



**T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ELİPTİK-SCHRÖDINGER DENKLEMLERİ İÇİN LOKAL
OLMAYAN SINIR-DEĞER PROBLEMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GÜLDEN TOSUN MUCUK

ARALIK 2013

DÜZCE

KABUL VE ONAY BELGESİ

Gülden TOSUN MUCUK tarafından hazırlanan SCHRÖDINGER–ELİPTİK DENKLEMLERİ İÇİN LOKAL OLMAYAN SINIR–DEĞER PROBLEMLERİ isimli lisansüstü tez çalışması, Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun /12/2013 tarih ve 2013/ sayılı kararı ile oluşturulan jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Üye
(Tez Danışmanı)
Yrd. Doç. Dr. Yıldırım ÖZDEMİR
Düzce Üniversitesi

Üye
Prof. Dr. İsmet YILDIZ
Düzce Üniversitesi

Üye
Yrd. Doç. Dr. Okan GERÇEK
Fatih Üniversitesi

Tezin Savunulduğu Tarih : 23/12/2013

ONAY

Bu tez ile Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Gülden TOSUN MUCUK'un Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans derecesini almasını onaylamıştır.

Prof. Dr. Haldun MÜDERRİSOĐLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

23/12/2013

Gülden TOSUN MUCUK

Sevgili Aileme...

TEŞEKKÜR

Başlamış olduğum bu yolda, en başından sonuna dek tüm görüşlerini paylaşan, engin bilgi ve tecrübelerini hiçbir zaman esirgemeyen, bilim tutkusunu içinde barındıran, tüm sorularıma sabır ile yanıt veren ve her türlü konuda desteğini eksik etmeyerek, yanımda olduğunu hissettiğim saygıdeğer hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Yıldırım ÖZDEMİR'e teşekkürü bir borç bilirim.

Tüm görüşlerini ve bilgisini herkes ile paylaşmaktan sakınmayan, bilgi ve deneyimleriyle sonuca ulaşmamda yol gösteren, herkese eşit tavrı ve işine tutku ile bağlı olan, sayın Prof. Dr. Allaberen ASHYRALYEV'e çok teşekkür ederim.

Çalışmalarım boyunca yardımlarını esirgemeyen jüri üyesi, sayın Yrd. Doç. Dr. Okan GERÇEK'e çok teşekkür ederim.

Ayrıca diğer jüri üyesi ve matematik bölüm başkanımız, sayın Prof. Dr. İsmet YILDIZ hocama göstermiş olduğu ilgi ve yol gösterici yardımlarından ötürü çok teşekkür ederim.

Tez dönemim boyunca moralimi en üst düzeyde tutan ve kendilerinden her fırsatta güç aldığım aileme ve arkadaşlarıma müteşekkirim.

23 Aralık 2013

Gülden TOSUN MUCUK

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TEŞEKKÜR.....	i
İÇİNDEKİLER..	ii
ŞEKİL LİSTESİ.....	iii
ÖZET.....	1
ABSTRACT.....	2
EXTENDED ABSTRACT..	3
1. GİRİŞ.....	5
2. MATERYAL VE YÖNTEM.....	18
2.1 Hilbert Uzayının Elemanları	18
3. ELİPTİK SCHRÖDINGER DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ..	25
4. ELİPTİK SCHRÖDINGER FARK DENKLEMLERİ.....	27
5. NÜMERİK ANALİZ.....	28
5.1 Birinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şeması	28
5.2 İkinci Basamaktan Doğruluklu Crank-Nicholson Fark Şeması.....	32
6. BULGULAR VE TARTIŞMA.....	36
6.1 Hata Analizi.....	36
6.2 Tartışma.....	38
7. SONUÇLAR ve ÖNERİLER.....	39
8. KAYNAKLAR.....	40
9. EKLER.....	43
EK-1. Algoritma	43
EK-2. Birinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şeması İçin Matlab Programı...	43
EK-3. Algoritma	47
EK-4. İkinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şeması İçin Matlab Programı...	47
ÖZGEÇMİŞ	

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1.1. Figure 1:Gerçek çözüm	37
Şekil 1.2. Figure 2:Birinci basamaktan doğruluklu fark şeması ile elde edilen gerçek çözüm	37
Şekil 1.3. Figure 3:İkinci basamaktan doğruluklu Crank-Nicholson fark şeması ile elde edilen yaklaşık çözüm	38

ÖZET

ELİPTİK-SCHRÖDINGER DENKLEMLERİ İÇİN LOKAL OLMAYAN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Gülden TOSUN MUCUK

Düzce Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Yıldırım ÖZDEMİR

Aralık 2013, 50 sayfa

H Hilbert uzayında öz-eşlenik pozitif tanımlı A operatörlü diferansiyel denklemleri için lokal olmayan sınır-değer problemi

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + Au(t) = g(t), (0 \leq t \leq 1), \\ i\frac{du(t)}{dt} - Au(t) = f(t), (-1 \leq t \leq 0), \\ u(1) = u(-1) + \mu \end{array} \right.$$

ele alınmıştır. Bu sınır-değer probleminin yaklaşık çözümü için birinci basamaktan doğruluklu fark şeması ve ikinci basamaktan doğruluklu Crank-Nicholson fark şemaları sunulmuştur. Bu fark şemaları kullanılarak eliptik-Schrödinger denklemi için lokal olmayan sınır-değer probleminin nümerik çözümleri elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Eliptik-Schrödinger Denklem, Fark Şemaları, Nümerik Çözümler.

ABSTRACT

NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR ELLIPTIC-SCHRÖDINGER DIFFERENTIAL EQUATIONS

Gülden TOSUN MUCUK

Duzce University

Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics

Master of Science Thesis

Supervisor: Assit. Prof. Yildirim OZDEMIR

December 2013, 50 pages

The abstract nonlocal boundary value problem

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + Au(t) = g(t), (0 \leq t \leq 1), \\ i\frac{du(t)}{dt} - Au(t) = f(t), (-1 \leq t \leq 0), \\ u(1) = u(-1) + \mu \end{array} \right.$$

for differential equation in a Hilbert space H with the self-adjoint positive definite operator A is considered. The first and the second order accuracy difference schemes for the approximate solutions of this nonlocal boundary value problem are presented. These difference schemes are used for obtaining the numerical solution of the nonlocal boundary value problem for elliptic-Schrödinger equations.

Keywords: Elliptic-Schrödinger Equation, Difference Schemes, Numerical Solutions.

EXTENDED ABSTRACT

NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR ELLIPTIC-SCHRÖDINGER DIFFERENTIAL EQUATIONS

Gülden TOSUN MUCUK

Düzce University

Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics

Master of Science Thesis

Supervisor: Assist. Prof. Yildirim OZDEMIR

December 2013, 50 pages

1. INTRODUCTION:

The abstract nonlocal boundary value problem

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + Au(t) = g(t), (0 \leq t \leq 1), \\ i\frac{du(t)}{dt} - Au(t) = f(t), (-1 \leq t \leq 0), \\ u(1) = u(-1) + \mu \end{array} \right.$$

for differential equation in a Hilbert space H with the self-adjoint positive definite operator A is considered. The first and the second order accuracy difference schemes for the approximate solutions of this nonlocal boundary value problem are presented. These difference schemes are used for obtaining the numerical solution of the nonlocal boundary value problem for elliptic-Schrödinger equations.

Methods of solutions of nonlocal boundary value problems for partial differential equations and partial differential equations of mixed type have been studied extensively by many researches (see [Salakhitdinov, M. S., 1974], [Djuraev, T. D., 1979], [Bazarov, D. and Soltanov, H., 1995], [Glazatov, S. N., 1998], [Ashyralyev, A. and Aggez, N., 2004], [Ashyralyev, A. and Ozdemir, Y., 2005], [Ashyralyev, A. and Gercek, O., 2008], [Ashyralyev, A. and Sirma, A., 2008], [Ashyralyev, A. and Yildirim, O., 2010], [Ashyralyev, A. and Hicdurmaz, B., 2011], [Ashyralyev, A. and Ozger, F.,

2011], [Ozdemir, Y. and Kucukunal, M., 2012] and the references given therein).

2. MATERIAL AND METHODS:

It is known that certain problems of modern physics and technology can be effectively described in terms of nonlocal problems for partial differential equations. These nonlocal conditions arise mainly when the data on the boundary cannot be measured directly.

3. RESULTS AND DISCUSSIONS:

This work is devoted to the study of the numerical solution of the nonlocal boundary value problem for elliptic-Schrödinger equation. The following original results are obtained:

- The first and second order of accuracy difference schemes for the approximate solutions of the nonlocal boundary problem for elliptic-Schrödinger differential equations are presented.
- The approximate solutions of the nonlocal boundary value problems for equations of elliptic- Schrödinger equation are obtained.
- Numerical examples are presented. A Matlab program is given.

4. CONCLUSION AND OUTLOOK:

Our goal in this work is to investigate the approximate solutions of the nonlocal boundary value problems for equations of elliptic- Schrödinger type.

1 GİRİŞ

Modern fiziğin ve teknolojinin bazı problemlerinin etkili bir biçimde kısmi diferansiyel denklemler için lokal olmayan problemler üzerinden ifade edilebilir olduğu iyi bilinen bir gerçektir. Bu lokal olmayan koşullar çoğunlukla sınırdaki veriler doğrudan ölçülemediği zaman ortaya çıkmaktadır. Kısmi diferansiyel denklemler ve karma tipli kısmi diferansiyel denklemler için lokal olmayan sınır-değer problemlerinin çözüm yöntemleri üzerine bir çok araştırmacı tarafından çalışmalar yapılmıştır. (bkz. [Salakhitdinov, M. S., 1974], [Djuraev, T. D., 1979], [Bazarov, D. ve Soltanov, H., 1995], [Glazatov, S. N.,1998], [Ashyralyev, A. ve Aggez, N., 2004], [Ashyralyev, A. ve Ozdemir, Y., 2005], [Ashyralyev, A. ve Gercek, O., 2008], [Ashyralyev, A. ve Sirma, A., 2008], [Ashyralyev, A. ve Yildirim, O., 2010], [Ashyralyev, A. ve Hicdurmaz, B., 2011], [Ashyralyev, A. ve Ozger, F., 2011], [Ozdemir, Y. ve Kucukunal , M., 2012]) (Ayrıntıları kaynaklar kısmında verilmiştir).

Bu çalışmadaki amacımız eliptik-Schrödinger tipindeki denklemler için lokal olmayan sınır-değer problemlerinin yaklaşık çözümlerini incelemektir. Bilindiği gibi eliptik-Schrödinger denklemler için karma tipli problemler, Fourier serileri yöntemi ile, Laplace dönüşümü yöntemi ile ve Fourier dönüşümü yöntemi ile çözülebilir. Şimdi bunlara örnekler verelim.

İlk olarak eliptik-Schrödinger denklemi için

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -(t+1) \sin x, 0 < t < 1, 0 < x < \pi, \\ i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (i-1+t) \sin x, -1 < t \leq 0, 0 < x < \pi, \\ u(1, x) = u(-1, x) + 2 \sin x, 0 \leq x \leq \pi, \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, -1 \leq t \leq 1 \end{array} \right. \quad (1.1)$$

lokal olmayan sınır-değer problemini ele alalım. (1.1) probleminin çözümü için, değişkenlerine ayırma yöntemi ya da bir diğer bilinen adıyla “Fourier serileri” yöntemini kullanalım.

Problemin çözümü olan $u(t, x)$ fonksiyonu

$$u(t, x) = v(t, x) + w(t, x) \quad (1.2)$$

şeklinde iki fonksiyonun toplamı şeklinde yazılır. Burada, $v(t, x)$ (1.1) problemine karşılık gelen homojen denklemin genel çözümü ve $w(t, x)$ de homojen olmayan kısmın özel çözümüdür. Matematiksel ifadeyle, $v(t, x)$ ve $w(t, x)$, sırasıyla,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, 0 < t < 1, 0 < x < \pi, \\ i \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, -1 < t < 0, 0 < x < \pi, \\ v(1, x) = v(-1, x) + 2 \sin x, 0 \leq x \leq \pi, \\ v(t, 0) = v(t, \pi) = 0, -1 \leq t \leq 1. \end{array} \right. \quad (1.3)$$

ve

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -(t+1) \sin x, 0 < t < 1, 0 < x < \pi, \\ i \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = (i-1+t) \sin x, -1 < t < 0, 0 < x < \pi, \\ w(1, x) = w(-1, x), 0 \leq x \leq \pi, \\ w(t, 0) = w(t, \pi) = 0, -1 \leq t \leq 1 \end{array} \right. \quad (1.4)$$

problemlerinin çözümleridirler. Öncelikle, (1.3) probleminin çözümünü elde edeceğiz. İlk olarak $0 \leq t \leq 1$ olsun. Değişkenlerine ayırma yöntemi ile

$$v(t, x) = T(t)X(x) \neq 0$$

ve

$$\frac{iT'(t)}{T(t)} + \frac{X''(x)}{X(x)} = 0$$

elde ederiz. Buradan,

$$-\frac{iT'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \quad (1.5)$$

verilen sınır koşullarından (1.3) $X(0) = X(\pi) = 0$ olur. Yani,

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x), \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

dır. Burada üç durum söz konusudur. Eğer $\lambda \geq 0$ ise, (1.6) probleminin çözümü $X(x) \equiv 0$ dır. $\lambda < 0$ için,

$$X_k(x) = \sin kx, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \lambda = \lambda_k = -k^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

dir. Böylece,

$$X_k(x) = \sin kx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.7)$$

şeklinde bulunur. Şimdi, $T(t)$ ifadesini elde etmek için,

$$T'(t) = i\lambda T(t), \quad \lambda = -k^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

denklemini ele alalım. Bu adi diferansiyel denklemin çözümü

$$T_k(t) = A_k e^{-ik^2 t}, \quad k = 1, 2, \dots$$

dir. Böylece,

$$v(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-ik^2 t} \sin kx$$

olur. Şimdi $-1 \leq t \leq 0$ durumunu inceleyelim. Benzer şekilde,

$$v(t, x) = T(t)X(x) \neq 0$$

ifadesini ve

$$\frac{T''(t)}{T(t)} + \frac{X''(x)}{X(x)} = 0$$

veya

$$-\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \quad (1.8)$$

yazılır. Sınır koşulları kullanılarak

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x), \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

sınır-değer problemini ve

$$X_k(x) = \sin kx, \quad k = 1, 2, \dots$$

elde ederiz. Daha sonra,

$$T''(t) = -\lambda T(t), \lambda = -k^2, k = 1, 2, \dots$$

problemi ve

$$T_k(t) = (B_k e^{kt} + C_k e^{-kt}), k = 1, 2, \dots$$

çözümü elde edilir. Böylece,

$$v(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} (B_k e^{kt} + C_k e^{-kt}) \sin kx$$

çözümü bulunmuş olur. Lokal olmayan sınır koşulu ve süreklilik koşulları,

$$\begin{cases} v(1, x) = v(-1, x) + 2 \sin x, \\ v(0_+, x) = v(0_-, x), \\ v'(0_+, x) = v'(0_-, x), \end{cases}$$

kullanılarak $k \neq 1$ için

$$\begin{cases} B_k + C_k = A_k, \\ k(B_k - C_k) = k^2 A_k, \\ B_k e^k + C_k e^{-k} = A_k e^{-k^2} \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} B_1 + C_1 = A_1, \\ B_1 - C_1 = A_1, \\ B_1 e + C_1 e^{-1} = A_1 e^{-1} + 2 \end{cases}$$

denklemleri elde edilir. Buradan,

$$\begin{cases} A_1 = B_1 = \frac{2}{e - e^{-1}} = \frac{4}{\sinh 1}, C_1 = 0, k = 1 \\ A_k = B_k = C_k = 0, k \neq 1 \end{cases}$$

bulunur. O halde,

$$v(t, x) = \frac{4}{\sinh 1} e^t \sin x$$

dir. Daha sonra, (1.4) ifadesinin çözümünü bulalım. Öncelikle, $0 \leq t \leq 1$ durumunu inceleyelim. Burada,

$$w(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k(t) \sin kx$$

olsun. Ardından,

$$w_{tt} + w_{xx} = \sum_{k=1}^{\infty} (D_k''(t) - k^2 D_k(t)) \sin kx = -(t+1) \sin x$$

yazılabilir. Buradan,

$$\begin{cases} D_1''(t) - D_1(t) = -(t+1), k=1 \\ D_k''(t) - k^2 D_k(t) = 0, k \neq 1 \end{cases}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin çözümleri, sırasıyla,

$$\begin{cases} D_1(t) = C_1 \cosh t + B_1 \sinh t + t + 1 \\ D_k(t) = C_k \cosh kt + B_k \sinh kt \end{cases}$$

dir. Böylece,

$$w(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t, x) = \sum_{k=2}^{\infty} (C_k \cosh kt + B_k \sinh kt) \sin kx \\ + (C_1 \cosh t + B_1 \sinh t + t + 1) \sin x.$$

elde edilecektir. Şimdi $-1 \leq t \leq 0$ durumunu göz önüne alalım. Benzer olarak,

$$iw_t + w_{xx} = \sum_{k=1}^{\infty} (iD_k'(t) - k^2 D_k(t)) \sin kx = (i-1+t) \sin x$$

yazabiliriz ki, bu da

$$\begin{cases} iD_1'(t) - D_1(t) = i-1+t, k=1 \\ iD_k'(t) - k^2 D_k(t) = 0, k \neq 1 \end{cases}$$

olduğu anlamına gelecektir. Buradan,

$$\begin{cases} D_1(t) = A_1 e^{it} + t, k=1 \\ D_k(t) = A_k e^{ik^2 t}, k \neq 1 \end{cases}$$

bulunur. Böylece,

$$w(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t, x) = \sum_{k=2}^{\infty} A_k e^{ik^2 t} \sin kx + (A_1 e^{it} + t + 1) \sin x$$

elde edilecektir. Lokal olmayan sınır koşulu ve süreklilik koşulları,

$$\begin{cases} w(1, x) = w(-1, x), \\ w(0_+, x) = w(0_-, x), \\ w'(0_+, x) = w'(0_-, x), \end{cases}$$

kullanılarak $k \neq 1$ için

$$\begin{cases} C_k = A_k, \\ kB_k = k^2 A_k, \\ B_k \sinh k + C_k \cosh k = A_k e^{-k^2} \end{cases}$$

ve $k = 1$ için

$$\begin{cases} C_1 = A_1, \\ B_1 + 1 = A_1 + 1, \\ B_1 \sinh 1 + C_1 \cosh 1 + 1 = A_1 e^{-1} - 1 \end{cases}$$

denklemler elde edilir. Bu denklemler sisteminin çözümleri

$$A_1 = B_1 = C_1 = \frac{2}{e^{-1} - \sinh 1 - \cosh 1} = -\frac{4}{\sinh 1}$$

ve $A_k = B_k = C_k = 0, k \neq 1$ dir. Böylece,

$$w(t, x) = \left(-\frac{4}{\sinh 1} e^t + t + 1 \right) \sin x$$

dir. Dolayısıyla,

$$u(t, x) = v(t, x) + w(t, x) = (t + 1) \sin x$$

ifadesi problemin tam çözümüdür.

Benzer şekilde aşağıdaki

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + \sum_{r=1}^n \alpha_r \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x_r^2} = g(t, x), \\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \bar{\Omega}, 0 \leq t \leq T, \\ i \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \sum_{r=1}^n \alpha_r \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x_r^2} = f(t, x), \\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \bar{\Omega}, -T \leq t \leq 0, \\ u_t(0_+, x) = u_t(0_-, x), x \in \bar{\Omega} \\ u(T, x) = u(-T, x) + \varphi(x), x \in \bar{\Omega}, \\ u(t, x) = 0, x \in S \end{cases}$$

çok boyutlu eliptik-Schrödinger denklemleri için lokal olmayan sınır-değer probleminin çözümü elde edilebilir. Burada, $\alpha_r > 0$ ve $f(t, x)$ ($t \in [0, T], x \in \bar{\Omega}$), $g(t, x)$ ($t \in [-T, 0], x \in \bar{\Omega}$), $\varphi(x)$, ($x \in \bar{\Omega}$) verilmiş düzgün (smooth) fonksiyonlardır. Ayrıca Ω, n

boyutlu Öklid uzayı \mathbb{R}^n de $(0 < x_k < 1, 1 \leq k \leq n)$, $\bar{\Omega} = \Omega \cup S$ olmak üzere S ile sınırlı bir birim açıktır.

Ancak, değişkenlerine ayırma yöntemi yalnızca sabit katsayılı denklemlerin çözümünde kullanılabilir. Ne var ki, değişken katsayılı kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için en kullanışlı olan yolun fark yöntemi olduğu çok iyi bilinmektedir.

İkinci olarak, eliptik-Schrödinger denklemi için

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = te^{-x}, 0 < t < 1, 0 < x < \infty, \\ i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (i+t)e^{-x}, -1 < t < 0, 0 < x < \infty, \\ u(1, x) = u(-1, x) + 2e^{-x}, 0 \leq x < \infty, \\ u(t, 0) = t; u_x(t, 0) = -t, -1 \leq t \leq 1 \end{array} \right. \quad (1.9)$$

bir başka problem ele alalım. (1.9) problemi Laplace dönüşümü yöntemi (x 'e göre) ile çözülebilir. Öncelikle $0 \leq t \leq 1$ aralığını göz önüne alalım. Denklemin her iki tarafının Laplace dönüşümünü alalım. Bu durumda,

$$\mathbf{L}\{u_{tt}\} + \mathbf{L}\{u_{xx}\} = \mathbf{L}\{te^{-x}\}$$

veya

$$(\mathbf{L}\{u(t, x)\})_{tt} + s^2 \mathbf{L}\{u(t, x)\} - su(t, 0) - u_x(t, 0) = \frac{t}{s+1}$$

olacaktır. $\mathbf{L}\{u(t, x)\} = v(t, s)$ olarak gösterelim. Böylece denklem

$$v_{tt}(t, s) + s^2 v(t, s) - st + t = \frac{t}{s+1}$$

veya

$$v_{tt}(t, s) + s^2 v(t, s) = \frac{s^2 t}{s+1}$$

haline gelir. Bu denklemin tamamlayıcı çözümünü

$$v_c(t, s) = c_1 \sin st + c_2 \cos st$$

dir. Özel çözüm için ise,

$$v_p(t, s) = \frac{t}{s+1}$$

yazılır. Buna göre,

$$v(t, s) = c_1 \sin st + c_2 \cos st + \frac{t}{s+1} \quad (1.10)$$

elde edilir.

Şimdi $-1 \leq t \leq 0$ durumunu inceleyelim. Buna göre,

$$iu_t + u_{xx} = (i+t)e^{-x}$$

dir. Denklemin her iki yanının Laplace dönüşümü alınırsa,

$$i\mathbf{L}\{u_t\} + \mathbf{L}\{u_{xx}\} = \mathbf{L}\{(i+t)e^{-x}\}$$

veya

$$i(\mathbf{L}\{u(t, x)\})_t + s^2\mathbf{L}\{u(t, x)\} - su(t, 0) - u_x(t, 0) = \frac{i+t}{s+1}$$

elde edilir. Buradan,

$$v_t(t, s) + s^2v(t, s) - st + t = \frac{i+t}{s+1}$$

ya da

$$v_t(t, s) + s^2v(t, s) = \frac{s^2t + i}{s+1}$$

yazılır. Böylece

$$v(t, s) = c_3 e^{-is^2t} + \frac{t}{s+1} \quad (1.11)$$

dir. Lokal olmayan sınır koşulu ve süreklilik koşulları

$$\begin{cases} v(1, s) = v(-1, s) + 2/(1+s), \\ v(0_+, s) = v(0_-, s), \\ v'(0_+, s) = v'(0_-, s) \end{cases}$$

uygulanırsa,

$$\begin{cases} c_2 = c_3, \\ sc_1 + \frac{1}{s+1} = -s^2c_3 + \frac{1}{s+1}, \\ c_1 \sin s + c_2 \cos s + \frac{1}{s+1} = c_3 e^{s^2} - \frac{1}{s+1} + \frac{2}{1+s} \end{cases}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümü $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ dir. O halde,

$$v(t, s) = \frac{t}{s+1}$$

çözümü elde edilir. Son olarak, ters Laplace dönüşümü uygulanırsa, verilen lokal olmayan sınır-değer probleminin çözümü

$$u(t, x) = \mathbf{L}^{-1} \{v(t, s)\} = \mathbf{L}^{-1} \left\{ \frac{t}{s+1} \right\} = t \mathbf{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+1} \right\} = te^{-x}.$$

ya da

$$u(t, x) = te^{-x}$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + \sum_{r=1}^n \alpha_r \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x_r^2} = g(t, x), \\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \bar{\Omega}^+, 0 \leq t \leq T, \\ i \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \sum_{r=1}^n \alpha_r \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x_r^2} = f(t, x), \\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \bar{\Omega}^+, -T \leq t \leq 0, \\ u(T, x) = u(-T, x) + \varphi(x), \\ u_t(0_+, x) = u_t(0_-, x) + \varphi(x), x \in \bar{\Omega}^+, \\ u(t, x) = 0, x \in S^+ \end{array} \right.$$

çok boyutlu eliptik-Schrödinger denklemleri için lokal olmayan sınır-değer probleminin çözümü elde edilebilir. Burada $\alpha_r > 0$ ve $f(t, x)$ ($t \in [0, T], x \in \bar{\Omega}^+$), $g(t, x)$ ($t \in [-T, 0], x \in \bar{\Omega}^+$), $\varphi(x)$ ($x \in \bar{\Omega}^+$) verilmiş düzgün fonksiyonlardır. Ayrıca Ω^+ , n boyutlu Öklid uzayı \mathbb{R}^n de ($0 < x_k < \infty, 1 \leq k \leq n$), $\bar{\Omega}^+ = \Omega^+ \cup S^+$ olmak üzere S^+ ile sınırlı açık birim küptür.

Ancak, Laplace dönüşümü yöntemi yalnızca sabit katsayılı denklemlerin çözümünde kullanılabilir. Ne var ki, değişken katsayılı kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için en kullanışlı olan yolun fark yöntemi olduğu çok iyi bilinmektedir.

Son olarak, Fourier dönüşümü yöntemi ile çözülecek olan

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = t(4x^2 - 2)e^{-x^2}, 0 < t < 1, -\infty < x < \infty, \\ i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = [i + t(4x^2 - 2)]e^{-x^2}, -1 \leq t \leq 0, -\infty < x < \infty, \\ u(1, x) = u(-1, x) + 2e^{-x^2}, -\infty \leq x \leq \infty \end{array} \right. \quad (1.12)$$

bir karma tipli lokal olmayan sınır-değer problemini ele alalım. $v(t, s) = \mathbf{F}\{u(t, x)\}$ ile gösterelim. Öncelikle, $-1 \leq t \leq 0$ aralığındaki çözümü bulalım. Her iki tarafın Fourier dönüşümü alınırsa

$$iv_t(t, s) - s^2v(t, s) = \mathbf{F}\left\{(i + t(4x^2 - 2))e^{-x^2}\right\}$$

elde edilir. Burada, $(e^{-x^2})'' = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$ olduğundan,

$$\mathbf{F}\left\{(4x^2 - 2)e^{-x^2}\right\} = \mathbf{F}\left\{(e^{-x^2})''\right\} = -s^2\mathbf{F}\left\{e^{-x^2}\right\} \quad (1.13)$$

yazılır. Böylece denklem

$$iv_t(t, s) - s^2v(t, s) = (i - ts^2)\mathbf{F}\left\{e^{-x^2}\right\}$$

olacaktır. Dolayısıyla,

$$v(t, s) = c_1e^{is^2t} + t\mathbf{F}\left\{e^{-x^2}\right\} \quad (1.14)$$

şeklinde bulunur. Şimdi $0 \leq t < 1$ aralığını göz önüne alalım. Eşitliğin her iki yanını Fourier dönüşümü alınırsa

$$v_{tt}(t, s) - s^2v(t, s) = \mathbf{F}\left\{t(4x^2 - 2)e^{-x^2}\right\}$$

ya da

$$v_{tt}(t, s) - s^2v(t, s) = -ts^2\mathbf{F}\left\{e^{-x^2}\right\}$$

elde edilir. Böylece,

$$v(t, s) = c_2 \cosh st + c_3 \sinh st + t\mathbf{F}\left\{e^{-x^2}\right\} \quad (1.15)$$

dir. Lokal olmayan sınır koşulu ve süreklilik koşulları

$$\begin{cases} v(1, s) = v(-1, s) + 2\mathbf{F}\left\{e^{-x^2}\right\}, \\ v(0_+, s) = v(0_-, s), \\ v'(0_+, s) = v'(0_-, s) \end{cases}$$

uygulanırsa,

$$\begin{cases} c_2 = c_1, \\ sc_3 + \mathbf{F}\left\{e^{-x^2}\right\} = s^2 + \mathbf{F}\left\{e^{-x^2}\right\}, \\ c_2 \cosh s + c_3 \sinh s + \mathbf{F}\left\{e^{-x^2}\right\} = c_1e^{-s^2} - \mathbf{F}\left\{e^{-x^2}\right\} + 2\mathbf{F}\left\{e^{-x^2}\right\} \end{cases}$$

denklemler sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümünün $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ olduğunu göstermek zor değildir. Böylece,

$$v(t, s) = t\mathbf{F} \left\{ e^{-x^2} \right\}$$

olur. Son olarak, ters Fourier dönüşümü uygulanırsa, (1.12) lokal olmayan sınır-değer probleminin tam çözümü

$$u(t, x) = te^{-x^2}$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde aşağıdaki

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sum_{|r|=2m} a_r \frac{\partial^{|r|} u}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}} = g(t, x), \\ 0 \leq t \leq T, x, r \in \mathbb{R}^n, |r| = r_1 + \dots + r_n, \\ i \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|r|=2m} a_r \frac{\partial^{|r|} u}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}} = f(t, x), \\ -T \leq t \leq 0, x, r \in \mathbb{R}^n, |r| = r_1 + \dots + r_n, \\ u(T, x) = u(-T, x) + \varphi(x), x \in \mathbb{R}^n, \\ u_t(0_+, x) = u_t(0_-, x), x \in \mathbb{R}^n, \end{array} \right.$$

çok boyutlu eliptik-Schrödinger denklemleri için lokal olmayan sınır-değer probleminin çözümü elde edilebilir. Burada $\alpha_r > 0$ ve $f(t, x)$ ($t \in [0, T], x \in \bar{\Omega}^+$), $g(t, x)$ ($t \in [-T, 0], x \in \bar{\Omega}^+$), $\varphi(x)$ ($x \in \bar{\Omega}^+$) verilmiş düzgün fonksiyonlardır. Ayrıca Ω^+ , n boyutlu Öklid uzayı \mathbb{R}^n de ($0 < x_k < \infty, 1 \leq k \leq n$), $\bar{\Omega}^+ = \Omega^+ \cup S^+$ olmak üzere S^+ ile sınırlı açık birim küptür.

Ancak, Fourier dönüşümü yöntemi yalnızca sabit katsayılı denklemlerin çözümünde kullanılabilir. Ne var ki, değişken katsayılı kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için en kullanışlı olan yolun fark yöntemi olduğu çok iyi bilinmektedir.

Bu çalışmada bir H Hilbert uzayında verilen fark denklemlerinin, öz-eşlenik pozitif

tanımlı A operatörlü lokal olmayan sınır-değer problemi

$$\begin{cases} -\frac{d^2u(t)}{dt^2} + Au(t) = g(t) \quad (0 \leq t \leq 1), \\ i\frac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t) \quad (-1 \leq t \leq 0), \\ u(1) = u(-1) + \mu \end{cases}$$

ele alınmıştır. Sonlu fark yöntemi kullanılarak, bu lokal olmayan sınır-değer probleminin nümerik çözümleri elde edilmiştir. Bu çözümler için birinci basamaktan doğruluklu fark şeması ve ikinci basamaktan doğruluklu Crank-Nicholson fark şemaları ile çalışılmıştır.

Öncelikle, 7 bölümden oluşan bu çalışmanın içeriğinden bahsedelim.

Birinci Bölüm; giriş kısmıdır.

İkinci Bölüm; materyal ve yöntem kısmıdır. Bu bölümde çalışmada kullanılan yöntemlerin yanı sıra Hilbert uzayının temel kavramları verilmiştir.

Üçüncü Bölüm; bu alanda yapılan araştırmalar hakkında kısa bir inceleme içermektedir.

Dördüncü Bölüm; bir H Hilbert uzayında öz-eşlenik pozitif tanımlı A operatörlü eliptik-Schrödinger denklemi için lokal olmayan sınır-değer problemini yaklaşık olarak çözen, birinci ve ikinci basamaktan doğruluklu kararlı fark şemaları sunulmaktadır.

Beşinci Bölüm; nümerik analiz bölümüdür. Birinci ve ikinci basamaktan doğruluklu fark şemaları ile çalışılmıştır. İkinci basamaktan doğruluklu fark şemalarının birinci basamaktan doğruluklu fark şemalarına göre daha doğruluklu olduğunu göstermek adına matlab programları verilmiştir.

Altıncı Bölüm; bulgular ve tartışma bölümüdür. İki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda şekiller bulunmaktadır. İkinci kısımda ise elde edilen nümerik sonuçların hata analizi verilmiştir.

Yedinci Bölüm; sonuçlar ve öneriler kısmıdır.

Son olarak çalışmada kullanılan referanslar kaynaklar kısmında verilmiştir. Ayrıca beşinci bölümde kullanılan matlab programları ayrıntılı bir şekilde ekler kısmında verilmiştir.

2 MATERYAL VE YÖNTEM

Yaptığımız bu çalışma için herhangi bir materyale, teçhizata ya da laboratuvar ortamına ihtiyaç duyulmamakla beraber, araştırmamızda yöntem olarak, sırasıyla, operatör yaklaşımı ve sonlu fark yöntemleri kullanılmıştır. Ayrıca elde edilen teorik sonuçların geçerliliğini ve güvenilirliğini desteklemek adına yapılan nümerik denemelerde, iyileştirilmiş-Gauss yok etme yöntemi kullanılmıştır.

2.1 HİLBERT UZAYININ ELEMANLARI

Bu bölümde Hilbert uzayı teorisinin seçilmiş temel kavramları ve çalışmamızda kullanılacağımız bazı temel tanımlar verilecektir [Şuhubi, E. S., 2001].

Tanım 2.1. Aynı F skalerler cismi üzerinde tanımlanmış U ve V vektör uzaylarını göz önüne alalım. Bir $A : U \rightarrow V$ fonksiyonu

- (i) $\forall u_1, u_2 \in U, A(u_1 + u_2) = A(u_1) + A(u_2)$ (toplamsallık),
- (ii) $\forall u \in U$ ve $\forall \alpha \in F, A(\alpha u) = \alpha A(u)$ (homojenlik)

koşullarını gerçekliyorsa bir *lineer dönüşüm* ya da *lineer operatör* adını alır.

Tanım 2.2. X boş olmayan bir küme olsun. Bu küme reel değerli, negatif olmayan bir $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlasın:

- (i) Her $x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$.
- (ii) Her $x, y \in X$ için ancak ve ancak $x = y$ ise $d(x, y) = 0$.
- (iii) Her $x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$.
- (iv) Her $x, y, z \in X$ için $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (üçgen eşitsizliği).

Böyle bir $d(x, y)$ fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir *metrik* adını verecek ve X kümesinin bundan böyle nokta adını vereceğimiz x ve y gibi elemanları arasındaki *uzaklık* olarak yorumlayacağız.

Tanım 2.3. (X, d) bir metrik uzay olsun. Bu uzaydaki her Cauchy dizisi yakınsaksa X bir *tam metrik uzay* adını alır. Dolayısıyla bir tam metrik uzayda bir dizinin yakınsaklık testi Cauchy dizisi olma tesbitiyle örtüşür.

Örnek 2.1. $X = C[-2, 2]$ sürekli fonksiyonlar kümesi üzerinde d_1 metriğini göz önüne alalım. Bir $\{x_n(t)\}$ sürekli fonksiyonlar dizisini

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & -2 \leq t \leq 1 - (1/n), \\ nt + 1 - n, & 1 - (1/n) \leq t \leq 1, \\ 1, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

ile tanımlayalım. Bu dizi bir Cauchy dizisidir. Genellikle kaybetmeksizin $n > m$ alırsak

$$\begin{aligned} d_1(x_m, x_n) &= \int_{-2}^2 |x_n(t) - x_m(t)| dt \\ &= \int_{1-(1/m)}^{1-(1/n)} (mt + 1 - m) dt + \int_{1-(1/n)}^1 (n - m)(1 - t) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

elde ederiz. Dolayısıyla $m, n \rightarrow \infty$ için $d(x_m, x_n) \rightarrow 0$ buluruz. Yani $\{x_n(t)\}$ bir Cauchy dizisidir. Ancak bu dizinin limitini hemen görebileceğimiz gibi

$$x(t) = \begin{cases} 0, & -2 \leq t \leq 1, \\ 1, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

fonksiyonudur. Gerçekten

$$d_1(x_n, x) = \int_{1-(1/n)}^1 (nt + 1 - n) dt = \frac{1}{2n}$$

bulunur ve $\lim_{n \rightarrow \infty} d_1(x_n, x) = 0$ çıkar. Ancak limit fonksiyon süreksiz olduğundan X uzayının içinde değildir ve $\{x_n(t)\}$ dizisi (X, d_1) de yakınsamaz.

Tanım 2.4. V ile çoğunlukla kompleks sayılar cismi olarak seçeceğimiz bir F skalerler cismi üzerinde tanımlanmış bir lineer vektör uzayını gösterelim. Reel değerli, negatif olmayan bir $N : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonunu aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde seçilebilir:

- (i) Her $v \in V$ için $N(v) \geq 0$ ve ancak ve ancak $v = 0$ ise $N(v) = 0$ olur.
- (ii) Her $v \in V$ ve $\alpha \in F$ için $N(\alpha v) = |\alpha| N(v)$ olur.

(iii) Her $u, v \in V$ için $N(u + v) \leq N(u) + N(v)$ olur.

Böyle bir fonksiyon V uzayı üzerinde bir norm adını alır. Bir normla donatılmış bir vektör uzayına da *normlu lineer uzay* veya *normlu vektör uzayı* ya da sadece *normlu uzay* adını veririz.

Tanım 2.5. $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu, daha doğru bir deyişle fonksiyoneli aşağıdaki kuralları sağladığı takdirde bir *iç çarpım* adını alır:

- i) Her $u, v \in H$ için $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$.
- ii) Her $u, v \in H$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ için $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$.
- iii) Her $u, v, w \in H$ için $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.
- iv) Her $u \in H, u \neq 0$ için $\langle u, u \rangle > 0$.

Burada bir üst çizgi kompleks eşleniği göstermektedir. Bir iç çarpımla donatılmış bir lineer vektör uzayına *iç çarpım uzayı* adı verilir.

İç çarpım kısaca *Schwarz*, aslında ise daha doğru bir deyişle *Cauchy-Bunyakowski-Schwarz eşitsizliği* adını vereceğimiz bir bağıntıyı sağlar.

Teorem 2.1. H bir iç çarpım uzayı ise sıfırdan farklı her $u, v \in H$ vektörü için $|\langle u, v \rangle| \leq \sqrt{\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle}$ eşitsizliği sağlanır. Eşitlik ancak ve ancak u ve v vektörleri lineer bağımlıysa geçerlidir.

Teorem 2.2. H bir iç çarpım uzayı olsun. Her $u \in H$ vektörü için $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ fonksiyonu H üzerinde bir *doğal norm*dur.

Norm tanımıyla Schwarz eşitsizliğini

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\| \quad (2.1)$$

şeklinde de ifade edebiliriz.

İç çarpımın ürettiği norma göre her iki vektör *paralelkenar kuralını* gerçekler. Böyle iki $u, v \in H$ vektörü için

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2) \quad (2.2)$$

elde ederiz.

İç çarpımdan üreyen *doğal norm* da H vektör uzayı üzerinde bir doğal metriği

$$d\langle u, v \rangle = \|u - v\| = \sqrt{\langle u - v, u - v \rangle} \quad (2.3)$$

fonksiyonu ile üretir. Doğal metriğe göre tam bir iç çarpım uzayı *Hilbert uzayı* adını alır. Bir Hilbert uzayının aynı zamanda bir *Banach uzayı* olacağı tartışma götürmez.

Örnek 2.2. $C[0, \pi/2]$ bir iç çarpım uzayı mıdır?

Çözüm:

$$x(t) \in \mathbb{C}[a, b] \Rightarrow \|x\|_{C[a, b]} = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|$$

$x(t) = \sin t, y(t) = \cos t$ olmak üzere $x(t), y(t) \in C[0, \pi/2]$ olsun.

$$\|x\|_{C[0, \pi/2]} = \max_{a \leq t \leq b} |\sin t| = 1$$

$$\|y\|_{C[0, \pi/2]} = \max_{a \leq t \leq b} |\cos t| = 1$$

$$\|x + y\|_{C[0, \pi/2]} = \max_{0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}} |\sin t + \cos t| = \max \left\{ \varphi(0), \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right), \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) \right\} = \sqrt{2}$$

$$\varphi(t) = \sin t + \cos t, \varphi(0) = 1, \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\varphi'(t) = \cos t - \sin t = 0 \Leftrightarrow \cos t = \sin t \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4}$$

$$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\|x - y\|_{C[0, \pi/2]} = \max_{0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}} |\sin t - \cos t| = \max \left\{ \varphi(0), \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right), \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) \right\} = 1$$

$$\|x + y\|_{C[0, \pi/2]}^2 + \|x - y\|_{C[0, \pi/2]}^2 = 2 \left(\|x\|_{C[0, \pi/2]}^2 + \|y\|_{C[0, \pi/2]}^2 \right) \Rightarrow 3 \neq 4$$

Dolayısıyla, $C[0, \pi/2]$ uzayı bir iç çarpım uzayı değildir.

Tanım 2.6. Bir $A : U \rightarrow V$ operatörü sınırlı kümeleri yine sınırlı kümelere dönüştürüyorsa *sınırlı operatör* adını alır.

Teorem 2.3. U ve V normlu uzaylar ve $A : U \rightarrow V$ bir lineer operatör olsun. Ancak ve ancak her $u \in U$ için

$$\|Au\|_V \leq K \|u\|_U$$

olacak şekilde bir $K > 0$ sabiti varsa A operatörü sınırlıdır.

Tanım 2.7 Sınırlı bir A lineer operatörü söz konusu olduğunda K sayılarının en küçüğüne *operatörün normu* adı verilir:

$$\|A\| = \inf \{K > 0 : \|Au\|_V \leq K \|u\|_U, \forall u \in U\}.$$

Normun bu tanımı aşağıdaki tanımlara da eşdeğerdendir:

$$\|A\| = \sup \{\|Au\|_V : \|u\|_U \leq 1\},$$

$$\|A\| = \sup \{\|Au\|_V : \|u\|_U = 1\},$$

$$\|A\| = \sup \left\{ \frac{\|Au\|_V}{\|u\|_U} : u \in U, u \neq 0 \right\}.$$

Örnek 2.3. $Ax = \int_0^1 K(t, s)x(s)ds$ integral operatörünü ele alalım. Eğer

$$\int_0^1 \int_0^1 |K(t, s)|^2 ds dt < \infty$$

ise, bu durumda $A : L_2 [0, 1] \rightarrow L_2 [0, 1]$ operatörünün sınırlı olduğunu ispatlayınız.

Çözüm: Öncelikle,

$$\int_0^1 |x(t)|^2 dt < \infty \Rightarrow \int_0^1 |Ax(t)|^2 dt < \infty \quad (2.4)$$

A operatörünün sınırlı olduğu, daha sonra ise

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay; \quad x \in L_2 [0, 1] \Rightarrow Ax \in L_2 [0, 1]$$

A operatörünün lineer olduğu gösterilecektir. $L_2 [0, 1]$ uzayında $Ax(t)$ nin normu

$$\left(\int_0^1 |Ax(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left[\int_0^1 \left(\int_0^1 |K(t, s)x(s)ds| \right)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

dir. Cauchy-Minkowski eşitsizliğinden,

$$\left(\int_0^1 |Ax(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left[\int_0^1 \left\{ \left(\int_0^1 |K(t, s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |x(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\int_0^1 \left(\int_0^1 |K(t, s)|^2 ds \right) \left(\int_0^1 |x(s)|^2 ds \right) dt \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_0^1 \int_0^1 |K(t, s)|^2 ds dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |x(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\int_0^1 |Ax(t)|^2 dt < \infty \implies Ax \in L_2 [0, 1]$$

dir. O halde, (2.4) eşitsizliği ispatlanmış olur. Şimdi, lineer operatör olduğunu ispatlayalım. Burada,

$$\begin{aligned}
A(\alpha x + \beta y) &= \int_0^1 K(t, s) [\alpha x(s) + \beta y(s)] ds \\
&= \alpha \int_0^1 K(t, s) x(s) ds + \beta \int_0^1 K(t, s) y(s) ds = \alpha Ax + \beta Ay
\end{aligned}$$

olduğu kolayca görülecektir. Dolayısıyla, verilen operatör $L_2 [0, 1]$ de lineer operatördür.

Tanım 2.8 $A : H_1 \rightarrow H_2$ olmak üzere sınırlı, lineer bir operatör olsun. Burada, H_1 ve H_2 herhangi iki Hilbert uzaylarıdır. $A^* : H_1 \rightarrow H_2$ olmak üzere $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$ operatörüne A 'nın eşleniği denir.

Tanım 2.9 $A : H \rightarrow H$ sınırlı, lineer bir operatör olsun. Eğer $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ ise, bu durumda A ya öz-eşlenik operatör denir.

Tanım 2.10 $A : H \rightarrow H$ öz-eşlenik operatör olsun. Eğer $\langle Ax, x \rangle > \delta \langle x, x \rangle$ ise, bu durumda A 'ya pozitif tanımlı operatör denir.

Tanım 2.11 $A : H \rightarrow H$ öz-eşlenik operatör olsun. $\forall x \in D(A)$ için eğer $\langle Ax, x \rangle > 0$ ise, bu durumda A ya pozitif tanımlı denir.

Tanım 2.12 $A : D(A) \rightarrow H$ ve $\overline{D(A)} = H$ olmak üzere bir lineer operatör olsun. Eğer $\forall x, y \in H$ için $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ ise, bu durumda A ya simetrik operatör denir.

Tanım 2.13 Eğer A bir simetrik operatör ve $D(A) = D(A^*)$ ise, bu durumda A ya öz-eşlenik operatör denir.

Örnek 2.4. $Ax(t) = -x''(t)$, $D(A) = W_2^1 = \{y \in W_2^1 \text{ ve } y(0) = y(1) = 0\}$ operatörünün öz-eşlenik, pozitif operatör olup olmadıklarını araştırınız.

Çözüm: $L_2 [0, 1]$ uzayında iç çarpım

$$\langle x, y \rangle = \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}dt$$

ile tanımlanır. Simetrik olduğunu göstermek için $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ olduğunu göstermeliyiz. Burada,

$$\langle Ax, y \rangle = \int_0^1 Ax(t)\overline{y(t)}dt = - \int_0^1 x''(t)\overline{y(t)}dt$$

kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$= -x'(t)\overline{y(t)} \Big|_0^1 + \int_0^1 x'(t)\overline{y'(t)}dt$$

elde edilir. Tekrar kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \langle Ax, y \rangle &= -x'(1)\overline{y(1)} + x'(0)\overline{y(0)} + x(t)\overline{y'(t)} \Big|_0^1 - \int_0^1 x(t)\overline{(-y''(t))}dt \\ &= x(1)\overline{y'(1)} - x(0)\overline{y'(0)} + \int_0^1 x(t)\overline{(-y''(t))}dt = \langle x, Ay \rangle \end{aligned}$$

bulunur. Böylece, A operatörünün $L_2 [0, 1]$ uzayında simetrik olduğunu göstermiş olduk. Şimdi, de A operatörünün pozitif tanımlı olduğunu gösterelim. Burada,

$$\langle Ax, x \rangle = - \int_0^1 x''(t)\overline{x(t)}dt$$

kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$= -x'(t)\overline{x(t)} \Big|_0^1 + \int_0^1 x'(t)\overline{x'(t)}dt = \int_0^1 |x'(t)|^2 dt \geq \int_0^1 |x(t)|^2 dt = \langle x, x \rangle$$

elde edilir. O halde,

$$\langle Ax, x \rangle \geq \langle x, x \rangle \Rightarrow \delta = 1 > 0$$

dır. Dolayısıyla, A operatörü $L_2 [0, 1]$ Hilbert uzayında pozitif tanımlıdır.

3 ELİPTİK-SCHRÖDINGER DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ

H Hilbert uzayında öz-eşlenik pozitif tanımlı bir A operatörü ile

$$\begin{cases} -\frac{d^2u(t)}{dt^2} + Au(t) = g(t) \quad (0 \leq t \leq 1), \\ i\frac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t) \quad (-1 \leq t \leq 0), \\ u(1) = u(-1) + \mu \end{cases} \quad (3.1)$$

lokal olmayan sınır-değer problemini ele alalım.

Eğer aşağıdaki şartlar sağlanır ise, $u(t)$ fonksiyonu (3.1) probleminin çözümüdür:

- (i) $u(t)$ fonksiyonu $[0, 1]$ aralığında iki kez sürekli türevlenebilir ve $[-1, 1]$ arasında türevlenebilir olmalıdır. Aralığın uç noktalarında türev tek taraflı türev manasındadır.
- (ii) $u(t)$ fonksiyonu, her $t \in [-1, 1]$ için $D(A)$ (A nın tanım kümesi) nin elemanıdır ve $Au(t)$, $[-1, 1]$ aralığında süreklidir.
- (iii) $u(t)$ fonksiyonu, (3.1) probleminin denklemlerini ve lokal olmayan sınır koşulunu sağlar.

Bu çalışmadaki amacımız, eliptik-Schrödinger denklemi (3.1) için lokal olmayan sınır-değer probleminin nümerik çözümlerini elde etmektir.

Eliptik Schrödinger denklemlerinin fizik ve mühendislik alanlarında önemli bir rol oynadığını belirtmek gerekir. (bkz. [Kozłowski, K. ve Kozłowska, J. M., 2010], [Quitner, P. ve Souplet, P., 2012], [Godet, N. ve Tzvetkov, N., 2012], [Liu, B. ve Ma, L., 2013]) (Ayrıntıları kaynaklar kısmında verilmiştir).

Dahası, başlangıç-değer problemleri ve Schrödinger denklemlerinin nümerik çözümleri, son 10 yılda kapsamlı bir araştırma alanı olmuştur. (bkz. [Tselios, K. ve Simos, T. E., 2005], [Sakas, D. ve Simos, T. E., 2005], [Psihoyios, G. ve Simos, T. E., 2005], [Anastassi, Z. A. ve Simos, T. E., 2005], [Simos, T. E., 2009], [Stavroyiannis, S. ve Simos, T. E., 2009], [Simos, T. E., 2010]) (Detayları kaynaklar kısmında verilmiştir).

4 ELİPTİK-SCHRÖDINGER FARK DENKLEMLERİ

İlk olarak, (3.1) sınır-değer probleminin yaklaşık çözümü için

$$\left\{ \begin{array}{l} -\tau^{-2}(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) + Au_k = g_k, \\ g_k = g(t_k), t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N-1, \\ i\tau^{-1}(u_k - u_{k-1}) - Au_{k-1} = f_k, f_k = f(t_{k-1}), \\ t_{k-1} = (k-1)\tau, -(N-1) \leq k \leq 0, \\ u_N = u_{-N} + \mu, u_1 - u_0 = u_0 - u_{-1} \end{array} \right. \quad (4.1)$$

birinci basamaktan doğruluklu fark şeması ve ikinci olarak (3.1) probleminin yaklaşık çözümü için

$$\left\{ \begin{array}{l} -\tau^{-2}(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) + Au_k = g_k, \\ g_k = g(t_k), t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N-1, \\ i\tau^{-1}(u_k - u_{k-1}) - \frac{1}{2}(Au_{k-1} + Au_k) = f_k, f_k = f(t_{k-\frac{1}{2}}), \\ t_{k-\frac{1}{2}} = \left(k - \frac{1}{2}\right)\tau, -(N-1) \leq k \leq 0, \\ u_N = u_{-N} + \mu, u_2 - 4u_1 + 3u_0 = -3u_0 + 4u_{-1} - u_{-2} \end{array} \right. \quad (4.2)$$

ikinci basamaktan doğruluklu Crank-Nicholson fark şeması incelenmiştir.

Bilindiği gibi, H Hilbert uzayında öz-eşlenik pozitif tanımlı A diferansiyel operatörlü lokal olmayan sınır-değer probleminin bir değişkenli diskritizasyon (discretization) fark şemalarını araştırmak demek, H_h Hilbert uzaylarında h 'ye ($0 < h \leq h_0$) göre düzgün öz-eşlenik pozitif tanımlı A_h fark operatörlü çok değişkenli diskritizasyon fark şemalarını araştırmak demektir.

5 NÜMERİK ANALİZ

Bu bölümde eliptik-Schrödinger denkleminin lokal olmayan sınır değer problemini

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xx} = \sin x, 0 < t < 1, 0 < x < \pi, \\ iu_t + u_{xx} = [(i - 1)e^t + 1] \sin x, -1 < t \leq 0, 0 < x < \pi, \\ u(0^+, x) = u(0^-, x), u_t(0^+, x) = u_t(0^-, x), 0 \leq x \leq \pi, \\ u(1, x) = u(-1, x) + (e - e^{-1}) \sin x, 0 \leq x \leq \pi, \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, -1 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (5.1)$$

ele alınmıştır. Burada (5.1) probleminin gerçek çözümü

$$u(t, x) = (e^t - 1) \sin x$$

dir.

(5.1), probleminin yaklaşık çözümü için birinci ve ikinci basamaktan doğruluklu fark şemaları kullanılacaktır. İkinci ve dördüncü mertebeden, katsayıları matris olan, n 'ye göre fark denklemleri elde edilecektir. Bu fark denklemlerini çözmek için, iyileştirilmiş Gauss yok etme yöntemi kullanılacaktır. Sayısal denemelerin sonucu olarak ikinci basamaktan doğruluklu fark şemalarının birinci basamaktan doğruluklu fark şemalarına oranla daha doğru olduğu gösterilecektir.

5.1 BİRİNCİ BASAMAKTAN DOĞRULUKLU FARK ŞEMASI

(5.1) eliptik-Schrödinger denklem için lokal olmayan sınır-değer problemi göz önüne alalım. (5.1) probleminin yaklaşık çözümü için $[-1, 1]_\tau \times [0, \pi]_h$ parametreleri τ ve h ye bağlı ağ noktalarında bir aile olmak üzere,

$$[-1, 1]_\tau \times [0, \pi]_h = \{(t_k, x_n) : t_k = k\tau, -N \leq k \leq N, N\tau = 1, x_n = nh, 0 \leq n \leq M, Mh = \pi\}$$

yazılır. Burada,

$$\frac{u(x_{n+1}) - 2u(x_n) + u(x_{n-1}))}{h^2} - u''(x_n) = O(h^2)$$

formülleri uygulanarak, (5.1) eliptik-Schrödinger denklemi için

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{u_n^{k+1} - 2u_n^k + u_n^{k-1}}{\tau^2} + \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} = g(t_k, x_n), \\
 x_n = nh, t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N-1, 1 \leq n \leq M-1, \\
 i \frac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} + \frac{u_{n+1}^{k-1} - 2u_n^{k-1} + u_{n-1}^{k-1}}{h^2} = f(t_{k-1}, x_n), \\
 x_n = nh, t_k = k\tau, -N+1 \leq k \leq 0, 1 \leq n \leq M-1, \\
 u_n^1 - u_n^0 = u_n^0 - u_n^{-1}, 1 \leq n \leq M-1, \\
 u_n^N = u_n^{-N} + 2 \sin x_n, x_n = nh, 0 \leq n \leq M, \\
 u_0^k = u_M^k = 0, -N \leq k \leq N.
 \end{array} \right. \quad (5.2)$$

t' 'ye göre birinci basamaktan doğruluklu fark şeması kurulur.

Burada $(2N+1) \times (2N+1)$ boyutlu doğrusal denklem sistemi elde edilmiş olur. Bu doğrusal denklem sistemi düzenlenerek matris formunda yazılırsa,

$$\left\{ \begin{array}{l}
 (\frac{1}{h^2})u_{n+1}^k + (\frac{1}{\tau^2})u_n^{k+1} + (-\frac{2}{\tau^2} - \frac{2}{h^2})u_n^k + (\frac{1}{\tau^2})u_n^{k-1} + (\frac{1}{h^2})u_{n-1}^k = g(t_k, x_n), \\
 1 \leq k \leq N-1, 1 \leq n \leq M-1, \\
 (\frac{1}{h^2})u_{n+1}^{k-1} + \frac{i}{\tau}u_n^k + (-\frac{i}{\tau} - \frac{2}{\tau^2})u_n^{k-1} + (\frac{1}{h^2})u_{n-1}^{k-1} = f(t_{k-1}, x_n), \\
 -N+1 \leq k \leq 0, 1 \leq n \leq M-1, \\
 u_n^1 - 2u_n^0 + u_n^{-1} = 0, 1 \leq n \leq M-1, \\
 u_n^N - u_n^{-N} = 2 \sin x_n, 1 \leq n \leq M-1, \\
 u_0^k = u_M^k = 0, -N \leq k \leq N.
 \end{array} \right. \quad (5.3)$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{cases} AU_{n+1} + BU_n + CU_{n-1} = D\varphi_n, 0 \leq n \leq M, \\ U_0 = \vec{0}, U_M = \vec{0}, \end{cases} \quad (5.4)$$

sistemi yazılır. Burada,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(2N+1) \times (2N+1)},$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d & e & d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & e & d & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & e & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & e & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(2N+1) \times (2N+1)},$$

$$C = A,$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{(2N+1) \times (2N+1)},$$

dir. Ayrıca,

$$\varphi_n^k = \begin{cases} (e - e^{-1}) \sin x_n, & k = -N, \\ f(t_{k-1}, x_n), & -N + 1 \leq k \leq 0, \\ g(t_k, x_n), & 0 \leq k \leq N - 1, \\ \sin x_n, & k = N, \end{cases}$$

$$\varphi_n = \begin{bmatrix} \varphi_n^{-N} \\ \varphi_n^{-N+1} \\ \vdots \\ \varphi_n^0 \\ \varphi_n^1 \\ \vdots \\ \varphi_n^N \end{bmatrix}_{(2N+1) \times 1},$$

$$U_s = \begin{bmatrix} U_s^{-N} \\ U_s^{-N+1} \\ \vdots \\ U_s^0 \\ U_s^1 \\ \vdots \\ U_s^{N-1} \\ U_s^N \end{bmatrix}_{(2N+1) \times (1)}, \quad s = n - 1, n, n + 1$$

dir. Yine burada,

$$a = \frac{1}{h^2}, b = -\frac{i}{\tau} - \frac{2}{h^2}, c = \frac{i}{\tau}, d = \frac{1}{\tau^2}, e = -\frac{2}{\tau^2} - \frac{2}{h^2}$$

dir. Fark denklemleri için bu tipteki sistemler [Samarskii, A. A. ve Nikolaev, E. S., 1989] tarafından kullanılmıştır. Matris denkleminin çözümü için iyileştirilmiş Gauss yok etme yöntemi kullanılmıştır. Bu yüzden

$$U_n = \alpha_{n+1} U_{n+1} + \beta_{n+1}, \quad n = M - 1, \dots, 2, 1, 0, \quad (5.5)$$

formunda bir çözüm aranmaktadır, öyle ki α_j ($j = 1, \dots, M-1$) ler $(2N+1) \times (2N+1)$ tipinde kare matris ve β_j ($j = 1, \dots, M-1$) ler $(2N+1) \times 1$ tipinde sütun matris biçimindedir. Aşağıdaki matris

$$U_s = \alpha_{s+1}U_{s+1} + \beta_{s+1}, \quad (s = n, n-1 \text{ için})$$

ve

$$AU_{n+1} + BU_n + CU_{n-1} = D\varphi_n,$$

eşitliği kullanılarak

$$[A + B\alpha_{n+1} + C\alpha_n\alpha_{n+1}]U_{n+1} + [B\beta_{n+1} + C\alpha_n\beta_{n+1} + C\beta_n] = D\varphi_n.$$

yazılabilir. Son denklemin

$$A + B\alpha_{n+1} + C\alpha_n\alpha_{n+1} = 0,$$

$$[B\beta_{n+1} + C\alpha_n\beta_{n+1} + C\beta_n] = D\varphi_n, \quad 1 \leq n \leq M-1,$$

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = -(B + C\alpha_n)^{-1}A, \\ \beta_{n+1} = (B + C\alpha_n)^{-1}(D\varphi_n - C\beta_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots, M-1 \end{cases} \quad (5.6)$$

şeklide seçilmesi uygundur. Fark denkelemlerinin çözümü için α_1 ve β_1 yı bulmalıyız.

$U_0 = \alpha_1U_1 + \beta_1$ olduğundan,

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{(2N+1) \times (2N+1)}, \quad \beta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{(2N+1) \times 1} \quad (5.7)$$

yazılır. (5.6) ve (5.7) formüllerini kullanarak, $1 \leq n \leq M-1$ için α_{n+1} ve β_{n+1} leri hesaplanır. İkinci adımda $0 \leq n \leq M$ için U_n ve $U_M = 0$ (5.5) formülü kullanılarak, U_n leri elde ederiz. Hesaplamayı özetleyen algoritma ekler kısmında verilmiştir.

5.2 İKİNCİ BASAMAKTAN DOĞRULUKLU CRANK-NICHOLSON FARK ŞEMASI

(5.1) probleminin yaklaşık çözümleri için ikinci basamaktan doğruluklu

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{u_n^{k+1} - 2u_n^k + u_n^{k-1}}{\tau^2} + \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} = g(t_k, x_n), \\
 x_n = nh, t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N-1, 1 \leq n \leq M-1, \\
 i \frac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} + \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{2h^2} + \frac{u_{n+1}^{k-1} - 2u_n^{k-1} + u_{n-1}^{k-1}}{2h^2} = f(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n), \\
 x_n = nh, t_k = k\tau, -N+1 \leq k \leq 0, 1 \leq n \leq M-1, \\
 -u_n^2 + 4u_n^1 - 3u_n^0 = 3u_n^0 - 4u_n^{-1} + u_n^{-2}, 1 \leq n \leq M-1, \\
 u_0^k = u_M^k = 0, -N \leq k \leq N
 \end{array} \right. \quad (5.8)$$

Crank-Nicholson fark şeması kurulur. Burada $(2N + 1) \times (2N + 1)$ boyutlu doğrusal denklem sistemi elde edilmiş olur. Buna göre,

$$\left\{ \begin{array}{l} (\frac{1}{h^2})u_{n+1}^k + (\frac{1}{\tau^2})u_n^{k+1} - (\frac{2}{\tau^2} + \frac{2}{h^2})u_n^k + (\frac{1}{\tau^2})u_n^{k-1} + (\frac{1}{h^2})u_{n-1}^k = g(t_k, x_n), \\ x_n = nh, t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N - 1, 1 \leq n \leq M - 1, \\ (\frac{1}{2h^2})u_{n+1}^{k-1} + (\frac{1}{2h^2})u_{n+1}^k - (\frac{i}{\tau} + \frac{1}{h^2})u_n^{k-1} + (\frac{i}{\tau} - \frac{1}{h^2})u_n^k \\ + (\frac{1}{2h^2})u_{n-1}^{k-1} + (\frac{1}{2h^2})u_{n-1}^k = f(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n), \\ x_n = nh, t_k = k\tau, -N + 1 \leq k \leq 0, 1 \leq n \leq M - 1, \\ u_n^{-2} - 4u_n^{-1} + 6u_n^0 - 4u_n^1 + u_n^2 = 0, 1 \leq n \leq M - 1, \\ u_n^N - u_n^{-N} = (e - e^{-1}) \sin x_n, x_n = nh, 1 \leq n \leq M - 1, \\ u_0^k = u_M^k = 0, -N \leq k \leq N \end{array} \right. \quad (5.9)$$

elde edilir. Böylece,

$$\left\{ \begin{array}{l} AU_{n+1} + BU_n + CU_{n-1} = D\varphi_n, 0 \leq n \leq M, \\ U_0 = \vec{0}, U_M = \vec{0}, \end{array} \right.$$

sistemi yazılır. Burada,

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{1}{2h^2}, b = \frac{1}{h^2}, c = -\frac{i}{\tau} - \frac{1}{h^2}, \\ p = \frac{i}{\tau} - \frac{1}{h^2}, d = \frac{1}{\tau^2}, e = -\frac{2}{\tau^2} - \frac{2}{h^2}, \end{array} \right.$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(2N+1) \times (2N+1)},$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ c & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & c & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d & e & d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & e & d & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & e & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & e & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(2N+1) \times (2N+1)},$$

$$C = A,$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{(2N+1) \times (2N+1)}$$

dir. Ayrıca,

$$\varphi_n^k = \begin{cases} (e - e^{-1}) \sin x_n, k = -N, \\ f(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n), -N + 1 \leq k \leq 0, \\ g(t_k, x_n), 1 \leq k \leq N - 1, \\ 0, k = N, \end{cases}$$

$$\varphi_n = \begin{bmatrix} \varphi_n^{-N} \\ \varphi_n^{-N+1} \\ \vdots \\ \varphi_n^0 \\ \varphi_n^1 \\ \vdots \\ \varphi_n^N \end{bmatrix}_{(2N+1) \times 1},$$

$$U_s = \begin{bmatrix} U_s^{-N} \\ U_s^{-N+1} \\ \vdots \\ U_s^0 \\ U_s^1 \\ \vdots \\ U_s^{N-1} \\ U_s^N \end{bmatrix}_{(2N+1) \times (1)}, s = n - 1, n, n + 1$$

dir. Matris denkleminin çözümü için iyileştirilmiş Gauss yok etme yöntemi kullanılmıştır.

Dolayısıyla,

$$U_n = \alpha_{n+1} U_{n+1} + \beta_{n+1}, n = M - 1, \dots, 2, 1, 0, \quad (5.10)$$

şekilde bir matris çözümü elde ederiz. Burada, α_j ($j = 1, \dots, M - 1$) ler $(2N + 1) \times (2N + 1)$ kare matris ve β_j ($j = 1, \dots, M - 1$) ler $(2N + 1) \times 1$ sütun matris olmak üzere,

$$U_s = \alpha_{s+1} U_{s+1} + \beta_{s+1}, (s = n, n - 1 \text{ için})$$

ve

$$AU_{n+1} + BU_n + CU_{n-1} = D\varphi_n,$$

bulunur ve buradan,

$$[A + B\alpha_{n+1} + C\alpha_n\alpha_{n+1}]U_{n+1} + [B\beta_{n+1} + C\alpha_n\beta_{n+1} + C\beta_n] = D\varphi_n$$

yazabiliriz. Son denklemin

$$A + B\alpha_{n+1} + C\alpha_n\alpha_{n+1} = 0,$$

$$[B\beta_{n+1} + C\alpha_n\beta_{n+1} + C\beta_n] = D\varphi_n, 1 \leq n \leq M - 1,$$

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = -(B + C\alpha_n)^{-1} A, \\ \beta_{n+1} = (B + C\alpha_n)^{-1} (D\varphi_n - C\beta_n), n = 1, 2, 3, \dots, M - 1 \end{cases}$$

şeklinde seçilmesi uygundur. Fark denklemlerinin çözümü için α_1 ve β_1 yı bulmalıyız.

$U_0 = \alpha_1 U_1 + \beta_1$ olduğundan,

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{(2N+1) \times (2N+1)}, \beta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{(2N+1) \times 1}$$

yazılır. (5.6) ve (5.7) formüllerini kullanarak, $1 \leq n \leq M - 1$ için α_{n+1} ve β_{n+1} leri hesaplanır. İkinci adımda $0 \leq n \leq M$ için U_n ve $U_M = 0$ (5.10) formülü kullanılarak, U_n leri elde ederiz. Hesaplamayı özetleyen algoritma ekler kısmında verilmiştir.

6 BULGULAR ve TARTIŞMA

6.1 HATA ANALİZİ

Şimdi sayısal sonuçlar hata analizi verilecektir. $N = M = 30$ için kesin ve yaklaşık çözümlerin grafikleri aşağıda verilmiştir.

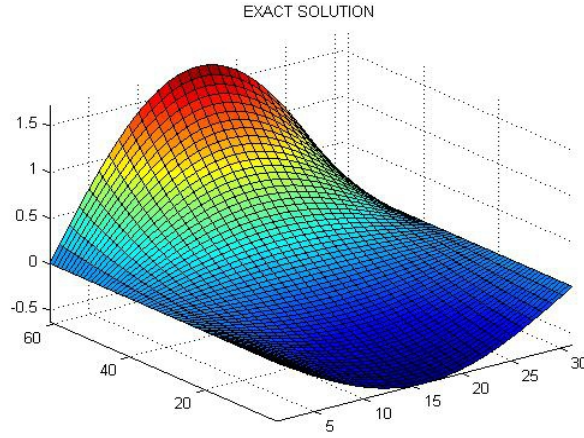
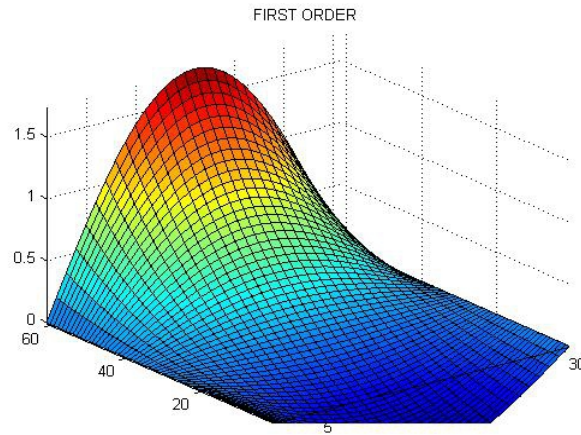


Figure 1: Gerçek çözüm



order.jpg

Figure 2: Birinci basamaktan doğruluklu fark şeması ile elde edilen yaklaşık çözüm

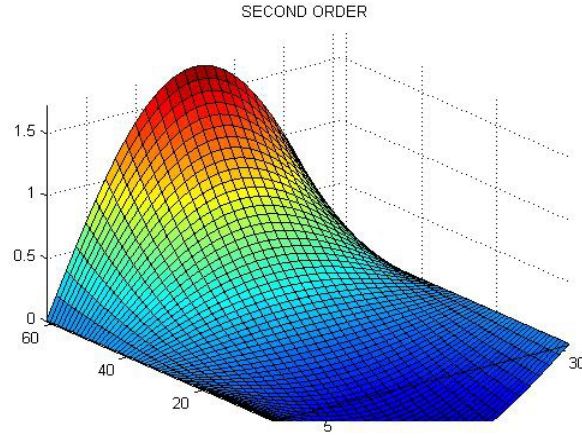


Figure 3: İkinci basamaktan doğruluklu Crank-Nicholson fark şeması ile elde edilen yaklaşık çözüm

6.2 TARTIŞMA

Karşılaştırma hataları

$$E_M^N = \max_{1 \leq k \leq N-1} \left(\sum_{n=1}^{M-1} |u(t_k, x_n) - u_n^k|^2 h \right)^{1/2}$$

formülü kullanılarak hesaplanmıştır. Burada, $u(t_k, x_n)$ (5.1) probleminin (t_k, x_n) noktasındaki gerçek çözümü, u_n^k (5.1) probleminin (t_k, x_n) noktasındaki yaklaşık çözümü göstermektedir. Sayısal çözüm aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Fark şemaları	N=M=10	N=M=20	N=M=40	N=M=80
Fark Şeması (5.2)	0,0883	0,0439	0,0274	0,0109
Fark Şeması (5.8)	0,0051	0,0012	$3,9896 \times 10^{-4}$	$7,3977 \times 10^{-4}$

Böylece elde edilen hatalar incelendiğinde, ikinci basamaktan doğruluklu fark şemalarının birinci basamaktan doğruluklu fark şemasına göre daha doğruluklu olduğu görülmektedir.

7 SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu çalışmada eliptik-Schrödinger denklemleri için lokal olmayan sınır-değer problemlerinin nümerik çözümleri incelenmiştir. Çalışma sonunda aşağıdaki özgün sonuçlar elde edilmiştir:

- Eliptik-Schrödinger denklemleri için lokal olmayan sınır-değer problemlerinin yaklaşık çözümü için birinci ve ikinci basamaktan doğruluklu fark şemaları sunulmuştur,
- Bu fark şemaları eliptik-Schrödinger denklemleri için lokal olmayan sınır-değer problemlerinin yaklaşık çözümü için kullanılmıştır.

Eliptik-Schrödinger denklemleri için lokal olmayan sınır-değer problemleri bölümünde elde edilen kararlı çözümler,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2u}{dt^2} + Au(t) = f(t) \quad (0 \leq t \leq 1), \\ i \frac{du}{dt} + Au(t) = g(t) \quad (-1 \leq t \leq 0), \\ u(1) = \sum_{j=1}^N \alpha_j u(1) + \mu, \end{array} \right.$$

H Hilbert uzayındaki pozitif tanımlı öz-eşlenik A operatörü ile karma tipli diferansiyel denklemin çok noktalı lokal olmayan sınır değer problemi için de elde edilebilir.

KAYNAKLAR

- [1] Salakhitdinov M. S., *Equations of Mixed-Composite Type*, Tashkent: FAN, **(1974)** (Russian).
- [2] Djuraev T. D., *Boundary Value Problems for Equations of Mixed and Mixed-Composite Types*, Tashkent: FAN, **(1979)** (Russian).
- [3] Bazarov D., Soltanov H., *Some Local and Nonlocal Boundary Value Problems for Equations of Mixed and Mixed-Composite Types*, Ashgabat: Ylym, **(1995)** (Russian).
- [4] Glazatov S. N., Nonlocal boundary value problems for linear and nonlinear equations of variable type, *Sobolev Institute of Mathematics SB RAS*, Preprint no. 46, **(1998)** (Russian).
- [5] Ashyralyev A., Aggez N., A note on difference schemes of the nonlocal boundary problems for hyperbolic equations, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, (25) **(2004)** 439–462.
- [6] Ashyralyev A., Ozdemir Y., On nonlocal boundary value problems for hyperbolic-parabolic equations, *Taiwanese Journal of Mathematics*, 4 (11) **(2007)** 1075–1089.
- [7] Ashyralyev A., Gercek O., Nonlocal boundary value problems for elliptic-parabolic differential and difference equations, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, (2008) **(2008)** 1–16.
- [8] Ashyralyev A., Sirma A., Nonlocal boundary value problems for the Schrodinger equation, *Computers and Mathematics with Applications*, 3 (55) **(2008)** 392–407.
- [9] Ashyralyev A., Yildirim O., On multipoint nonlocal boundary value problems for hyperbolic differential and difference equations, *Taiwanese Journal of Mathematics*, 1 (14) **(2010)** 165–194.

- [10] Ashyralyev A., Hicdurmaz B., A note on the fractional Schrodinger differential equation, *Kybernetes*, 5-6 (40) (**2011**) 736–750.
- [11] Ashyralyev A., Ozger F., The hyperbolic-elliptic equation with the nonlocal condition, *AIP Conference Proceedings*, (1389) (**2011**) 581–584.
- [12] Ozdemir Y., Kucukunal M., A note on boundary value problems for hyperbolic-Schrödinger equation, *Abstract and Applied Analysis*, (2012) (**2012**) 1–12.
- [13] Kozlowski K., Kozłowska J. M., Development on the Schrodinger equation for attosecond laser pulse interaction with planck gas, *Laser in Engineering*, 3-4 (20) (**2010**) 157–166.
- [14] Quittner P., Souplet P., Optimal Liouville-type theorems for noncooperative elliptic Schrödinger systems and applications, *Communications in Mathematical Physics*, (311) (**2012**) 1–19.
- [15] Godet N., Tzvetkov N., Strichartz estimates for the periodic non-elliptic Schrödinger equation, *Comptes Rendus Mathématique*, 21–22 (350) (**2012**) 955–958.
- [16] Liu B., Ma L., Symmetry results for elliptic Schrödinger systems on half spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1 (401) (**2013**) 259–268.
- [17] Tselios K., Simos T. E., Runge-Kutta methods with minimal dispersion and dissipation for problem arising from computational acoustics, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1 (175) (**2005**) 173-181.
- [18] Sakas D. P., Simos T. E., Multiderivative methods of eighth algebraic order with minimal phase-lag for the numerical solution of the radial Schrodinger equation, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1 (175) (**2005**) 161-172.
- [19] Psihoyios G., Simos T. E., A fourth algebraic order trigonometrically fitted predictor-corrector scheme for IVPs with oscillating solutions, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1 (175) (**2005**) 137-147.

[20] Anastassi Z. A., Simos T. E., An optimized Runge-Kutta method for the solution of orbital problems, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1 (175) (2005) 1-9.

[21] Simos T. E., Closed Newton-Cotes trigonometrically-fitted formulae of high order for long-time integration of orbital problems, *Applied Mathematics Letters*, 10 (22) (2009) 1616-1621.

[22] Stavroyiannis S., Simos T. E., Optimization as a function of the phase-lag order of nonlinear explicit two-step P-stable method for linear periodic IVPs, *Applied Numerical Mathematics*, 10 (59) (2009) 2467-2474.

[23] Simos T. E., Exponentially and trigonometrically fitted methods for the solution of the Schrodinger equation, *Acta Applicandae Mathematicae*, 3 (110) (2010) 1331-1352.

[24] Suhubi E. S., Fonksiyonel Analiz, İtü Vakfi Yayınları no.38, (2001).

[25] Samarskii A. A., Nikolaev E. S., *Numerical Methods for Grid Equations vol. 2: Iterative Methods*, Birkäuser: Basel, Switzerland, (1989).

EKLER

Algoritma

1. **Adım:** $\tau = \frac{1}{N}$ ve $h = \frac{\pi}{M}$ olarak al.

2. **Adım:** Birinci dereceden doğruluklu fark şemasını kullan ve matris formunda yaz.

$$AU_{n+1} + BU_n + CU_{n-1} = D\varphi_n, 1 \leq n \leq M - 1.$$

3. **Adım:** A, B, C ve D matrislerinin girdilerini belirle.

4. **Adım:** α_1, β_1 i bul.

5. **Adım:** $\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}$ i hesapla.

6. **Adım:** U_n için $n = M-1, \dots, 1, 0$ $U_n = \alpha_{n+1}U_{n+1} + \beta_{n+1}$, $n = M-1, \dots, 2, 1, 0$ formülünü kullanarak hesapla.

Birinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şeması için Matlab Programı

```
function [table,es,p]=rothermethod(N,M)

% first order accuracy rother method

% mixed type

close; close;

if nargin<1; N=30 ; M=30 ;end;

tau=1/N; h=pi/M;

A=zeros(2*N+1,2*N+1);

for i=2:N+1; A(i,i-1)=1/(h^2); end; %schödinger asıl köşegen aşağısı

for i=N+2:2*N; A(i,i)=1/(h^2); end; %eliptik asıl köşegen

B=zeros(2*N+1,2*N+1);

B(1,1)=-1;

B(1,2*N+1)=1;
```

```

for i=1:N; B(i+1,i)=(-complex(0,1)/tau)-(2/h^2); end; %schödinger asıl köşegen
aşağısı

for i=2:N+1; B(i,i)=complex(0,1)/tau; end; %schödinger asıl köşegen

for i=N+2:2*N; B(i,i)=(-2/(tau^2))-(2/(h^2)); end; %eliptik asıl köşegen

for i=N+2:2*N; B(i,i+1)=1/(tau^2); end; %eliptik asıl köşegen yukarısı

for i=N+1:2*N-1; B(i+1,i)=1/(tau^2); end; %eliptik asıl köşegen aşağısı

B(2*N+1,N)=1;

B(2*N+1,N+1)=-2;

B(2*N+1,N+2)=1;

C=A;

for i=1:2*N+1; D(i,i)=1; end ;

alpha(2*N+1,2*N+1,1:1)= 0 ;

betha(2*N+1,1:1) = 0 ;

'fi(j) = fi(k,j) hesaplanıyor ' ;

for j=1:2*N+1; x=j*h;

fii(1,j:j)=(exp(1)-exp(-1))*sin(x); %nonlocal

fii(2*N+1,j:j)=0; %süreklilik

for k=2:N+1; x=j*h; t=(-N+k-1)*tau; fii(k,j:j)=g(t,x); end; %schrödinger

for k=N+2:2*N; t=(-N+k-1)*tau+tau; x=j*h; fii(k,j:j)=f(t,x); end; %elliptic

end;

'alpha(N+1,N+1,j) ve betha(N+1,j) ler hesaplanacak' ;

for j=1:M-1;

alpha(:,j+1:j+1)=-inv(B+C*alpha(:,j:j))*A;

betha(:,j+1:j+1)=inv(B+C*alpha(:,j:j))*(D*(fii(:,j:j))-(C*betha(:,j:j)));

end;

U( 2*N+1,1, M:M ) = 0;

```

```

for z = M-1:-1:1 ;
U(:,z,z) = alpha(:,z+1:z+1)* U(:,z+1:z+1) + betha(:,z+1:z+1);
end;
for z = 1:M ; p(:,z+1:z+1)=U(:,z,z); end;
'EXACT SOILUTION OF THIS PDE' ;
for j=1:M+1; for k=1:2*N+1; t=(-N+k-1)*tau;
x=(j-1)*h; %exact solution on grid points,
es(k,j) = exact(t,x);
end;
end;
'ERROR ANALYSIS' ;
ftf1=abs(es-p);
fmat1=abs(ftf1);
fmat2=fmat1.*fmat1*h;
fmat3=sum(fmat2,2);
fmat4=fmat3.^(1/2);
sumerror2=max(fmat4)
maxerror2=max(max(abs(es-p)))
%%%%%%%%%%%%%ERROR ANALYSIS%%%%%%%%%%%%%
maxes=max(max(es));
maxapp=max(max(p));
%%%%%%%%%%%%%GRAPH OF THE SOLUTION %%%%%%%%%%%%%%
figure;
m(1,1)=min(min(p))-0.01;
m(2,2)=nan;

```

```

surf(m);

hold;

surf(es) ; rotate3d ;axis tight;

title('EXACT SOLUTION');

figure ;

m(1,1)=min(min(p))-0.01;

m(2,2)=nan;

surf(m);

hold;

surf(p) ; rotate3d ;axis tight;

title('FIRST ORDER');

%%%%%%%%% END GRAPH %%%%%%%%%%

function estx=exact(t,x)

estx=(exp(t)-1)*sin(x);

function ftx=f(t,x)

ftx=sin(x);

function gtx=g(t,x)

gtx=((complex(0,1)-1)*exp(t)+1)*sin(x);

```

Algoritma

1. **Adım:** $\tau = \frac{1}{N}$ ve $h = \frac{\pi}{M}$ olarak al.

2. **Adım:** Birinci dereceden doğruluklu fark şemasını kullan ve matris formunda yaz.

$$AU_{n+1} + BU_n + CU_{n-1} = D\varphi_n, 1 \leq n \leq M - 1.$$

3. **Adım:** A, B, C ve D matrislerinin girdilerini belirle.

4. **Adım:** α_1, β_1 i bul.

5. **Adım:** $\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}$ i hesapla.

6. **Adım:** U_n için $n = M-1, \dots, 1, 0$ $U_n = \alpha_{n+1}U_{n+1} + \beta_{n+1}$, $n = M-1, \dots, 2, 1, 0$ formülünü kullanarak hesapla.

İkinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şeması için Matlab Programı

```
function [table,es,p]=rothermethod(N,M)
```

```
close; close;
```

```
if nargin<1; N=30 ; M=30 ;end;
```

```
tau=1/N; h=pi/M;
```

```
A=zeros(2*N+1,2*N+1);
```

```
for i=2:N+1; A(i,i-1)=1/(2*h^2); end; %schrödinger asıl köşegen aşağısı
```

```
for i=2:N+1; A(i,i)=1/(2*h^2); end; %schrödinger asıl köşegen
```

```
for i=N+2:2*N; A(i,i)=1/(h^2); end; % %eliptik asıl köşegen
```

```
B=zeros(2*N+1,2*N+1);
```

```
B(1,1)=-1;
```

```
B(1,2*N+1)=1;
```

```
for i=1:N; B(i+1,i)=(-complex(0,1)/tau)-(1/h^2); end; %schrödinger asıl köşegen  
aşağısı
```

```
for i=2:N+1; B(i,i)=(complex(0,1)/tau)-(1/h^2); end; %schrödinger asıl köşegen
```

```

for i=N+2:2*N; B(i,i)=(-2/(tau^2))-(2/(h^2)); end; %eliptik asıl köşegen
for i=N+2:2*N; B(i,i+1)=1/(tau^2); end; %eliptik asıl köşegen yukarısı
for i=N+1:2*N-1; B(i+1,i)=1/(tau^2); end; %eliptik asıl köşegen aşağısı
B(2*N+1,N-2)=1;
B(2*N+1,N-1)=-4;
B(2*N+1,N)=6;
B(2*N+1,N+1)=-4;
B(2*N+1,N+2)=1;
C=A;
for i=1:2*N+1; D(i,i)=1; end ;
alpha(2*N+1,2*N+1,1:1)= 0 ;
betha(2*N+1,1:1) = 0 ;
'fi(j) = fi(k,j) hesaplanıyor ' ;
for j=1:2*N+1; x=j*h;
fii(1,j:j)=(exp(1)-exp(-1))*sin(x); %nonlocal
    fii(2*N+1,j:j)=0; %süreklilik
for k=2:N+1; x=j*h; t=(-N+k-1)*tau-tau/2 ; fii(k,j:j)=f(t,x); end; %schrodinger
for k=N+2:2*N; t=(-N+k-1)*tau; x=j*h; fii(k,j:j)=g(t,x); end; %elliptic
end;
'alpha(N+1,N+1,j) ve betha(N+1,j) ler hesaplanacak' ;
for j=1:M-1;
alpha(:,j+1:j+1)=-inv(B+C*alpha(:,j:j))*A;
betha(:,j+1:j+1)=inv(B+C*alpha(:,j:j))*(D*(fii(:,j:j))-(C*betha(:,j:j)));
end;
U( 2*N+1,1, M:M ) = 0;

```

```

for z = M-1:-1:1 ;
U(:,z) = alpha(:,z+1)* U(:,z+1) + betha(:,z+1);
end;
for z = 1:M ; p(:,z)=U(:,z); end;
'EXACT SOILUTION OF THIS PDE' ;
for j=1:M+1; for k=1:2*N+1; t=(-N+k-1)*tau;
x=(j-1)*h; %exact solution on grid points,
es(k,j) = exact(t,x);
end; end;
'ERROR ANALYSIS' ;
ftf1=abs(es-p);
fmat1=abs(ftf1);
fmat2=fmat1.*fmat1*h;
fmat3=sum(fmat2,2);
fmat4=fmat3.^(1/2);
sumerror2=max(fmat4)
maxerror2=max(max(abs(es-p)))
%%%%%%%%%%%%%ERROR ANALYSIS%%%%%%%%%%%%%
maxes=max(max(es));
maxapp=max(max(p));
%%%%%%%%%%%%%GRAPH OF THE SOLUTION %%%%%%%%%%%%%%
figure;
m(1,1)=min(min(p))-0.01;
m(2,2)=nan;
surf(m);

```



```

hold;

surf(es) ; rotate3d ;axis tight;

title('EXACT SOLUTION');

figure ;

m(1,1)=min(min(p))-0.01;

m(2,2)=nan;

surf(m);

hold;

surf(p) ; rotate3d ;axis tight;

title('FIRST ORDER');

%%%%%%%%%% END GRAPH %%%%%%%%%%%

function estx=exact(t,x)

estx=(exp(t)-1)*sin(x);

function ftx=f(t,x)

ftx=((complex(0,1)-1)*exp(t)+1)*sin(x);

function gtx=g(t,x)

gtx=sin(x);

```

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : TOSUN MUCUK, Gülden
Uyruğu : T.C
Doğum tarihi ve yeri : 18.12.1982 / DÜZCE
Telefon : 0 (506) 295 49 50
E-posta : gulden_tsn@hotmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek Lisans	Düzce Üniversitesi/Matematik B.	2013
Lisans	Gazi Üniversitesi/Matematik B.	2007
Lise	Düzce YDA(SÜPER) Lisesi	2000

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2012-2013	Gümüşova IMKB A.L.	Matematik Öğretmeni
2011-2012	Kavram Dershaneleri	Matematik Öğretmeni
2008-2011	Birey Dershaneleri	Matematik Öğretmeni
2007-2008	Kültür Dershaneleri	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce