \frac{\partial}{\partial z_i}, \quad g = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\left(-1 \pm \sqrt{1+e^{2z_i}}\right)^2} dx_i^{\,2} + \frac{1}{\left(1 \pm \sqrt{1+e^{2z_i}}\right)^2} dy_i^{\,2} \right) + \sum_{j=1}^{s} dz_j^{\,2}\,,$$

$$\varphi \xi_i = 0, \quad \varphi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = -\frac{\partial}{\partial y_i}$$

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{z_i^{\,2}}{2 \pm 2\sqrt{1+e^{2z_i}}} \frac{\partial}{\partial z_i}$$

olarak alırsa, M üzerinde $\left(\varphi, \xi_j, \eta_i, g\right)$ hemen hemen metrik f-yapısının sağlandığı görülür. Üstelik, $d\eta_i = 0$ koşunun sağlandığı aşikardır. Öte yandan,

$$\Phi_{ii} := g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \varphi \frac{\partial}{\partial y_i}\right) = -\frac{1}{\left(-1 \pm \sqrt{1+e^{2z_i}}\right)\left(1 \pm \sqrt{1+e^{2z_i}}\right)}$$

dışındaki tüm Φ_{ij} ler sıfırdr, bu nedenle

$$\Phi_{ii} := g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \varphi \frac{\partial}{\partial y_i}\right) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\left(-1 \pm \sqrt{1+e^{2z_i}}\right)\left(1 \pm \sqrt{1+e^{2z_i}}\right)} dx_i \wedge dy_i$$

olup, $d\Phi$ dış türevi

$d\Phi = 2\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{s} dz_j\right)\wedge dx_i \wedge dy_i = 2\overline{\eta}\wedge\Phi$ dir. Sonuç olarak, φ nin Nijenhuis tensörünün sıfır olması nedeniyle, manifold bir Kenmotsu f-manifolddur.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, hemen hemen Kenmotsu f-manifoldlar göz önüne alınıp bir genelleştirmesi yapılmıştır. Bazı Riemann eğrilik özellikleri elde edilmiştir. Hemen hemen Kenmotsu f-manifoldların Ricci simetri, Ricci yarı-simetri, pseudo simetrik özellikleri ve altmanifoldları incelenebilir. $divR = 0$ ve $divC = 0$ eşitlikleri incelenip ilginç sonuçlar elde edilebilir. η-paralel ve devirli paralel Ricci özellileri incelenip değişik uygulamaları yapılabilir. Ayrıca, iki hemen hemen Kenmotsu f-manifold arasında Riemann submersiyonları kurulup aralarındaki bağıntılar incelenebilir. Bu çalışmada Levi-Civita konneksiyonu kullanıldı. Bu konneksiyon yerine başka bir konneksiyon kullanılıp daha farklı sonuçlara ulaşılabilir.

5. KAYNAKLAR

Arslan K., Ezentaş R., Mhai I., Murathan C., Özgür C., Ricci curvature of submanifolds in Kenmotsu space forms, *Hindawi Pub. Corp*., 29 (12) (**2002**) 719-726.

Bang-Yen C., *Geometry of submanifolds*, New York, M. Dekker, (**1973**).

Blair, D. E., *The theory of quasi-Sasakian structures*, J. Diff. Geometry, **(**1**)** (**1967**) 331-345.

Blair D. E., *Geometry of manifolds with structural group* $U(n)\times O(s)$, J. Diff. Geom., 4 (**1970)** 155-167.

Blair D. E., *Contact manifolds in Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, NewYork (**1970)**.

Blair D. E., *Two remarks on contact metric structures*, Tohoku Math. J., 29 (**1977**) 319-324.

Blair D. E., Koufogiorgos T. and Papantoniou B. J., *Contact metric manifolds satisfying a nullity condition*, Israel J. Math., 91 (1-3) (**1995**) 189-214.

Blair D. E., *Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds*, Progress in Mathematics, 203. Birkhâuser Boston, **(2002).**

Boeckx E., *A full classification of contact metric* (κ,μ) *-spaces*, Illinois J. Math., 44(1) (**2000)** 212-219.

Boeckx E., Cho J. T., $\eta-$*parallel contact metric spaces*, Differential geometry and its applications, 22 (**2005)** 275-285.

Boeckx E., Cho J. T., *Locally symmetric contact metric manifolds*, Monatsh. Math., 148

(4) (**2006)** 269-281.

Chinea D., Gonzalez C., *A classification of almost contact metric manifolds,* Annali di Matematica pura ed applicata, 156 (4) (**1990)** 15-36.

Cho J. T., *Geometry of contact strongly pseudo-convex CR-manifolds, J. Korean Math.,* (43) 5 **(2006)** 1019-1045.

Dacko P. and Olszak Z., *On conformally flat almost cosymplectic manifolds with Kahler leaves*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, 56 (1) (**1998)** 89-103.

Dacko P., Olszak Z., *On almost cosymplectic* $(\kappa,\mu,\nu)-$*spaces*, Banach Center Publ., 69 (**2005)** 211-220.

Dacko P., Olszak Z., *On almost cosymplectic* $(-1,\mu,0)-$*spaces*, Central European Journal of Mathematics, 3 (2) (**2005)** 318-330.

Dileo G., Pastore A. M., *Almost Kenmotsu manifolds and local symmetry*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, 14 (**2007)** 343-354.

Dileo G., Pastore M., *Almost Kenmotsu manifolds and nullity distributions*, J. Geom., Birkhauser Verlag Basel., (**2009).**

Dileo G., Pastore M. 2009. *Almost Kenmotsu manifolds with a condition of* $\eta-$*parallelism*, Differential Geo. and its applications, (27) (**2009)** 671-679.

Endo H., *Non-existence of almost cosymplectic manifolds satisfying a certain condition*, Tensor N. S., 63 (**2002)** 272-284.

Endo H., *On Ricci curvatures of almost cosymplectic manifolds*, An. Stiin|. Univ. "Al. I. Cuza" Ia§i, Mat., (40) **(1994)** 75-83.

Gabriel E. V., *A Schur-type Theorem On Indefinite Quaternionic Kaehler Manifolds*, Int. J. Contemp. Math., 11 (2) **(2007)** 529-536.

Gallot S., Hulin D., Lafontaine J., *Riemann Geometry*, 3rd ed., XVI, 322 p., Springer Universitext, ISBN: 9783540204930, (**2004).**

Ghosh A. and Sharma R., *On contact strongly pseudo-convex integrable CR manifolds*, J. Geom., 66, (**1999)** 116-122.

Ghosh A., Sharma R. and Cho J. T., *Contact metric manifolds with* $\eta-$*paralel torsion tensor*, Ann. Glob. Anal. Geom., DOI 10 (**2008)** 1007/s10455-008 9112-1.

Goldberg S. I., Yano K., *Integrability of almost cosymplectic structure*, Pacific J. Math., 31 (**1969)** 373-382.

Goldberg S. I., *Integrability of almost Kaehler manifolds*, Proceedings of the American Math. Soc., 21(1) (**1969)** 96-100.

Hacısalihoğlu H. H., *Diferensiyel Geometri*, Cilt I, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, **(1993).**

Hacısalihoğlu H. H., *Diferensiyel Geometri*, Cilt II, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, **(2000)**.

Hacısalihoğlu H. H., Ekmekçi N., *Tensör Geometri*, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, **(2003).**

Janssens D., Vanhecke L., *Almost contact structures and curvature tensors*, Kodai Math J., 4 **(1981)** 1-27.

Kassabov O. T., *Schur's theorem for almost Hermitian manifolds*, C.R. Acad. Bulg. Sci., (54) 3 **(2001)** 15-18.

Kenmotsu K., *A class of contact Riemannian manifold*, Tohoku Math. Journal, 24 **(1972)** 93-103.

Kim T. W., Pak H. K., *Canonical foliations of certain classes of almost contact metric structures*, Acta Math. Sinica, Eng. Ser. Aug., 21(4) **(2005)** 841-846.

Kim T. W., Pak H. K., *Criticality of characteristic vector fields on almost cosymplectic manifolds*, J. Korean Math. Soc., 44(3) **(2007)** 605-613.

Kirichenko V. F., *Almost cosymplectic manifolds satisfying the axiom of Pholomorphic planes* (in Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR (273) **(1983)** 280-28.

Koufogiorgos T. and Tsichlias C., *On the existence of a new class of contact metric manifolds*, Canad. Math. Bull., 43(4) **(2000)** 440-447.

Koufogiorgos T., Markellos M. and Papantoniou J., *The harmonicity of the reeb vector field on contact metric* $3-$*manifolds*, Pasific Journal of Math., 234 (2) (**2008**).

Kulkarni R. S., *On a theorem of F. Shur*, Journal Diff. Geom., (**4**) (**1970**) 453-456.

Nobuhiro I., *A theorem of Schur type for locally symmetric spaces*, Sci. Rep. Niigata Univ., Ser. A (25) (**1989**) 1-4

O'neill B., *Semi Riemannian Geometry*, A. Press, London, (**1983**).

Olszak Z., *On almost cosymplectic manifolds*, Kodai Math, 4(2) (**1981**) 239-250.

Olszak Z., *Almost cosymplectic manifolds with Kaehlerian leaves*, Tensor N.S., 46 (**1987**) 117-124.

Olszak Z., *Locally conformal almost cosymplectic manifolds*, Coll. Math., 57 (**1989**) 73-87.

Olszak Z., Dacko P., *On conformally flat almost cosymplectic manifolds with Keahlerian leaves*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, (56) 1 (**1998**) 89-103.

Öztürk H , Aktan N , Murathan C., *Almost α-Cosymplectic* $(\kappa,\mu,\nu)-$*Spaces,* arXiv:1007.0527.(**2010**).

Öztürk H , *Hemen Hemen α-Kosimplektik* f *-Manifoldlar,* Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 2009.

Sharpe R.W., *Differential Geometry*, Graduate Texts in Math., Springer, (**1997**).

Schur F., *Ueber den Zusammenhang der Raume constanten Riemann'schen Kriimmungsmasses mit den projectiven, Raumen*. Math., (27) (**1886**) 537-567.

Spivak M., *Calculus on Manifolds*, Reading, Massachusetts, W.A. Benjamin, Inc., ISBN: 0805902193, (**1965**).

Tanno S., The topology of contact Riemannian manifolds, Illinois J. Math. 12 (1968), 700-717.

Tanno S., *The standard CR structure on the unit tangent bundle*, Tohoku Math., J. 44 (2) (**1992**) 535-543.

Vaisman I., *Conformal changes of almost contact metric manifolds*, Lecture Notes in Math., Berlin-Heidelberg-New York, 792 (**1980**) 435-443.

Yano K., Kon M., *Structures on manifolds*, Series in Pure Mathematics, 3.World Scientific Publishing Corp. Singapore, (**1984**).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: BALKAN Yavuz Selim
Uyruğu	: T. C.
Doğum tarihi ve yeri	: 01.07.1989/MANİSA
Telefon	: (0507) 518 97 50
Faks	: (0380) 541 24 03
E-posta	: y.selimbalkan@gmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Yüksek Lisans	Düzce Üniversitesi	2013
Lisans	Balıkesir Üniversitesi	2011
Lise	Akhisar Anadolu Lisesi	2007

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2011-	Düzce Ünv. F.E.F. Matematik Bölümü	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce (ÜDS:87.50, KPDS:83)

Yayınlar

1. Aktan N. and **Balkan Yavuz Selim,** On φ-conformally flat almost cosymplectic (κ,μ)-spaces, International Congress in Honour of Professor Hari M. Srivastava, Auditorium Campus of Uludag University, Bursa-Turkey, (**2012**).

2. Aktan N., **Balkan Satılmış** and Mustafa Yıldırım, On weak symmetries of almost Kenmotsu (κ,μ,ν)-spaces, 7.Ankara matematik günleri, Bilkent Üniversitesi, Ankara-Türkiye, **(2012).**

3. Aktan N. and **Balkan Satılmış**, Almost cosymplectic (κ,μ)-spaces with cyclic-parallel Ricci tensor, X. Geometri sempozyumu, Balıkesir Üniversitesi, Balıkesir-Türkiye, **(2012).**

4. Aktan N., **Balkan Satılmış** and Mustafa Yıldırım, On weak symmetries of almost Kenmotsu (κ,μ,ν)-spaces, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistic, **in press**

5. Aktan Nesip and **Balkan Yavuz Selim,** Almost cosymplectic (κ,μ)-spaces with cyclic-parallel Ricci tensor, International Electronical Journal of Geometry, **in press.**

6. **Balkan Yavuz Selim**, Aktan Nesip and Özüsağlam Erdal, Cyclic Parallel Ricci Tensor Of Almost S-manifolds, Konuralp Journal of Mathematics, Volume 1, No 1, pp. 1-7, **(2013).**

7. **Balkan Yavuz Selim** and Aktan Nesip, Some Symmetry Conditions of Almost S-manifolds, Mathematical Sciences and Applications E-Notes, **incelemede.**

8. **Balkan Yavuz Selim** and Aktan Nesip, Special Weakly Symmetric Almost α-Cosymplectic f-Manifold, Konuralp Journal of Mathematics, **incelemede.**