T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÜNİVALENT FONKSİYONLAR İÇERİSİNDE GEOMETRİK FONKSİYONLARIN SAĞLADIĞI BAZI ÖZELLİKLER ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SEMİHA ÖZGÜL

OCAK 2014

DÜZCE

KABUL VE ONAY BELGESİ

Semiha Özgül tarafından hazırlanan Ünivalent Fonksiyonlar İçerisinde Geometrik Fonksiyonların Sağladığı Bazı Özellikler Üzerine isimli lisansüstü tez çalışması, Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 06.01.2014 tarih ve 2014\2 sayılı kararı ile oluşturulan jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Üye
(Tez Danışmanı)

Prof. Dr. İsmet YILDIZ

Düzce Üniversitesi

Üye

Yrd. Doç. Dr. E. Evren Kara
Düzce Üniversitesi

Üye

Yrd. Doç Dr. Melike Aydoğan
Işık Üniversitesi

Tezin Savunulduğu Tarih : 08/01/2014

ONAY

Bu tez ile Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu .Semiha Özgül'ün Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans derecesini almasını onamıştır.

Prof. Dr. Haldun MÜDERRİSOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

13 Ocak 2014 (Tarih)

(İmza)

Semiha Özgül

Sevgili Aileme

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim ve bu tezin hazırlanmasında süresince gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Prof. Dr. İsmet YILDIZ'a en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme ve çalışma arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

13 Ocak 2014 **Semiha Özgül**

İÇİNDEKİLER **Sayfa**

SİMGELER VE KISALTMALAR

U	Birim disk
$\overline{U}$	Birim Diskin Kapanışı
A	Birim Diskte Analitik Fonksiyonların Kümesi
$\bar{A}$	$\overline{U}$ da Analitik Fonksiyonların Kümesi
A_0	$f(0) = 1$ ile Normalize Edilmiş Fonksiyonları İçeren A nın Alt Kümesi
A_1	$f(0) = 1$ ve $f'(0) = 1$ ile Normalize Edilmiş Fonksiyonları İçeren A nın Alt Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar
Λ	Sürekli Lineer Fonksiyoneller Uzayı
S	Ünivalent Fonksiyonlar Sınıfı
S^*	Yıldızıl Fonksiyonlar Sınıfı
K	Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
C	Hemen Hemen Konveks Fonksiyonlar Sınıfı

ÖZET

ÜNİVALENT FONKSİYONLAR TEORİSİNDE GEOMETRİK FONKSİYONLARIN SAĞLADIĞI BAZI ÖZELLİKLER ÜZERİNE

Semiha ÖZGÜL

Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Prof. Dr. İsmet YILDIZ
Ocak 2014 , 48 sayfa

Bu çalışmada görüntü kümesi özel bir geometrik özelliğe sahip olan ünivalent fonksiyonların bazı aileleri incelenmiştir. Bu aileler konveks ve yıldızıl dönüşümler, hemen hemen konveks dönüşümler ve spiral-like dönüşümlerdir. Bu fonksiyonların analitik özellikleri ile görüntü kümesinin geometrisi arasındaki bağlantı ifade edilmiştir. Ayrıca bu fonksiyonların Hadamard Çarpımının geometrik özellikleri ve bu çarpım ile oluşturulan koşullar derlenmiştir.

Anahtar sözcükler: Analitik Fonksiyonlar, Hadamard Çarpımı , Konveks Fonksiyonlar, Ünivalent Fonksiyonlar, Yıldızıl Fonksiyonlar

ABSTRACT

ON SOME PROPERTIES WHICH ARE PROVIDED BY GEOMETRIC FUNCTIONS IN UNIVALENT FUNCTION THEORY

Semiha ÖZGÜL
Duzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Departmant of Mathematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Assist. Prof. Dr. İsmet YILDIZ
January 2014, 48 pages

Some families of univalent functions for which the image domain has a special geometric property were considered in this study. Among the families considered are convex and star-like mappings, close-to-convex mappings, spiral-like mappings. The connection between the geometry of the image domains and analytic properties of the mapping function was described. Also geometric properties of Hadamard Product of geometric functions were collected.

Keywords: Analytic Functions, Convex Functions, Hadamard Product, Starlike Functions, Univalent Functions.

EXTENDED ABSTRACT

ON SOME PROPERTIES WHICH ARE PROVIDED BY GEOMETRIC FUNCTIONS IN UNIVALENT FUNCTION THEORY

Semiha ÖZGÜL
Duzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Departmant of Mathematics
Master of Science
Supervisor: Assist. Prof. Dr. İsmet YILDIZ
January 2014, 48 pages

1. INTRODUCTION:

Some families of univalent functions for which the image domain has a special geometric property were considered in the study. Among the families considered are convex and star-like mappings, close-to-convex mappings, spiral-like mappings. The connection between the geometry of the image domains and analytic properties of the mapping function was described. Also geometric properties of Hadamard Product of geometric functions were collected.

2. MATERIAL AND METHODS:

The convolution or Hadamard Product which is used as method in this study is an important tool in geometric function theory that so many complicated problems are solved very easily by using it.

The operation of convolution and convolution operators are the topics of great interest for researchers. Studying operators expressed in terms of convolution helps us explore their geometrical properties.

3. RESULTS AND DISCUSSIONS:

Many researchers have used convolution operators on previously known classes of analytic and univalent functions to produce new classes and to investigate several interesting properties of new classes.

4. CONCLUSION AND OUTLOOK:

In section 2.2 we give theoric background of Hadamard Product by using [1] and then in section 2.3 convolution properties of geometric functions are surveyed in univalent function theory .

Section 2.4 deals with geometric structure of convolution of two convex function [11].

The criterias of convolution of convex, starlike, spiral-like functions surveyed by the help of [12] and then the operators which are described by convolution are surveyed.

1. GİRİŞ

Analitik fonksiyonları özellikle de konformal dönüşümleri çalışmış olan Riemann'ın aksine, Weierstrass temel obje olarak kuvvet serisini kullanarak fonksiyonların bir teorisini kurmuştur. Bierberbach varsayımı analitik fonksiyon teorisinin bu iki bakış açısına dayanmaktadır; yani bir fonksiyonu aynı anda hem bir dönüşüm hem de bir seri olarak ele almıştır. Böylece Bierberbach konformal dönüşümleri Riemann tarafından çalışıldığı gibi dikkate almış ve sonra serinin ilk katsayısını sıfır ikinci katsayısını bir kabul ederek katsayıların büyüklüğü üzerinde düşünmüştür. Kompleks düzlemin açık ve bağlantılı bir alt kümesi olan bir D bölgesindeki bir f fonksiyonu, eğer herhangi bir değeri birden fazla almıyorsa; bu fonksiyon D bölgesinde ünivalent fonksiyon olarak adlandırılır. Bir f ünivalent fonksiyonu D bölgesini görüntü kümesi $f(D)$ bölgesine konformal olarak resmeder. Kompleks fonksiyonlar teorisinde konformal dönüşümleri çalışan ilk kişi Riemann'dır. Riemann 1851'deki doktora tezinde, şimdi ünlü Riemann Dönüşüm Teoremi olarak bilinen teoreminde; kompleks düzlemin herhangi bir basit bağlantılı alt bölgesi D' nin $|z| < 1$ birim diskine konformal olarak resmedilebileceğini belirtmiştir. Teoremdeki dönüşüm bire-bir ve analitik olmak zorundadır. 1907'de Koebe Riemann'ın savından hareketle buradaki f dönüşümünün eğer D bölgesindeki belirli bir z_0 noktası için $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ koşullarını sağlıyorsa tek olacağını keşfetmiştir. Bir ünivalent fonksiyonun tersi de ünivalent olduğundan birim diskte ünivalent olan fonksiyonları araştırmak oldukça ilgi uyandırmıştır. Birim diskte $f(0) = 0$ ve $f'(0) = 1$ ile normalize edilmiş fonksiyonların kümesi S ile gösterilir. Bu durumda f fonksiyonunun Taylor Açılımı

$$f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \cdots + a_nz^n + \cdots$$

formundadır. Bu formdaki fonksiyonların görüntüleri çeşitli geometriler ve klasik karakterizasyonlar tanımlar. Örneğin; Eğer f fonksiyonu $|z| < 1$ birim diskinde ünivalent ve normalize edilmiş analitik fonksiyon ise görüntüsü $|w| < \delta$ diskini içerir. Ayrıca bu fonksiyonların bazılarının görüntüsü de yıldız, yıldıza yakın , konveks, konvekse yakın veya lineer olarak erişilebilir, spiral geometriler tanımlar: Bazısı belirli yönlerde, bazısı düzgün olarak, bazısı simetrik noktaların eşleniğine göre vb. görüntüleri belirli geometriler tanımlayan bu fonksiyonlar geometrik fonksiyonlar olarak bilinirler.

Bu tezde yukarıdaki geometrik fonksiyonların konvolusyon özellikleri derlenmiştir.

2.MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. GENEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1.1: A $\subset$ $\mathbb{C}$ herhangi bir küme ve z_0 $\in$A olsun. z_0 noktasının bir ε komşuluğu, tamamen A kümesine ait ise z_0 noktasına bir iç nokta denir.

Tanım 2.1.2: A $\subset$ $\mathbb{C}$ olsun. A kümesinin her noktası bir iç nokta olan kümeye açık küme denir.

Tanım 2.1.3: A, Y ve Z, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesinin alt kümeleri olsun. Eğer $A \subset Y \cup Z,\ A \cap Z \neq \emptyset,\ A \cap Y \neq \emptyset\ ve\ A \cap Y \cap Z = \emptyset$ olacak biçimde Y ve Z gibi boş olmayan iki ayrık ve açık küme bulunamaz ise, A $\subset$ $\mathbb{C}$ kümesine bağlantılıdır denir. Aksi halde bağlantısızdır denir.

Tanım 2.1.4: Kompleks düzlemde açık ve bağlantılı kümelere bölge denir.

Tanım 2.1.5: $a_i\ \in\ \mathbb{C}\,, i = 1{,}2{,}3\ ...$ olmak üzerea_1+a_2+$a_3 + \cdots$ +$a_n + \cdots$

ifadesine seri denir. $a_1, a_2, ...$ sayılarına da serinin terimleri adı verilir. Bir seriyi göstermek için

a_1+a_2+$a_3 + \cdots$ +$a_n + \cdots$=$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

veya

a_1+a_2+$a_3 + \cdots$ +$a_n + \cdots$=$\sum a_n$

kullanılır.

Tanım 2.1.6: Kompleks sayıların bir $\{z_n\}$ dizisi ve $z_0 \in \mathbb{C}$ verilsin. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için n$\geq$ n_0 olduğunda $|z_n - z_0|$< ε olacak biçimde bir n_0 doğal sayısı varsa, bu dizi z_0 kompleks sayısına yakınsıyor denir. $\{z_0\}$ dizisinin z_0 noktasına yakınsaması $z_n \to z_0$ biçiminde gösterilir.

Tanım 2.1.7: $A \subset \mathbb{C}$ ve $f_n: A \to \mathbb{C}$ fonksiyonlarının $\{f_n\}$ dizisi verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve tüm $z \in A$ değerleri için n≥ n_0 alındığında $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ olacak biçimde bir n_0 doğal sayısı varsa, $\{f_n\}$ fonksiyon dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsıyor denir.

Tanım 2.1.8: $A \subset \mathbb{C}, f$: A→ $\mathbb{C}$ tanımlı bir fonksiyon ve $z_0 \in A$ olsun. $\varepsilon > 0$ keyfi olmak üzere $z \in A$ ve $|z - z_0| < \delta$ için $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ olacak biçimde $\delta(z_0, \varepsilon)$ >0 sayısı mevcut ise f' ye z_0 noktasında süreklidir denir.

Tanım 2.1.9: f, kompleks değişkenli ve kompleks değerli fonksiyonu $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasının bir komşuluğunda tanımlı olsun. Eğer

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti varsa, bu fonksiyona z_0 noktasında diferansiyellenebilirdir denir. Eğer $f(z)$, z_0 noktasının bir komşuluğunda diferansiyellenebilir ise, f 'ye z_0 noktasında analitik fonksiyon denir.

Tanım 2.1.10: Bir $X \neq \emptyset$ kümesinin alt kümelerinden oluşan ρ ailesi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa ρ X üzerinde bir topoloji tanımlar.

i) $X, \emptyset \in \rho$
ii) ρ ailesine ait sınıfların sonlu kesişimleri de ρ ‘dadır.
iii) ρ ailesindeki her sınıfın keyfi birleşimi yine ρ ailesindedir.

bu durumda (X, ρ) çiftine topolojik uzay denir.

Tanım 2.1.10: (X, ρ) topolojik uzay ve $A \in \rho$ ise A kümesine açık küme denir.

Tanım 2.1.11: $X \setminus A$ kümesi açıksa A kümesine kapalı küme denir.

Tanım 2.1.12: (X, ρ) topolojik uzayında açık kümelerden oluşan bir $\{A_i : i \in I\}$ sınıfının birleşimi tüm X uzayına eşitse bu sınıfa açık örtü denir. Bir açık örtünün sonlu bir alt sınıfı yine bir açık örtü ise, buna alt örtü denir.

Tanım 2.1.13: (X, ρ) uzayında her açık örtünün sonlu bir alt örtümü varsa (X, ρ) uzayına kompakt uzay denir. X uzayındaki her A alt kümesi için (A, ρ_A) alt uzayı kompakt ise A kümesine kompakt küme denir.

Tanım 2.1.14: Bir $f(z)$ fonksiyonu bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde bire-bir ise yani; her bir $u, v \in D$ için $f(u) = f(v)$ olması sadece ve sadece $u = v$ olmasını gerektiriyorsa $f(z)$ fonksiyonununa D de ünivalent ya da yalınkat fonksiyon denir. (Nehari,1952)

Tanım 2.1.15: D bir bölge ve z_1 D bölgesinde herhangi bir nokta olsun. Eğer z_1 ile orijini birleştiren doğru parçası D bölgesi içinde kalıyorsa, D bölgesine orijine göre yıldızıl bölgedir denir.

Tanım 2.1.16: D bir bölge, z_1 ve z_2 D bölgesinde herhangi iki nokta olsun. Eğer z_1 ve z_2 noktalarını birleştiren doğru parçası D bölgesi içinde kalıyorsa, D bölgesine konveks bölge denir.

Tanım 2.1.17: $U = \{z : z \in \mathbb{C}\ ve\ |z| < 1\}$ birim diskinde analitik ve görüntü kümesi yıldızıl bölge olan fonksiyonlara yıldızıl fonksiyonlar denir.

Tanım 2.1.18: U birim diskinde analitik ve görüntü kümesi konveks bölge olan fonksiyonlara konveks fonksiyonlar denir.

Tanım 2.1.19: Eğer

$$Re\left\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\right\} > 0 \qquad , \qquad z \in U$$

olacak şekilde bir g fonksiyonu varsa birim diskte bir f fonksiyonuna hemen hemen konvekstir denir.(Kaplan 1952)

Tanım 2.1.20: F skaler cismi üzerinde bir V vektör uzayı; bir $(V, +, 0)$ değişmeli grubu ve bir $m: F \times V \to V$ dönüşümü ile

$$m(\lambda, x + y) = m(\lambda, x) + m(\lambda, y)$$

olacak şekilde verilir.

Tanım 2.1.21: F skaler cismi üzerinde V ve W vektör uzayı olsun. $\forall\, x, y \in V$ için $T: V \to W$ dönüşümü

$$T(x + \lambda y) = T(x) + \lambda T(y)$$

özelliğini sağlıyorsa T dönüşümüne lineer dönüşüm denir.

Tanım 2.1.22: Bir lineer fonksiyonel f, tanım kümesi V vektör uzayında ve görüntü kümesi V nin skaler cismi F de $f: D(f) \to F$ olan bir lineer operatördür.

Tanım 2.1.23: Bir V vektör uzayı üzerindeki ρ topolojisine; eğer toplama ve skalerle çarpma işlemleri bu topolojiye göre sürekli ise lineer topoloji denir ve (V, ρ) topolojik uzayına da topolojik vektör uzayı denir.

Eğer $\mathcal{B}$ lokal bazının elamanları konveks; yani $\forall B \in \mathcal{B}$ için

$$aB + (1 - a)B \subset B$$

ise bu topolojik vektör uzayına lokal olarak konveks denir.

Eğer ρ topolojisi Hausdorff Topolojisi ise (V, ρ) topolojik vektör uzayına ayrık topolojik vektör uzay denir.

Tanım 2.1.24: Bir (X, ρ) topolojik uzayı Hausdorff Topolojik Uzayıdır. $\Leftrightarrow$ Herhangi farklı$(x \neq y)$ $x, y \in X$ için $x \in A, y \in B$ ve $A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde $A, B \in \rho$ vardır.

Tanım 2.1.25: Bir A kümesinin konveks zarfı coA ile gösterilir ve A kümesindeki tüm konveks kombinasyonları içerir;

$$coA = \left\{x: \exists x_i \in A, \alpha_i \geq 0 (1 \leq i \leq n), \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \ ve \ x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, x_i \right\}$$

Konveks zarf coA , A kümesini içeren en küçük konveks kümedir. Topolojik vektör uzayında A kümesinin kapalı konveks zarfı $\overline{co}A$, A kümesini içeren en küçük kapalı konveks kümedir ve coA nın kapanışıdır $\overline{coA} = \overline{co}A$.

2.2.HADAMARD ÇARPIMI İÇİN DUALLİK

Tanım 2.2.1: f fonksiyonu $|z| < R_1$ de analitik, g fonksiyonu $|z| < R_2$ de analitik olsun ve bu fonksiyonların kuvvet seri açılımları $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ ve $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ ise f ve g fonksiyonlarının Hadamard Çarpımı $(f * g)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k z^k$ olarak tanımlanır. Bu yeni fonksiyon $|z| < R_1 R_2$ de analitiktir. Bu çarpımın konvolusyon integrali olarak alternatif gösterimi:

$$(f * g)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho} f\left(\frac{z}{\zeta}\right) g(\zeta) d\zeta/\zeta \quad , \frac{|z|}{R_1} < \rho < R_2$$

olduğundan $f * g$ ye f ve g fonksiyonlarının konvolusyonu da denir.

U birim diski $\{|z| < 1\}$ ve kapanışı $\bar{U}$ olsun. U da analitik fonksiyonların kümesi A ve $\bar{U}$ de analitik fonksiyonların kümesi $\bar{A}$ ile gösterilir. Ayrıca $f(0) = 1$ ile normalize edilmiş $f(z)$ elemanları olan A_0 kümesi A nın alt kümesi olsun.

Hadamard Çarpımı yardımıyla A_0 ın bazı alt kümeleri arasında belirli bir duallik aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.2.2: $V \subset A_0$ için

$$V^* = \{g \in A_0 \,|(f * g)(z) \neq 0 \;\; \forall f \in V, z \in U\} \tag{2.2.1}$$

kümesine V ye dual denir.

V ile $V^{**} = (V^*)^*$ arasındaki ilişki oldukça önemlidir. Genellikle V^{**}, V den daha büyüktür; fakat V nin birçok özelliği V^{**} da geçerliliğini korur. Bunun önemli sonucu da konvekslik, yıldızıllık, hemen hemen konvekslik, ünivalentlik gibi özelliklerle tanımlanan fonksiyon sınıflarına uygulaması olmasıdır.

2.2.1 Duallik İlkesi

(2.2.1)'deki gibi tanımlanan dual kümeler ile ilgilenilecektir. U daki kompakt yakınsaklık topolojisi ile A uzayı lokal konveks ayrık topolojik vektör uzayıdır. A üzerindeki sürekli lineer fonksiyonellerin uzayı Λ Toeplitz'in Temel Teoremi ile tanımlanmıştır.

Teorem 2.2.1: $\lambda \in \Lambda \Leftrightarrow \forall f \in A$ için

$$\lambda(f) = (g * f)(1) \tag{2.2.2}$$

olacak şekilde bir $g \in A$ fonksiyonu vardır.

(2.2.2) benzerliği $\lambda \doteqdot g$ ile gösterilir. Bir $V \subset A_0$ altkümesine aşağıdaki özelliği sağlıyorsa tamdır denir:

$$f \in V \implies \forall |x| \leq 1 : f_x \in V \tag{2.2.3}$$

Burada $f_x(z) = f(xz)\,, z \in U$ dır. Herhangi bir dual küme tamdır. (ve kapalıdır)

Temel Teorem (Duallik İlkesi) 2.2.2: $V \subset A_0$ kümesi kompakt ve tam olsun. O halde

$$\forall \lambda \in \Lambda : \lambda(\mathrm{V}) = \lambda(V^{**}) \tag{2.2.4}$$

ve

$$\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{V}) = \overline{\mathrm{co}}(V^{**}) \tag{2.2.5}$$

dir. ($\overline{\mathrm{co}}$: bir kümenin kapalı konveks zarfı)

İspat: $V \subset V^{**}$ olduğundan $\lambda \in \Lambda$ için $\lambda(V) \subset \lambda(V^{**})$ dır. Bu kapsamanın tersini yani $\lambda(V^{**}) \subset \lambda(V)$ ispatlamak için $a \in \mathbb{C}, \lambda \in \Lambda$ olmak üzere $a \notin \lambda(V)$ ise $a \notin \lambda(V^{**})$ olduğu gösterilmelidir ve bu $a = 0$ durumuna kısıtlanabilir. Böylece $0 \notin \lambda(V)$ ile $\lambda \in \Lambda$ ve $\lambda \doteqdot g$ göz önünde bulundurulabilir. g belirli bir $R > 1$ için $|z| < R$ de analitiktir. V kümesinin kompaktlığı gösterir ki

$$\mathcal{U} = \{f * g | f \in V\}$$

kümesi $|z| < R$ de analitik fonksiyonların kompakt bir kümesidir. λ üzerindeki varsayım ve $u \in \mathcal{U}$ için (2.2.2) den $u(1) \neq 0$ dır. Kompaktlık özelliğinden dolayı 1 'in belirli bir komşuluğunda da aynı durum doğrudur, özellikle $1 < x_0 < R$ aralığındaki x_0 noktasında doğrudur. $\tilde{g}(z) = g(x_0 z)$ olsun. Sonra $|z| < 1$ de $\tilde{g}$ analitiktir ve $f \in V$ için $(\tilde{g} * f)(1) = (g * f)(x_0) \neq 0$ elde edilir. V tam olduğundan $|x| < 1$ ve $f \in V$ için: $(\tilde{g} * f)(x) = (\tilde{g} * f_x)(1) \neq 0$ dır. Böylece $\tilde{g} \in V^*$ ve keyfi $z \in U$, $f \in V^{**}$ için $(\tilde{g} * f)(z) \neq 0$ elde edilir. $z = \frac{1}{x_0}$ seçimi $f \in V^{**}$ için

$$\lambda(f) = (g * f)(1) = (\tilde{g} * f)(\frac{1}{x_0}) \neq 0$$

denklemini verir. Buradan (2.2.4) ispatlanmış olur. $\overline{\text{co}}(\text{V}) \neq \overline{\text{co}}(V^{**})$ olduğunu kabul edilsin. Böylece lokal konveks ayrık topolojik vektör uzaylarındaki ayırma teoreminden V^{**} kümesini V kümesinden ayıran $\lambda \in \Lambda$ vardır. Bu (2.2.4) ten dolayı imkansızdır.

(2.2.5) duallik ve konvekslik arasındaki ilişkiyi belirtse de V^{**} kümesinin genelde V kümesi ile daha yakından ilişkili olduğunu ifade eder. Aşağıdaki sonuç da V^{**} yerine $\overline{\text{co}}(\text{V})$ yazılırsa yanlış olur.

Sonuç 2.2.1: V kompakt ve tam olsun. $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ için $0 \notin \lambda_2(V)$ olduğunu kabul edelim. Sonra herhangi $f \in V^{**}$ için

$$\frac{\lambda_1(\text{f})}{\lambda_2(\text{f})} = \frac{\lambda_1(\text{f}_0)}{\lambda_2(\text{f}_0)}$$

olacak şekilde bir $f_0 \in V$ vardır.

İspat: $\lambda_u = \lambda_1 + \text{u}\lambda_2$, $u \in \mathbb{C}$ olsun. Sonra $\lambda_u(\text{V}) = \lambda_u(V^{**})$ dır, bu da

$$\forall f \in V \text{ } için \text{ } \frac{\lambda_1(\text{f})}{\lambda_2(\text{f})} \neq u \iff \forall f \in V^{**} \text{ } için \text{ } \frac{\lambda_1(\text{f})}{\lambda_2(\text{f})} \neq u$$

koşulunu içerir. Buradan sonuç gerçeklenmiş olur.

2.2.2 Uygulamalar

Temel teorem kullanılırken karşılaşılan ilk problem verilen bir $V \subset A_0$ kümesi için V^{**} kümesinin oluşturulması problemi veya tam aksi durum V^{**} kümesi verilirse bu kümeden yeterince küçük olan V kümesinin bulunması problemidir. Aşağıdaki kümeler A_0 için yaygın olarak kullanılan alt kümelerdir.

$$V_\beta = \left\{(1-\beta)\frac{(1-xz)}{(1-yz)} + \beta \middle| |x| = |y| = 1\right\} \qquad \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 1,$$

$$V_{\beta 0} = \left\{\gamma(1-\beta)\frac{(1+xz)}{(1-xz)} + (1-\gamma)(1-\beta)\frac{(1+yz)}{(1-yz)} + \beta \middle| |x| = |y| = 1, 0 \leq \gamma \leq 1\right\}$$

$\beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 1$,

$$\hat{X} = \left\{ \frac{1+\frac{1}{2}(y-x)z}{(1-xz)^2} \middle| (|x| = |y| = 1) \wedge (x = y, |x| < 1) \right\},$$

$$\hat{Y} = \left\{ \frac{1}{(1-xz)(1-yz)} \middle| |x| = |y| = 1 \right\},$$

bu kümelerden $V_\beta \subset A_0$ olduğu aşağıdaki gibi gösterilir. Yukarıdaki teoremlerden;

i) V_β kompakttır,

ii) $V_\beta' = \{g \in A_0 | \exists (f \in V, |x| < 1) : g(z) = f_x(z)\}$ olsun. $0 \notin \lambda(V_\beta)$ ise $0 \notin \lambda(\acute{V}_\beta)$ dir.

yukarıdaki tüm kümeler kopmaktır. Bu yüzden sadece ii) kontrol edilmelidir. $\lambda \in \Lambda$ ve $\lambda \div g$ olsun. (a) $g(0) = 0$ veya (b) $g(0) = 1$ kabul etmek yeterlidir.

$$V_\beta : \left(g * \left[(1-\beta)\frac{(1-xz)}{(1-yz)} + \beta\right]\right)(1) = (1-\beta)\left[\frac{x}{y} + \left(1 - \frac{x}{y}\right) g(g)\right] + \beta g(0)$$

ve $0 \notin \lambda(V_\beta)$ gerektirir ki;

a) $g(y) \neq \frac{1}{2} + i\eta,$

b) $g(y) \neq \frac{(1-2\beta)}{(2-2\beta)} + i\eta,$

$|y| = 1, \eta \in \mathbb{R}$. Her iki durumda da $g(y), |y| = 1$, belirli bir yarı düzlemdedir ve a) ve b) eşitsizlikleri ($|x| < 1$) $|y| < 1$ için de geçerliliğini korur. Buradan ii) gerçeklenir.

Aşağıdaki notasyonlar şu şekilde tanımlanır:

$$P_\beta = \left\{ f \in A_0 \middle| \exists \alpha \in \mathbb{R} : Re\left(e^{i\alpha}(g(z) - \beta)\right) > 0, z \in U \right\},$$

$$P_{\beta 0} = \left\{ f \in A_0 \middle| Re\left(\frac{g(z)-\beta}{1-\beta}\right) > 0, z \in U \right\},$$

$$\widehat{St} = \{ f \in A_0 | zf(z)\ U\ da\ \text{ü}nivalent\ ve\ yıldızıl \},$$

$$\hat{S} = \{ f \in A_0 | zf(z)\ U\ da\ \text{ü}nivalent \}$$

Ayrıca $\hat{Z} = (\hat{S})^*, \widehat{M} = (\widehat{St})^*$ ile gösterilir.

Teorem 2.2.3: $V_\beta{}^{**} = P_\beta, V_{\beta 0}{}^{**} = P_{\beta 0}, (\hat{X})^{**} = \widehat{M}, (\hat{Y})^{**} = \hat{Z}$

2.2.3 Ünivalent Fonksiyonlara Uygulamalar

Yukarıdaki sonuçların hepsi A_0 ın alt kümeleri için elde edildi; fakat ünivalent fonksiyonlar teorisindeki tüm önemli sınıfların üyeleri $g \in A_0$ olmak üzere $zg(z)$ formundadır. Uygulamalarda z daima sabit sayı gibi olduğundan, eğer $f(0) = 0, f'(0) = 1$ ile normalize edilmiş fonksiyonların sınıfı olan $A_1 \subset A$ alt sınıfı için düzenlenirse ispatlarda hiçbir fark olmaz. Buna göre $\hat{X}, \hat{Y}, \widehat{St}, \hat{S}, \widehat{M}, \hat{Z}$ sınıflarını X, Y, St, S, M, Z sınıflarına $B = \left\{zf \middle| f \in \hat{B}\right\}$ genel dönüşümüyle dönüştürülebilir. Bu kısım ileride bölüm 2.3'de daha geniş kapsamlı incelenecektir.

2.3 ÜNİVALENT FONKSİYONLARIN HADAMARD ÇARPIMI

$|z| < 1$ birim diskinde yakınsak $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ ve $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k$ kuvvet seri açılımlarının Hadamard Çarpımı veya konvolusyonu

$$(f * g)(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k z^k \qquad , |z| < 1$$

olarak tanımlanmıştı. Ayrıca konvolusyon adi çarpma işleminin cebirsel özeliklerini sağlar ve

$$l(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1 - z}$$

geometrik serisi konvolusyon işlemi altında birim eleman olarak etki eder: Her f için $f * l = f$ dir.

Hadamard Çarpımı geometrik fonksiyonlar teorisinde ilginç bir tarihe sahiptir. İlk olarak 1958 de G. Pólya ve I.J. Schoenberg [5] aşağıdaki sanılarını ortaya atmışlardır.

Eğer $f(z)$ ve $g(z)$ konveks ise $(f * g)(z)$ fonksiyonu da konvekstir.

Bu konvolusyonun ünivalent olduğu ilk kez T.J. Suffridge [6] tarafından gösterilmiştir. G. Pólya ve I.J. Schoenberg bu sanının birkaç özel durumda da doğru olduğunu göstermişler ve sonra T.J. Suffridge diğer özel durumları aşağıdaki önermeyle oluşturmuştur.

Eğer $\varphi(z)$ konveks ve $f(z)$ hemen hemen konveks fonksiyon ise $(\varphi * f)(z)$ hemen hemen konvekstir.

1973'te, Ruscheweyh ve Sheil-Small[7] P$\acute{o}$lya-Schoenberg sanısını başarıyla ispatlamışlardır.

Bu konjektürleri ispatlamak için öncelikle yıldızıl ve konveks fonksiyonların bazı özelliklerinin belirtilmesi gerekmektedir.

2.3.1 Yıldızıl ve Konveks Fonksiyonların Sağladığı Özellikler

İyi bilinmektedir ki $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ $(a_1 \neq 0)$ fonksiyonu birim diskte yıldızıl ünivalenttir $\Leftrightarrow$

$$Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0 \quad , \quad |z| < 1 \tag{2.3.1}$$

ve $\varphi(z)$ fonksiyonu konvekstir $\Leftrightarrow$

$$Re\left(1 + \frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)}\right) > 0 \quad , |z| < 1 \tag{2.3.2}$$

ve $\varphi'(0) \neq 0$. Böylece

$\varphi(z)$ fonksiyonu konvekstir $\Leftrightarrow$ $z\varphi'(z)$ fonksiyonu yıldızıldır.

(2.3.1) ve (2.3.2) koşulları geometrik olarak lokaldir ve bu koşullar; bir f yıldızıl fonksiyonu için z, $|z| = r$ $(0 < r < 1)$ çemberinde dönerken $w = f(z)$ orijin civarinda monoton olarak döneceği ve bir φ konveks fonksiyonu için tanjant vektörü monoton olarak artacağı gerçeğinden dolayı analitik formulasyonlardır. Bu fonksiyonların görüntü kümelerinin genel geometrik yapısı yukarıdaki (2.3.1) ve (2.3.2) koşulları ile dolaylı olarak belirlenir. Ancak analitik koşulları daha genel ve daha açık olarak formüle etmek gerekir.

Teorem 2.3.1: Eğer $\varphi(z)$ $|z| < 1$ de konveks ise her bir z_0 $(|z_0| < 1)$ için

$$z\left(\frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{z - z_0}\right)^2 \tag{2.3.3}$$

fonksiyonu yıldızıldır. Suffridge[8],Sheil-Small[9]

İspat: Konveks fonksiyon olan $\varphi(z)$ nin görüntüsü D bölgesi özellikle $\varphi(z_0)$ noktasına göre yıldızıldır ve böylece $|z| > |z_0|$ ise

$$Re\left(\frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)-\varphi(z_0)}\right) > 0 \tag{2.3.4}$$

dır. Şimdi $h(z)$ (2.3.3) fonksiyonunu gösteriyorsa,

$$\frac{2z\varphi'(z)}{\varphi(z)-\varphi(z_0)} - \frac{z+z_0}{z-z_0} = \frac{zh'(z)}{h(z)} \tag{2.3.5}$$

elde edilir ve bu z ve z_0 noktalarında analitiktir. (2.3.4) ten $|z| = |z_0|$ için negatif olmayan reel kısma sahiptir. Maksimum İlkesi $\forall\, z, z_0$ için (2.3.5) in pozitif reel kısma sahip olacağını gösterir ve istenen sonuç elde edilir.

Ayrıca çember döndürülürken $\varphi(z_0)$ dan $\varphi(z)$ ye kadar olan kirişin monoton olarak döneceği geometrik gerçeğinden (2.3.3) koşulu bir analitik formulasyondur. Teoremin koşulu konvekslik için de yeterli bir koşuldur.

Bir $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \quad (a_1 \neq 0)$ fonksiyonu eğer

$$Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \frac{1}{2} \qquad , \qquad |z| < 1 \tag{2.3.6}$$

koşulu sağlanırsa $\frac{1}{2}$. mertebeden yıldızıldır.

Bu koşulun geometrik bir yorumu yoktur ama analitik olarak elde edilmeye uygundur ve genel yıldızıl fonksiyonların sınıfı ile yakından ilişkilidir. $g(z)$ yıldızıldır $\Leftrightarrow$

$$f(z) = z\sqrt{\frac{g(z)}{z}}$$

$\frac{1}{2}$. mertebeden yıldızıldır. Ayrıca

$$h(z) = h_1 z + h_3 z^3 + h_5 z^5 + \cdots$$

fonksiyonu tek yıldızıl fonksiyondur $\Leftrightarrow$

$$f(z) = h_1 z + h_3 z^2 + h_5 z^3 + \cdots$$

fonksiyonu $\frac{1}{2}$. mertebeden yıldızıldır. Eğer $z_0 = 0$ noktasını Teorem 2.3.1 de yerine yazılırsa her konveks φ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$ inci mertebeden yıldızıl olacağı görülür ve genel olarak her bir z_0 $(|z_0| < 1)$ için

$$z\left(\frac{\varphi(z)-\varphi(z_0)}{z-z_0}\right) \quad , \quad |z| < 1 \tag{2.3.7}$$

fonksiyonu $\frac{1}{2}$. mertebeden yıldızıldır. (2.3.6) koşulundan daha genel bir koşul aşağıdaki teorem de verilmiştir.

Teorem 2.3.2: $f(z)$ $\frac{1}{2}$. mertebeden yıldızıldır $\Leftrightarrow$

$$Re\left(\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}.\frac{z_2}{f(z_2)}\right) > \frac{1}{2} \qquad , |z_1| < 1, |z_2| < 1 \tag{2.3.8}$$

dır.

İspat: Yeter koşul z_1 yerine z_2 yazıldığında açıktır. Gerek koşul için $g(z) = \frac{f^2(z)}{z}$ olsun. Böylece $g(z)$ yıldızıldır. $|\sigma| < 1$ için $\arg(1-\sigma)$ nun esas dalını göz önüne alalım ve bu dal sürekli tarzda $|\sigma| = 1$ e genişler, $\sigma \neq 1$ ve buradan

$$\arg\left(1-e^{i\varphi}\right) = -\frac{\pi}{2}+\frac{\varphi}{2} \qquad (0 < \varphi < 2\pi)$$

denklemi elde edilir. $z = e^{i\theta}$ yazılarak

$$\arg\left\{\left(1-e^{i\varphi}\right)\frac{f\left(ze^{i\varphi}\right)}{ze^{i\varphi}}.\frac{z}{f(z)}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{-\pi+\varphi+\arg\left(\frac{g\left(re^{i(\theta+\varphi)}\right)}{re^{i(\theta+\varphi)}}\right)-\arg\left(\frac{g\left(re^{i\theta}\right)}{re^{i\theta}}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\{-\pi+\arg\left(g\left(re^{i(\theta+\varphi)}\right)\right)-\arg\left(g\left(re^{i\theta}\right)\right)\}$$

elde edilir ve $g(z)$ yıldızıl olduğundan $0 < \varphi < 2\pi$ ise bu ifade mutlak değerce $\frac{\pi}{2}$ yi aşmaz. Böylece $|\sigma| = 1, \sigma \neq 1$ için

$$Re\left\{(1-\sigma)\frac{f(z\sigma)}{z\sigma}.\frac{z}{f(z)}\right\} > 0 \quad (|z| < 1) \tag{2.3.9}$$

elde edilir. Şimdi $|z_1| = |z_2| < 1$ ve $z_1 \neq z_2$ göz önüne alınsın, böylece $|\sigma| = 1$ ve $\sigma \neq 1$ sağlayan bazı σ değerleri için $z_2 = z_1\sigma$ elde edilir ve sonrasında (2.3.9) u uygulanarak

$$Re\left(\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}.\frac{z_2}{f(z_2)}\right) = -Re\left(\frac{\sigma}{1-\sigma}\right) + Re\left(\frac{1}{1-\sigma}.\frac{z_1\sigma}{f(z_1\sigma)}.\frac{f(z_1)}{z_1}\right)$$

$$> -Re\left(\frac{\sigma}{1-\sigma}\right) = \frac{1}{2}$$

elde edilir. Maksimum İlkesi uygulanarak ispat tamamlanır.

Eğer $\varphi(z)$ konveks ise (2.3.7) fonksiyonu $\frac{1}{2}$. mertebeden yıldızıldır ve böylece Teorem 2.3.2 uygulanabilir ve konvekslik için bir üç nokta koşulu elde edilir. Eğer $\varphi(z)$ konveks ise tüm $|\sigma_k| \leq 1$ $(k = 1,2,3)$ koşulunu sağlayan $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ kompleks sayıları için

$$Re\left(\frac{\varphi(z) * [z(1-\sigma_1 z)^{-1}(1-\sigma_2 z)^{-1}(1-\sigma_3 z)^{-1}]}{\varphi(z) * [z(1-\sigma_1 z)^{-1}(1-\sigma_2 z)^{-1}]}\right)$$
$$> \frac{1}{2} \qquad (|z| < 1) \tag{2.3.10}$$

elde edilir. (2.3.8) koşulu benzer şekilde dönüştürülebilir: Eğer $f(z)$ $\frac{1}{2}$. mertebeden yıldızıl ise $|\sigma_1| \leq 1$, $|\sigma_2| \leq 1$ koşullarını sağlayan herhangi σ_1, σ_2 ikilisi için

$$Re\left(\frac{f(z) * [z(1-\sigma_1 z)^{-1}(1-\sigma_2 z)^{-1}]}{f(z) * [z(1-\sigma_1 z)^{-1}]}\right) > \frac{1}{2} \qquad (|z| < 1) \tag{2.3.11}$$

elde edilir.

İspat(2.3.11): (2.3.11) aslında (2.3.8)' in yeniden düzenlenmiş halidir. (2.3.11)'in paydası

$$f(z) * \frac{z}{1-\sigma_1 z} = f(z) * \frac{1}{\sigma_1}\frac{\sigma_1 z}{1-\sigma_1 z} = f(z) * \frac{1}{\sigma_1} l(\sigma_1 z) = \frac{1}{\sigma_1} f(\sigma_1 z)$$

ve pay kısmı

$$f(z) * \frac{z}{(1-\sigma_1 z)(1-\sigma_2 z)} = f(z) * \frac{1}{\sigma_1 - \sigma_2}\left\{\frac{1}{1-\sigma_1 z} - \frac{1}{(1-\sigma_2 z)}\right\}$$
$$= \frac{f(\sigma_1 z) - f(\sigma_2 z)}{\sigma_1 - \sigma_2}$$

olarak yazılabilir. (2.3.8)' deki $z_2 = \sigma_1 z$ ve $z_1 = \sigma_2 z$ seçilirse ispat tamamlanmış olur.

(2.3.10)' un ispatı için aşağıdaki önerme[7] önemlidir.

Önerme 2.3.1: Eğer $f(z)$ konveks ise $|z| < 1$ birim diskindeki tüm z, ζ ve w için

$$Re\left\{\frac{z}{(z-\zeta)}\frac{(\zeta-w)}{(z-w)}\frac{(f(z)-f(w))}{(f(\zeta)-f(w))} - \frac{\zeta}{(z-\zeta)}\right\} > \frac{1}{2}$$

İspat:

$$F(z,\zeta,w) = \frac{2z}{(z-\zeta)}\frac{(\zeta-w)}{(z-w)}\frac{(f(z)-f(w))}{(f(\zeta)-f(w))} - \frac{2\zeta}{(z-\zeta)} - 1$$

fonksiyonu $U^3 = \{(z,\zeta,w): |z| < 1, |\zeta| < 1, |w| < 1\}$ diskinde analitiktir.

$\alpha = e^{ia}$ ve $\beta = e^{ib}$,$0 < a, b < 2\pi$, farklı sabitleri için

$$Re\{F(\alpha w, \beta w, w)\} = -\frac{\sin(\frac{b}{2})}{\sin(\frac{a-b}{2})\sin(\frac{a}{2})} Im\left\{\frac{f(\alpha w) - f(w)}{f(\beta w) - f(w)}\right\}$$

fakat her bir $|w| \le \rho < 1$ diskinin f altındaki görüntüsü konveks olduğundan

$$\arg\left\{\frac{f(\alpha w) - f(w)}{f(\beta w) - f(w)}\right\} \in \begin{cases} (0,\pi) & ,0 < a < b < 2\pi \\ (-\pi, 0) & ,0 < b < a < 2\pi \end{cases}$$

dır. Böylece $\sin(\frac{a-b}{2})$ ve $Im\{.\}$ zıt işaretli olur ve

$$Re\{F(\alpha w, \beta w, w)\} > 0$$

olur. Fakat $Re\{F(z,\zeta,w)\}$ minimuma U^3 ün sınırında

$$T^3 = \{(z,\zeta,w): |z| = 1, |\zeta| = 1, |w| = 1\}$$

ulaşır, buradan U^3 boyunca $Re\{F(z,\zeta,w)\} > 0$ elde edilir.

İspat(2.3.10): Yukarıdaki önermede $z = \sigma_3 z, \zeta = \sigma_1 z$ ve $w = \sigma_2 z$ yazılırsa

$$\frac{\sigma_3}{\sigma_3-\sigma_1}\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_3-\sigma_2}\frac{f(\sigma_3 z)-f(\sigma_2 z)}{f(\sigma_1 z)-f(\sigma_2 z)}-\frac{\sigma_1}{\sigma_3-\sigma_1}$$

$$=\frac{\sigma_3}{\sigma_3-\sigma_1}\frac{f(\sigma_3 z)-f(\sigma_2 z)}{\sigma_3-\sigma_2}\frac{1}{\frac{f(\sigma_1 z)-f(\sigma_2 z)}{\sigma_1-\sigma_2}}-\frac{\sigma_1}{\sigma_3-\sigma_1}$$

$$=\frac{\sigma_3}{\sigma_3-\sigma_1}f(z)*\left[\frac{z}{(1-\sigma_3 z)(1-\sigma_2 z)}\right]\frac{1}{f(z)*\left[\frac{z}{(1-\sigma_1 z)(1-\sigma_2 z)}\right]}-\frac{\sigma_1}{\sigma_3-\sigma_1}$$

$$=\frac{1}{\sigma_3-\sigma_1}\frac{f(z)*\{\sigma_3 z(1-\sigma_3 z)^{-1}(1-\sigma_2 z)^{-1}-\sigma_1 z(1-\sigma_1 z)^{-1}(1-\sigma_2 z)^{-1}\}}{f(z)*[z(1-\sigma_1 z)^{-1}(1-\sigma_2 z)^{-1}]}$$

$$=\frac{f(z)*[z(1-\sigma_1 z)^{-1}(1-\sigma_2 z)^{-1}(1-\sigma_3 z)^{-1}]}{f(z)*[z(1-\sigma_1 z)^{-1}(1-\sigma_2 z)^{-1}]}$$

elde edilir.

Bir D bölgesinin orijine göre yıldızıllığı D de herhangi bir z_1 noktası ile orijini birleştiren doğru parçası D bölgesi içinde kalması özelliği ile D bölgesinin her noktasına göre yıldızıllığı benzer şekilde karekterize edilir. Bu geometrik gözleme dayanarak yıldızıl fonksiyonlar için farklı türde bir bağıntıya ihtiyaç vardır. Bu bağıntıyı analitik terimlerle ifade etmek için yıldızıl fonksiyonların birkaç sınır özellikleri gereklidir.

$f(z)$ yıldızıl ve

$$V(t)=\lim_{r\to 1}\arg\left(f\left(re^{it}\right)\right) \tag{2.3.12}$$

olsun. $\forall t \in \mathbb{R}$ için $V(t)$ limiti vardır ve aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$V(t)$ t ye göre monoton artandır. (2.3.13)

$$V(t+2\pi)=V(t)+2\pi \quad ,\forall t \text{ için} \tag{2.3.14}$$

$$V(t)=\frac{1}{2}\left(V(t+0)-V(t-0)\right) \quad ,\forall t \text{ için} \tag{2.3.15}$$

bu sonuçlar [10] da oluşturulmuştur.

$$\begin{aligned} h(t)&=inf\{s\colon V(s)\geq V(t)+\pi\}\\ k(t)&=\sup\{s\colon V(s)\leq V(t)+\pi\}\end{aligned} \tag{2.3.16}$$

buradan

$$h(t+2\pi)=h(t)+2\pi \quad ,k(t+2\pi)=k(t)+2\pi \tag{2.3.17}$$

$$t\le h(t)\le k(t)\le t+2\pi \tag{2.3.18}$$

$\forall t\ \in \mathbb{R}$ için yukarıdaki koşulları sağlayan $h(t)$ ve $k(t)$, t nin azalmayan fonksiyonları olduğu sağlanır.

Teorem 2.3.3: $\forall t\ \in \mathbb{R}$ için t^* , $h(t)\le t^*\le k(t)$ koşulunu sağlayan herhangi bir sayıyı göstersin. Sonra $|z|<1$ de

$$Im\left\{e^{-iV(t)}e^{\frac{1}{2}i(t+t^*)}\left(1-ze^{-it}\right)\left(1-ze^{-it^*}\right)\frac{f(z)}{z}\right\}\ge 0 \tag{2.3.19}$$

olur.

İspat: Sabit t için

$$W(\theta)=\lim_{r\to 1} arg\left\{e^{-iV(t)}e^{\frac{1}{2}i(t+t^*)}\left(1-re^{i(\theta-t)}\right)\left(1-re^{i(\theta-t^*)}\right)\frac{f\left(re^{i\theta}\right)}{re^{i\theta}}\right\} \tag{2.3.20}$$

$W(\theta)$ 2π periyotludur ve buradaki amaç

$$0\le W(\theta)\le \pi \tag{2.3.21}$$

olduğunun gösterilmesidir. Bunu göstermek için $t\le\theta\le t+2\pi$ aralığını dikkate almak yeterli olacaktır. Aşağıdaki dört durum incelenir:

i) $\theta=t$

$$\lim_{r\to 1} arg\left\{\left(1-re^{i(\theta-t)}\right)\left(1-re^{i(\theta-t^*)}\right)\right\}
=\begin{cases}\frac{1}{2}(t-t^*)+\frac{\pi}{2} & ,t\le t^*\le t+2\pi\\ 0\ , & t^*=t\ veya\ t^*=t+2\pi\end{cases}$$

böylece

$$W(\theta)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & ,t\le t^*\le t+2\pi\\ 0 & , \qquad t^*=t\\ \pi & , \qquad t^*=t+2\pi\end{cases}$$

dir.

ii) $\quad t\le\theta\le t^*$

$$\lim_{r\to1} arg\{(1-re^{i(\theta-t)})(1-re^{i(\theta-t^*)})\}=\ \theta-\frac{1}{2}(t+t^*)$$

ve böylece $W(\theta)=V(\theta)-V(t)$. $V(\theta)$ artan olduğundan $W(\theta)\ge0$ dır. $\theta\le t^*\le k(t)$ olduğundan $V(\theta)\le V(t)+\pi$ dir. Böylece (2.3.21) elde edilir.

iii) $\quad \theta=t^*$ olsun. Eğer $t^*=t$ veya $t^*=t+2\pi$ ise (2.3.21) durum (i) den sağlanır. Böylece $t\le t^*\le t+2\pi$ olduğu kabul edilebilir. Sonra

$$\lim_{r\to1} arg\{(1-re^{i(\theta-t)})(1-re^{i(\theta-t^*)})\}=\ \frac{1}{2}(t^*-t)-\frac{\pi}{2}$$

dir ve bu da $W(t^*)=-V(t)+V(t^*)-\frac{\pi}{2}$ denklemini verir. Şimdi eğer $h(t)\le t^*\le k(t)$ ise $V(t^*)=V(t)+\pi$ ve böylece $W(t^*)=\frac{\pi}{2}$ olur. Eğer $h(t)=t^*\le k(t)$ ise $V(t^*)\le V(t)+\pi$ ve böylece $W(t^*)\le\frac{\pi}{2}$ olur. Ayrıca $V(t^*+0)\ge V(t)+\pi$ ve $V(t^*-0)\ge V(t)$ ve bu nedenle (2.3.15) uygulanarak, $V(t^*)\ge V(t)+\frac{\pi}{2}$,buradan $W(t^*)\ge0$ elde edilir. Eğer $h(t)\le t^*=k(t)$ ise benzer yolla $\frac{\pi}{2}\le W(t^*)\le\pi$ elde edilir. Son olarak $h(t)=t^*=k(t)$ ise

$V(t)+\pi\le V(t^*+0)\le V(t)+2\pi$

$V(t)\le V(t^*-0)\le V(t)+\pi$

dir ve (2.3.15) uygulanarak $0\le W(t^*)\le\pi$ elde edilir.

iv) $\quad t^*\le\theta\le t+2\pi$

$$\lim_{r\to1} arg\{(1-re^{i(\theta-t)})(1-re^{i(\theta-t^*)})\}=\theta-\frac{1}{2}(t^*+t)-\pi$$

dir ve böylece $W(\theta) = V(\theta) - V(t) - \pi$. $\theta > h(t)$ olduğundan $V(\theta) \geq V(t) + \pi$ ve böylece $W(\theta) \geq 0$ dır. Ayrıca $V(\theta) \leq V(t + 2\pi) = V(t) + 2\pi$ böylece $W(\theta) \leq \pi$ dir.

(2.3.21) tüm durumlarda elde edildi.

$$v(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} Re\left(\frac{1 + ze^{-i\theta}}{1 - ze^{-i\theta}}\right)W(\theta)d\theta$$

olsun. Poisson'un formulü ile $|z| < R < 1$ için $R \to 1$ iken

$$arg\left\{e^{-iV(t)}e^{\frac{1}{2}i(t+t^*)}\left(1 - ze^{-it}\right)\left(1 - ze^{-it^*}\right)\frac{f(z)}{z}\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Re\left(\frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}\right) arg\left\{e^{-iV(t)}e^{\frac{1}{2}i(t+t^*)}\left(1 - Re^{i(\theta-t)}\right)\left(1 - Re^{i(\theta-t^*)}\right)\frac{f(Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}}\right\}d\theta \to v(z)$$

bu Lebesque Sınırlı Yakınsaklık Teoremi ile elde edilir. (2.3.21)'den $0 < v(z) < \pi$ elde edilir ve teorem ispatlanır. Bu teorem P$\acute{o}$lya-Schoenberg konjektürünün ispatında kullanılacaktır.

2.3.2 P$\acute{o}$lya-Schoenberg Konjektürü

Teorem 2.3.4: $\varphi(z)$ ve $\psi(z)$ birim diskte konveks ünivalent fonksiyon olsunlar. Bu durumda $(\varphi * \psi)(z)$ fonksiyonu birim diskte konveks ünivalenttir.

Teorem 2.3.5: Birim diskte $\varphi(z)$ konveks, $f(z)$ hemen hemen konveks fonksiyonlar olsunlar. O halde $(\varphi * f)(z)$ fonksiyonu birim diskte hemen hemen konveks fonksiyondur.

Teorem 2.3.4 'ün formülasyonuna denk bir formülasyon aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.3.6: Birim diskte $\varphi(z)$ konveks ve $\psi(z)$ yıldızıl fonksiyonlar olsunlar. Sonra $(\varphi * \psi)(z)$ fonksiyonu birim diskte yıldızıldır.

Hemen hemen konveks fonksiyonların ünivalent olduğu bilinmektedir. Aşağıdaki yardımcı önerme oldukça önemlidir.

Yardımcı Önerme 2.3.1: $\varphi(z)$ ve $g(z)$ $|z|<1$ de analitik ve $\varphi(0)=g(0)=0, \varphi'(0)\neq 0, g'(0)\neq 0$ şartlarını sağlasınlar. Varsayılsın ki her σ ($|\sigma|=1$) ve α ($|\alpha|=1$) için

$$\varphi(z) * \frac{1+\alpha\sigma z}{1-\sigma z} g(z) \neq 0 \qquad (0<|z|<1) \tag{2.3.22}$$

olsun. Sonra $|z|<1$ de analitik ve

$$Re\big(F(z)\big) > 0 \qquad (|z|<1) \tag{2.3.23}$$

koşulunu sağlayan her $F(z)$ fonksiyonu için

$$Re\left(\frac{(\varphi * Fg)(z)}{(\varphi * g)(z)}\right) > 0 \qquad (|z|<1) \tag{2.3.24}$$

dir.

İspat: İlk olarak

$$Re\left(\frac{\varphi(z) * \frac{1+\sigma z}{1-\sigma z} g(z)}{\varphi(z) * g(z)}\right) > 0 \qquad (|z|<1) \tag{2.3.25}$$

eşitsizliğinin gösterilmesi gerekir. (2.3.22) hipotezi $\alpha=-1$ olduğunda $\varphi * g \neq 0$ eşitsizliğini gerektirir. Kabul edilsin ki $|\alpha|=1$ ve $\alpha \neq -1$ olsun. Buradan

$$\varphi(z) * \frac{1+\alpha\sigma z}{1-\sigma z} g(z) = \frac{1}{2}(1+\alpha)\varphi(z) * \frac{1+\sigma z}{1-\sigma z} g(z) + \frac{1}{2}(1-\alpha)\varphi(z) * g(z)$$

elde edilir ve (2.3.22)'den

$$\frac{\varphi(z) * \frac{1+\sigma z}{1-\sigma z} g(z)}{\varphi(z) * g(z)} \neq -\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \qquad (|z|<1)$$

elde edilir. Bağıntının sol tarafı bu nedenle sanal eksende hiçbir değer almaz fakat $z=0$ da 1 değerini alır. Dolayısıyla (2.3.25) sağlanır.

(2.3.23) ü sağlayan $F(z)$ dikkate alınırsa, $|F(0)|=1$ olduğu varsayılabilir ve Herglotz Formülü'nden

$$e^{-i\gamma}F(z) = \int_T \frac{1+\beta\sigma z}{1-\sigma z} d\mu(\sigma) \qquad (2.3.26)$$

dır. Burada μ, T birim çemberinde olasılık büyüklüğü ve $|\beta| = 1$, $\beta \neq -1$ olacak şekilde β ve $e^{-i\gamma}$ tek türlü belirlenen sabitlerdir ve $cos\gamma > 0$ ($w = \frac{e^{i\gamma}(1+\beta z)}{1-z}$ fonksiyonu $|z| < 1$ birim diskini $Rew > 0$ a resmeder). Sonra

$$e^{-i\gamma}(\varphi * Fg)(z) = \int_T \varphi(z) * g(z) \frac{1+\beta\sigma z}{1-\sigma z} d\mu(\sigma)$$

$$= \frac{1}{2}(1+\beta) \int_T \varphi(z) * g(z) \frac{1+\sigma z}{1-\sigma z} d\mu(\sigma) + \frac{1}{2}(1-\beta)(\varphi * g)(z)$$

$$= \big(\varphi(z) * g(z)\big)\{\frac{1}{2}(1+\beta) \int_T H_\sigma(z) d\mu(\sigma) + \frac{1}{2}(1-\beta)\}$$

burada $H_\sigma(0) = 1$ ve (2.3.25) ten $Re(H_\sigma(z)) > 0$ dır. Böylece

$$e^{-i\gamma} \frac{(\varphi * Fg)(z)}{(\varphi * g)(z)} = \frac{1}{2}(1+\beta)K(z) + \frac{1}{2}(1-\beta)$$

elde edilir ve denklemde $K(0) = 1, Re\big(K(z)\big) > 0$ dır, buradan (2.3.24) koşulu sağlanır.

Not 2.3.1: Yardımcı Önerme 2.3.1' deki (2.3.22) koşulu: Her analitik F fonksiyonu için $\frac{(\varphi * Fg)}{(\varphi * g)}$ fonksiyonunun sadece F in görüntüsünün konveks zarfındaki değerleri almasını gerektirir.

Yardımcı Önerme 2.3.2: $|z| < 1$ birim diskinde $h(z)$ analitik, $h(0) = 0$ olsun. Kabul edilsin ki $|\alpha| = |\beta| = 1$ ile

$$Re\left\{(1-\alpha z)(1-\beta z)\frac{h(z)}{z}\right\} \qquad (|z| < 1) \qquad (2.3.27)$$

olacak şekilde α ve β sabitleri var olsun. Sonra her $\varphi(z)$ konveks fonksiyonu için

$$\varphi(z) * h(z) \neq 0 \qquad (0 < |z| < 1) \qquad (2.3.28)$$

dir.

İspat: Herglotz Formülü ile $|z| < 1$ için

$$h(z) = h'(0) \int_T \frac{z(1+\gamma\sigma z)}{(1-\alpha z)(1-\beta z)(1-\sigma z)} d\mu(\sigma)$$

μ , T birim çemberinde olasılık büyüklüğü olacak şekilde γ $(|\gamma| = 1)$ vardır. Böylece

$$\frac{1}{h'(0)}\big(\varphi(z) * h(z)\big) = \int_T \varphi(z) * \frac{z(1+\gamma\sigma z)}{(1-\alpha z)(1-\beta z)(1-\sigma z)} d\mu(\sigma)$$

$$= \int_T \varphi(z) * [\,(1+\gamma)z(1-\sigma z)^{-1}(1-\alpha z)^{-1}(1-\beta z)^{-1}$$

$$-\gamma z\,(1-\alpha z)^{-1}(1-\beta z)^{-1}] d\mu(\sigma)$$

$$= \{\varphi(z) * (1-\alpha z)^{-1}(1-\beta z)^{-1}\}$$

$$.\left\{(1+\gamma)\int_T \frac{\varphi(z) * [z(1-\sigma z)^{-1}(1-\alpha z)^{-1}(1-\beta z)^{-1}]}{\varphi(z) * [z(1-\alpha z)^{-1}(1-\beta z)^{-1}]} d\mu - \gamma\right\}$$

(2.3.11)'den $0 < |z| < 1$ için ilk parentezdeki ifade sıfırlanmaz ve ikinci parantezdeki ifade (2.3.10)' dan dolayı sıfırlanmaz buradan yardımcı önerme ispatlanmış olur.

Yardımcı Önerme 2.3.3: $|z| < 1$ birim diskinde $\varphi(z)$ konveks $g(z)$ yıldızıl olsun. Sonra $|z| < 1$ de analitik

$$Re\big(F(z)\big) > 0 \qquad (|z| < 1)$$

koşulunu sağlayan her $F(z)$ fonksiyonu için

$$Re\left(\frac{(\varphi * Fg)(z)}{(\varphi * g)(z)}\right) > 0 \quad (|z| < 1) \tag{2.3.29}$$

dir.

İspat: Yardımcı Önerme 2.3.1 ile $|\alpha| = |\sigma| = 1$ koşulunu sağlayan her α, σ için

$$\varphi(z) * \frac{1+\alpha\sigma z}{1-\sigma z} g(z) \neq 0 \qquad (0 < |z| < 1) \tag{3.2.30}$$

koşulunu göstermek yeterli olacaktır. Yardımcı Önerme 2.3.3 'ye göre bunun için yeterli koşul her α ve σ için $|z| < 1$ de

$$Re\left\{a(1-bz)(1-cz)\frac{1+\alpha\sigma z}{1-\sigma z}\frac{g(z)}{z}\right\}>0$$

olacak şekilde $|a|=|b|=|c|=1$ koşulunu sağlayan a,b,c sabitlerini bulmaktır. Teorem 2.3.3'den $b=\sigma$ seçildiğinde, $c=e^{-it^*}$seçilebilir, ve burada $-\alpha\sigma=e^{-it}$ yazılmasıyla böyle bir bağıntının sağlanacağı açıktır. Teoremde ortaya çıkan eşitlik olasılığı uygun a seçilerek Maksimum İlkesi ile göz ardı edilebilir.

Şimdi Teorem 2.3.4 ve 2.3.5' in ispatına geçilebilir. Eğer f hemen hemen konveks ise uygun yıldızıl g fonksiyonu için

$$zf'(z)=g(z)F(z)$$

yazılır ve burada $Re\big(F(z)\big)>0$ dır. (2.3.29)'dan

$$Re\left(\frac{z(\varphi*f)'}{\varphi*g}\right)=Re\left(\frac{\varphi*Fg}{\varphi*g}\right)>0 \qquad (2.3.31)$$

elde edilir ve böylece eğer $\varphi*g$ nin yıldızıl olduğu gösterilebilirse, ki bu Teorem 2.3.4 e denktir (Teorem 2.3.6) Teorem 2.3.5 ispatlanır. Bunun yapılabilmesi için

$$Re\left(\frac{z(\varphi*f)'}{\varphi*g}\right)>0 \qquad (|z|<1) \qquad (2.3.32)$$

eşitsizliğinin gösterilmesi gerekir. g yıldızıl olduğundan $Re\left(\frac{zg'(z)}{g(z)}\right)>0$ dır ve böylece (2.3.29) da $F(z)=\frac{zg'(z)}{g(z)}$ yazılarak (2.3.32) elde edilir. Böylece iki teoremde ispatlanır.

Not 2.3.2: Eğer

$$Re\left(\frac{f'(z)}{\psi(z)}\right)>0 \qquad (|z|<1)$$

olduğunda "f ψ ye yakındır'' deniliyorsayorsa, f ψ ye yakındır koşulu ile her f ve φ konveks fonksiyonları için $\varphi*f$ in $\varphi*\psi$ ye yakın olduğu gösterilir.

Ek olarak aşağıdaki yardımcı önerme şöyledir:

$|z|<1$ birim diskinde $\varphi(z)$ konveks $g(z)$ yıldızıl olsun. Sonra $|z|<1$ de analitik ve $F(0)=1$ olan herhangi $F(z)$ fonksiyonu için

$$\frac{\varphi(z) * g(z)F(z)}{\varphi(z) * g(z)} \in \overline{co}\big(F(U)\big), z \in U.$$

2.3.3 $\frac{1}{2}$. Mertebeden Yıldızıl Fonksiyonların Konvolusyonu

$\frac{1}{2}$. mertebeden yıldızıl fonksiyonların yapısı konvolusyon altında korunur.

Teorem 2.3.7: Eğer φ ve ψ $\frac{1}{2}$. mertebeden yıldızıl fonksiyonlar ise $\varphi * \psi$ konvolusyonu da $\frac{1}{2}$. mertebeden yıldızıldır.

Sonuç 2.3.1: İki tek yıldızıl fonksiyonun Hadamard çarpımı yıldızıl fonksiyondur.

Teorem 2.3.8: φ ve ψ $\frac{1}{2}$. mertebeden yıldızıl fonksiyonlar olsunlar ve varsayalım ki f aşağıdaki koşulu sağlasın

$$Re\left(\frac{zf'(z)}{\psi(z)}\right) > 0 \qquad (|z| < 1) \tag{2.3.33}$$

Sonra

$$Re\left(\frac{z(\varphi * zf)'}{\varphi * \psi}\right) > 0 \qquad (|z| < 1) \tag{2.3.34}$$

dır ve özellikle $\varphi * f$ hemen hemen konveks fonksiyondur.

Yardımcı Önerme 2.3.4: $|z| < 1$ birim diskinde $h(z)$ analitik, $h(0) = 0$ olsun ve varsayalım ki

$$Re\left\{(1 - \beta z)\frac{h(z)}{z}\right\} > 0 \qquad (|z| < 1) \tag{2.3.35}$$

olacak şekilde $|\beta| = 1$ koşulunu sağlayan β vardır. Eğer φ $\frac{1}{2}$. mertebeden yıldızıl fonksiyon ise

$$\varphi(z) * h(z) \neq 0 \qquad (0 < |z| < 1) \tag{2.3.36}$$

dir.

İspat: Herglotz Formülü ile

$$\frac{h(z)}{h'(0)} = \int_T \frac{z(1+\gamma\sigma z)}{(1-\beta z)(1-\sigma z)} d\mu(\sigma)$$

burada $|\gamma| = 1, \gamma \neq -1$. Böylece

$$\frac{1}{h'(0)} \varphi(z) * h(z) = \frac{\varphi(\beta z)}{\beta} \int_T \{(1+\gamma) \frac{\varphi(z) * [z(1-\sigma z)^{-1}(1-\beta z)^{-1}]}{\varphi(z) * [z(1-\beta z)^{-1}]} - \gamma\} d\mu$$

elde edilir. (2.3.11)'de integrali alınan ifade sıfırı içermeyen bir yarı-düzlemdedir ve $\varphi(\beta z) \neq 0 \quad (0 < |z| < 1)$ böylece ispat tamamlanır.

Yardımcı Önerme 2.3.5: φ ve ψ $\frac{1}{2}$. mertebeden yıldızıl fonksiyonlar olsunlar ve

$$Re\big(F(z)\big) > 0 \qquad (|z| < 1)$$

koşulunu sağlayan her $F(z)$ fonksiyonu için

$$Re\left(\frac{\varphi(z) * F(z)\psi(z)}{\varphi(z) * \psi(z)}\right) > 0 \qquad (|z| < 1)$$

olur.

İspat: Yardımcı Önerme 2.3.1'den $|\alpha| = |\sigma| = 1$ koşulunu sağlayan her α, σ için

$$\varphi(z) * \frac{1+\alpha\sigma z}{1-\sigma z} \psi(z) \neq 0 \qquad (0 < |z| < 1)$$

koşulunu göstermek yeterli olacaktır. Eğer her α, σ için

$$Re\left\{a(1-\beta z) \frac{1+\alpha\sigma z}{1-\sigma z} \frac{\psi(z)}{z}\right\} > 0 \qquad (|z| < 1) \qquad (2.3.37)$$

olacak şekilde β ve a bulunabilirse Yardımcı Önerme 2.3.4 ile bu bağıntı ispatlanabilir. $\psi(z)$ $\frac{1}{2}$. mertebeden yıldızıl olduğundan her $\sigma(|\sigma| = 1)$ için

$$\frac{\psi(z)}{1-\sigma z}$$

fonksiyonu yıldızıldır, ve böylece Teorem 2.3.3 bu fonksiyona uygulanırsa gerekli (2.3.37) bağıntısı elde edilir.

Şimdi Teorem 2.3.7 gerçeklendiğinde Teorem 2.3.8 bir önceki yardımcı önermeden ispatlanır. Eğer φ ve ψ $\frac{1}{2}$. mertebeden yıldızıl fonksiyonlar ise

$$Re\left(\frac{\varphi * z\psi'}{\varphi * \psi}\right) > \frac{1}{2}$$

koşulu gösterilmelidir. Yardımcı Önerme 2.3.5' te $F(z) = \frac{z\psi'(z)}{\psi(z)}$ yazılarak ve Not 2.3.2 uygulanarak yukarıdaki koşul elde edilir.

Yardımcı Önerme 2.3.6: φ ve g $\frac{1}{2}$. mertebeden yıldızıl fonksiyonlar olsun. Sonra $|z| < 1$ de analitik ve $F(0) = 1$ olan herhangi $F(z)$ fonksiyonu için

$$\frac{\varphi(z) * g(z)F(z)}{\varphi(z) * g(z)} \in \overline{co}\big(F(U)\big), z \in U$$

dir.

2.4 KONVEKS FONKSİYONLARIN HADAMARD ÇARPIMI

Bu bölümde konveks fonksiyonların Hadamard çarpımı altında $|z| < 1$ birim diskin görüntüsünün geometrik özellikleri incelenecektir.[11]

2.4.1 Konvolusyonun Bazı Geometrik Özellikleri

$|z| < 1$ birim diskinde yakınsak $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ ve $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k$ kuvvet seri açılımlarının Hadamard Çarpımı veya konvolusyonu $(f * g)(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k z^k$ idi. İki fonksiyonunun Hadamard Çarpımının birçok geometrik özelliği çarpımın integral olarak ifade edilmesi ile elde edilebilir. Buradaki problem: Eğer f ve g fonksiyonları birim diski sınırları doğru parçaları olan konveks bölgeye resmediyorsa, birim diskin $f * g$ altındaki görüntüsünün sınırında ne zaman benzer bir parça içerdiğinin bulunmasıdır.

Bir konveks fonksiyonun kuvvet seri açılımı $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$ şeklindedir.

Teorem 2.4.1: $f \in K$ olsun. Aşağıdakilerden biri sağlanmak zorundadır.

1) f , $|z| \leq 1$ kapalı diskinde süreklidir.

2) f fonksiyonu $|z| \leq 1$ de z_0 noktasının haricinde süreklidir. $|z| \leq 1, |z_0| = 1$ ile $z \to z_0$ iken $f(z) \to \infty$ dur.

veya

3) $f(U)$ sınırı paralel iki doğru olan bir bölgedir.(bu durumda dönüşüm birim diskin sınırında iki tane sonsuz süreksizliğe sahiptir.)

Teorem 2.4.2: Bir $f(z)$ fonksiyonu analitiktir ve $|z| < 1$ için $Re\big(f(z)\big) > 0$ dır $\Leftrightarrow$

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1 + ze^{-it}}{1 - ze^{-it}} d\mu(t) + qi$$

dir. Burada $\mu(t)$, $\mu(0) = 0$ ve $\mu(2\pi) > 0$ olacak şekilde sınırlı azalmayan bir fonksiyon, q reel bir sabittir. $\mu(t)$ süreklilik gösteren tüm noktalarında bir toplamsal sabite bağlı olarak f fonksiyonu tarafından tek şekilde belirlenir.

$\mu(t)$ fonksiyonunun süreksizlik noktalarında $\mu(t) = \frac{1}{2}[\mu(t+) + \mu(t-)]$ oluşturulmalıdır.

Aşağıdaki sonuçlar fonksiyonlar ve konvolusyonlarının görüntülerinin sadece sol tarafı için uygulanacaktır. f ve g fonksiyonlarının uygun şekilde döndürülmesiyle konvolusyonunun görüntüsünde ortaya çıkan diğer parçalar hakkında bilgi edinilebileceğinden görüntünün sadece sol tarafını dikkate almak genelliğin kaybedilmesine yol açmaz. Daha doğrusu, eğer $f, g \in K$ ise $f_\alpha(z) = e^{i\alpha} f(ze^{-i\alpha})$ ve $g_\beta(z) = e^{i\beta} g(ze^{-i\beta})$ fonksiyonları da K dadır ve $f_\alpha * g_\beta = e^{i(\alpha+\beta)}(f * g)(ze^{-i(\alpha+\beta)})$ dir. Özellikle $f_\theta * g_{-\theta} = f * g$ dir.

Aşağıdaki yardımcı önerme de konvolusyon için bir integral ifadesi türetmek amacıyla Herglotz Formülü kullanılmıştır.

Yardımcı Önerme 2.4.1: $Re\big(f(z)\big) \geq -a$ ve $min_{|z|=1} Re\big(f(z)\big) = -a$ olacak şekilde f bir konveks fonksiyon olsun. Sonra $[0,2\pi]$ de azalmayan ve $\int_0^{2\pi} dF(t) = 1$ olan bazı F fonksiyonları için

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{2aze^{-it}}{1 - ze^{-it}} dF(t)$$

dir.

İspat: Herglotz Formülü ile

$$\frac{f(z)+a}{a}=\int_{0}^{2\pi}\frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}dF(t)$$

olacak şekilde $\frac{f(z)+a}{a}$ fonksiyonu için yukarıdaki özellikleri sağlayan F fonksiyonu bulunabilir.

İstenen sonucu elde etmek için, $z=0$ ve $1=\int_0^{2\pi}dF(t)=F(2\pi)-F(0)$ ı dikkate alarak $f(z)$ için bu denklem çözülmelidir.

Bu sonuç sırasıyla g ve $h=f*g$ fonksiyonlarına karşılık gelen artmayan G ve H fonksiyonlarını bulmak için uygulanabilir. Eğer gerekli olursa artmayan bu fonksiyonları periyodikliği kullanılarak genişletilebilir. Örneğin, $F(t)$ yukarıdaki gibi $[0,2\pi]$ aralığında tanımlanmışsa, $F(t+2\pi k)=F(t)+k$ denklemi integralde herhangi bir 2π uzunluklu integrali kullanılabilmesini sağlar. Aşağıdaki yardımcı önerme bir pozitif c sayısı için $Re\big(h(z)\big)\geq -c$ ve $\theta\in[\alpha,\beta]$ için birim çemberin üzerinde $h\big(e^{i\theta}\big)=-c$ olan bir yayı olduğu özelliklerine sahip bir h fonksiyonunun, yardımcı önerme 2.4.1 ile bağlantılı olarak $[\alpha,\beta]$ aralığında sabit olan artmayan bir H fonksiyonuna sahip olduğunu göstermektedir.

Yardımcı Önerme 2.4.2: $h(z)=\int_0^{2\pi}\frac{ze^{-i\sigma}}{1-ze^{-i\sigma}}dH(\sigma)$

olsun. Burada $H(\sigma)$ Yardımcı Önerme 2.4.1'deki gibi tanımlanmıştır. Ayrıca varsayalım ki eğer $z=re^{i\theta}$, $\lim_{r\to1^-}Re\left(f\left(e^{i\sigma_0}\right)\right)\geq -c$ olacak şekilde bir σ_0 varsa $\frac{dH}{d\sigma}(\sigma_0)=0$ dır. Böylece, eğer $\theta\in[\gamma_1,\gamma_2]$ için $\lim_{r\to1^-}Re\left(f\left(e^{i\sigma_0}\right)\right)=-c$ olacak şekilde bir $[\gamma_1,\gamma_2]$ aralığı varsa $H(\sigma)$ bu aralıkta sabittir.

İspat: Yardımcı Önerme 2.4.1' i kullanılarak

$$Re\left(h\left(re^{i\sigma_0}\right)\right) = 2c \int\limits_{\sigma_0+\varepsilon}^{2\pi+\sigma_0-\varepsilon} Re(\frac{re^{i(\sigma_0-\sigma)}}{1-re^{i(\sigma_0-\sigma)}})dH(\sigma)$$

$$+ \int\limits_{\sigma_0-\varepsilon}^{\sigma_0+\varepsilon} Re(\frac{re^{i(\sigma_0-\sigma)}}{1-re^{i(\sigma_0-\sigma)}})dH(\sigma) = I_1 + I_2$$

yazılabilir, $\varepsilon > 0,\ r < 1$.

I_1 i göz önüne alınsın. Eğer $\sigma_0 + \varepsilon < \sigma < 2\pi + \sigma_0 - \varepsilon$ ise $\varepsilon < \sigma - \sigma_0 < 2\pi - \varepsilon$ olur ve bu aralıkta

$$\lim_{r\to 1}(\frac{re^{i(\sigma_0-\sigma)}}{1-re^{i(\sigma_0-\sigma)}}) = -\frac{1}{2}$$

olduğundan $r \to 1$ iken $I_1 \to -c[H(2\pi + \sigma_0 - \varepsilon) - H(\sigma_0 + \varepsilon)]$ dir ve $\varepsilon \to 0$ iken

$$I_1 \to -c[H((2\pi + \sigma_0) -) - H(\sigma_0 +)]$$

olur.

Şimdi I_2 yi göz önüne alalım. Bu integral üzerinde $-\varepsilon < \sigma - \sigma_0 < \varepsilon$ dir. İntegrali alınan fonksiyon

$$K(\sigma - \sigma_0) = Re\left(\frac{re^{i(\sigma_0-\sigma)}}{1-re^{i(\sigma_0-\sigma)}}\right)$$

$$= Re\left(\frac{re^{i(\sigma_0-\sigma)}\left(1-re^{i(\sigma_0-\sigma)}\right)}{1-2rcos(\sigma-\sigma_0)+r^2}\right)$$

$$= \frac{rcos(\sigma-\sigma_0)-r^2}{1-2rcos(\sigma-\sigma_0)+r^2}$$

yazılır. Şimdi $K(\sigma - \sigma_0)$ fonksiyonu $s = \sigma - \sigma_0$ ye göre minimize edilebilir.

$$K'(s) = \frac{rsins(-1+r^2)}{(1-2rcoss+r^2)^2}$$

dir. Böylece $K'(s) = 0 \iff s = 0$ elde edilir. Birinci türev testine göre $K(s)$, $s = 0$ da maksimuma ulaşır. Buradan $[\sigma_0 - \varepsilon, \sigma_0 + \varepsilon]$ aralığında $cos(\sigma - \sigma_0) = cos\varepsilon$ olduğunda $K(\sigma - \sigma_0)$ fonksiyonu minimize edilmiş olur. Sonra

$$Re(K(\sigma - \sigma_0)) \geq \frac{rcos(\varepsilon)-r^2}{1-2rcos(\varepsilon)+r^2}$$

elde edilir ve bu da

$$I_2 \geq \frac{rcos(\varepsilon) - r^2}{1 - 2rcos(\varepsilon) + r^2}[H(\sigma_0 + \varepsilon) - H(\sigma_0 - \varepsilon)]$$

eşitsizliğini gerektirir.

Eğer $r = 1 - \varepsilon$ ise

$$K(s) \geq \frac{(1-\varepsilon)cos(\varepsilon) - (1-\varepsilon)^2}{1 - 2(1-\varepsilon)cos(\varepsilon) + (1-\varepsilon)^2}$$

dir. Ayrıca $\cos(\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} + O(\varepsilon^2)$

$$K(s) \geq \frac{(1-\varepsilon)\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right) - (1-\varepsilon)^2 + O(\varepsilon^2)}{2 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 - 2(1-\varepsilon)\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right) + O(\varepsilon^2)}$$

$$= \frac{\varepsilon - \frac{3}{2}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^2)}{2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^2)}$$

eşitsizliğini verir. Böylece

$$I_2 \geq \frac{H(\sigma_0 + \varepsilon) - H(\sigma_0 - \varepsilon)}{2\varepsilon}\left(\frac{1 - \frac{3}{2}\varepsilon + O(\varepsilon)}{1 + \frac{O(\varepsilon)}{2\varepsilon}}\right)$$

elde edilir.

$\lim_{\varepsilon\to 0} I_2 = 0$ olacağı gösterilecektir. İlk olarak, bu limitin var olduğu $\lim_{\varepsilon\to 0} I_1$ ve $\lim_{\varepsilon\to 0}(I_1 + I_2) = -c$ limitlerinin varlığı bilindiğinden söylenebilir. Ayrıca $\lim_{\varepsilon\to 0} I_2 = -c - \lim_{\varepsilon\to 0} I_1 \leq 0$ dır. Fakat yukarıdaki eşitsizlikten $\liminf_{\varepsilon\to 0} I_2 \geq 0$ olur. Böylece $\lim_{\varepsilon\to 0} I_2 = 0$ elde edilir ve özel olarak

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{H(\sigma_0 + \varepsilon) - H(\sigma_0 - \varepsilon)}{2\varepsilon} = 0$$

dır. Buradan

$$0 \leq \frac{H(\sigma_0+\varepsilon)-H(\sigma_0)}{2\varepsilon} \leq \frac{H(\sigma_0+\varepsilon)-H(\sigma_0-\varepsilon)}{2\varepsilon}$$

ve

$$0 \leq \frac{H(\sigma_0)-H(\sigma_0-\varepsilon)}{2\varepsilon} \leq \frac{H(\sigma_0+\varepsilon)-H(\sigma_0-\varepsilon)}{2\varepsilon}$$

olduğundan $\frac{dH}{d\sigma}(\sigma_0) = 0$ olur ve ispat tamamlanır.

Yardımcı Önerme 2.4.3: $h(z) = 2c\int_0^{2\pi} \frac{ze^{-i\sigma}}{1-ze^{-i\sigma}} dH(\sigma)$

olsun. Burada $H(\sigma)$ Yardımcı Önerme 2.4.1'deki gibi tanımlanmıştır. Ayrıca varsayılsın ki $\sigma \in [\alpha,\beta]$ ise bazı k sabitleri için $H(\sigma) = k$ dır. Sonra $\theta \in (\alpha,\beta)$ için $Re(h(e^{i\theta}))$ sabittir.

İspat: Eğer $[\alpha,\beta]$ üzerinde $H(\sigma)$ sabitse

$$h(z) = 2c\int_{\beta}^{2\pi+\alpha} \frac{ze^{-i\sigma}}{1-ze^{-i\sigma}} dH(\sigma)$$

dır. Şimdi $\theta \in (\alpha,\beta)$ için eğer $\beta < \sigma < 2\pi+\alpha$ ise tüm m tam sayıları için $\theta - \sigma \neq 2\pi m$ dir. Bu θ için $\int_{\beta}^{2\pi+\alpha} dH(\sigma) = 1$ olduğundan

$$\lim_{r\to 1} Re\left(h\left(re^{i\theta}\right)\right) = \lim_{r\to 1} 2c\int_{\beta}^{2\pi+\alpha} Re\left(\frac{ze^{-i\sigma}}{1-ze^{-i\sigma}}\right) dH(\sigma)$$

$$= 2c\int_{\beta}^{2\pi+\alpha} \lim_{r\to 1} Re\left(\frac{ze^{-i\sigma}}{1-ze^{-i\sigma}}\right) dH(\sigma)$$

$$= 2c\int_{\beta}^{2\pi+\alpha} -\frac{1}{2} dH(\sigma)$$

$$= -c$$

dir. Böylece tüm $\theta \in (\alpha,\beta)$ için $Re\left(h\left(re^{i\theta}\right)\right)$ nın sabit olduğu gösterilmiş olur.

Şimdi f ve g fonksiyonlarının konvolusyonları için bir integral ifadesi verilebilir.

Yardımcı Önerme 2.4.4: $f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ ve $g(z)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k$ olsun. Burada $f(z)$ Yardımcı Önerme 2.4.1 ‘de verilen integral gösterimine sahiptir. Buradan

$$(f*g)(z)=2a\int_0^{2\pi} g\left(ze^{-it}\right)dF(t)$$

dir.

İspat: Yardımcı Önerme 2.4.1’ den $f(z)$

$$f(z)=\int_0^{2\pi}\frac{2aze^{-it}}{1-ze^{-it}}dF(t)$$

gösterimine sahiptir. İntegralin içindeki fonksiyonu açarsak

$$f(z)=2a\int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-int}\, z^n dF(t)=2a\sum_{n=1}^{\infty}(\int_0^{2\pi} e^{-int}dF(t))z^n$$

elde edilir. Böylece

$$a_n=\int_0^{2\pi} e^{-int}dF(t)$$

olmak zorundadır. Buradan

$$(f*g)(z)=\sum_{n=1}^{\infty}2a(\int_0^{2\pi} e^{-int}dF(t))b_n z^n$$

$$=2a\int_0^{2\pi}(\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-int}\, z^n)dF(t)$$

$$=2a\int_0^{2\pi} g\left(ze^{-it}\right)dF(t)$$

dir.

Bu sonuç kullanılarak aşağıdaki teoremler ispatlanabilir.

Teorem 2.4.3: $\forall z \in U$ ve bazı pozitif a ve b sayıları için $Re(f(z)) \geq -a$ ve $Re(g(z)) \geq -b$ olacak şekilde f ve g , K da iki fonksiyon olsun. Sonra $\forall z \in U$ için

$$Re\big((f * g)(z)\big) \geq -2ab.$$

İspat: Yardımcı Önerme 2.4.4 ile ve $\int_0^{2\pi} dF(t) = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} Re\big((f * g)(z)\big) &= Re\left(2a \int_0^{2\pi} g\big(ze^{-it}\big)dF(t)\right) \\ &= 2a \int_0^{2\pi} Re\left(g\big(ze^{-it}\big)dF(t)\right) \\ &\geq \int_0^{2\pi} -bdF(t) \\ &= -2ab \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi de iki fonksiyonun konvolusyonunun görüntüsünün sol tarafta bir doğru olması için gerekli bazı şartlar oluşturulacaktır.

Teorem 2.4.4: $Re(f(z)) \geq -a$ ve $z = e^{i\theta}$ için $\theta \in [\alpha_1, \alpha_2]$ olduğunda $Re\big(f(z)\big) = -a$, $Re(g(z)) \geq -b$ ve $z = e^{i\theta}$ için $\theta \in [\beta_1, \beta_2]$ olduğunda $Re\big(g(z)\big) = -b$ olacak şekilde f ve g iki konveks fonksiyon olsun. Eğer $(\alpha_1 + \beta_1) - (\alpha_2 + \beta_2) \geq 2\pi$ ise $z = e^{i\theta}$ için $\theta \in [\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2 - 2\pi\ ]$ olduğunda $Re\big((f * g)(z)\big) = -2ab$ dir.

İspat: Yardımcı Önerme 2.4.4'ten

$$(f * g)(z) = 2a \int_0^{2\pi} g\big(ze^{-it}\big)dF(t)$$

dir. Burada F ,Yardımcı Önerme 2.4.1'de f ile ilişkilendirilen fonksiyondur. f Yardımcı Önerme 2.4.2'nin hipotezini sağladığından $t \in [\alpha_1, \alpha_2]$ için $F(t)$ sabittir. $F(t)$ periyodiklik kullanılarak genişletilirse

$$(f * g)(e^{i\theta}) = 2a \int_{\alpha_2}^{\alpha_1+2\pi} g\left(ze^{-i(\theta-t)}\right)dF(t)$$

elde edilir. Şimdi $z = e^{i\theta}$ için $\theta \in [\beta_1, \beta_2]$ olduğunda $Re\left(g(z)\right) = -b$ dir. Böylece, eğer $\alpha_2 < t < \alpha_1 + 2\pi$ ve $\beta_1 < \theta - t < \beta_2$ koşullarının ikisi birlikte varsa veya buna denk olarak $\alpha_1 + \beta_1 + 2\pi < \theta < \alpha_2 + \beta_2$ koşulu varsa bu θ değeri için

$$Re((f * g)\left(e^{i\theta}\right)) = -2ab \int_{\alpha_2}^{\alpha_1+2\pi} dF(t) = -2ab$$

dir.

Bu sonuç şunu garanti eder: Eğer f ve g fonksiyonlarının görüntülerinde sol taraf doğrusuna karşılık gelen birim çember üzerindeki iki yayın uzunlukları toplamı 2π den daha büyük bir sayı ise, konvolusyon da birim çember üzerindeki bir yayı bir sol taraf doğrusuna resmeder.

Doğal olarak akla gelen bir diğer soru $(\alpha_1 + \beta_1) - (\alpha_2 + \beta_2) < 2\pi$ durumunda ne olacağıdır. Hala $minRe\left((f * g)(z)\right) = -2ab$ özelliği sağlanır mı? Sağlanması gerekmez. $f(z) = g(z) = z + \frac{1}{4}z^2$ örneğine bakılırsa $Re\left(f(z)\right) = -\frac{3}{4}$ tür. $(f * g)(z) = z + \frac{1}{16}z^2$ dir, $minRe\left((f * g)(z)\right) = -\frac{15}{16} > -\frac{9}{8}$ dir.

Son olarak f ve g fonksiyonlarını uygun şekilde döndürerek Teorem 2.4.4 genelleştirilebilir.

Sonuç 2.4.1: f ve g konveks fonksiyonlar olsun. Ayrıca I_1 birim çemberin $e^{i\alpha_1}$ den $e^{i\alpha_2}$ ye kadar olan yayı ve I_2 birim çemberin $e^{i\beta_1}$ den $e^{i\beta_2}$ ye kadar olan yayı olsun. Eğer $f(I_1)$ ve $g(I_2)$ doğru parçaları ise $f * g$ birim çemberin $e^{i(\alpha_1+\beta_1)}$ den $e^{i(\alpha_2+\beta_2)}$ ye kadar olan yayını, eğer bu yay pozitif uzunluğa sahipse, bir doğru parçasına resmeder.

3.BULGULAR VE TARTIŞMA

3.1.KONVOLUSYON ŞARTLARI

Bazı fonksiyon aileleri için konvekslik, yıldızıllık ve spiral-like'lık gibi özellikler için konvolusyon ile koşullar oluşturulabilir. α mertebeden konveks, yıldızıl ve spiral-like fonksiyonlar ;

Eğer $|z| < R \leq 1$ de analitik ve $f(0) = 0, f'(0) = 1$ ile normalize edilmiş $f(z)$ fonksiyonu

$$Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha \qquad (|z| < R\,)$$

şartını sağlıyorsa α $(0 \leq \alpha < 1)$ mertebeden konveks,

$$Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha \qquad (|z| < R\,)$$

şartını sağlıyorsa α mertebeden yıldızıl ve bazı λ, $|\lambda| < \frac{\pi}{2}$, reel sayısı için

$$Re\left(e^{i\lambda}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0 \qquad (|z| < R\,)$$

koşulunu sağlıyorsa spiral-like fonksiyon olarak tanımlanır.

Bu sınıfların her biri için konvolusyon şartı şu şekilde oluşturulacaktır: f in bu sınıfların birinde olması için gerek ve yeter şart $\frac{1}{z}(f * g) \neq 0$ şartını sağlayacak ve bu sınıflarda olan bir g fonksiyonu bulmaktır.[12]

Teorem 3.1.1: $|z| < R \leq 1$ de f fonksiyonu α mertebeden konvekstir $\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{z}\left(f * \frac{z + \frac{x+\alpha}{1-\alpha}z^2}{(1-z)^3}\right) \neq 0 \qquad (|z| < R\,, |x| = 1).$$

İspat: f fonksiyonu $|z| < R$ de α mertebeden konvekstir $\Leftrightarrow$

$$Re\left(\frac{(zf'(z))'}{f'(z)}\right) > \alpha \qquad (|z| < R\,). \tag{3.1.1}$$

$z = 0$ noktasında $\frac{(zf'(z))'}{f'(z)} = 1$ olduğundan (3.1.1)

$$\frac{\frac{(zf')'}{f'} - \alpha}{1-\alpha} \neq \frac{x-1}{x+1} \qquad (|z| < R, |x| = 1, x \neq -1)$$

eşitsizliğine denktir ve buradan

$$(1+x)(zf')' + (1-2\alpha-x)f' \neq 0 \tag{3.1.2}$$

elde edilir. $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ yazılırsa

$$(zf')' = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} k^2 a_k z^{k-1} = f' * (\sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1}) = f' * \frac{1}{(1-z)^2}$$

Böylece (3.1.2)' nin sol tarafı

$$f' * (\sum_{k=1}^{\infty} [1-2\alpha-x+(1+x)k] z^{k-1}) = f' * (\frac{1-2\alpha-x}{1-z} + \frac{1+x}{(1-z)^2})$$

$$= f' * \left(\frac{2-2\alpha+(x+2\alpha-1)z}{(1-z)^2} \right)$$

olur. Böylece (3.1.2)

$$\frac{1}{z}\left[zf' * \frac{z + \frac{x+2\alpha-1}{2-2\alpha} z^2}{(1-z)^2} \right] \neq 0 \tag{3.1.3}$$

eşitsizliğine denktir. $zf' * g = f * zg'$ olduğundan (3.1.3) ü

$$\frac{1}{z}\left(f * \frac{z + \frac{x+\alpha}{1-\alpha} z^2}{(1-z)^3} \right) \neq 0 \qquad (|z| < R\,, |x| = 1)$$

formunda yazılabilir.

Not 3.1.1: Teorem3.1.1 için konvolusyon şartındaki $x = -1$ durumunun yanı sıra benzer sonuçlar

Teorem 3.1.2, 3.1.3 ve 3.1.4'te de vardır ve bu ünivalentlik için gerekli olan $|z| < 1$ için $f' \neq 0$ koşuluna denktir.

Teorem 3.1.2: $|z| < R \leq 1$ de f fonksiyonu α mertebeden yıldızıldır $\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{z}\left[f * \frac{z + \frac{x+2\alpha-1}{2-2\alpha}z^2}{(1-z)^2}\right] \neq 0 \qquad (|z| < R\,, |x| = 1)$$

dır.

İspat: f fonksiyonu α mertebeden yıldızıldır $\Leftrightarrow$ $g(z) = \int_0^z \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta$ fonksiyonu α mertebeden konveks olduğundan

$$\frac{1}{z}\left(g * \frac{z + \frac{x+\alpha}{1-\alpha}z^2}{(1-z)^3}\right) = \frac{1}{z}\left[f * \frac{z + \frac{x+2\alpha-1}{2-2\alpha}z^2}{(1-z)^2}\right]$$

elde edilir ve böylece Teorem 3.1.1' den ispat tamamlanmış olur.

Not 3.1.2: Teorem 3.1.1'deki $\alpha = 0$ ve Teorem 3.1.2'deki $\alpha = \frac{1}{2}$ durumları [13] de verilmiştir.

Teorem 3.1.3: $|z| < R \leq 1$, $|\lambda| < \frac{\pi}{2}$ ile $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $|x| = 1$ için

$$Re\left(e^{i\lambda}(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)})\right) > 0$$

elde edilir $\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{z}\left[f * \frac{z + \frac{2x+1-e^{-2i\lambda}}{1+e^{-2i\lambda}}z^2}{(1-z)^2}\right] \neq 0\,.$$

İspat: $|z| < R$ de $Re\left(e^{i\lambda}(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)})\right) > 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{e^{i\lambda}\frac{(zf')'}{f'} - isin\lambda}{cos\lambda} \neq \frac{x-1}{x+1} \qquad (|z| < R, |x| = 1, x \neq -1)$$

buradan

$$(1+x)(zf')' + \left(e^{-2i\lambda} - x\right)f' \neq 0 \ . \tag{3.1.4}$$

(3.1.4) denklemi (3.1.2)'de $1-2\alpha$ yerine $e^{-2i\lambda}$ yazılarak elde edilebilir. (3.1.4)'ten sonraki kısım Teorem 3.1.1'deki ile aynıdır sadece $1-2\alpha$ yerine $e^{-2i\lambda}$ yazılması yeterlidir.

Teorem 3.1.4: $|z| < R \leq 1$, $|\lambda| < \frac{\pi}{2}$ ile $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $|x| = 1$ için

$$Re\left(e^{i\lambda}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0$$

elde edilir $\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{z}\left[f * \frac{z + \dfrac{x - e^{-2i\lambda}}{1 + e^{-2i\lambda}}z^2}{(1-z)^2}\right] \neq 0\,.$$

İspatı Teorem 3.1.3 'deki ile benzer şekilde yapılır.

Not 3.1.3: Teorem 3.1.4'deki koşulu sağlayan bir fonksiyon ünivalent olmak zorunda [14] olmasına rağmen Teorem 3.1.3'deki koşulu sağlayan bir fonksiyonun ünivalent olması gerekmez.[5]

3.2.KONVOLUSYON YARDIMIYLA TANIMLANAN OPERATÖRLER

Geometrik fonksiyonlar teorisinde operatörler oldukça önemli bir yere sahiptir ve birçok türev ve integral operatörü belirli analitik fonksiyonların konvolusyonu olarak yazılabilir. Bu birçok araştırma da kolaylık ve operatörlerin geometrik özelliklerinin daha iyi anlaşılmasını sağlamıştır. Ayrıca konvolusyon operatörleri yardımıyla yeni fonksiyon sınıfları tanımlanmış ve bu sınıflarının kapsama, katsayı eşitsizlikleri, örtme, distorsiyon ve büyüme gibi temel özellikleri birçok araştırmacı tarafından araştırılmıştır. Aşağıda bazı lineer operatörler verilmiştir.

$f \in A_1$ ve $\forall i \in \{0,1,2,3,4\}$ için $\Gamma_i : A_1 \to A_1$ lineer operatör olsun

$\Gamma_0 f(z) = zf'(z)$

$$\Gamma_1 f(z) = \frac{zf(z)}{2} = \frac{f(z) + zf'(z)}{2}$$

$$\Gamma_2 f(z) = \int_0^z \frac{f(\zeta) - f(0)}{\zeta} d\zeta$$

$$\Gamma_3 f(z) = \frac{2}{z} \int_0^z f(\zeta) d\zeta$$

$$\Gamma_4 f(z) = \int_0^z \frac{f(\zeta) - f(x\zeta)}{\zeta - x\zeta} d\zeta \quad , |x| \leq 1, x \neq 1$$

Γ_4 operatörü Γ_2 nin genelleştirilmiş halidir. Bu operatörlerin her biri $\Gamma_i f = h_i * f$,$0 \leq i < 4$ şeklinde konvolusyon operatörü olarak tanımlanır burada

$$h_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty} kz^k = \frac{z}{(1-z)^2}$$

$$h_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{k+1}{2}) z^k = \frac{z - \frac{z^2}{2}}{(1-z)^2}$$

$$h_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} z^k = -\log(1-z)$$

$$h_3(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k+1} z^k = \frac{-2[z + \log(1-z)]}{z}$$

$$h_4(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - x^k}{(1-x)k} z^k = \frac{1}{1-x} \log(\frac{1-xz}{1-z}) \quad , |x| \leq 1, x \neq 1$$

$h_i * f$ konvolusyonu h_i ve f fonksiyonlarının ait olduğu sınıflara göre önceki bölümlerde geçen şartları ve özellikleri sağlar. Şimdi Ruscheweyh Türev operatörü yardımıyla S_α^* ve K_α sınıfları aşağıdaki gibi tanımlanır.[16]

Öncelikle konveks, yıldızıl ve ünivalent fonksiyonlar arasında $K \subset S^* \subset S$ şeklinde bir kapsama bağıntısı vardır.

Hadamard Çarpımı ile her $f \in A_1$ için

$$D^{\alpha}f(z)=\frac{z}{(1-z)^{\alpha}}*f(z) \quad ,\alpha\geq -1$$

ile tanımlanan operatör Ruscheweyh Türev Operatörüdür.[15]

Yardımcı Önerme 3.2.1([4]): $\alpha>-1$ reel sayısı için

$$z(D^{\alpha}f(z))'=(\alpha+1)D^{\alpha+1}f(z)-\alpha D^{\alpha}f(z)\,.$$

Teorem 3.2.1: $f(z)\in S^{*}$ ve $\alpha\geq -1$ için

$$D^{\alpha}f(z)\neq 0 \qquad (0<|z|<1)$$

şartını sağlasın. Sonra $D^{\alpha}f(z)\in S^{*}$ dir.

Teorem 3.2.2: $f(z)\in K$ ve $\alpha\geq -1$ için

$$D^{\alpha}(zf'(z))\neq 0 \qquad (0<|z|<1)$$

şartını sağlasın. Sonra $D^{\alpha}f(z)\in K$ dır.

Buradan S_{α}^{*} ve K_{α} sınıfları

$$S_{\alpha}^{*}=\{f(z)\in A_1 : D^{\alpha}f(z)\in S^{*},\alpha\geq -1\}$$

$$K_{\alpha}=\{f(z)\in A_1 : D^{\alpha}f(z)\in K,\alpha\geq -1\}$$

olarak tanımlanır ve bu yeni aileler için kapsama bağıntıları şu şekildedir: $S_{\alpha+1}^{*}\subset S_{\alpha}^{*}$ ve $K_{\alpha+1}\subset K_{\alpha}$ ve bu sınıflar için şartlar aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.2.3: $\alpha\geq -1$ için $f(z)\in S_{\alpha}^{*}$ olsun. O halde

$$Re\{(\frac{D^{\alpha}f(z)}{z})^{\beta-1}\}>\frac{1}{2\beta-1} \qquad ,z\in U$$

burada $1<\beta\leq 3/2$ dir.

Sonuç 3.2.1: $\alpha\geq -1$ için $f(z)\in K_{\alpha}$ olsun. O halde

$$Re\{((D^{\alpha}f(z))')^{\beta-1}\}>\frac{1}{2\beta-1} \qquad ,z\in U$$

burada $1<\beta\leq 3/2$ dir.

4.SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Geometrik fonksiyonların Hadamard Çarpımı ile sağladığı özellikler ve bu çarpımın görüntüsünün geometrik özellikleri araştırıldı.

Ünivalent fonksiyonların farklı alt sınıfları için konvolusyon yardımıyla koşulların oluşturulması ve konvolusyon olarak yazılan operatörler ile yeni fonksiyon aileleri ve bu ailelerin kapsama, ünivalentlik yarıçapı gibi birçok özelliğinin incelenmesi gibi konular son yıllarda geometrik fonksiyonlar teorisinde oldukça ilgi gören bir alandır.

5.KAYNAKLAR

[1] Ruscheweyh S., *Convolution In Geometric Function Theory,* Presses de l'Université de Montréal, Montréal, **(1982)**

[2] Duren P.L., *Univalent Functions,* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, New York, Vol. 259, **(1983)**

[3] Nehari Z., *Conformal Mapping,* Mc. Graw-Hill, **(1952)**

[4] Schober G.,*Univalent Functions-Selected Topics,* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, **(1975)**

[5] Pólya G. , Schoenberg I.J. , Remarks On de la vallée poussin means and convex conformal map of the circle, Pacific J. Math.8 **(1958)** 295-334.

[6] Suffridge T.J., Convolution of convex functions, J. Meth. Mech.15 **(1966)** 795-804.

[7] Ruscheweyh S.,Sheil-Small T., Hadamard Products of schlicht functions and the Pólya- Schoenberg Conjecture,Comment Math. Helv. 48 **(1973)** 119-135.

[8] Suffridge T.J., Some remarks on convex maps of the unit disk,Duke Math. J. 37 **(1970)** 775-777.

[9] Sheil-Small T., On convex univalent functions, J. London Math. Soc.1 **(1969)** 483-492.

[10] Pommerenke Ch., On starlike and convex functions, J. London Math. Soc.37 **(1962)** 209-224.

[11] Prather J.R., Geometric properties of the Hadamard Product,Complex Variables Vol.41 **(1998)** 17-26.

[12] Silverman H., Silvia E.M.,Telage D.,Convolution condition for convexity, starlikeness and spiral-likeness, Mathematische Zeitschrift, **(1918)** 125-130.

[13] Ruscheweyh S.,Lineer operators between classes of prestarlike functions, Comment Math. Helv.52 (**1977)** 497-509.

[14] Špaček L.,Contributions á la théorie des functions univalentes,Časopis Pěst Mat.-Fys.62 **(1933)** 12-19.

[15] Ruscheweyh S.,New criteria for univalent functions,Proc. Amer. Math. Soc. 49 **(1975)** 109-115.

[16] Owa S.,Fukuı S.,Sakaguchı K., Ogawa S., Internat. J. Math. & Math. Sci., Vol. 9 No. 4 **(1986)** 721-730.

[17] Barnard R. W.,Kellog C. , Applications of convolution operators to problems in univalent function theory,Michigan Math.J. 27 **(1978)**

[18] Shareef Z.,Hussain S.,Darus M., Convolution operators in the geometric function theory, Journal of Inequalities and Applications 2012 **(2012**) 213.

[19] Alexander, J.W., Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions, Ann. Math. 17 **(1915)** 12-22 .

[20] Roy R.,*Sources in the Development of Mathematics,*Cambridge University Press **(2011)**

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: ÖZGÜL,Semiha
Uyruğu	: T.C
Doğum tarihi ve yeri	: 18.03.1989/KONAK
Telefon	: 0 535 294 77 06
E-posta	: semihaozgul@hotmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Yüksek Lisans	Düzce Ü. /Matematik B.	2014
Lisans	Ege Ü./Matematik B.	2011
Lise	Şirinyer Y.D.A Lisesi	2007

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2012-Devam Ediyor	Düzce Ü.	Araştırma Gör.

Yabancı Dil

İngilizce (ÜDS : 71.25)