



**T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**PARABOLİK-SCHRÖDINGER DİFERANSİYEL VE FARK
DENKLEMLERİ İÇİN LOKAL OLMAYAN SINIR-DEĞER
PROBLEMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MUSTAFA ALP

ŞUBAT 2014

DÜZCE

KABUL VE ONAY BELGESİ

Mustafa ALP tarafından hazırlanan SCHRÖDINGER–PARABOLİK DİFERANSİYEL VE FARK DENKLEMLERİ İÇİN LOKAL OLMAYAN SINIR–DEĞER PROBLEMLERİ isimli lisansüstü tez çalışması, Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun /01/2014 tarih ve 2014/ sayılı kararı ile oluşturulan jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Üye
(Tez Danışmanı)
Yrd. Doç. Dr. Yıldırım ÖZDEMİR
Düzce Üniversitesi

Üye
Yrd. Doç. Dr. Emrah Evren KARA
Düzce Üniversitesi

Üye
Yrd. Doç. Dr. Yusuf CESUR
Abant İzzet Baysal Üniversitesi

Tezin Savunulduğu Tarih : 17.02.2014

ONAY

Bu tez ile Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Mustafa ALP'in Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans derecesini almasını onaylamıştır.

Prof. Dr. Haldun MÜDERRİSOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

05/02/2014

Mustafa ALP

Sevgili Aileme...

TEŞEKKÜR

Başlamış olduğum bu yolda, en başından sonuna dek tüm görüşlerini paylaşan, engin bilgi ve tecrübelerini hiçbir zaman esirgemeyen, bilim tutkusunu içinde barındıran, tüm sorularıma sabır ile yanıt veren ve her türlü konuda desteğini eksik etmeyerek, yanımda olduğunu hissettiğim abi niteliğindeki saygıdeğer hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Yıldırım ÖZDEMİR'e teşekkürü bir borç bilirim.

Tüm görüşlerini ve bilgisini herkes ile paylaşmaktan sakınmayan, bilgi ve deneyimleriyle sonuca ulaşmamda yol gösteren, herkese eşit tavrı ve işine tutku ile bağlı olan, hayatın her karesinde bana bir baba gibi sahip çıkan, kişiliği, tavırları ve edindiğim tecrübelerinden dolayı kendisine minnettar olduğum sayın Prof. Dr. Allaberen ASHYRALYEV'e çok teşekkür ederim.

Çalışmalarım boyunca yardımlarını esirgemeyen jüri üyesi, sayın Yrd. Doç. Dr. Okan GERÇEK'e çok teşekkür ederim.

Ayrıca diğer jüri üyesi ve matematik bölüm başkanımız, sayın Prof. Dr. İsmet YILDIZ hocama göstermiş olduğu ilgi ve yol gösterici yardımlarından ötürü çok teşekkür ederim.

Tez dönemim boyunca moralimi en üst düzeyde tutan ve kendilerinden her fırsatta güç aldığım aileme ve kardeşlerime müteşekkirim.

5 Şubat 2014

Mustafa ALP

TEŞEKKÜR.....	i
İÇİNDEKİLER..	ii
ŞEKİL LİSTESİ.....	iii
ÖZET.....	1
ABSTRACT.....	2
EXTENDED ABSTRACT..	3
1. GİRİŞ.....	5
2. MATERYAL VE YÖNTEM	19
2.1 HİLBERT UZAYININ ELEMANLARI.....	19
3. PARABOLİK SCHRÖDINGER DİFERANSİYEL	
DENKLEMLERİ.....	26
3.1 ÖNCÜLLER VE MOTİVASYON	26
3.2 TEMEL TEOREM	27
3.3 UYGULAMALAR.....	33
4. PARABOLİK SCHRÖDINGER FARK DENKLEMLERİ.....	27
4.1 BİRİNCİ BASAMAKTAN DOĞRULUKLU FARK ŞEMASI.....	37
4.2 UYGULAMALAR.....	43
4.3 İKİNCİ BASAMAKTAN DOĞRULUKLU FARK ŞEMASI.....	47
4.4 UYGULAMALAR.....	47
5. NÜMERİK ANALİZ.....	52
5.1 BİRİNCİ BASAMAKTAN DOĞRULUKLU FARK ŞEMASI.....	52
5.1 İKİNCİ BASAMAKTAN DOĞRULUKLU FARK ŞEMASI.....	56
6. BULGULAR.....	60
6.1 HATA ANALİZİ.....	60
7. SONUÇLAR ve ÖNERİLER.....	62
8. KAYNAKLAR.....	63
9. EKLER.....	66
EK-1. Algoritma	66

EK-2. Birinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şeması İçin Matlab Programı...	66
EK-3. Algoritma	70
EK-4. İkinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şeması İçin Matlab Programı...	70

ÖZGEÇMİŞ

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1.1. Figure 1:Gerçek çözüm	60
Şekil 1.2. Figure 2: Birinci basamaktan doğruluklu fark şeması ile elde edilen gerçek çözüm	60
Şekil 1.3. Figure 3: İkinci basamaktan doğruluklu Crank-Nicholson fark şeması ile elde edilen yaklaşık çözüm	61

ÖZET

PARABOLİK-SCHRÖDINGER DİFERANSİYEL VE FARK DENKLEMLERİ İÇİN LOKAL OLMAYAN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Mustafa ALP

Düzce Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Yıldırım ÖZDEMİR

Şubat 2014, 74 sayfa

H Hilbert uzayında öz-eşlenik pozitif tanımlı A operatörlü diferansiyel denklemleri için lokal olmayan sınır-değer problemi

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + Au(t) = g(t), (0 \leq t \leq 1), \\ i\frac{du(t)}{dt} - Au(t) = f(t), (-1 \leq t \leq 0), \\ u(1) = u(-1) + \mu \end{array} \right.$$

ele alınmıştır. Bu sınır değer probleminin iyi konumlanmışlığı ağırlıklı Hölder uzaylarında doğruluğu ortaya konulmuştur. Parabolik-Schrödinger denklemlerin lokal olmayan sınır değer problemlerinin çözümü için koersiv eşitsizlikleri elde edilmiştir. Lokal olmayan sınır-değer probleminin yaklaşık çözümü için birinci ve ikinci basamaktan doğruluklu fark şemaları sunulmuştur. Bu fark şemalarının iyi konumlanmışlığı Hölder uzaylarında kanıtlanmıştır. Uygulamalarda, Parabolik-Schrödinger denklemlerin fark şemalarının çözümü için koersiv eşitsizlikleri sağlanmıştır. Parabolik-Schrödinger denklemler için fark şemalarının Matlab ile çözümleri elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Parabolik-Schrödinger Denklem, Fark Şemaları, Kararlılık.

ABSTRACT

NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR PARABOLIC-SCHRÖDINGER DIFFERENTIAL AND DIFFERENCE EQUATIONS

Mustafa ALP

Duzce University

Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics

Master of Science Thesis

Supervisor: Assit. Prof. Yildirim OZDEMIR

February 2014, 74 pages

The abstract nonlocal boundary value problem

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + Au(t) = g(t), (0 \leq t \leq 1), \\ i\frac{du(t)}{dt} - Au(t) = f(t), (-1 \leq t \leq 0), \\ u(1) = u(-1) + \mu \end{array} \right.$$

for differential equation in a Hilbert space H with the self-adjoint positive definite operator A is considered. The well-posedness of this problem in Hölder spaces with a weight is established. The coercivity inequalities for the solutions of the boundary value problems for parabolic-Schrödinger equations are obtained. The first and the second order accuracy difference schemes for the approximate solutions of this nonlocal boundary value problem are presented. The well-posedness of these difference schemes in Hölder spaces is established. In applications, the coercivity inequalities for the solutions of difference schemes for parabolic-Schrödinger equation are obtained. The Matlab implementation of these difference schemes for parabolic-Schrödinger equation is presented.

Keywords: Parabolic-Schrödinger Equation, Difference Schemes, Stability.

EXTENDED ABSTRACT

NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR PARABOLIC-SCHRÖDINGER DIFFERENTIAL EQUATIONS

Mustafa ALP
Düzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Assist. Prof. Yildirim OZDEMIR
February 2014, 74 pages

1. INTRODUCTION:

The abstract nonlocal boundary value problem

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + Au(t) = g(t), (0 \leq t \leq 1), \\ i\frac{du(t)}{dt} - Au(t) = f(t), (-1 \leq t \leq 0), \\ u(1) = u(-1) + \mu \end{array} \right.$$

for differential equation in a Hilbert space H with the self-adjoint positive definite operator A is considered. The well-posedness of this problem in Hölder spaces with a weight is established. The coercivity inequalities for the solutions of the boundary value problems for parabolic-Schrödinger equations are obtained. The first and the second order accuracy difference schemes for the approximate solutions of this nonlocal boundary value problem are presented. The well-posedness of these difference schemes in Hölder spaces is established. In applications, the coercivity inequalities for the solutions of difference schemes for parabolic-Schrödinger equation are obtained. The Matlab implementation of these difference schemes for parabolic-Schrödinger equation is presented.

Methods of solutions of nonlocal boundary value problems for partial differential equations and partial differential equations of mixed type have been studied

extensively by many researches (see [Salakhitdinov, M. S., 1974], [Djuraev, T. D., 1979], [Bazarov, D. and Soltanov, H., 1995], [Glazatov, S. N., 1998], [Ashyralyev, A. and Aggez, N., 2004], [Ashyralyev, A. and Ozdemir, Y., 2005], [Ashyralyev, A. and Gercek, O., 2008], [Ashyralyev, A. and Sirma, A., 2008], [Ashyralyev, A. and Yildirim, O., 2010], [Ashyralyev, A. and Hicdurmaz, B., 2011], [Ashyralyev, A. and Ozger, F., 2011], [Ozdemir, Y. and Kucukunal, M., 2012] and the references given therein).

2. MATERIAL AND METHODS:

It is known that certain problems of modern physics and technology can be effectively described in terms of nonlocal problems for partial differential equations. These nonlocal conditions arise mainly when the data on the boundary cannot be measured directly.

3. RESULTS AND DISCUSSIONS:

This work is devoted to the study of the well-posedness of the nonlocal boundary value problem for parabolic-Schrödinger differential and difference equations. The following original results are obtained:

- The abstract theorem on the well-posedness of the nonlocal boundary value problem for parabolic-Schrödinger equation in a Hilbert space is established.
- The coercivity stability inequalities for the solutions of the two nonlocal boundary value problems for parabolic-Schrödinger equations are obtained.
- The first and second order of accuracy difference schemes for the approximate solutions of the nonlocal boundary problem for parabolic-Schrödinger differential equations are presented.
- The abstract theorems on the well-posedness of the first and second order of accuracy difference schemes for the approximate solutions of the nonlocal boundary problem for parabolic-Schrödinger differential equation are established.
- The stability, almost coercivity inequalities, coercivity inequalities for the solutions of difference schemes for the approximate solution of the nonlocal boundary value problem for parabolic-Schrödinger equation are obtained.

4. CONCLUSION AND OUTLOOK:

Our goal in this work is to investigate the stability of difference schemes of the approximate solutions of the nonlocal boundary value problems for equations of parabolic- Schrödinger type.

1 GİRİŞ

Modern fiziğin ve teknolojinin bazı problemlerinin etkili bir biçimde lokal olmayan kısmi diferansiyel denklemler üzerinden ifade edilebilir olduğu bilinmektedir. Bu lokal olmayan koşullar çoğunlukla sınırdaki veriler doğrudan ölçülemediği zaman ortaya çıkar. Kısmi diferansiyel denklemler ve karma tipli kısmi diferansiyel denklemler için lokal olmayan sınır-değer problemlerinin çözüm yöntemleri üzerine bir çok araştırmacı tarafından çalışmalar yapılmıştır. (bkz. [1], [2],[3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12] ayrıntıları kapsamlı bir şekilde kaynaklar kısmında verilmiştir).

Bu çalışmadaki amacımız parabolik-Schrödinger tipindeki denklemler için lokal olmayan sınır-değer problemlerinin yaklaşık çözümleri için kurulan fark şemalarının kararlılığını incelemektir.

Bilindiği gibi parabolik-Schrödinger denklemler için karma tipli problemler, Fourier serileri yöntemi, Laplace dönüşümü yöntemi ve Fourier dönüşümü yöntemi ile çözülebilir.

Şimdi bunlara örnekler verelim.

İlk olarak parabolik-Schrödinger denklemi için

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + u = (2 - 2t)e^{-t^2} \sin x, 0 \leq t \leq 1, 0 < x < \pi, \\ iu_t - u_{xx} + u = (2 - 2it)e^{-t^2} \sin x, -1 \leq t \leq 0, 0 < x < \pi, \\ u(-1, x) = \frac{1}{2}u(1, x) + \frac{1}{2}e^{-1} \sin x, 0 \leq x \leq \pi \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, -1 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (1.1)$$

lokal olmayan sınır-değer problemini ele alalım.

(1.1) probleminin çözümü için, değişkenlerine ayırma yöntemi ya da “Fourier Serileri Yöntemi” adıyla bilinen çözüm yöntemini kullanalım. Problemin çözümü için $u(t, x)$ fonksiyonu

$$u(t, x) = v(t, x) + w(t, x)$$

şeklinde iki parçaya ayrılır. Burada, $v(t, x)$ problemine karşılık gelen homojen denklemin genel çözümü ve $w(t, x)$ de homojen olmayan kısmın özel çözümüdür. Matematiksel ifadeyle, $v(t, x)$ ve $w(t, x)$ fonksiyonları, sırasıyla,

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} + v = 0, 0 \leq t \leq 1, 0 < x < \pi, \\ iv_t - v_{xx} + v = 0, -1 \leq t \leq 0, 0 < x < \pi, \\ v(-1, x) = \frac{1}{2}v(1, x), 0 \leq x \leq \pi, \\ v(t, 0) = v(t, \pi) = 0, -1 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (1.2)$$

ve

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} + w = (2 - 2t)e^{-t^2} \sin x, 0 \leq t \leq 1, 0 < x < \pi, \\ iw_t - w_{xx} + w = (2 - 2it)e^{-t^2} \sin x, -1 < t < 0, 0 < x < \pi, \\ w(-1, x) = \frac{1}{2}e^{-1} \sin x, 0 \leq x \leq \pi, \\ w(t, 0) = w(t, \pi) = 0, -1 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (1.3)$$

problemlerinin çözümleridirler.

Öncelikle (1.2) probleminin çözümünü elde edeceğiz. $0 \leq t \leq 1$ olsun. Değişkenlerine ayırma yöntemi ile,

$$v(t, x) = T(t)X(x) \neq 0$$

ve

$$\frac{T'(t) + T(t)}{T(t)} - \frac{X''(x)}{X(x)} = 0$$

elde ederiz. Buradan,

$$\frac{T'(t) + T(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -k^2 = \lambda$$

yazılır. Öyleyse,

$$\sqrt{-\lambda} = \frac{k\pi}{L} = \frac{k\pi}{\pi} = k$$

ve

$$X''(x) + k^2X(x) = 0$$

olur. Yani,

$$X_k(x) = \sin kx$$

şeklinde bulunur. Şimdi $T(t)$ ifadesini elde etmek için,

$$T'(t) + T(t) = -k^2T(t)$$

ya da

$$T'(t) + (1 + k^2)T(t) = 0$$

yazabiliriz. Buna göre, $T(t)$ ifadesinin çözümünü

$$T_k(t) = C_k e^{-(1+k^2)t}$$

olarak buluruz. Böylece,

$$v(t, x) = T(t)X(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(C_k e^{-(1+k^2)t} \right) \sin kx$$

olur.

Şimdi, $-1 \leq t \leq 0$ olması durumunu göz önüne alalım. Benzer şekilde değişkenlerin ayrılması yöntemini kullanarak

$$v(t, x) = T(t)X(x) \neq 0$$

ifadesini ve

$$\frac{T'(t) + T(t)}{T(t)} - \frac{X''(x)}{X(x)} = -k^2 = \lambda$$

eşitliğini elde ederiz. Bu yüzden,

$$X''(x) + k^2 X(x) = 0$$

veya

$$X_k(x) = \sin kx$$

olarak yazılır. Şimdi de, $T(t)$ ifadesini elde etmek için,

$$T'(t) - i(1 + k^2)T(t) = 0$$

yazalım. Böylece, $T(t)$ çözümü,

$$T_k(t) = C_k e^{i(1+k^2)t}$$

olarak elde edilir. Böylece,

$$v(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(C_k e^{i(1+k^2)t} \right) \sin kx$$

çözümü bulunmuş olur.

Lokal olmayan sınır koşulu ve süreklilik koşulları,

$$\begin{cases} v(1, x) = 0, \\ v(0^+, x) = v(0^-, x), \\ v_t(0^+, x) = v_t(0^-, x) \end{cases}$$

bir arada kullanılarak $C_k = 0, \forall k = 1, 2, \dots, n$ elde edilir. Bundan dolayı, $v(t, x) \equiv 0$ olur.

Daha sonra (1.3) ifadesinin çözümünü bulalım. Öncelikle $0 \leq t \leq 1$ durumunu inceleyelim. Burada,

$$w(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k(t) \sin kx$$

olsun. Ardından,

$$w_t - w_{xx} + w = \sum_{k=1}^{\infty} (D'_k(t) + (1 + k^2)D_k(t)) \sin kx = (2 - 2t)e^{-t^2} \sin x$$

yazılabilir. Bu da,

$$\begin{cases} D'_1(t) + 2D_1(t) = (2 - 2t)e^{-t^2}, k = 1, \\ D'_k(t) + (1 + k^2)D_k(t) = 0, k \neq 1 \end{cases}$$

olduğunun göstergesidir. Bu sebeple,

$$D_k(t) = c_1 e^{-(1+k^2)t}$$

elde edilecektir. Sonrasında, $-1 \leq t \leq 0$ durumunu gözönüne alalım. Benzer olarak,

$$w(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} E_k(t) \sin kx$$

olur. Ardından,

$$iw_t - w_{xx} + w = \sum_{k=1}^{\infty} (iE'_k(t) + (1 + k^2)E_k(t)) \sin kx = (2 - 2it)e^{-t^2} \sin x$$

yazabiliriz. Bu da,

$$\begin{cases} iE'_1(t) + 2E_1(t) = (2 - 2it)e^{-t^2}, k = 1, \\ iE'_k(t) + (1 + k^2)E_k(t) = 0, k \neq 1 \end{cases}$$

olduğu anlamına gelecektir. Bu durumda,

$$E_k(t) = c_3 e^{i(1+k^2)t}$$

elde edilecektir. Lokal olmayan sınır koşulu ve süreklilik koşulları

$$\begin{cases} D_k(-1) = (1/2) E_k(1), k \neq 1, \\ D_k(0) = E_k(0), k = 1, 2, \dots, n \\ D'_k(0) = E'_k(0), k = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

birlikte kullanılırsa $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ elde edilir. Bu nedenle, $k \neq 1$ için $D_k(t) \equiv E_k(t) \equiv 0$ olur. Eğer $k = 1$ olursa,

$$D_1'(t) + 2D_1(t) = (2 - 2t)e^{-t^2}$$

denklemini ortaya çıkacaktır. Dolayısıyla, $D_1(t)$ ifadesi

$$D_1(t) = n_1 e^{-2t} + e^{-t^2}$$

şeklindedir. Böylece,

$$w(t, x) = \left(n_1 e^{-2t} + e^{-t^2} \right) \sin x$$

olur. Benzer şekilde $k = 1$ olursa,

$$E_1'(t) + 2E_1(t) = (2 - 2it)e^{-t^2}$$

yazılır. O halde, $E_1(t)$ formülü

$$E_1(t) = n_2 e^{-2it} + e^{-t^2}$$

biçiminde olacaktır. Böylece,

$$w(t, x) = \left[n_2 e^{-2it} + e^{-t^2} \right] \sin x$$

yazılır. Lokal olmayan sınır koşulu ve süreklilik koşulu

$$\begin{cases} w(-1, x) = (1/2) e^{-1} \sin x, \\ w(0^+, x) = w(0^-, x), \\ w_t(0^+, x) = w_t(0^-, x) \end{cases}$$

kullanılarak $n_1 = n_2 = 0$ ve $n_3 = 1$ bulunur. Bu yüzden,

$$w(t, x) = e^{-t^2} \sin x$$

olacaktır. Dolayısıyla,

$$u(t, x) = v(t, x) + w(t, x) = e^{-t^2} \sin x$$

ifadesi (1.1) probleminin tam çözümüdür.

Benzer şekilde aşağıdaki

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \sum_{r=1}^n \alpha_r \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x_r^2} = f(t, x), \\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \bar{\Omega}, 0 \leq t \leq T, \\ i \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \sum_{r=1}^n \alpha_r \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x_r^2} = g(t, x), \\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \bar{\Omega}, -T \leq t \leq 0, \\ u_t(0^+, x) = u_t(0^-, x), x \in \bar{\Omega} \\ u(-T, x) = u(T, x) + \varphi(x), x \in \bar{\Omega}, \\ u(t, x) = 0, x \in S \end{array} \right.$$

çok boyutlu parabolik-Schrödinger denklemleri için lokal olmayan sınır-değer probleminin çözümü elde edilir. Burada, $\alpha_r > 0$ ve $f(t, x)(t \in [0, T], x \in \bar{\Omega}), g(t, x)(t \in [-T, 0], x \in \bar{\Omega}), \varphi(x), \psi(x)(x \in \bar{\Omega})$ verilmiş düzgün (smooth) fonksiyonlardır. Ayrıca Ω, \mathbb{R}^n n -boyutlu Öklid uzayında S ve $\bar{\Omega} = \Omega \cup S$ sınırı ile birim açık küp olup,

$$(x : x = (x_1, \dots, x_n), 0 < x_k < 1, 1 \leq k \leq n)$$

dir.

Ancak, değişkenlerine ayırma yöntemi yalnızca sabit katsayılı denklemlerin çözümünde kullanılabilir. Oysa ki fark şemaları yöntemi katsayıların sabit olmadığı durumlarda da kullanılabilen çok kullanışlı bir yöntemdir.

İkinci olarak, parabolik-Schrödinger denklemi için

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t - u_{xx} + u = 2t [1 - (1+x)e^{-x}] \cos t^2 + (1 - 2e^{-x}) \sin t^2, \\ 0 \leq t \leq 1, 0 < x < \infty, \\ i u_t - u_{xx} + u = 2it [1 - (1+x)e^{-x}] \cos t^2 + (1 - 2e^{-x}) \sin t^2, \\ -1 \leq t \leq 0, 0 < x < \infty, \\ u(-1, x) = \frac{1}{2} u(1, x) + \frac{1}{2} [1 - (1+x)e^{-x}] \sin 1, 0 \leq x < \infty, \\ u(t, 0) = u_x(t, 0) = 0, -1 \leq t \leq 1 \end{array} \right. \quad (1.4)$$

bir başka problem ele alalım. (1.4) problemi Laplace dönüşümü yöntemi (x 'e göre) ile çözülebilir. $L\{u(t, x)\} = u(t, s)$ olsun. Öncelikle, $0 \leq t \leq 1$ aralığını göz önüne alalım. Diferansiyel denklemin her iki tarafının Laplace dönüşümünü alalım. Bu durumda,

$$u_t - u_{xx} + u = 2t [1 - (1+x)e^{-x}] \cos t^2 + (1 - 2e^{-x}) \sin t^2$$

$$L\{u_t\} - L\{u_{xx}\} + L\{u\} = 2t \cos t^2 L\{1 - (1+x)e^{-x}\} + \sin t^2 L\{1 - 2e^{-x}\}$$

veya

$$\begin{aligned} (L\{u(t, x)\})_t - s^2 L\{u(t, x)\} + su(t, 0) + u_x(t, 0) + L\{u(t, x)\} \\ = 2t \cos t^2 \frac{1}{s(s+1)^2} + \sin t^2 \frac{1-s}{s(s+1)^2} \end{aligned}$$

olacaktır. Böylece denklem,

$$u_t(t, s) - s^2 u(t, s) + u(t, s) = 2t \cos t^2 \left(\frac{1}{s(s+1)^2} \right) + \sin t^2 \left(\frac{1-s}{s(s+1)^2} \right)$$

veya

$$u_t(t, s) + (1 - s^2) u(t, s) = 2t \cos t^2 \left(\frac{1}{s(s+1)^2} \right) + \sin t^2 \left(\frac{1-s}{s(s+1)^2} \right)$$

haline gelir. Bu denklemin tamamlayıcı çözümünü

$$u_t(t, s) + (1 - s^2) u(t, s) = 0$$

$$u_c(t, s) = c_1 e^{\sqrt{s^2-1}t}$$

dir. Özel çözüm için ise,

$$u_p(t, s) = \frac{\sin t^2}{s(s+1)^2}$$

yazılacaktır. Buna göre,

$$u(t, s) = c_1 e^{\sqrt{s^2-1}t} + \frac{\sin t^2}{s(s+1)^2}$$

olarak elde edilir.

Şimdi, $-1 \leq t \leq 0$ olduğunu göz önüne alalım. Buna göre,

$$iu_t - u_{xx} + u = 2it [1 - (1+x)e^{-x}] \cos t^2 + (1 - 2e^{-x}) \sin t^2$$

dir. Diferansiyel denklemin her iki tarafının Laplace dönüşümü alınırsa,

$$iL\{u_t\} - L\{u_{xx}\} + L\{u\} = -2it \cos t^2 L\{1 - (1+x)e^{-x}\} + \sin t^2 L\{1 - 2e^{-x}\}$$

elde edilir. O halde,

$$iu_t(t, s) - s^2 u(t, s) + u(t, s) = -2it \cos t^2 \left(\frac{1}{s(s+1)^2} \right) - \sin t^2 \left(\frac{s-1}{s(s+1)} \right)$$

veya

$$iu_t(t, s) + (1 - s^2) u(t, s) = -2it \cos t^2 \left(\frac{1}{s(s+1)^2} \right) - \sin t^2 \left(\frac{s-1}{s(s+1)} \right)$$

yazılır. Bu diferansiyel denkleminin tamamlayıcı çözümü

$$u_c(t, s) = c_3 e^{i(1-s^2)t}$$

dir. Özel çözüm ise

$$u_p(t, s) = \frac{\sin t^2}{s(s+1)^2}$$

yazılır. Böylece denklemin genel çözümü

$$u(t, s) = c_3 e^{i(1-s^2)t} + \frac{\sin t^2}{s(s+1)^2}$$

dir. Lokal olmayan sınır koşulu ve süreklilik koşulları kullanılarak

$$u(t, s) = \frac{\sin t^2}{s(s+1)^2}$$

çözümü elde edilir. Son olarak, ters Laplace dönüşümü uygulanırsa, verilen (1.4) lokal olmayan sınır-değer probleminin çözümü

$$u(t, x) = L^{-1} \{u(t, s)\} = \sin t^2 L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s+1)^2} \right\} = [1 - (1+x)e^{-x}] \sin t^2$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde aşağıdaki

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \sum_{r=1}^n \alpha_r \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x_r^2} = f(t, x), \\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \bar{\Omega}^+, 0 \leq t \leq T, \\ i \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \sum_{r=1}^n \alpha_r \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x_r^2} = g(t, x), \\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \bar{\Omega}^+, -T \leq t \leq 0, \\ u(-T, x) = u(T, x) + \varphi(x), \\ u_t(0^+, x) = u_t(0^-, x) + \varphi(x), x \in \bar{\Omega}^+, \\ u(t, x) = 0, x \in S^+ \end{array} \right.$$

çok boyutlu parabolik-Schrödinger denklemleri için lokal olmayan sınır-değer probleminin çözümü elde edilebilir. Burada $\alpha_r > 0$ ve $f(t, x)(t \in [0, T], x \in \bar{\Omega}^+)$, $g(t, x)(t \in$

$[-T, 0], x \in \bar{\Omega}^+, \varphi(x), \psi(x) (x \in \bar{\Omega}^+)$ verilmiş düzgün fonksiyonlardır. Ayrıca $\bar{\Omega}^+, \mathbb{R}^n$ n -boyutlu Öklid uzayında S ve $\bar{\Omega} = \Omega \cup S$ ile sınırlı açık birim küp olup,

$$(x : x = (x_1, \dots, x_n), 0 < x_k < 1, 1 \leq k \leq n)$$

dir.

Ancak, Laplace dönüşümü yöntemi yalnızca sabit katsayılı denklemlerin çözümünde kullanılabilir. Oysa ki fark şemaları yöntemi katsayıların sabit olmadığı durumlarda da kullanılabilen çok kullanışlı bir yöntemdir.

Son olarak, Fourier dönüşümü yöntemi ile çözülecek olan

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + u = (3 - 4x^2) e^{-x^2} \sin t^2 + 2te^{-x^2} \cos t^2, \\ 0 \leq t \leq 1, -\infty < x < \infty, \\ iu_t - u_{xx} + u = (3 - 4x^2) e^{-x^2} \sin t^2 + 2ite^{-x^2} \cos t^2, \\ -1 \leq t \leq 0, -\infty < x < \infty, \\ u(1, x) = \frac{1}{2}u(-1, x) + \frac{1}{2}e^{-x^2} \sin 1, -\infty < x < \infty \end{cases} \quad (1.5)$$

bir karma tipli lokal olmayan sınır-değer problemini ele alalım. $F\{u(t, x)\} = u(t, s)$ olsun. Öncelikle, $0 \leq t \leq 1$ aralığındaki çözümü bulalım. Her iki tarafın Fourier dönüşümü alınırsa

$$F\{u_t\} - F\{u_{xx}\} + F\{u\} = 2t \cos t^2 F\{e^{-x^2}\} + \sin t^2 F\{(3 - 4x^2) e^{-x^2}\}$$

eşitliği elde edilecektir. Böylece denklem,

$$u_t(t, s) + (1 + s^2) u(t, s) = 2t \cos t^2 F\{e^{-x^2}\} + \sin t^2 (s^2 F\{e^{-x^2}\} + F\{e^{-x^2}\})$$

şeklinde yazılır. Buna göre, tamamlayıcı çözüm

$$u_c(t, s) = c_1 e^{-(1+s^2)t}$$

dir. Özel çözüm için ise

$$u_p(t, s) = A \cos t^2 + B \sin t^2$$

yazılır. $u_p(t, s)$ nin türevleri alınarak denklemde yerine yazılırsa

$$\cos t^2 (2tB + A + As^2) + \sin t^2 (-2tA + B + Bs^2)$$

$$= 2t \cos t^2 F \left\{ e^{-x^2} \right\} + \sin t^2 \left((1 + s^2) F \left\{ e^{-x^2} \right\} \right)$$

veya

$$B = F \left\{ e^{-x^2} \right\} \text{ ve } A = 0$$

elde edilecektir. Bu yüzden,

$$u_p(t, s) = F \left\{ e^{-x^2} \right\} \sin t^2$$

olacaktır. Dolayısıyla,

$$u(t, s) = c_1 e^{-(1+s^2)t} + F \left\{ e^{-x^2} \right\} \sin t^2$$

biçiminde bulunur.

Şimdi, $-1 \leq t \leq 0$ aralığını göz önüne alalım. Her iki tarafın Fourier dönüşümü alınrsa,

$$iF \{u_t\} - F \{u_{xx}\} + F \{u\} = 2it \cos t^2 F \left\{ e^{-x^2} \right\} + \sin t^2 F \left\{ (3 - 4x^2) e^{-x^2} \right\}$$

ya da

$$iu_t(t, s) + (1 + s^2) u(t, s) = 2it \cos t^2 F \left\{ e^{-x^2} \right\} + \sin t^2 \left((1 + s^2) F \left\{ e^{-x^2} \right\} \right)$$

veya

$$u_t(t, s) - (i + is^2) u(t, s) = 2t \cos t^2 F \left\{ e^{-x^2} \right\} - \sin t^2 \left((i + is^2) F \left\{ e^{-x^2} \right\} \right)$$

elde edilir. Öyleyse, tamamlayıcı çözüm

$$u_c(t, s) = c_3 e^{i(1+s^2)t}$$

olacaktır. Özel çözüm ise

$$u_p(t, s) = D \cos t^2 + E \sin t^2$$

şeklinde olmalıdır. Buradan,

$$\begin{aligned} & \cos t^2 (2tE - iD - is^2D) + \sin t^2 (-2tD - iE - is^2E) \\ &= 2t \cos t^2 F \left\{ e^{-x^2} \right\} + \left(-iF \left\{ e^{-x^2} \right\} - is^2 F \left\{ e^{-x^2} \right\} \right) \sin t^2 \end{aligned}$$

$$D = 0 \text{ ve } E = F \left\{ e^{-x^2} \right\}$$

elde edilir. Buna göre,

$$u_p(t, s) = F \left\{ e^{-x^2} \right\} \sin t^2$$

dir. O halde,

$$u(t, s) = c_3 e^{i(1+s^2)t} + F \left\{ e^{-x^2} \right\} \sin t^2$$

dir. Lokal olmayan sınır koşulu ve süreklilik koşulları kullanılırsa

$$\begin{cases} u(0^+, s) = c_1, \\ u_t(0^+, s) = -(1+s^2)c_1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(0^-, s) = c_3, \\ u_t(0^-, s) = i(1+s^2)c_3, \end{cases}$$

$$u(1, s) = \frac{1}{2}u(-1, s) + \frac{1}{2}F \left\{ e^{-x^2} \right\} \sin 1,$$

$c_1 = c_2 = c_3 = 0$ elde edilir. Böylece,

$$u(t, s) = F \left\{ e^{-x^2} \right\} \sin t^2$$

olur. Son olarak, ters Fourier dönüşümü uygulanırsa, (1.5) lokal olmayan sınır-değer probleminin kesin çözümü

$$u(t, x) = e^{-x^2} \sin t^2$$

elde edilir.

Benzer şekilde aşağıdaki

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{|r|=2m} a_r \frac{\partial^{|r|} u}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}} = f(t, x), \\ 0 \leq t \leq T, x, r \in \mathbb{R}^n, |r| = r_1 + \dots + r_n, \\ i \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{|r|=2m} a_r \frac{\partial^{|r|} u}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}} = f(t, x), \\ -T \leq t \leq 0, x, r \in \mathbb{R}^n, |r| = r_1 + \dots + r_n, \\ u(-T, x) = \alpha u(T, x) + \varphi(x), x \in \mathbb{R}^n, \\ u_t(0+, x) = u_t(0-, x), x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

çok boyutlu parabolik-Schrödinger denklemleri için lokal olmayan sınır değer probleminin çözümü elde edilebilir. Burada α_r , $f(t, x)$ ($t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^n$), $g(t, x)$ ($t \in [-T, 0]$, $x \in \mathbb{R}^n$), $\varphi(x)$, $\psi(x)$ ($x \in \mathbb{R}^n$) verilmiş düzgün fonksiyonlardır.

Ancak, Fourier yöntemi yalnızca sabit katsayılı denklemlerin çözümünde kullanılabilir. Oysa ki fark şemaları yöntemi katsayıların sabit olmadığı durumlarda da kullanılabilen çok kullanışlı bir yöntemdir.

Bu çalışmada bir H Hilbert uzayında verilen fark denklemlerinin, öz-eşlenik pozitif tanımlı A operatörlü lokal olmayan sınır-değer problemi

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt^2} + Au(t) = f(t) & (0 \leq t \leq 1), \\ i\frac{du(t)}{dt} + Au(t) = g(t) & (-1 \leq t \leq 0), \\ u(-1) = \alpha u(\mu) + \varphi, & 0 < \mu \leq 1 \end{cases}$$

ele alınmıştır. Operatör yaklaşımı uygulanarak bu lokal olmayan sınır-değer probleminin çözümü için kararlılık kestirimleri elde edilmiştir. Uygulamalarda bu soyut sonuçlar, parabolik-Schrödinger denklemleri için fark şemalarının kararlılık kestirimlerini elde edilmesini sağlamıştır. Bu sonuç lokal olmayan sınır koşulları tarafından oluşturulan fark operatörünün pozitifliğine dayanmaktadır. Bu fark şemalarının çözümü için yapılan teorik sonuçların doğruluğu, sayısal denemelerle de desteklenmiştir.

Öncelikle, 7 bölümden oluşan bu çalışmanın içeriğinden bahsedelim.

Birinci Bölüm; giriş kısmıdır.

İkinci Bölüm; materyal ve yöntem kısmıdır. Bu bölümde çalışmada kullanılan yöntemlerin yanı sıra Hilbert uzayının temel kavramları verilmiştir.

Üçüncü Bölüm; üç kısımdan oluşmaktadır. Bu alanda yapılan araştırmalar hakkında kısa bir inceleme, bu bölümün ilk kısmında bulunmaktadır. İkinci kısımda ise, eliptik-Schrödinger denklemleri için lokal olmayan sınır-değer problemlerinin kararlılıkları hakkındaki temel teorem ispatlanmıştır. Uygulamalarda bu soyut sonuçlar, eliptik-Schrödinger denklemleri için fark şemalarının kararlılık kestirimlerini elde edilmesini sağlamıştır. Bu ise, üçüncü kısımda verilmiştir.

Dördüncü Bölüm; iki kısımdan oluşmaktadır. Bir H Hilbert uzayında öz-eşlenik pozitif tanımlı A operatörlü eliptik-Schrödinger denklemi için lokal olmayan sınır-değer problemini yaklaşık olarak çözen, birinci ve ikinci basamaktan doğruluklu

kararlı fark şemaları sunulmaktadır. Ayrıca, eliptik-Schrödinger denklemi için karma tipli sınır-değer problemlerinin çözümlerinin kararlılık kestirimleri elde edilmiştir.

Beşinci Bölüm; nümerik analiz bölümüdür. Birinci ve ikinci basamaktan doğruluklu fark şemaları ile çalışılmıştır. İkinci basamaktan doğruluklu fark şemalarının birinci basamaktan doğruluklu fark şemalarına göre daha doğruluklu olduğunu göstermek adına matlab programları verilmiştir.

Altıncı Bölüm; bulgular ve tartışma bölümüdür. İki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda şekiller bulunmaktadır. İkinci kısımda ise elde edilen nümerik sonuçların hata analizi verilmiştir.

Yedinci Bölüm; sonuçlar ve öneriler kısmıdır.

Son olarak çalışmada kullanılan referanslar kaynaklar kısmında verilmiştir. Ayrıca beşinci bölümde kullanılan matlab programları ayrıntılı bir şekilde ekler kısmında verilmiştir.

2 MATERYAL VE YÖNTEM

Yaptığımız bu çalışma için herhangi bir materyale, teçhizata ya da laboratuvar ortamına ihtiyaç duyulmamakla beraber, araştırmamızda yöntem olarak, sırasıyla, operatör yaklaşımı ve sonlu fark yöntemleri kullanılmıştır. Ayrıca elde edilen teorik sonuçların geçerliliğini ve güvenilirliğini desteklemek adına yapılan nümerik denemelerde, iyileştirilmiş-Gauss yok etme yöntemi kullanılmıştır.

2.1 HİLBERT UZAYININ ELEMANLARI

Bu bölümde Hilbert uzayı teorisinin seçilmiş temel kavramları ve çalışmamızda kullanılacağımız bazı temel tanımlar verilecektir. Söz konusu kavramlar herhangi bir fonksiyonel analiz kitabında bulunabilmekle beraber, araştırmamızda [24] numaralı kaynaktan yararlanılmıştır.

Tanım 2.1. Aynı F skalerler cismi üzerinde tanımlanmış U ve V vektör uzaylarını göz önüne alalım. Bir $A : U \rightarrow V$ fonksiyonu

- (i) $\forall u_1, u_2 \in U, A(u_1 + u_2) = Au_1 + Au_2$ (toplamsallık),
- (ii) $\forall u \in U$ ve $\forall \alpha \in F, A(\alpha u) = \alpha A(u)$ (homojenlik)

koşullarını gerçekleştiriyorsa bir *lineer dönüşüm* ya da *lineer operatör* adını alır.

Tanım 2.2. X boş olmayan bir küme olsun. Bu küme reel değerli, negatif olmayan bir $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlasın:

- (i) Her $x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$.
- (ii) Her $x, y \in X$ için ancak ve ancak $x = y$ ise $d(x, y) = 0$.
- (iii) Her $x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$.
- (iv) Her $x, y, z \in X$ için $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (üçgen eşitsizliği).

Böyle bir $d(x, y)$ fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir *metrik* adını verecek ve X kümesinin bundan böyle nokta adını vereceğimiz x ve y gibi elemanları arasındaki *uzaklık* olarak yorumlayacağız.

Tanım 2.3. (X, d) bir metrik uzay olsun. Bu uzaydaki her Cauchy dizisi yakınsaksa X bir *tam metrik uzay* adını alır. Dolayısıyla bir tam metrik uzayda bir dizinin yakınsaklık testi Cauchy dizisi olma tesbitiyle örtüştür.

Örnek 2.1. $X = C[-2, 2]$ sürekli fonksiyonlar kümesi üzerinde d_1 metriğini göz önüne alalım. Bir $\{x_n(t)\}$ sürekli fonksiyonlar dizisini

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & -2 \leq t \leq 1 - (1/n), \\ nt + 1 - n, & 1 - (1/n) \leq t \leq 1, \\ 1, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

ile tanımlayalım. Bu dizi bir Cauchy dizisidir. Genellikle kaybetmeksizin $n > m$ alırsak

$$\begin{aligned} d_1(x_m, x_n) &= \int_{-2}^2 |x_n(t) - x_m(t)| dt \\ &= \int_{1-(1/m)}^{1-(1/n)} (mt + 1 - m) dt + \int_{1-(1/n)}^1 (n - m)(1 - t) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

elde ederiz. Dolayısıyla $m, n \rightarrow \infty$ için $d(x_m, x_n) \rightarrow 0$ buluruz. Yani $\{x_n(t)\}$ bir Cauchy dizisidir. Ancak bu dizinin limitini hemen görebileceğimiz gibi

$$x(t) = \begin{cases} 0, & -2 \leq t \leq 1, \\ 1, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

fonksiyonudur. Gerçekten

$$d_1(x_n, x) = \int_{1-(1/n)}^1 (nt + 1 - n) dt = \frac{1}{2n}$$

bulunur ve $\lim_{n \rightarrow \infty} d_1(x_n, x) = 0$ çıkar. Ancak limit fonksiyon süreksiz olduğundan X uzayının içinde değildir ve $\{x_n(t)\}$ dizisi (X, d_1) de yakınsamaz.

Tanım 2.4. V ile çoğunlukla kompleks sayılar cismi olarak seçeceğimiz bir F skalerler cismi üzerinde tanımlanmış bir lineer vektör uzayını gösterelim. Reel değerli, negatif olmayan bir $N : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonunu aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde seçilebilir:

- (i) Her $v \in V$ için $N(v) \geq 0$ ve ancak ve ancak $v = 0$ ise $N(v) = 0$ olur.
- (ii) Her $v \in V$ ve $\alpha \in F$ için $N(\alpha v) = |\alpha| N(v)$ olur.
- (iii) Her $u, v \in V$ için $N(u + v) \leq N(u) + N(v)$ olur.

Böyle bir fonksiyon V uzayı üzerinde bir norm adını alır. Bir normla donatılmış bir vektör uzayına da *normlu lineer uzay* veya *normlu vektör uzay* ya da sadece *normlu uzay* adını veririz.

Tanım 2.5. $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu, daha doğru bir deyişle fonksiyoneli aşağıdaki kuralları sağladığı takdirde bir *iç çarpım* adını alır:

- i) Her $u, v \in H$ için $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$.
- ii) Her $u, v \in H$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ için $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$.
- iii) Her $u, v, w \in H$ için $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.
- iv) Her $u \in H, u \neq 0$ için $\langle u, u \rangle > 0$.

Burada bir üst çizgi kompleks eşleniği göstermektedir. Bir iç çarpımla donatılmış bir lineer vektör uzayına *iç çarpım uzayı* adı verilir.

İç çarpım kısaca *Schwarz*, aslında ise daha doğru bir deyişle *Cauchy-Bunyakowski-Schwarz eşitsizliği* adını vereceğimiz bir bağıntıyı sağlar.

Teorem 2.1. H bir iç çarpım uzayı ise sıfırdan farklı her $u, v \in H$ vektörü için $|\langle u, v \rangle| \leq \sqrt{\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle}$ eşitsizliği sağlanır. Eşitlik ancak ve ancak u ve v vektörleri lineer bağımlıysa geçerlidir.

Teorem 2.2. H bir iç çarpım uzayı olsun. Her $u \in H$ vektörü için $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ fonksiyonu H üzerinde bir *doğal norm*dur.

Norm tanımıyla Schwarz eşitsizliğini

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\| \quad (2.1)$$

şeklinde de ifade edebiliriz.

İç çarpımın ürettiği norma göre her iki vektör *paralelkenar kuralını* gerçekler. Böyle iki $u, v \in H$ vektörü için

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2) \quad (2.2)$$

elde ederiz.

İç çarpımdan üreyen *doğal norm* da H vektör uzayı üzerinde bir doğal metriği

$$d\langle u, v \rangle = \|u - v\| = \sqrt{\langle u - v, u - v \rangle} \quad (2.3)$$

fonksiyonu ile üretir. Doğal metriğe göre tam bir iç çarpım uzayı *Hilbert uzayı* adını alır. Bir Hilbert uzayının aynı zamanda bir *Banach uzayı* olacağı tartışma götürmez.

Örnek 2.2. $C[0, \pi/2]$ bir iç çarpım uzayı mıdır?

Çözüm:

$$x(t) \in \mathbb{C}[a, b] \Rightarrow \|x\|_{C[a, b]} = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|$$

$x(t) = \sin t, y(t) = \cos t$ olmak üzere $x(t), y(t) \in C[0, \pi/2]$ olsun.

$$\|x\|_{C[0, \pi/2]} = \max_{a \leq t \leq b} |\sin t| = 1$$

$$\|y\|_{C[0, \pi/2]} = \max_{a \leq t \leq b} |\cos t| = 1$$

$$\|x + y\|_{C[0, \pi/2]} = \max_{0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}} |\sin t + \cos t| = \max \left\{ \varphi(0), \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right), \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) \right\} = \sqrt{2}$$

$$\varphi(t) = \sin t + \cos t, \varphi(0) = 1, \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\varphi'(t) = \cos t - \sin t = 0 \Leftrightarrow \cos t = \sin t \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4}$$

$$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\|x - y\|_{C[0, \pi/2]} = \max_{0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}} |\sin t - \cos t| = \max \left\{ \varphi(0), \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right), \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) \right\} = 1$$

$$\|x + y\|_{C[0, \pi/2]}^2 + \|x - y\|_{C[0, \pi/2]}^2 = 2 \left(\|x\|_{C[0, \pi/2]}^2 + \|y\|_{C[0, \pi/2]}^2 \right) \Rightarrow 3 \neq 4$$

Dolayısıyla, $C[0, \pi/2]$ uzayı bir iç çarpım uzayı değildir.

Tanım 2.6. Bir $A : U \rightarrow V$ operatörü sınırlı kümeleri yine sınırlı kümelere dönüştürüyorsa *sınırlı operatör* adını alır.

Teorem 2.3. U ve V normlu uzaylar ve $A : U \rightarrow V$ bir lineer operatör olsun. Ancak ve ancak her $u \in U$ için

$$\|Au\|_V \leq K \|u\|_U$$

olacak şekilde bir $K > 0$ sabiti varsa A operatörü sınırlıdır.

Tanım 2.7 Sınırlı bir A lineer operatörü söz konusu olduğunda K sayılarının en küçüğüne *operatörün normu* adı verilir:

$$\|A\| = \inf \{K > 0 : \|Au\|_V \leq K \|u\|_U, \forall u \in U\}.$$

Normun bu tanımı aşağıdaki tanımlara da eşdeğerdir:

$$\|A\| = \sup \{\|Au\|_V : \|u\|_U \leq 1\},$$

$$\|A\| = \sup \{\|Au\|_V : \|u\|_U = 1\},$$

$$\|A\| = \sup \left\{ \frac{\|Au\|_V}{\|u\|_U} : u \in U, u \neq 0 \right\}.$$

Örnek 2.3. $Ax = \int_0^1 K(t, s)x(s)ds$ integral operatörünü ele alalım. Eğer

$$\int_0^1 \int_0^1 |K(t, s)|^2 ds dt < \infty$$

ise, bu durumda $A : L_2 [0, 1] \rightarrow L_2 [0, 1]$ operatörünün sınırlı olduğunu ispatlayınız.

Çözüm: Öncelikle,

$$\int_0^1 |x(t)|^2 dt < \infty \Rightarrow \int_0^1 |Ax(t)|^2 dt < \infty \quad (2.4)$$

A operatörünün sınırlı olduğu, daha sonra ise

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay; \quad x \in L_2 [0, 1] \Rightarrow Ax \in L_2 [0, 1]$$

A operatörünün lineer olduğu gösterilecektir. $L_2 [0, 1]$ uzayında $Ax(t)$ nin normu

$$\left(\int_0^1 |Ax(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left[\int_0^1 \left(\int_0^1 |K(t, s)x(s)ds| \right)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

dir. Cauchy-Minkowski eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 |Ax(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} &= \left[\int_0^1 \left\{ \left(\int_0^1 |K(t, s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |x(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \right\} dt \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\int_0^1 \left(\int_0^1 |K(t, s)|^2 ds \right) \left(\int_0^1 |x(s)|^2 ds \right) dt \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_0^1 \int_0^1 |K(t, s)|^2 ds dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |x(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\int_0^1 |Ax(t)|^2 dt < \infty \implies Ax \in L_2 [0, 1]$$

dir. O halde, (2.4) eşitsizliği ispatlanmış olur. Şimdi, lineer operatör olduğunu ispatlayalım. Burada,

$$\begin{aligned} A(\alpha x + \beta y) &= \int_0^1 K(t, s) [\alpha x(s) + \beta y(s)] ds \\ &= \alpha \int_0^1 K(t, s) x(s) ds + \beta \int_0^1 K(t, s) y(s) ds = \alpha Ax + \beta Ay \end{aligned}$$

olduğu kolayca görülecektir. Dolayısıyla, verilen operatör $L_2 [0, 1]$ de lineer operatördür.

Tanım 2.8 $A : H_1 \rightarrow H_2$ olmak üzere sınırlı, lineer bir operatör olsun. Burada, H_1 ve H_2 herhangi iki Hilbert uzaylarıdır. $A^* : H_1 \rightarrow H_2$ olmak üzere $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$ operatörüne A 'nın eşleniği denir.

Tanım 2.9 $A : H \rightarrow H$ sınırlı, lineer bir operatör olsun. Eğer $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ ise, bu durumda A ya öz-eşlenik operatör denir.

Tanım 2.10 $A : H \rightarrow H$ öz-eşlenik operatör olsun. Eğer $\langle Ax, x \rangle > \delta \langle x, x \rangle$ ise, bu durumda A 'ya *pozitif tanımlı operatör* denir.

Tanım 2.11 $A : H \rightarrow H$ öz-eşlenik operatör olsun. $\forall x \in D(A)$ için eğer $\langle Ax, x \rangle > 0$ ise, bu durumda A ya *pozitif tanımlı* denir.

Tanım 2.12 $A : D(A) \rightarrow H$ ve $\overline{D(A)} = H$ olmak üzere bir lineer operatör olsun. Eğer $\forall x, y \in H$ için $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ ise, bu durumda A ya *simetrik operatör* denir.

Tanım 2.13 Eğer A bir simetrik operatör ve $D(A) = D(A^*)$ ise, bu durumda A ya *öz-eşlenik operatör* denir.

Örnek 2.4. $Ax(t) = -x''(t)$, $D(A) = W_2^1 = \{y \in W_2^1 \text{ ve } y(0) = y(1) = 0\}$ operatörünün öz-eşlenik, pozitif operatör olup olmadıklarını araştırınız.

Çözüm: $L_2 [0, 1]$ uzayında iç çarpım

$$\langle x, y \rangle = \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}dt$$

ile tanımlanır. Simetrik olduğunu göstermek için $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ olduğunu göstermeliyiz. Burada,

$$\langle Ax, y \rangle = \int_0^1 Ax(t)\overline{y(t)}dt = - \int_0^1 x''(t)\overline{y(t)}dt$$

kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$= -x'(t)\overline{y(t)} \Big|_0^1 + \int_0^1 x'(t)\overline{y'(t)}dt$$

elde edilir. Tekrar kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \langle Ax, y \rangle &= -x'(1)\overline{y(1)} + x'(0)\overline{y(0)} + x(t)\overline{y'(t)} \Big|_0^1 - \int_0^1 x(t)(\overline{-y''(t)})dt \\ &= x(1)\overline{y'(1)} - x(0)\overline{y'(0)} + \int_0^1 x(t)(\overline{-y''(t)})dt = \langle x, Ay \rangle \end{aligned}$$

bulunur. Böylece, A operatörünün $L_2 [0, 1]$ uzayında simetrik olduğunu göstermiş olduk. Şimdi, de A operatörünün pozitif tanımlı olduğunu gösterelim. Burada,

$$\langle Ax, x \rangle = - \int_0^1 x''(t) \overline{x(t)} dt$$

kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$= -x'(t) \Big|_0^1 + \int_0^1 x'(t) \overline{x'(t)} dt = \int_0^1 |x'(t)|^2 dt \geq \int_0^1 |x(t)|^2 dt = \langle x, x \rangle$$

elde edilir. O halde,

$$\langle Ax, x \rangle \geq \langle x, x \rangle \Rightarrow \delta = 1 > 0$$

dır. Dolayısıyla, A operatörü $L_2 [0, 1]$ Hilbert uzayında pozitif tanımlıdır.

3 PARABOLİK-SCHRÖDINGER DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ

3.1 ÖNCÜLLER VE MOTİVASYON

H Hilbert uzayında kendine eş pozitif tanımlı bir A operatörü ile

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t) \quad (0 \leq t \leq 1), \\ i \frac{du(t)}{dt} + Au(t) = g(t) \quad (-1 \leq t \leq 0), \\ u(-1) = \alpha u(\mu) + \varphi, \quad 0 < \mu \leq 1 \end{cases} \quad (3.1)$$

yukarıdaki lokal olmayan sınır değer problemini ele alalım.

Bir çok parabolik-Schrödinger denklemleri için lokal olmayan sınır-değer problemlerinin (3.1) problemine indirgenebildiği çok iyi bilinmektedir.

Eğer aşağıdaki şartlar sağlanır ise, $u(t)$ fonksiyonuna (3.1) probleminin çözümüdür denilir.

- (i) $u(t)$ fonksiyonu $[0, 1]$ aralığında iki kez sürekli türevlenebilir ve $[-1, 1]$ arasında türevlenebilir olmalıdır. Aralığın uç noktalarında türev tek taraflı türev manasındadır.
- (ii) $u(t)$ fonksiyonu, her $t \in [-1, 1]$ için $D(A)$ (A nın tanım kümesi) nin elemanıdır ve $Au(t)$, $[-1, 1]$ aralığında süreklidir.
- (iii) $u(t)$ fonksiyonu, (3.1) probleminin denklemlerini ve lokal olmayan sınır koşulunu sağlar.

Biz (3.1) probleminin kararlılığı ile ilgilenmekteyiz. Bu kısımda (3.1) probleminin çözümünün kararlılık kestirimleri kurulacaktır. Uygulamalarda karma tipli parabolik-Schrödinger denklemlerinin çözümleri için kararlılık kestirimleri elde edilmiştir.

Son olarak parabolik Schrödinger denklemlerinin fizik ve mühendislik alanlarında önemli bir rol oynadığını belirtmek gerekir. (bkz. [13], [14], [15] ve [16]) (Ayrıntıları kaynaklar kısmında verilmiştir).

Dahası, başlangıç-değer problemleri ve Schrödinger denklemlerinin nümerik çözümleri, son 10 yılda kapsamlı bir araştırma alanı olmuştur. (bkz. [17], [18], [19], [20], [21], [22], [23]) (Detayları kaynaklar kısmında verilmiştir).

3.2 TEMEL TEOREM

Bu çalışmadaki amacımız, parabolik-Schrödinger denklemi için kararlılık kestirimleri elde etmektir. Uygulamalarda, parabolik-Schrödinger denklemleri için karma tipli sınır-değer problemlerinin çözümleri için kararlılık kestirimleri oluşturulacaktır. Diğer taraftan, elde edilen tüm teorik sonuçları desteklemek için nümerik denemeler nümerik analiz kısmında verilecektir.

Teorem 3.1. $\varphi \in D(A)$ olsun. $f(t)$, $[0, 1]$ aralığında sürekli türevlenebilir ve $g(t)$, $[-1, 0]$ aralığında türevlenebilir bir fonksiyonlar olsun. Bu durumda (3.1) probleminin tek bir çözümü vardır ve

$$\max_{-1 \leq t \leq 1} \|u(t)\|_H \leq M \left[\|\varphi\|_H + \max_{-1 \leq t \leq 0} \|g(t)\|_H + \max_{0 \leq t \leq 1} \|f(t)\|_H \right], \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} & \max_{-1 \leq t \leq 1} \|Au(t)\|_H \leq M \{ \|A\varphi\|_H + \|g(0)\|_H \\ & + \max_{-1 \leq t \leq 0} \|g'(t)\|_H + \|f(0)\|_H + \max_{0 \leq t \leq 1} \|f'(t)\|_H \}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Burada M , $f(t)$, $t \in [0, 1]$, $g(t)$, $t \in [-1, 0]$ ve φ ifadelerinden bağımsızdır.

İspat: İlk önce (3.1) probleminin çözümü için formül elde edeceğiz. Bilindiği gibi

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t) \quad (0 \leq t \leq 1), \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (3.4)$$

ve

$$\begin{cases} i \frac{du(t)}{dt} + Au(t) = g(t) \quad (-1 \leq t \leq 0), \\ u(-1) = u_{-1} \end{cases} \quad (3.5)$$

başlangıç-değer problemlerinin tek çözümü vardır ve dolayısıyla,

$$u(t) = e^{-tA}u(0) + \int_0^t e^{-(t-s)A}f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (3.6)$$

ve

$$u(t) = e^{i(t+1)A}u_{-1} - i \int_{-1}^t e^{i(t-s)A}g(s)ds, \quad -1 \leq t \leq 0 \quad (3.7)$$

formülleri sağlar. (3.7) formülünü kullanarak

$$u(0) = e^{iA}u_{-1} - i \int_{-1}^0 e^{-isA}g(s)ds, \quad -1 \leq t \leq 0 \quad (3.8)$$

eşitliği yazabiliriz. Buradan,

$$u(t) = e^{-tA} \left[e^{iA}u_{-1} - i \int_{-1}^0 e^{-isA}g(s)ds \right] + \int_0^t e^{-(t-s)A}f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (3.9)$$

elde edilir.

Şimdi, lokal olmayan sınır koşulu

$$u(-1) = \alpha u(\mu) + \varphi$$

kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \{I - \alpha e^{iA}e^{-\mu A}\} u_{-1} \\ & = \left\{ \alpha - i e^{-\mu A} \int_{-1}^0 e^{-isA}g(s)ds + \int_0^\mu e^{-(\mu-s)A}f(s)ds \right\} + \varphi \end{aligned} \quad (3.10)$$

operatör denklemi elde edilir. Bu durumda operatör

$$I - \alpha e^{iA}e^{-\mu A}$$

şeklindedir. Bu operatörün tersi

$$T = (I - \alpha e^{iA}e^{-\mu A})^{-1}$$

mevcuttur ve

$$\|T\|_{H \rightarrow H} \leq M \quad (3.11)$$

eşitsizliği sağlar. Bu kestirimin ispatı

$$\|-\alpha e^{-(\mu+i)A}\|_{H \rightarrow H} < 1$$

kestirimine dayanmaktadır. Buradan,

$$\|-\alpha e^{-(\mu+i)A}\|_{H \rightarrow H} \leq |\alpha| |e^{-\mu\delta}| |e^{-i\delta}| \leq 1$$

elde edilir. Daha sonra,

$$\|T\|_{H \rightarrow H} \leq \left\| (I - \alpha e^{iA} e^{-\mu A})^{-1} \right\|_{H \rightarrow H} \leq \frac{1}{1 - |\alpha| e^{-\delta}}$$

kestirimleri yazabiliriz. Burada,

$$(I - \alpha e^{iA} e^{-\mu A})^{-1} u = \int_{\delta}^{\infty} \frac{1}{1 - \alpha e^{i\lambda} e^{-\mu\lambda}} dE_{\lambda} u$$

tanımı kullanılırsa,

$$\left\| (I - \alpha e^{iA} e^{-\mu A})^{-1} \right\|_{H \rightarrow H} \leq \sup_{\delta \leq \lambda \leq \infty} \frac{1}{|1 - \alpha e^{i\lambda} e^{-\mu\lambda}|}$$

$$|1 - \alpha e^{i\lambda} e^{-\mu\lambda}| \geq 1 - |\alpha| |e^{i\lambda}| |e^{-\mu\lambda}| \geq 1 - |\alpha| |e^{-\mu\lambda}| \geq 1 - |\alpha| |e^{-\lambda}| = 1 - |\alpha| e^{-\delta}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\left\| (I - \alpha e^{iA} e^{-\mu A})^{-1} \right\| \leq \frac{1}{1 - |\alpha| e^{-\delta}} \leq M$$

bulmuş oluruz. Yani, (3.11) kestirimi ispatlanmış olur.

Böylece, (3.10) operatör denkleminde

$$u_{-1} = T \left(\alpha \left\{ -ie^{-\mu A} \int_{-1}^0 e^{-isA} g(s) ds + \int_0^{\mu} e^{-(\mu-s)A} f(s) ds \right\} + \varphi \right) \quad (3.12)$$

denklemini elde ederiz. Dolayısıyla, (3.1) probleminin çözümü için denklemde (3.9), (3.7) ve (3.12) formülleri elde edilmiş olur.

Temel Teoremin ispatının ilk kısmı burada bitmiştir. İkinci kısımda ise, (3.2) ve (??) eşitsizliklerinin sağlandığı gösterilecektir. A operatörünün simetri özelliğine dayanarak

$$\|e^{\pm itA}\|_{H \rightarrow H} \leq 1, t \geq 0 \quad (3.13)$$

kestiriminin alınabileceği açıktır.

İlk olarak (3.2) eşitsizliğinin ispatı verilecektir. Bunun için öncelikle,

$$\begin{aligned} \|u_{-1}\|_H &\leq \left\{ \left\| (I - \alpha e^{iA} e^{-\mu A})^{-1} \right\|_{H \rightarrow H} \left(|i| |\alpha| \|e^{-\mu A}\|_{H \rightarrow H} \int_{-1}^0 \|e^{iAs}\|_{H \rightarrow H} \|g(s)\|_H ds \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + |\alpha| \int_0^\mu \|e^{-(\mu-s)A}\|_{H \rightarrow H} \|f(s)\|_H ds + \|\varphi\|_H \right) \right\} \\ &\leq M \left[\int_{-1}^0 \|g(s)\|_H ds + \int_0^\mu \|f(s)\|_H ds + \|\varphi\|_H \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. O halde,

$$\|u_{-1}\|_H \leq M \left[\|\varphi\|_H + \max_{-1 \leq t \leq 0} \|g(t)\|_H + \max_{0 \leq t \leq 1} \|f(t)\|_H \right] \quad (3.14)$$

dir. (3.9) formülü kullanılarak

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_H &\leq \|e^{-tA}\|_{H \rightarrow H} \left(\|e^{-tA}\|_{H \rightarrow H} \|u(-1)\|_H + |i| \int_{-1}^0 \|e^{-isA}\|_{H \rightarrow H} \|g(s)\|_H ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \|e^{-(t-s)A}\|_{H \rightarrow H} \|f(s)\|_H ds \right) \\ &\leq \|u_{-1}\|_H + \int_{-1}^0 \|g(s)\|_H ds + \int_0^t \|f(s)\|_H ds, \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. O halde,

$$\|u(t)\|_H \leq M \left[\|\varphi\|_H + \max_{-1 \leq t \leq 0} \|g(t)\|_H + \max_{0 \leq t \leq 1} \|f(t)\|_H \right], 0 \leq t \leq 1 \quad (3.15)$$

kestirimi elde edilmiş olur. (3.7) formülü kullanılarak

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_H &\leq \|e^{i(t+1)A}\|_{H \rightarrow H} \|u_{-1}\|_H + |i| \int_{-1}^t \|e^{iA(t-s)}\|_{H \rightarrow H} \|g(s)\|_H ds, -1 \leq t \leq 0 \\ &\leq \|u_{-1}\|_H + \int_{-1}^t \|g(s)\|_H ds \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. O halde,

$$\|u(t)\|_H \leq M \left[\|\varphi\|_H + \max_{-1 \leq t \leq 0} \|g(t)\|_H + \max_{0 \leq t \leq 1} \|f(t)\|_H \right] \quad (3.16)$$

kestirimi elde edilmiş olur. Öyleyse, (3.15) ve (3.16) eşitsizlikleri kullanılarak (3.2) eşitsizliği ispatlanmış olur.

İkinci olarak (??) eşitsizliği ispatlanacaktır. (3.12) formülüne kısmi integrasyon uygulanarak

$$\begin{aligned} u(-1) &= T \left[\alpha \left\{ A^{-1} e^{-\mu A} \left(g(0) - e^{iA} g(-1) - \int_{-1}^0 e^{-isA} g'(s) ds \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - A^{-1} \left(f(\mu) - e^{-\mu A} f(0) - \int_0^\mu e^{-(\mu-s)A} f'(s) ds \right) \right\} + \varphi \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} Au(-1) &= T \left[\alpha \left\{ e^{-\mu A} \left(g(0) - e^{iA} g(-1) - \int_{-1}^0 e^{-isA} g'(s) ds \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - f(\mu) + e^{-\mu A} f(0) + \int_0^\mu e^{-(\mu-s)A} f'(s) ds \right\} + A\varphi \right] \end{aligned} \quad (3.17)$$

yazılır. (3.17) formülünün kestirimi alınırsa

$$\begin{aligned} \|Au_{-1}\|_H &\leq \|T\|_{H \rightarrow H} \left[|\alpha| \left\{ \|e^{-\mu A}\|_{H \rightarrow H} (\|g(0)\|_H + \|e^{iA}\|_{H \rightarrow H} \|g(-1) - g(0)\|_H \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \|e^{iA}\|_{H \rightarrow H} \|g(0)\|_H + \int_{-1}^0 \|e^{-isA}\|_{H \rightarrow H} \|g'(s)\|_H ds \right\} \right. \\ &\quad \left. + \|f(0)\|_H + \|f(\mu) - f(0)\|_H + \|e^{-\mu A}\|_{H \rightarrow H} \|f(0)\|_H \right] \end{aligned}$$

$$+ \int_0^\mu \left\| e^{-(\mu-s)A} \right\|_{H \rightarrow H} \|f'(s)\|_H ds \Big\} + \|A\varphi\|_H \Big]$$

eşitsizliği elde edilir. O halde,

$$\|Au_{-1}\|_H \leq M \left\{ \|A\varphi\|_H + \|g(0)\|_H \right. \tag{3.18}$$

$$\left. + \max_{-1 \leq t \leq 0} \|g'(t)\|_H + \|f(0)\|_H + \max_{0 \leq t \leq 1} \|f'(t)\|_H \right\},$$

kestirimi alınır. Şimdi $-1 \leq t \leq 0$ aralığını ele alalım. (3.7) formülüne kısmi integrasyon uygulanarak

$$u(t) = e^{i(t+1)A}u(-1) + A^{-1} \left[g(t) - e^{i(t+1)A}g(-1) - \int_{-1}^t e^{i(t-s)A}g'(s) ds \right]$$

elde edilir. Buradan,

$$Au(t) = e^{i(t+1)A}Au(-1) + g(t) - e^{i(t+1)A}g(-1) - \int_{-1}^t e^{i(t-s)A}g'(s) ds \tag{3.19}$$

yazılır. (3.19) formülünün kestirimi alınırsa

$$\|Au(t)\|_H \leq \|e^{i(t+1)A}\|_{H \rightarrow H} \|Au_{-1}\|_H + \|g(0)\|_H + \|e^{i(t+1)A}\|_{H \rightarrow H} \|g(0)\|_H$$

$$+ \|g(t) - g(0)\|_H + \|e^{i(t+1)A}\|_{H \rightarrow H} \|g(-1) - g(0)\|_H + \int_{-1}^t \|e^{i(t-s)A}\|_{H \rightarrow H} \|g'(s)\|_H ds$$

$$\leq \|Au_{-1}\|_H + \|g(0)\|_H + \max_{-1 \leq t \leq 0} \|g'(t)\|_H$$

eşitsizliği elde edilir. O halde, $-1 \leq t \leq 0$ için

$$\|Au(t)\|_H \leq M \left[\|A\varphi\|_H + \|g(0)\|_H + \max_{-1 \leq t \leq 0} \|g'(t)\|_H + \|f(0)\|_H + \max_{0 \leq t \leq 1} \|f'(t)\|_H \right] \tag{3.20}$$

kestirimi alınır. Son olarak $0 \leq t \leq 1$ aralığını ele alalım. (3.9) formülüne kısmi integrasyon uygulanarak

$$u(t) = e^{-tA} \left[e^{iA}u(-1) + A^{-1} \left\{ g(0) - e^{iA}g(-1) - \int_{-1}^0 e^{-isA}g'(s) ds \right\} \right]$$

$$- A^{-1} \left\{ f(t) - e^{-tA}f(0) - \int_0^t e^{-(t-s)A}f'(s) ds \right\}$$

elde edilir. Buradan,

$$Au(t) = e^{-tA} \left[e^{iA}Au(-1) + \left\{ g(0) - e^{iA}g(-1) - \int_{-1}^0 e^{-isA}g'(s) ds \right\} \right] \tag{3.21}$$

$$- \left\{ f(t) - e^{-tA} f(0) - \int_0^t e^{-(t-s)A} f'(s) ds \right\}$$

yazılır. (3.21) formülünün kestirimi alınırsa

$$\begin{aligned} \|Au(t)\|_H &\leq \|e^{-tA}\|_{H \rightarrow H} [\|e^{iA}\|_{H \rightarrow H} \|Au_{-1}\|_H + \|g(0)\|_H \\ &+ \|e^{iA}\|_{H \rightarrow H} \|g(-1) - g(0)\|_H + \|e^{iA}\|_{H \rightarrow H} \|g(0)\|_H + \int_{-1}^0 \|e^{-isA}\|_{H \rightarrow H} \|g'(s)\|_H ds \\ &+ \|f(0)\|_H + \|f(t) - f(0)\|_H + \|e^{-tA}\|_{H \rightarrow H} \|f(0)\|_H + \int_0^t \|e^{-(t-s)A}\|_{H \rightarrow H} \|f'(s)\|_H ds \\ &\leq \|Au_{-1}\|_H + \|g(0)\|_H + \max_{-1 \leq t \leq 0} \|g'(t)\|_H + \|f(0)\|_H + \max_{0 \leq t \leq 1} \|f'(t)\|_H \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. O halde,

$$\|Au(t)\|_H \leq M \{ \|A\varphi\|_H + \|g(0)\|_H \quad (3.22)$$

$$+ \max_{-1 \leq t \leq 0} \|g'(t)\|_H + \|f(0)\|_H + \max_{0 \leq t \leq 1} \|f'(t)\|_H \},$$

kestirimi alınır. (3.18), (3.20) ve (3.22) kestirimleri kullanılarak (??) eşitsizliği ispatlanmış olur. Bu da Temel Teoremin ispatını tamamlar.

3.3 UYGULAMALAR

Şimdi, Teorem 3.1 için uygulamalar verilecektir. İlk olarak,

$$\left\{ \begin{array}{l} v_y - (a(x)v_x)_x + \delta v = f(y, x), 0 < y < 1, 0 < x < 1, \\ iv_y - (a(x)v_x)_x + \delta v = g(y, x), -1 < y < 0, 0 < x < 1, \\ v(-1, x) = v(1, x) + \varphi(x), 0 \leq x \leq 1, \\ v(y, 0) = v(y, 1), v_x(y, 0) = v_x(y, 1), -1 \leq y \leq 1, \\ v(0+, x) = v(0-, x), v_y(0+, x) = v_y(0-, x), 0 \leq x \leq 1, \end{array} \right. \quad (3.23)$$

karma tipli parabolik-Schrödinger denklemini göz önünde bulunduralım. Burada $\delta > 0$ olmak üzere keyfi bir sabittir. (3.23) problemi $v(y, x)$ şeklinde düzgün tek bir çözüme sahiptir. Bunun için $a(x) \geq a > 0$, ($x \in (0, 1)$), $\varphi(x)$ ($x \in [0, 1]$), $f(y, x)$ ($y \in [0, 1]$, $x \in [0, 1]$) ve $g(y, x)$ ($y \in [-1, 0]$, $x \in [0, 1]$) şeklinde fonksiyonlar olmalıdır.

$L_2[0, 1]$ Hilbert uzayınının $[0, 1]$ aralığında tüm kare integrallenebilir fonksiyonlarını ve $W_2^1[0, 1]$, $W_2^2[0, 1]$ Hilbert uzaylarını sırasıyla aşağıdaki normlarla

$$\|\varphi\|_{W_2^1[0,1]} = \left(\int_0^1 |\varphi(x)|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_0^1 |\varphi_x(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

$$\|\varphi\|_{W_2^2[0,1]} = \left(\int_0^1 |\varphi(x)|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_0^1 |\varphi_x(x)|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_0^1 |\varphi_{xx}(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

tanımlayalım. Bu şartlar altında (3.23) karma tipli problemi, (3.1) Hilbert uzayında öz-eşlenik pozitif tanımlı bir A operatörü ile tanımlanan lokal olmayan sınır-değer problemine indirgenebilir.

Teorem 3.2. (3.23) lokal olmayan sınır-değer probleminin çözümü

$$\begin{aligned} \max_{-1 \leq y \leq 1} \|v(y, \cdot)\|_{L_2[0,1]} &\leq M \left[\|\varphi\|_{L_2[0,1]} \right. \\ &+ \max_{-1 \leq y \leq 0} \|g(y, \cdot)\|_{L_2[0,1]} + \max_{0 \leq y \leq 1} \|f(y, \cdot)\|_{L_2[0,1]} \left. \right], \\ \max_{-1 \leq y \leq 1} \|v(y, \cdot)\|_{W_2^2[0,1]} &\leq M \left[\|\varphi\|_{W_2^1[0,1]} + \|g(0, \cdot)\|_{L_2[0,1]} \right. \\ &+ \max_{-1 \leq y \leq 0} \|g_y(y, \cdot)\|_{L_2[0,1]} + \|f(0, \cdot)\|_{L_2[0,1]} + \max_{0 \leq y \leq 1} \|f_y(y, \cdot)\|_{L_2[0,1]} \left. \right] \end{aligned}$$

kararlılık kestirimlerini sağlar. Burada M , $f(y, x)$ ($y \in [0, 1]$, $x \in [0, 1]$), $g(y, x)$ ($y \in [-1, 0]$, $x \in [0, 1]$) den ve $\varphi(x)$ ($x \in [0, 1]$) den bağımsızdır.

Teorem 3.2 nin ispatı Teorem 3.1 ve problem (3.23) tarafından oluşturulan operatörün simetri özelliğine dayanmaktadır.

Şimdi, çok boyutlu parabolik-Schrödinger denklemi için karma tipli

$$\left\{ \begin{array}{l} v_y - \sum_{r=1}^m (a_r(x)v_{x_r})_{x_r} = f(y, x), 0 \leq y \leq 1, \\ x = (x_1, \dots, x_m) \in \Omega, \\ iv_y - \sum_{r=1}^m (a_r(x)v_{x_r})_{x_r} = g(y, x), -1 \leq y \leq 0, \\ x = (x_1, \dots, x_m) \in \Omega, \\ - \sum_{r=1}^m (a_r(x)v_{x_r}(-1, x))_{x_r} = v(1, x) + \varphi(x), x \in \bar{\Omega}, \\ u(y, x) = 0, x \in S, -1 \leq y \leq 1 \end{array} \right. \quad (3.24)$$

lokal olmayan sınır-değer problemini göz önüne alalım. Burada Ω , m -boyutlu Ölkid uzayı \mathbb{R}^m de,

$$(x : x = (x_1, \dots, x_m), 0 < x_k < 1, 1 \leq k \leq m)$$

S ve $\bar{\Omega} = \Omega \cup S$ tarafından sınırlanan bir açık birim küptür. Burada, $a_r(x)$, ($x \in \Omega$), $\varphi(x)$ ($x \in \bar{\Omega}$) ve $f(y, x)$ ($y \in (0, 1), x \in \Omega$), $g(y, x)$ ($y \in (-1, 0), x \in \Omega$) ifadeleri $[0, 1] \times \Omega$ de verilen sorunsuz fonksiyonlar ve $a_r(x) \geq a > 0$ dir.

$L_2(\bar{\Omega})$ Hilbert uzayının $\bar{\Omega}$ üzerinde tüm kare integrallenebilir fonksiyonlarını

$$\|f\|_{L_2(\bar{\Omega})} = \left\{ \int \cdots \int_{x \in \bar{\Omega}} |f(x)|^2 dx_1 \cdots dx_m \right\}^{1/2}$$

$W_2^1(\bar{\Omega})$ ve $W_2^2(\bar{\Omega})$ uzaylarını aşağıdaki normlar ile

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{W_2^1(\bar{\Omega})} &= \|\varphi\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \left\{ \int \cdots \int_{x \in \bar{\Omega}} \sum_{r=1}^n |\varphi_{x_r}|^2 dx_1 \cdots dx_m \right\}^{1/2}, \\ \|\varphi\|_{W_2^2(\bar{\Omega})} &= \|\varphi\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \left\{ \int \cdots \int_{x \in \bar{\Omega}} \sum_{r=1}^n |\varphi_{x_r}|^2 dx_1 \cdots dx_m \right\}^{1/2} \\ &\quad + \left\{ \int \cdots \int_{x \in \bar{\Omega}} \sum_{r=1}^n |\varphi_{x_r x_r}|^2 dx_1 \cdots dx_m \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

tanımlayalım. (3.24) problemi düzgün $a_r(x)$, $f(y, x)$ ve $g(y, x)$ fonksiyonları için $v(y, x)$ biçiminde düzgün ve tek bir çözüme sahiptir. Bu şartlar altında (3.24) karma tipli problemi; (3.1) Hilbert uzayında öz-eşlenik pozitif tanımlı bir A operatörü ile tanımlanan, lokal olmayan sınır-değer problemine indirgenebilir.

Teorem 3.3. (3.24) lokal olmayan sınır-değer probleminin çözümü

$$\begin{aligned} \max_{-1 \leq y \leq 1} \|v(y, \cdot)\|_{L_2(\bar{\Omega})} &\leq M \left[\|\varphi\|_{L_2(\bar{\Omega})} \right. \\ &\quad \left. + \max_{-1 \leq y \leq 0} \|g(y, \cdot)\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \max_{0 \leq y \leq 1} \|f(y, \cdot)\|_{L_2(\bar{\Omega})} \right], \\ \max_{-1 \leq y \leq 1} \|v(y, \cdot)\|_{W_2^2(\bar{\Omega})} &\leq M \left[\|\varphi\|_{W_2^1(\bar{\Omega})} + \|g(0, \cdot)\|_{L_2(\bar{\Omega})} \right. \\ &\quad \left. + \max_{-1 \leq y \leq 0} \|g_y(y, \cdot)\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \|f(0, \cdot)\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \max_{0 \leq y \leq 1} \|f_y(y, \cdot)\|_{L_2(\bar{\Omega})} \right] \end{aligned}$$

kararlılık kestirimlerini sağlar. Burada M , $f(y, x)$ ($y \in [0, 1], x \in [0, 1]$), $g(y, x)$ ($y \in [-1, 0], x \in [0, 1]$) ve $\varphi(x)$ ($x \in [0, 1]$) den bağımsızdır.

Teorem 3.3 ün ispatı Teorem 3.1 e, (3.24) problemi tarafından tanımlanan operatörün simetri özelliğine ve aşağıdaki $L_2(\bar{\Omega})$ içindeki eliptik diferansiyel problemin çözümünün koersiv eşitsizliğine dayanmaktadır.

Teorem 3.4. Eliptik diferansiyel problemin çözümü için

$$-\sum_{r=1}^m (a_r(x)u_{x_r})_{x_r} = \omega(x), x \in \Omega,$$

$$u(x) = 0, x \in S,$$

$$\sum_{r=1}^m \|u_{x_r x_r}\|_{L_2(\bar{\Omega})} \leq M \|\omega\|_{L_2(\bar{\Omega})}$$

koersiv eşitsizliği sağlanmaktadır [25].

4 PARABOLİK-SCHRÖDINGER FARK DENKLEMLERİ

4.1 BİRİNCİ BASAMAKTAN DOĞRULUKLU FARK ŞEMASI

Bu bölümde, (3.1) sınır-değer problemi ile bu probleme karşılık gelen

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} + Au_k = f_k, f_k = f(t_k), t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N, \\ i \frac{u_1 - u_0}{\tau} = -Au_0 + g_0, \\ i \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} + Au_k = g_k, g_k = g(t_k), t_k = k\tau, -N + 1 \leq k \leq 0, \\ u_{-N} = \alpha u_N + \varphi \end{array} \right. \quad (4.1)$$

birinci basamaktan doğruluklu fark şeması incelenmiştir. Bilindiği gibi, H Hilbert uzayında öz-eşlenik pozitif tanımlı A diferansiyel operatörlü lokal olmayan sınır değer probleminin bir değişkenli diskritizasyon (discretization) fark şemalarını araştırmak demek, H_h Hilbert uzaylarında h 'ye ($0 < h \leq h_0$) göre düzgün öz-eşlenik pozitif tanımlı A_h fark operatörlü çok değişkenli diskritizasyon fark şemalarını araştırmak demektir.

Öncelikle ileriki bölümlerde ihtiyaç duyacağımız yardımcı teoremleri verelim.

Yardımcı Teorem 4.1. $R = R(\tau A) = (I - i\tau A)^{-1}$ ve $D = (I + \tau A)^{-1}$ olmak üzere

$$\|R^k\|_{H \rightarrow H} \leq M(1 + \delta\tau)^{-k}, \quad (4.2)$$

$$\|D\|_{H \rightarrow H} \leq 1 \quad (4.3)$$

eşitsizlikleri sağlar. Burada, M katsayısı τ dan bağımsızdır.

Yardımcı Teorem 4.2. $Q_\tau = \{I - \alpha D^N R^N\}$ olmak üzere

$$T_\tau = (I - \alpha D^N R^N)^{-1}$$

operatörünün tersi vardır ve

$$\|T_\tau\|_{H \rightarrow H} \leq M \quad (4.4)$$

eşitsizliği sağlar. Burada, M katasyısı τ dan bağımsızdır.

İspat: (4.4) eşitsizliğinin ispatı

$$\begin{aligned} \left\| (I - \alpha D^N R^N)^{-1} \right\|_{H \rightarrow H} &\leq \sup_{\delta \leq \lambda \leq \infty} \frac{1}{|1 - \alpha D^N R^N|} \leq \sup_{\delta \leq \lambda \leq \infty} \frac{1}{1 - |\alpha| |D^N| |R^N|}, \\ \sup_{\delta \leq \lambda \leq \infty} \frac{1}{1 - |R^N|} &\leq \sup_{\delta \leq \lambda \leq \infty} \frac{1}{1 - M(1 + \lambda\tau)^{-N}} \leq M \end{aligned}$$

kestirimine dayanmaktadır.

Teorem 4.1. Eğer $\varphi \in D(A)$ ise, bu durumda (4.1) fark şemasının çözümü için

$$\max_{-N \leq k \leq N} \|u_k\|_H \leq M \left[\|\varphi\|_H + \max_{-N \leq k \leq 0} \|g_k\|_H + \max_{1 \leq k \leq N} \|f_k\|_H \right], \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \max_{-N \leq k \leq N} \|Au_k\|_H &\leq M \left[\|A\varphi\|_H + \|g_0\|_H + \max_{-N+1 \leq k \leq 0} \|(g_k - g_{k-1})\tau^{-1}\|_H \right. \\ &\quad \left. + \|f_1\|_H + \max_{2 \leq k \leq N} \|(f_k - f_{k-1})\tau^{-1}\|_H \right] \end{aligned} \quad (4.6)$$

kararlılık kestirimleri sağlanır. Burada, M katsayısı $\tau, f_k, 1 \leq k < N, g_k, -N < k \leq 0$ ve φ den bağımsızdır.

İspat: Herşeyden önce, (4.1) fark şemasının çözümü için gerekli formüller elde edilecektir. Bilindiği gibi,

$$\begin{cases} \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} + Au_k = f_k, f_k = f(t_k), t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N, \\ u_0 = \xi, \end{cases} \quad (4.7)$$

ve

$$\begin{cases} i \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} + Au_k = g_k, g_k = g(t_k), t_k = k\tau, -N \leq k \leq 0, \\ u_{-N} = \alpha u_N + \varphi. \end{cases} \quad (4.8)$$

başlangıç-değer fark problemlerinin tek çözümü vardır ve

$$u_k = D^k u_0 + \tau \sum_{s=1}^k D^{k-s+1} f_s, 1 \leq k \leq N, \quad (4.9)$$

$$u_k = R^{N+k} u_{-N} - i\tau \sum_{s=-N}^k R^{k-s+1} g_s, -N \leq k \leq 0 \quad (4.10)$$

formülleri sağlanır. (4.10) formülü kullanılarak

$$u_0 = R^N u_{-N} - i\tau \sum_{s=-N}^0 R^{-s+1} g_s \quad (4.11)$$

yazılır. Dolayısıyla,

$$u_k = D^k \left(R^N u_{-N} - i\tau \sum_{s=-N}^0 R^{-s+1} g_s \right) + \tau \sum_{s=1}^k D^{k-s+1} f_s, 1 \leq k \leq N, \quad (4.12)$$

formülü elde edilir. Şimdi,

$$u_{-N} = \alpha u_N + \varphi$$

lokal olmayan sınır koşulu kullanılarak

$$u_{-N} = \alpha u_N + \varphi = \alpha \left[D^N u_0 + \tau \sum_{s=1}^N D^{N-s+1} f_s \right] + \varphi \quad (4.13)$$

ya da

$$u_{-N} = \alpha \left[D^N \left\{ R^N u_{-N} - i\tau \sum_{s=-N}^0 R^{-s+1} g_s \right\} + \tau \sum_{s=1}^N D^{N-s+1} f_s \right] + \varphi \quad (4.14)$$

elde edilir. Burada,

$$T_\tau = (1 - \alpha D^N R^N)^{-1}$$

olmak üzere

$$\|T_\tau\|_{H \rightarrow H} = \left\| (1 - \alpha D^N R^N)^{-1} \right\|_{H \rightarrow H} \leq M$$

eşitsizliğini sağlar. O halde,

$$u_{-N} = T_\tau \left[\alpha \left\{ -i\tau D^N \sum_{s=-N}^0 R^{-s+1} g_s + \tau \sum_{s=1}^N D^{N-s+1} f_s \right\} + \varphi \right] \quad (4.15)$$

yazılır. Dolayısıyla, (4.1) fark şemasının çözümü için (4.10), (4.12) ve (4.15) formülleri elde edilmiş olur. Böylece, ispatın ilk kısmı tamamlanmıştır.

İspatın ikinci kısmında ise, (4.5) ve (4.6) eşitsizlikleri ispatlanacaktır. İlk olarak (4.5) eşitsizliği ispatlanacaktır. Öncelikle, $\|u_{-N}\|_H$ elde edilecektir. (4.15) formülü kullanılarak

$$\|u_{-N}\|_H \leq \|T_\tau\|_H \left[|\alpha| \left\{ |-i| |\tau| \|D^N\|_{H \rightarrow H} \sum_{s=-N}^0 \|R^{-s+1}\|_{H \rightarrow H} \|g_s\|_H \right. \right.$$

$$+ |\tau| \left\{ \sum_{s=1}^N \|D^{N-s+1}\|_{H \rightarrow H} \|f_s\|_H \right\} + \|\varphi\|_H \Bigg]$$

ya da

$$\|u_{-N}\|_H \leq M \left[\max_{-N \leq k \leq 0} \|g_k\|_H + \max_{1 \leq k \leq N} \|f_k\|_H + \|\varphi\|_H \right] \quad (4.16)$$

kestirimi alınır. Şimdi, $1 \leq k \leq N$ için $\|u_k\|_H$ elde edilecektir. (4.12) formülü kullanılarak

$$\|u_k\|_H \leq \|D^k\|_{H \rightarrow H} \left[\|R^N\|_{H \rightarrow H} \|u_{-N}\|_H + |-i| |\tau| \sum_{s=-N}^0 \|R^{-s+1}\|_{H \rightarrow H} \|g_s\|_H \right] \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} & + |\tau| \sum_{s=1}^k \|D^{k-s+1}\|_{H \rightarrow H} \|f_s\|_H, 1 \leq k \leq N \\ & \leq \|u_{-N}\|_H + \max_{-N \leq k \leq 0} \|g_k\|_H + \max_{1 \leq k \leq N} \|f_k\|_H, 1 \leq k \leq N \end{aligned}$$

ya da

$$\|u_k\|_H \leq M \left[\max_{-N \leq k \leq 0} \|g_k\|_H + \max_{1 \leq k \leq N} \|f_k\|_H + \|\varphi\|_H \right], 1 \leq k \leq N \quad (4.18)$$

elde edilecektir. Son olarak $-N \leq k \leq 0$ için $\|u_k\|_H$ elde edilecektir. (4.12) formülü kullanılarak

$$\begin{aligned} \|u_k\|_H & \leq \|R^{N+k}\|_{H \rightarrow H} \|u_{-N}\|_H + |-i| |\tau| \sum_{s=-N}^k \|R^{k-s+1}\|_{H \rightarrow H} \|g_s\|_H, \\ & \leq \|u_{-N}\|_H + \max_{-N \leq k \leq 0} \|g_k\|_H, -N \leq k \leq 0 \end{aligned}$$

ya da

$$\|u_k\|_H \leq M \left[\|\varphi\|_H + \max_{-N \leq k \leq 0} \|g_k\|_H + \max_{1 \leq k \leq N} \|f_k\|_H \right], -N \leq k \leq 0 \quad (4.19)$$

elde edilir. Dolayısıyla, (4.18) ve (4.19) kestirimleri kullanılarak (4.5) eşitsizliği ispatlanır.

İkinci olarak (4.6) eşitsizliği ispatlanacaktır. (4.15) formülü ve Abel formülü kullanılarak

$$\begin{aligned} u_{-N} & = T_\tau \left[\alpha A^{-1} \left\{ R^N \left(R^N g_{-N} - R^{-1} g_0 + \sum_{s=-N+1}^1 R^{-s} [g_s - g_{s-1}] \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + D^{N-1} f_1 - D^{-1} f_N + \sum_{s=2}^{N+1} D^{N-s} [f_s - f_{s-1}] \right\} + \varphi \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$Au_{-N} = T_\tau \left[\alpha \left\{ R^N \left(R^N g_{-N} - R^{-1} g_0 + \sum_{s=-N+1}^1 R^{-s} [g_s - g_{s-1}] \right) \right. \right. \\ \left. \left. + D^{N-1} f_1 - D^{-1} f_N + \sum_{s=2}^{N+1} D^{N-s} [f_s - f_{s-1}] \right\} + A\varphi \right]$$

yazılır. O halde,

$$\|Au_{-N}\|_H \leq \|T_\tau\|_{H \rightarrow H} \left[|\alpha| \left\{ \|R^N\|_{H \rightarrow H} \left(\|R^N\|_{H \rightarrow H} \|g_{-N}\|_H + \|R^{-1}\|_{H \rightarrow H} \|g_0\|_H \right. \right. \right. \\ \left. \left. + |\tau| \sum_{s=-N+1}^1 \|R^{-s}\|_{H \rightarrow H} \|(g_s - g_{s-1}) \tau^{-1}\|_H \right) \right. \\ \left. + \|D^{N-1}\|_{H \rightarrow H} \|f_1\|_H + \|D^{-1}\|_{H \rightarrow H} \|f_N\|_H + \right. \\ \left. |\tau| \sum_{s=2}^{N+1} \|D^{N-s}\|_{H \rightarrow H} \|(f_s - f_{s-1}) \tau^{-1}\|_H \right\} + \|A\varphi\|_H \Big]$$

ya da

$$\|Au_{-N}\|_H \leq M \left[\|A\varphi\|_H + \|g_0\|_H + \max_{-N+1 \leq k \leq 0} \|(g_k - g_{k-1}) \tau^{-1}\|_H \right. \\ \left. + \|f_1\|_H + \max_{2 \leq k \leq N} \|(f_k - f_{k-1}) \tau^{-1}\|_H \right] \quad (4.20)$$

kestirimi almır. Şimdi, (4.10) formülü ve Abel formülü kullanılarak

$$u_k = R^{N+k} u_{-N} + A^{-1} \left[R^{N+k} g_{-N} - R^{-1} g_k + \sum_{s=-N+1}^k R^{k-s} [g_s - g_{s-1}] \right], \quad -N \leq k \leq 0$$

elde edilir. Buradan,

$$Au_k = R^{N+k} Au_{-N} + \left[R^{N+k} g_{-N} - R^{-1} g_k + \sum_{s=-N+1}^k R^{k-s} [g_s - g_{s-1}] \right], \quad -N \leq k \leq 0$$

yazılır. O halde,

$$\|Au_k\|_H \leq \|R^{N+k}\|_{H \rightarrow H} \|Au_{-N}\|_H + \left[\|R^{N+k}\|_{H \rightarrow H} \|g_{-N}\|_H + \|R^{-1}\|_{H \rightarrow H} \|g_k\|_H \right. \\ \left. + |\tau| \sum_{s=-N+1}^k \|R^{k-s}\|_{H \rightarrow H} \|(g_s - g_{s-1}) \tau^{-1}\|_H \right], \quad -N \leq k \leq 0 \\ \leq \|Au_{-N}\|_H + \|g_0\|_H + \max_{-N \leq k \leq 0} \|(g_k - g_{k-1}) \tau^{-1}\|_H$$

kestirimi almır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \|Au_k\|_H \leq M & \left[\|A\varphi\|_H + \|g_0\|_H + \max_{-N+1 \leq k \leq 0} \|(g_k - g_{k-1}) \tau^{-1}\|_H \right. \\ & \left. + \|f_1\|_H + \max_{2 \leq k \leq N} \|(f_k - f_{k-1}) \tau^{-1}\|_H \right], \quad -N \leq k \leq 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Son olarak (4.12) formülü ve Abel formülü kullanılarak

$$\begin{aligned} u_k = D^k & \left[R^N u_{-N} + A^{-1} \left\{ R^N g_{-N} - R^{-1} g_0 + \sum_{s=-N+1}^0 R^{-s} [g_s - g_{s-1}] \right\} \right. \\ & \left. + A^{-1} \left\{ D^{k-1} f_1 - D^{-1} f_0 + \sum_{s=2}^k D^{k-s} [f_s - f_{s-1}] \right\} \right], \quad 1 \leq k \leq N \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} Au_k = D^k & \left[R^N Au_{-N} + \left\{ R^N g_{-N} - R^{-1} g_0 + \sum_{s=-N+1}^0 R^{-s} [g_s - g_{s-1}] \right\} \right. \\ & \left. + \left\{ D^{k-1} f_1 - D^{-1} f_1 + \sum_{s=2}^k D^{k-s} [f_s - f_{s-1}] \right\} \right], \quad 1 \leq k \leq N \end{aligned}$$

yazılır. O halde,

$$\begin{aligned} \|Au_k\|_H & \leq \|D^k\|_{H \rightarrow H} \left[\|R^N\|_{H \rightarrow H} \|Au_{-N}\|_H + \left\{ \|R^N\|_{H \rightarrow H} \|g_{-N}\|_H + \|R^{-1}\|_{H \rightarrow H} \|g_0\|_H \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + |\tau| \sum_{s=-N+1}^0 \|R^{-s}\|_{H \rightarrow H} \|(g_s - g_{s-1}) \tau^{-1}\|_H \right\} \right. \\ & \left. + \left\{ \|D^{k-1}\|_{H \rightarrow H} \|f_1\|_H + \|D^{-1}\|_{H \rightarrow H} \|f_0\|_H + |\tau| \sum_{s=2}^k \|D^{k-s}\|_{H \rightarrow H} \|(f_s - f_{s-1}) \tau^{-1}\|_H \right\} \right] \\ & \leq M \left[\|A\varphi\|_H + \|g_0\|_H + \max_{-N+1 \leq k \leq 0} \|(g_k - g_{k-1}) \tau^{-1}\|_H \right. \\ & \quad \left. + \|f_1\|_H + \max_{2 \leq k \leq N} \|(f_k - f_{k-1}) \tau^{-1}\|_H \right], \quad 1 \leq k \leq N \end{aligned}$$

kestirimi almır. Dolayısıyla,

$$\|Au_k\|_H \leq M \left[\|A\varphi\|_H + \|g_0\|_H + \max_{-N \leq k \leq 0} \|(g_k - g_{k-1}) \tau^{-1}\|_H \right] \quad (4.22)$$

eşitsizliği elde edilir. Sonuç olarak, (4.20), (4.21) ve (4.22) kestirimleri kullanılarak (4.6) eşitsizliği ispatlanır.

4.2 UYGULAMALAR

Şimdi, Teorem 4.1 in iki farklı probleme uygulaması verilecektir. İlk olarak, (3.23) karma tipli parabolik-Schrödinger denklemini ele alalım. Temel Teorem 4.1 (3.23) karma tipli sınır-değer problemin tek değişkene göre birinci basamaktan doğruluklu yaklaşık çözümünün araştırılmasında uygulanmıştır. (3.23) probleminin diskritizasyonu iki aşamada gerçekleştirilir. İlk aşamada,

$$[0, 1]_h = \{x : x_n = nh, 0 \leq n \leq M, Mh = 1\},$$

ağ uzayı tanımlanır. Ardından $[0, 1]_h$ aralığında tanımlanan $\varphi^h(x)$ ağ fonksiyonları ve $L_{2h} = L_2([0, 1]_h)$, $W_{2h}^1 = W_2^1([0, 1]_h)$, $W_{2h}^2 = W_2^2([0, 1]_h)$ Hilbert uzayları tanımlanır. Belirtilen uzaylarda norm

$$\|\varphi^h\|_{L_{2h}} = \left(\sum_{n=1}^{M-1} |\varphi^h(x)|^2 h \right)^{1/2},$$

$$\|\varphi^h\|_{W_{2h}^1} = \|\varphi^h\|_{L_{2h}} + \left(\sum_{n=1}^{M-1} |(\varphi^h)_{\bar{x},j}|^2 h \right)^{1/2},$$

$$\|\varphi^h\|_{W_{2h}^2} = \|\varphi^h\|_{L_{2h}} + \left(\sum_{n=1}^{M-1} |(\varphi^h)_{\bar{x},j}|^2 h \right)^{1/2} + \left(\sum_{n=1}^{M-1} |(\varphi^h)_{x\bar{x},j}|^2 h \right)^{1/2}$$

formülleri ile tanımlanır. (3.23) problemi tarafından oluşturulan A diferansiyel operatörü yerine

$$A_h^x \varphi^h(x) = \left\{ -(a(x)\varphi_{\bar{x}})_{x,n} + \delta\varphi_n \right\}_1^{M-1} \quad (4.23)$$

formülüyle tanımlanan A_h^x fark operatörü alınır. Burada A_h^x fark operatörü $\varphi^0 = \varphi^M$, $\varphi^1 - \varphi^0 = \varphi^M - \varphi^{M-1}$ şartlarını sağlayan $\varphi^h(x) = \{\varphi^n\}_0^M$ ağ fonksiyonları uzayında tanımlanmıştır. Bilindiği gibi A_h^x fark operatörü L_{2h} Hilbert uzayında pozitif tanımlı öz-eşlenik bir operatördür. Bu durumda A_h^x fark operatörünün yardımıyla (3.23) lokal olmayan sınır-değer problemi

$$\begin{cases} \frac{dv^h(y, x)}{dy} + A_h^x v^h(y, x) = f^h(y, x), & 0 \leq y \leq 1, x \in [0, 1]_h, \\ i \frac{dv^h(y, x)}{dy} + A_h^x v^h(y, x) = g^h(y, x), & -1 \leq y \leq 0, x \in [0, 1]_h, \\ v^h(-1, x) = v^h(1, x) + \varphi^h(x), & x \in [0, 1]_h, \\ v^h(0^+, x) = v^h(0^-, x), \frac{dv^h(0^+, x)}{dy} = \frac{dv^h(0^-, x)}{dy}, & x \in [0, 1]_h, \end{cases} \quad (4.24)$$

adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürülebilir.

İkinci aşamada ise, (4.24) problemi için, (4.1) fark şeması kullanılarak,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau} + A_h^x u_k^h = f_k^h(x), \quad x \in [0, 1]_h, \\ f_k^h(x) = \{f(y_k, x_n)\}_1^{M-1}, \quad y_k = k\tau, \quad 1 \leq k \leq N, \quad N\tau = 1, \\ i \frac{u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau} + A_h^x u_k^h = g_k^h(x), \quad x \in [0, 1]_h, \\ g_k^h(x) = \{g(y_k, x_n)\}_1^{M-1}, \quad y_k = k\tau, \quad -N + 1 \leq k \leq 0, \\ u_{-N}^h(x) = u_N^h(x) + \varphi^h(x), \quad x \in [0, 1]_h, \\ i \frac{u_1^h(x) - u_0^h(x)}{\tau} = -A_h^x u_0^h(x) + g_0^h(x), \quad g_0^h(x) = g^h(0, x), \quad x \in [0, 1]_h \end{array} \right. \quad (4.25)$$

birinci basamaktan doğruluklu fark şeması elde edilir.

Teorem 4.2. Eğer τ ve h yeterince küçük sayılar ise, bu durumda (4.25) fark şemasının çözümü aşağıdaki

$$\begin{aligned} \max_{-N \leq k \leq N} \|(u_k^h)_x\|_{L_{2h}} &\leq C \left[\left\| \varphi_x^h \right\|_{L_{2h}} + \max_{1 \leq k \leq N} \|f_k^h\|_{L_{2h}} + \max_{-N+1 \leq k \leq 0} \|g_k^h\|_{L_{2h}} \right] \\ \max_{-N \leq k \leq N} \left\| \left(\frac{u_k^h}{x} \right)_x \right\|_{W_{2h}^2} &\leq C \left[\|f_{1x}^h\|_{L_{2h}} + \max_{2 \leq k \leq N-1} \|(f_k - f_{k-1}) \tau^{-1}\|_{L_{2h}} \right. \\ &\quad \left. + \|g_{0x}^h\|_{L_{2h}} + \max_{-N+1 \leq k \leq 0} \|(g_k^h - g_{k-1}^h) \tau^{-1}\|_{L_{2h}} + \left\| \left(\frac{\varphi^h}{x} \right)_x \right\|_{W_{2h}^1} \right] \end{aligned}$$

kararlılık kestirimlerini sağlar. Burada, C sabiti τ , h , $\varphi^h(x)$ ve $f_k^h(x)$, $1 \leq k \leq N$, g_k^h , $-N + 1 \leq k \leq 0$ 'dan bağımsızdır.

Teorem 4.2 nin ispatı, Teorem 4.1 ve (4.31) formülü ile tanımlanan A_h^x fark operatörünün simetri özelliklerine dayanmaktadır.

İkinci olarak, çok boyutlu parabolik-Schrödinger denklem (3.24) için karma tipli sınır-değer problemini ele alalım. Burada da (3.24) probleminin diskritizasyonu iki adımda incelenir. Birinci adımda önce,

$$\tilde{\Omega}_h = \{x = x_m = (h_1 m_1, \dots, h_n m_n), m = (m_1, \dots, m_n),$$

$$0 \leq m_r \leq N_r, h_r N_r = L, r = 1, \dots, n\},$$

$$\Omega_h = \tilde{\Omega}_h \cap \Omega, S_h = \tilde{\Omega}_h \cap S$$

ağ uzayı tanımlanır. Ardından $\tilde{\Omega}_h$ kümesinde tanımlanan

$$\varphi^h(x) = \{\varphi(h_1 m_1, \dots, h_n m_n)\}$$

ağ fonksiyonları $L_{2h} = L_2(\tilde{\Omega}_h)$, $W_{2h}^1 = W_{2h}^1(\tilde{\Omega}_h)$, $W_{2h}^2 = W_{2h}^2(\tilde{\Omega}_h)$ Banach uzayları tanımlanır. Bu uzaylarda norm

$$\begin{aligned} \|\varphi^h\|_{L_2(\tilde{\Omega}_h)} &= \left(\sum_{x \in \tilde{\Omega}_h} |\varphi^h(x)|^2 h_1 \cdots h_n \right)^{1/2}, \\ \|\varphi^h\|_{W_{2h}^1} &= \|\varphi^h\|_{L_{2h}} + \left(\sum_{x \in \tilde{\Omega}_h} \sum_{r=1}^n |(\varphi^h)_{x_r}|^2 h_1 \cdots h_n \right)^{1/2}, \\ \|\varphi^h\|_{W_{2h}^2} &= \|\varphi^h\|_{L_{2h}} + \left(\sum_{x \in \tilde{\Omega}_h} \sum_{r=1}^n |(\varphi^h)_{x_r}|^2 h_1 \cdots h_n \right)^{1/2} \\ &\quad + \left(\sum_{x \in \tilde{\Omega}_h} \sum_{r=1}^n |(\varphi^h)_{x_r \bar{x}_r, j_r}|^2 h_1 \cdots h_n \right)^{1/2} \end{aligned}$$

formülleri ile tanımlanır. Daha sonra, (3.24) problemi tarafından oluşturulan A diferansiyel operatörü yerine

$$A_h^x u_x^h = - \sum_{r=1}^n \left(a_r(x) u_{x_r}^h \right)_{x_r, j_r}, \quad (4.26)$$

formülüyle tanımlanan A_h^x fark operatörü alınır. Burada A_h^x fark operatörü her $x \in S_h$ değerleri için $u^h(x) = 0$ koşullarını sağlayan $u^h(x)$ fonksiyonları uzayında tanımlanmıştır. Bilindiği üzere $L_2(\tilde{\Omega}_h)$ uzayında A_h^x fark operatörü pozitif tanımlı ve öz-eşlenik bir operatördür. Bu halde, A_h^x fark operatörünün yardımıyla

$$\begin{cases} \frac{dv^h(y, x)}{dy} + A_h^x v^h(y, x) = f^h(y, x), & 0 \leq y \leq 1, \quad x \in \tilde{\Omega}_h, \\ i \frac{dv^h(y, x)}{dy} + A_h^x v^h(y, x) = g^h(y, x), & -1 \leq y \leq 0, \quad x \in \tilde{\Omega}_h, \\ v^h(-1, x) = v^h(1, x) + \varphi^h(x), & x \in \tilde{\Omega}_h, \\ v^h(0^+, x) = v^h(0^-, x), \quad \frac{dv^h(0^+, x)}{dy} = \frac{dv^h(0^-, x)}{dy}, & x \in \tilde{\Omega}_h, \end{cases} \quad (4.27)$$

adi diferansiyel denklem sistemi elde edilir. İkinci aşamada ise, (4.27) problemi yerine

(4.1) fark şeması kullanılarak,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau} + A_h^x u_k^h = f_k^h(x), x \in \tilde{\Omega}_h, \\ f_k^h(x) = \{f(y_k, x_n)\}_1^{M-1}, y_k = k\tau, 1 \leq k \leq N, N\tau = 1, \\ i \frac{u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau} + A_h^x u_k^h = g_k^h(x), x \in \tilde{\Omega}_h, \\ g_k^h(x) = \{g(y_k, x_n)\}_1^{M-1}, y_k = k\tau, -N+1 \leq k \leq -1, \\ u_{-N}^h(x) = u_N^h(x) + \varphi^h(x), x \in \tilde{\Omega}_h, \\ i \frac{u_1^h(x) - u_0^h(x)}{\tau} = -A_h^x u_0^h(x) + g_0^h(x), g_0^h(x) = g^h(0, x), x \in \tilde{\Omega}_h \end{array} \right. \quad (4.28)$$

birinci basamaktan doğruluklu fark şeması elde edilir.

Teorem 4.3. Eğer τ ve $|h|$ yeterince küçük sayılar ise, bu durumda (4.28) fark şemasının çözümü için aşağıdaki

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n \left\| (u_k^h)_{x_r, j_r} \right\|_{L_{2h}} &\leq C \left[\sum_{r=1}^n \left\| (\varphi^h)_{\bar{x}_r, j_r} \right\|_{L_{2h}} + \max_{1 \leq k \leq N} \|f_k^h\|_{L_{2h}} + \max_{-N+1 \leq k \leq 0} \|g_k^h\|_{L_{2h}} \right], \\ \max_{-N \leq k \leq N} \sum_{r=1}^n \left\| (u_k^h)_{\bar{x}_r, x_r, j_r} \right\|_{W_{2h}^2} &\leq C \left[\sum_{r=1}^n \left\| (f_1^h)_{\bar{x}_r, j_r} \right\|_{L_{2h}} + \max_{2 \leq k \leq N-1} \|(f_k - f_{k-1}) \tau^{-1}\|_{L_{2h}} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{r=1}^n \left\| (g_0^h)_{\bar{x}_r, j_r} \right\|_{L_{2h}} + \max_{-N+1 \leq k \leq 0} \|(g_k^h - g_{k-1}^h) \tau^{-1}\|_{L_{2h}} + \sum_{r=1}^n \left\| (\varphi^h)_{\bar{x}_r, x_r, j_r} \right\|_{W_{2h}^1} \right] \end{aligned}$$

kararlılık kestirimleri sağlanır. Burada, C sabiti $\tau, h, \varphi^h(x)$ ve $f_k^h(x), 1 \leq k \leq N, g_k^h, -N+1 \leq k \leq 0$ 'dan bağımsızdır.

Teorem 4.3 ün ispatı Temel Teorem 4.1'e, (4.26) formülü ile tanımlanan A_h^x fark operatörünün simetri özelliklerine ve aşağıdaki L_{2h} uzayındaki eliptik fark probleminin çözümü için koersiv kestirimi elde edilen teoreme dayanmaktadır (bkz: [Sobolevskii, P. E., 1975]).

Teorem 4.4. Eliptik fark probleminin

$$\left\{ \begin{array}{l} - \sum_{r=1}^n \left(a_r(x) u_{\bar{x}_r}^h \right)_{x_r, j_r} = \omega^h(x), x \in \Omega_h, \\ u^h(x) = 0, x \in S_h, \end{array} \right.$$

çözümü için

$$\sum_{r=1}^m \left\| u_{x_r, \bar{x}_r, j_r}^h \right\|_{L_{2h}} \leq M \left\| \omega^h \right\|_{L_{2h}}, \quad (4.29)$$

koersivite kestirimi sağlanır

4.3 İKİNCİ BASAMAKTAN DOĞRULUKLU FARK ŞEMASI

(3.1) sınır-değer problemi ile r -iyileştirilmiş Crank-Nicholson fark şeması tarafından üretilen

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} + A \left(\frac{u_k + u_{k-1}}{2} \right) = f_k, \\ f_k = f(t_k - \frac{\tau}{2}), t_k = k\tau, 1 \leq k < N, k\tau = 1, \\ i \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} + A \left(\frac{u_k + u_{k-1}}{2} \right) = g_k, \\ g_k = g(t_k - \frac{\tau}{2}), t_k = k\tau, -N \leq k < 0, k\tau = 1, \\ \tau^{-1} (I + \tau^2 A) (u_1 - u_0) = \frac{\tau}{2} [f(0) - Au_0] + [g(0) - Au_0], \\ u_{-N} = \alpha u_N + \varphi \end{array} \right. \quad (4.30)$$

ikinci basamaktan doğruluklu fark şemasını ele alalım. Birinci basamaktan doğruluklu fark şemasının kararlılık kestirimlerinin ispatındaki gibi, benzer şekilde aşağıdaki teorem ispatlanabilir.

Teorem 4.5. Eğer $\varphi \in D(A)$ ise, bu durumda (4.30) fark şemasının çözümü için aşağıdaki

$$\begin{aligned} \max_{-N \leq k \leq N} \|u_k\|_H &\leq M \left[\|\varphi\|_H + \max_{-N \leq k \leq 0} \|g_k\|_H + \max_{1 \leq k \leq N} \|f_k\|_H \right] \\ \max_{-N \leq k \leq N} \|Au_k\|_H &\leq M \left[\|A\varphi\|_H + \|g_0\|_H + \max_{-N+1 \leq k \leq 0} \|(g_k - g_{k-1}) \tau^{-1}\|_H \right. \\ &\quad \left. + \|f_1\|_H + \max_{2 \leq k \leq N} \|(f_k - f_{k-1}) \tau^{-1}\|_H \right] \end{aligned}$$

kararlılık kestirimleri sağlanır. Burada, M katsayısı $\tau, f_k, 1 \leq k < N, g_k, -N < k \leq 0$ ve φ den bağımsızdır.

4.4 UYGULAMALAR

Şimdi, Teorem 4.5 in uygulamaları verilecektir. İlk olarak, (3.23) karma tipli parabolik-Schrödinger denklemini ele alalım. Temel Teorem 4.5 (3.23) karma tipli sınır-değer problemin tek değişkene göre birinci basamaktan doğruluklu yaklaşık çözümünün araştırılmasında uygulanmıştır. (3.23) probleminin diskritizasyonu iki aşamada gerçekleştirilir. İlk aşamada,

$$[0, 1]_h = \{x : x_n = nh, 0 \leq n \leq M, Mh = 1\}$$

ağ uzayı tanımlanır. Ardından $[0, 1]_h$ aralığında tanımlanan $\varphi^h(x)$ ağ fonksiyonları ve $L_{2h} = L_2([0, 1]_h)$, $W_{2h}^1 = W_2^1([0, 1]_h)$, $W_{2h}^2 = W_2^2([0, 1]_h)$ Hilbert uzayları tanımlanır.

Belirtilen uzaylarda norm

$$\|\varphi^h\|_{L_{2h}} = \left(\sum_{n=1}^{M-1} |\varphi^h(x)|^2 h \right)^{1/2},$$

$$\|\varphi^h\|_{W_{2h}^1} = \|\varphi^h\|_{L_{2h}} + \left(\sum_{n=1}^{M-1} |(\varphi^h)_{\bar{x},j}|^2 h \right)^{1/2},$$

$$\|\varphi^h\|_{W_{2h}^2} = \|\varphi^h\|_{L_{2h}} + \left(\sum_{n=1}^{M-1} |(\varphi^h)_{\bar{x},j}|^2 h \right)^{1/2} + \left(\sum_{n=1}^{M-1} |(\varphi^h)_{x\bar{x},j}|^2 h \right)^{1/2}$$

formülleri ile tanımlanır. (3.23) problemi tarafından oluşturulan A diferansiyel operatörü yerine

$$A_h^x \varphi^h(x) = \left\{ -(a(x)\varphi_x)_{x,n} + \delta\varphi_n \right\}_1^{M-1} \quad (4.31)$$

formülüyle tanımlanan A_h^x fark operatörü alınır. Burada A_h^x fark operatörü $\varphi^0 = \varphi^M$, $\varphi^1 - \varphi^0 = \varphi^M - \varphi^{M-1}$ şartlarını sağlayan $\varphi^h(x) = \{\varphi^n\}_{0^M}$ ağ fonksiyonları uzayında tanımlanmıştır. Bilindiği gibi A_h^x fark operatörü L_{2h} Hilbert uzayında pozitif tanımlı öz-eşlenik bir operatördür. Bu durumda A_h^x fark operatörünün yardımıyla (3.23) lokal olmayan sınır-değer problemi (4.24) adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürülebilir.

İkinci aşamada ise (4.24) problemi için, (??) fark şeması kullanılarak,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau} + A_h^x \left(\frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right) = f_k^h(x), \quad x \in [0, 1]_h, \\ f_k^h(x) = \{f(y_k - \frac{\tau}{2}, x_n)\}_1^{M-1}, \quad y_k = k\tau, \quad 1 \leq k \leq N, \quad N\tau = 1, \\ i \frac{u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau} + A_h^x \left(\frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right) = g_k^h(x), \quad x \in [0, 1]_h, \\ g_k^h(x) = \{g(y_k - \frac{\tau}{2}, x_n)\}_1^{M-1}, \quad y_k = k\tau, \quad -N + 1 \leq k \leq 0, \\ \tau^{-1} (I + \tau^2 A_h^x) (u_1^h(x) - u_0^h(x)) = \frac{\tau}{2} [f^h(0, x) - A_h^x u_0^h(x)] \\ + [g^h(0, x) - A_h^x u_0^h(x)], \quad x \in [0, 1]_h, \\ u_{-N}^h(x) = u_N^h(x) + \varphi^h(x), \quad x \in [0, 1]_h \end{array} \right. \quad (4.32)$$

birinci basamaktan doğruluklu fark şeması elde edilir.

Teorem 4.6. Eğer τ ve h yeterince küçük sayılar ise, bu durumda (4.32) fark şemasının çözümünü aşağıdaki

$$\max_{-N \leq k \leq N} \|(u_k^h)_x\|_{L_{2h}} \leq C \left[\|\varphi_x^h\|_{L_{2h}} + \max_{1 \leq k \leq N} \|f_k^h\|_{L_{2h}} + \max_{-N+1 \leq k \leq 0} \|g_k^h\|_{L_{2h}} \right]$$

$$\begin{aligned} \max_{-N \leq k \leq N} \left\| \left(u_{\bar{x}}^k \right)_x \right\|_{W_{2h}^2} &\leq C \left[\left\| f_{0x}^h \right\|_{L_{2h}} + \max_{2 \leq k \leq N-1} \left\| (f_k - f_{k-1}) \tau^{-1} \right\|_{L_{2h}} \right. \\ &\left. + \left\| g_{0x}^h \right\|_{L_{2h}} + \max_{-N+1 \leq k \leq 0} \left\| (g_k^h - g_{k-1}^h) \tau^{-1} \right\|_{L_{2h}} + \left\| \left(\varphi_{\bar{x}}^h \right)_x \right\|_{W_{2h}^1} \right] \end{aligned}$$

kararlılık kestirimlerini sağlar. Burada, C sabiti τ , h , $\varphi^h(x)$ ve $f_k^h(x)$, $1 \leq k \leq N$, g_k^h , $-N+1 \leq k \leq 0$ 'dan bağımsızdır.

Teorem 4.6'nın ispatı, Teorem 4.1 ve (4.31) formülü ile tanımlanan A_h^x fark operatörünün simetri özelliklerine dayanmaktadır.

İkinci olarak, çok boyutlu parabolik-Schrödinger denklem (3.24) için karma tipli sınır-değer problemini ele alalım. Burada da (3.24) probleminin diskritizasyonu iki adımda incelenir. Birinci adımda önce,

$$\tilde{\Omega}_h = \{x = x_m = (h_1 m_1, \dots, h_n m_n), m = (m_1, \dots, m_n),$$

$$0 \leq m_r \leq N_r, h_r N_r = L, r = 1, \dots, n\},$$

$$\Omega_h = \tilde{\Omega}_h \cap \Omega, S_h = \tilde{\Omega}_h \cap S$$

ağ uzayı tanımlanır. Ardından $\tilde{\Omega}_h$ kümesinde tanımlanan

$$\varphi^h(x) = \{\varphi(h_1 m_1, \dots, h_n m_n)\}$$

ağ fonksiyonları $L_{2h} = L_2(\tilde{\Omega}_h)$, $W_{2h}^1 = W_{2h}^1(\tilde{\Omega}_h)$, $W_{2h}^2 = W_{2h}^2(\tilde{\Omega}_h)$ Banach uzayları tanımlanır. Bu uzaylarda norm

$$\begin{aligned} \left\| \varphi^h \right\|_{L_2(\tilde{\Omega}_h)} &= \left(\sum_{x \in \tilde{\Omega}_h} \left| \varphi^h(x) \right|^2 h_1 \cdots h_n \right)^{1/2}, \\ \left\| \varphi^h \right\|_{W_{2h}^1} &= \left\| \varphi^h \right\|_{L_{2h}} + \left(\sum_{x \in \tilde{\Omega}_h} \sum_{r=1}^n \left| (\varphi^h)_{x_r} \right|^2 h_1 \cdots h_n \right)^{1/2}, \\ \left\| \varphi^h \right\|_{W_{2h}^2} &= \left\| \varphi^h \right\|_{L_{2h}} + \left(\sum_{x \in \tilde{\Omega}_h} \sum_{r=1}^n \left| (\varphi^h)_{x_r} \right|^2 h_1 \cdots h_n \right)^{1/2} \\ &\quad + \left(\sum_{x \in \tilde{\Omega}_h} \sum_{r=1}^n \left| (\varphi^h)_{x_r \bar{x}_r, j_r} \right|^2 h_1 \cdots h_n \right)^{1/2} \end{aligned}$$

formülleri ile tanımlanır. Daha sonra, (3.24) problemi tarafından oluşturulan A diferansiyel operatörü yerine (4.26) formülüyle tanımlanan A_h^x fark operatörü alınır. Burada A_h^x fark operatörü her $x \in S_h$ değerleri için $u^h(x) = 0$ koşullarını sağlayan $u^h(x)$ fonksiyonları uzayında tanımlanmıştır. Bilindiği üzere $L_2(\tilde{\Omega}_h)$ uzayında A_h^x fark operatörü pozitif tanımlı ve öz-eşlenik bir operatördür. Bu halde, A_h^x fark operatörünün yardımıyla (3.24) lokal olmayan sınır-değer problemi (4.27) adi diferansiyel denklem sistemi elde edilir. İkinci aşamada ise, (4.27) problemi yerine (4.30) fark şeması kullanılarak

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau} + A_h^x \left(\frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right) = f_k^h(x), x \in \tilde{\Omega}_h, \\ f_k^h(x) = \{f(y_k - \frac{\tau}{2}, x_n)\}_1^{M-1}, y_k = k\tau, 1 \leq k \leq N-1, N\tau = 1, \\ i \frac{u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau} + A_h^x \left(\frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right) = g_k^h(x), x \in \tilde{\Omega}_h, \\ g_k^h(x) = \{g(y_k - \frac{\tau}{2}, x_n)\}_1^{M-1}, y_k = k\tau, -N+1 \leq k \leq -1, \\ \tau^{-1} (I + \tau^2 A_h^x) (u_1^h(x) - u_0^h(x)) = \frac{\tau}{2} [f^h(0, x) - A_h^x u_0^h(x)] \\ + [g^h(0, x) - A_h^x u_0^h(x)], x \in \tilde{\Omega}_h, \\ u_{-N}^h(x) = u_N^h(x) + \varphi^h(x), x \in \tilde{\Omega}_h \end{array} \right. \quad (4.33)$$

birinci basamaktan doğruluklu fark şeması elde edilir.

Teorem 4.7. Eğer τ ve $|h|$ yeterince küçük sayılar ise, bu durumda (4.33) fark şemasının çözümü için aşağıdaki

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n \left\| (u_k^h)_{x_r, j_r} \right\|_{L_{2h}} &\leq C \left[\sum_{r=1}^n \left\| (\varphi^h)_{\bar{x}_r, j_r} \right\|_{L_{2h}} + \max_{1 \leq k \leq N} \|f_k^h\|_{L_{2h}} + \max_{-N+1 \leq k \leq 0} \|g_k^h\|_{L_{2h}} \right], \\ \max_{-N \leq k \leq N} \sum_{r=1}^n \left\| (u_k^h)_{\bar{x}_r, x_r, j_r} \right\|_{W_{2h}^2} &\leq C \left[\sum_{r=1}^n \left\| (f_1^h)_{\bar{x}_r, j_r} \right\|_{L_{2h}} + \max_{2 \leq k \leq N-1} \|(f_k - f_{k-1}) \tau^{-1}\|_{L_{2h}} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{r=1}^n \left\| (g_0^h)_{\bar{x}_r, j_r} \right\|_{L_{2h}} + \max_{-N+1 \leq k \leq 0} \|(g_k^h - g_{k-1}^h) \tau^{-1}\|_{L_{2h}} + \sum_{r=1}^n \left\| (\varphi^h)_{\bar{x}_r, x_r, j_r} \right\|_{W_{2h}^1} \right] \end{aligned}$$

kararlılık kestirimleri sağlanır. Burada, C sabiti $\tau, h, \varphi^h(x)$ ve $f_k^h(x), 1 \leq k \leq N, g_k^h, -N+1 \leq k \leq 0$ 'dan bağımsızdır.

Teorem 4.7 nin ispatı Temel Teorem 4.1'e, (4.26) formülü ile tanımlanan A_h^x fark operatörünün simetri özelliklerine ve aşağıdaki L_{2h} uzayındaki eliptik fark probleminin çözümünü için koersiv kestirimi elde edilen teoreme dayanmaktadır (bkz: [Sobolevskii, P. E., 1975]).

Teorem 4.8. Eliptik fark probleminin

$$\left\{ \begin{array}{l} - \sum_{r=1}^n \left(a_r(x) u_{x_r}^h \right)_{x_r, j_r} = \omega^h(x), x \in \Omega_h, \\ u^h(x) = 0, x \in S_h, \end{array} \right.$$

çözümü için

$$\sum_{r=1}^m \| u_{x_r, \bar{x}_r, j_r}^h \|_{L_{2h}} \leq M \| \omega^h \|_{L_{2h}},$$

koersivite kestirimi sağlanır.

5 NÜMERİK ANALİZ

Bu bölümde parabolik-Schrödinger denkleminin lokal olmayan sınır-değer problemini

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = f(t, x), 0 < t < 1, 0 < x < 1, \\ i \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = g(t, x), -1 < t < 0, 0 < x < 1, \\ u(0^+, x) = u(0^-, x); u_t(0^+, x) = u_t(0^-, x) \\ u(-1, x) = u(1, x) + \varphi(x), 0 \leq x \leq 1, \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0, -1 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (5.1)$$

ele alalım. Burada

$$f(t, x) = (2 - 2t) e^{-t^2} \sin x$$

$$g(t, x) = (2 - 2it) e^{-t^2} \sin x$$

ve

$$\varphi(x) = 2e^{-1} \sin x$$

dir. (5.1) probleminin gerçek çözümü

$$u(t, x) = e^{-t^2} \sin x$$

dir.

(5.1) probleminin yaklaşık çözümü için, $\tau = h = 1/30$ olmak üzere birinci ve ikinci basamaktan doğruluklu fark şemaları kullanılacaktır. İkinci mertebeden, katsayıları matris olan, n 'ye göre fark denklemleri elde edilecektir. Bu fark denklemlerini çözmek için, iyileştirilmiş-Gauss eliminasyon yöntemi kullanılacaktır. Sayısal denemelerin sonucu olarak ikinci basamaktan doğruluklu fark şemalarının birinci basamaktan doğruluklu fark şemalarına oranla daha doğru olduğu gösterilecektir.

5.1 BİRİNCİ BASAMAKTAN DOĞRULUKLU FARK ŞEMASI

Parabolik-Schrodinger denklemi için lokal olmayan sınır-değer problemini (5.1) göz önüne alalım. (5.1) probleminin yaklaşık çözümü için, τ üzerinden tanımlı ağ nok-

talarının ailesini ve

$$[0, 1]_\tau \times [0, \pi]_h = \{(t_k, x_n) : t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N-1, N\tau = 1,$$

$$x_n = nh, 1 \leq n \leq M-1, Mh = \pi\}$$

ifadesini $[0, 1]_\tau \times [0, \pi]_h$ aralığında göz önüne alalım. Aşağıdaki

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} - \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} + u_n^k = f(t_k, x_n), \\ t_k = k\tau, 1 \leq k < N-1, 1 \leq n < M-1 \\ i \frac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} - \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} + u_n^k = g(t_k, x_n), \\ t_k = k\tau, -N+1 \leq k < 0, 1 \leq n < M-1, \\ u_n^1 - u_n^0 = u_n^0 - u_n^{-1}, \\ u_n^{-N} = u_n^N + \varphi(x_n), \\ u_0^k = u_M^k = 0 \end{array} \right.$$

veya

$$\left\{ \begin{array}{l} (-\frac{1}{h^2})u_{n+1}^k + (-\frac{i}{\tau})u_n^{k-1} + (\frac{i}{\tau} + \frac{2}{h^2} + 1)u_n^k + (-\frac{1}{h^2})u_{n-1}^k = g(t_k, x_n), \\ -N+1 \leq k \leq 0, 1 \leq n \leq M-1, \\ (-\frac{1}{h^2})u_{n+1}^k + (-\frac{1}{\tau})u_n^{k-1} + (\frac{1}{\tau} + \frac{2}{h^2} + 1)u_n^k + (-\frac{1}{h^2})u_{n-1}^k = f(t_k, x_n), \\ u_n^1 - u_n^0 = u_n^0 - u_n^{-1} \\ u_n^{-N} = u_n^N + \varphi(x_n), x_n = hn, 1 \leq n \leq M-1, \\ u_0^k = u_M^k = 0, 0 \leq k \leq N. \\ f(t, x) = (2 - 2t)e^{-t^2} \sin x \\ g(t, x) = (2 - 2it)e^{-t^2} \sin x \end{array} \right. \quad (5.2)$$

sunulur.

Burada, $(2N+1) \times (2N+1)$ boyutlu doğrusal denklem sistemi elde edilmiş olur.

Bu doğrusal denklem sistemi düzenlenerek matris formunda yazılırsa

$$\left\{ \begin{array}{l} Au_{n+1} + Bu_n + Cu_{n-1} = D\varphi, 1 \leq n \leq M-1, \\ U_0 = \vec{0}, U_M = \vec{0} \end{array} \right.$$

elde edilir. Böylece,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \end{bmatrix}_{(2N+1) \times (2N+1)}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & e & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(2N+1) \times (2N+1)},$$

ve $C = A$, $D = [I]_{(2N+1) \times (2N+1)}$ birim matristir. Burada,

$$a = -\frac{1}{h^2}, b = -\frac{i}{\tau}, c = \frac{i}{\tau} + \frac{2}{h^2} + 1,$$

$$d = -\frac{1}{\tau}, e = \frac{1}{\tau} + \frac{2}{h^2} + 1,$$

$$\varphi_n^k = \begin{cases} 2e^{-1} \sin x, \\ g(t_k, x_n), N+1 \leq k \leq 0, \\ f(t_k, x_n), 1 \leq k \leq N-1, \\ 0, k = N, \end{cases}$$

$$\varphi_n = \begin{bmatrix} \varphi_n^{-N} \\ \varphi_n^{-N+1} \\ \vdots \\ \varphi_n^0 \\ \varphi_n^1 \\ \vdots \\ \varphi_n^{N-1} \\ \varphi_n^N \end{bmatrix}_{(2N+1) \times 1}, U_s = \begin{bmatrix} u_s^{-N} \\ u_s^{-N+1} \\ \vdots \\ u_s^0 \\ u_s^1 \\ \vdots \\ u_s^{N-1} \\ u_s^N \end{bmatrix}_{(2N+1) \times 1}, s = n \pm 1, n$$

dir. (5.4) matris denkleminin çözümü için iyileştirilmiş Gauss yok etme yöntemi kullanılır. Bu yüzden aşağıdaki formda,

$$U_n = \alpha_{n+1}U_{n+1} + \beta_{n+1}, n = M - 1, \dots, 2, 1, 0,$$

bir çözüm aranmaktadır. Öyle ki α_j ($j = 1, \dots, M - 1$) 'ler $(2N + 1) \times (2N + 1)$ tipinde kare matris ve β_j ($j = 1, \dots, M - 1$) 'ler $(2N + 1) \times 1$ şeklinde sütun matris ve α_1, β_1

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(2N+1) \times (2N+1)}, \beta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{(2N+1) \times 1}.$$

biçimindedir. Aşağıdaki eşitlik

$$U_s = \alpha_{s+1}U_{s+1} + \beta_{s+1}, (s = n, n - 1 \text{ için}),$$

ve

$$Au_{n+1} + Bu_n + Cu_{n-1} = D\varphi_n$$

eşitliği kullanılarak

$$[A + B\alpha_{n+1} + C\alpha_n\alpha_{n+1}]U_{n+1} + [B\beta_{n+1} + C\alpha_n\beta_{n+1} + C\beta_n] = D\varphi_n.$$

yazılabilir. Son denklemin

$$A + B\alpha_{n+1} + C\alpha_n\alpha_{n+1} = 0,$$

$$[B\beta_{n+1} + C\alpha_n\beta_{n+1} + C\beta_n] = D\varphi_n, 1 \leq n \leq M-1$$

şeklinde seçilmesi uygundur. O halde, $\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}$ için formüller

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = -(B + C\alpha_n)^{-1} A, \\ \beta_{n+1} = (B + C\alpha_n)^{-1} (D\varphi_n - C\beta_n), n = 1, 2, \dots, M-1 \end{cases}$$

biçimindedir. Bu yüzden

$$U_M = \vec{0},$$

$$U_n = \alpha_{n+1}U_{n+1} + \beta_{n+1}, n = M-1, \dots, 2, 1, 0$$

olacaktır.

5.2 İKİNCİ BASAMAKTAN DOĞRULUKLU FARK ŞEMASI

(5.1) probleminin yaklaşık çözümü için,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} - \frac{1}{2} \left(\frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} + \frac{u_{n+1}^{k-1} - 2u_n^{k-1} + u_{n-1}^{k-1}}{h^2} \right) + \frac{1}{2}u_n^k + \frac{1}{2}u_n^{k-1} \\ = f\left(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n\right), 1 \leq k \leq N-1, 1 \leq n \leq M-1, \\ i \frac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} - \frac{1}{2} \left(\frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} + \frac{u_{n+1}^{k-1} - 2u_n^{k-1} + u_{n-1}^{k-1}}{h^2} \right) + \frac{1}{2}u_n^k + \frac{1}{2}u_n^{k-1} \\ = g\left(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n\right), -(N-1) \leq k \leq 0, 1 \leq n \leq M-1, \\ \frac{u_n^1 - u_n^0}{\tau} - \frac{\tau}{h^2} (u_{n+1}^1 - 2u_n^1 + u_{n-1}^1 - u_{n+1}^0 + 2u_n^0 - u_{n-1}^0) \\ = \frac{\tau}{2} \left(f(0, x_n) + \frac{1}{h^2} (u_{n+1}^0 - 2u_n^0 + u_{n-1}^0) \right) \\ + \left(g(0, x_n) + \frac{1}{h^2} (u_{n+1}^0 - 2u_n^0 + u_{n-1}^0) \right), x_n = nh, 2 \leq n \leq M-2, \\ u_n^{-N} = u_n^N + \varphi(x_n), x_n = hn, 1 \leq n \leq M-1, \\ u_0^k = u_M^k = 0, 0 \leq k \leq N, \\ f(t, x) = (2 - 2t) e^{-t^2} \sin x, \\ g(t, x) = (2 - 2it) e^{-t^2} \sin x \end{array} \right. \quad (5.3)$$

ikinci basamaktan doğruluklu fark şeması uygulanırsa,

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(-\frac{1}{2h^2}\right)u_{n+1}^{k-1} + \left(-\frac{1}{2h^2}\right)u_{n+1}^k + \left(-\frac{i}{\tau} + \frac{1}{h^2} + \frac{1}{2}\right)u_n^{k-1} \\ + \left(\frac{i}{\tau} + \frac{1}{h^2} + \frac{1}{2}\right)u_n^k + \left(-\frac{1}{2h^2}\right)u_{n-1}^{k-1} + \left(-\frac{1}{2h^2}\right)u_{n-1}^k = g\left(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n\right), \\ -N + 1 \leq k \leq 0, 1 \leq n \leq M - 1, \\ \left(-\frac{1}{2h^2}\right)u_{n+1}^{k-1} + \left(-\frac{1}{2h^2}\right)u_{n+1}^k + \left(-\frac{1}{\tau} + \frac{1}{h^2} + \frac{1}{2}\right)u_n^{k-1} \\ + \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{h^2} + \frac{1}{2}\right)u_n^k + \left(-\frac{1}{2h^2}\right)u_{n-1}^{k-1} + \left(-\frac{1}{2h^2}\right)u_{n-1}^k = f\left(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n\right), \\ \frac{u_n^1 - u_n^0}{\tau} - \frac{\tau}{h^2}(u_{n+1}^1 - 2u_n^1 + u_{n-1}^1 - u_{n+1}^0 + 2u_n^0 - u_{n-1}^0) \\ = \frac{\tau}{2}\left(f(0, x_n) + \frac{1}{h^2}(u_{n+1}^0 - 2u_n^0 + u_{n-1}^0)\right) \\ + \left(g(0, x_n) + \frac{1}{h^2}(u_{n+1}^0 - 2u_n^0 + u_{n-1}^0)\right), x_n = nh, 2 \leq n \leq M - 2, \\ u_n^{-N} = u_n^N + \varphi(x_n), x_n = hn, 1 \leq n \leq M - 1, \\ u_0^k = u_M^k = 0, 0 \leq k \leq N \end{array} \right.$$

ikinci basamaktan doğruluklu Crank-Nicholson fark şeması elde edilir. Burada, $(2N + 1) \times (2N + 1)$ boyutlu doğrusal denklem sistemi elde edilmiş olur. Bu doğrusal denklem sistemi düzenlenerek matris formunda yazılırsa,

$$\left\{ \begin{array}{l} Au_{n+1} + Bu_n + Cu_{n-1} = D\varphi, 1 \leq n \leq M - 1, \\ U_0 = \vec{0}, U_M = \vec{0} \end{array} \right. \quad (5.4)$$

olur. Öyleyse,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ a & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & a & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & a \\ 0 & \dots & 0 & b & c & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(2N+1) \times (2N+1)},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ d & e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & d & e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d & e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & e & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & e & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & m & n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(2N+1) \times (2N+1)}$$

ve $C = A$, $D = [I]_{(2N+1) \times (2N+1)}$ birim matristir. Buna göre,

$$a = -\frac{1}{2h^2}, b = \left(\frac{\tau}{2} - 1\right) \cdot \frac{1}{h^2}, c = -\frac{\tau}{2h^2}, d = -\frac{i}{\tau} + \frac{1}{h^2} + \frac{1}{2}, e = \frac{i}{\tau} + \frac{1}{h^2} + \frac{1}{2},$$

$$m = -\frac{1}{\tau} + 2 \left(1 - \frac{\tau}{2}\right) \cdot \frac{1}{h^2} + 1 - \frac{\tau}{2}, n = \frac{1}{\tau} + \frac{\tau}{h^2} + \frac{\tau}{2},$$

$$\varphi_n^k = \begin{cases} 2e^{-1} \sin x, \\ g\left(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n\right), N+1 \leq k \leq 0, \\ f\left(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n\right), 1 \leq k \leq N-1, \\ \frac{\tau}{2}f(0, x_n) + g(0, x_n), k = N, \end{cases}$$

$$\varphi_n = \begin{bmatrix} \varphi_n^{-N} \\ \varphi_n^{-N+1} \\ \vdots \\ \varphi_n^0 \\ \varphi_n^1 \\ \vdots \\ \varphi_n^{N-1} \\ \varphi_n^N \end{bmatrix}_{(2N+1) \times 1}, U_s = \begin{bmatrix} u_s^{-N} \\ u_s^{-N+1} \\ \vdots \\ u_s^0 \\ u_s^1 \\ \vdots \\ u_s^{N-1} \\ u_s^N \end{bmatrix}_{(2N+1) \times 1}, s = n \pm 1, n$$

yazılacaktır. (5.4) matris denkleminin çözümü için iyileştirilmiş Gauss yok etme yöntemi kullanılır. Bu yüzden aşağıdaki formda,

$$U_n = \alpha_{n+1}U_{n+1} + \beta_{n+1}, n = M-1, \dots, 2, 1, 0,$$

bir çözüm aranmaktadır. Öyle ki α_j ($j = 1, \dots, M - 1$) 'ler $(2N + 1) \times (2N + 1)$ tipinde kare matris ve β_j ($j = 1, \dots, M - 1$) 'ler $(2N + 1) \times 1$ şeklinde sütun matris ve α_1, β_1

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{(2N+1) \times (2N+1)}, \beta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{(2N+1) \times 1}.$$

biçimindedir. Aşağıdaki eşitlik

$$U_s = \alpha_{s+1}U_{s+1} + \beta_{s+1}, \quad (s = n, n - 1 \text{ için}),$$

ve

$$Au_{n+1} + Bu_n + Cu_{n-1} = D\varphi_n$$

eşitliği kullanılarak

$$[A + B\alpha_{n+1} + C\alpha_n\alpha_{n+1}]U_{n+1} + [B\beta_{n+1} + C\alpha_n\beta_{n+1} + C\beta_n] = D\varphi_n.$$

yazılabilir. Son denklemin

$$A + B\alpha_{n+1} + C\alpha_n\alpha_{n+1} = 0,$$

$$[B\beta_{n+1} + C\alpha_n\beta_{n+1} + C\beta_n] = D\varphi_n, \quad 1 \leq n \leq M - 1$$

şeklinde seçilmesi uygundur. O halde, $\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}$ için formüller

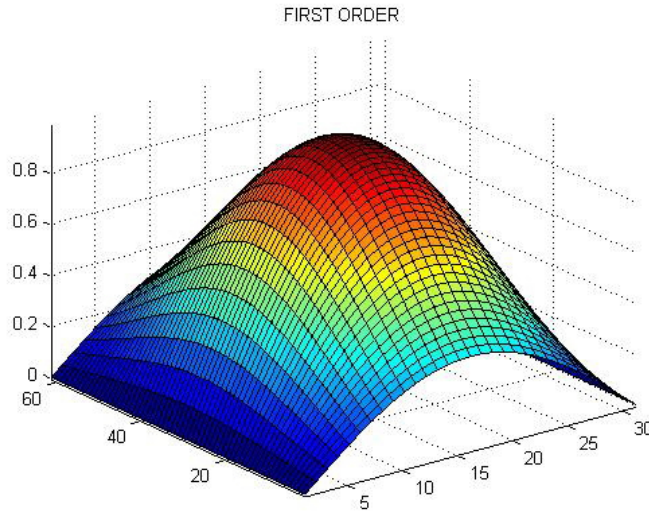
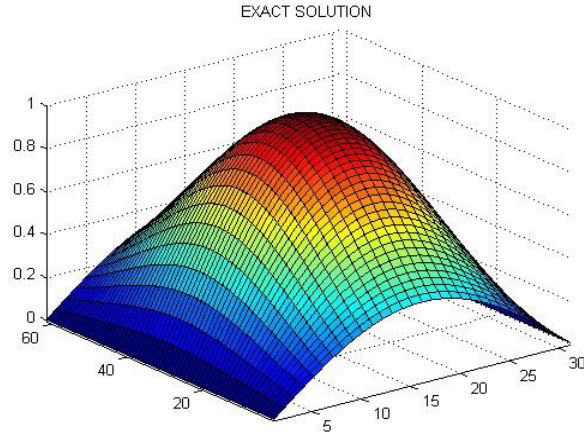
$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = -(B + C\alpha_n)^{-1} A, \\ \beta_{n+1} = (B + C\alpha_n)^{-1} (D\varphi_n - C\beta_n), \quad n = 1, 2, \dots, M - 1 \end{cases}$$

biçimindedir. Bu yüzden

$$U_M = \vec{0},$$

$$U_n = \alpha_{n+1}U_{n+1} + \beta_{n+1}, \quad n = M - 1, \dots, 2, 1, 0$$

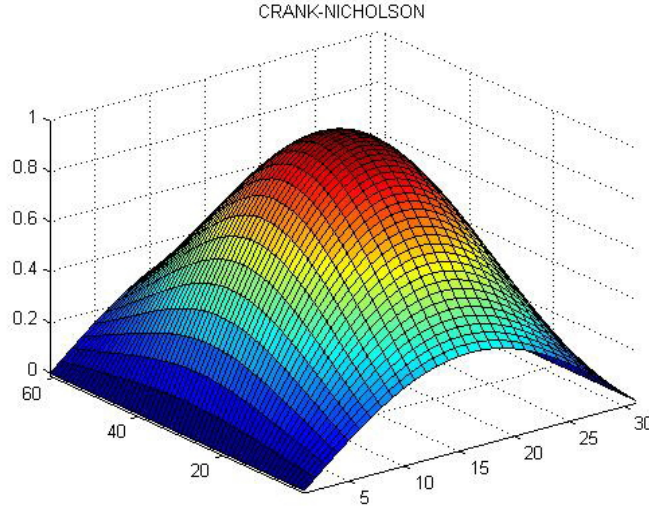
olacaktır.



6 BULGULAR

6.1 HATA ANALİZİ

Şimdi, sayısal sonuçlar verilecektir. Parabolik-Schrödinger denklemi için lokal olmayan sınır-değer problemi (5.1) i göz önüne alalım. (5.1) lokal olmayan sınır-değer probleminin yaklaşık çözümüne, birinci ve ikinci basamaktan doğruluklu fark şemalarının farklı τ ve h değerleri için bakalım. Kesin ve sayısal çözümler 4.1, 4.2 ve 4.3 şekilleri ile verilmiştir.



Karşılaştırma hataları

$$E_M^N = \max_{1 \leq k \leq N-1} \left(\sum_{n=1}^{M-1} |u(t_k, x_n) - u_n^k|^2 h \right)^{1/2}$$

formülü kullanılarak hesaplanmıştır. Bu sayısal sonuçlar N ve M nin farklı değerleri için bulunmuştur. Burada (t_k, x_n) noktasında $u(t_k, x_n)$ gerçek çözümü, u_n^k nümerik çözümü temsil etmektedir. Sonuçlar Tablo 1. de gösterilmiştir.

Tablo 1. Farklı N ve M değerleri için yaklaşık çözümler

Yöntem	N=M=10	N=M=20	N=M=40	N=M=80	N=M=160
Fark Şeması (4.1)	0,0424	0,0244	0,0133	0,0069	0,0035
Fark Şeması (4.30)	0,0239	0,0060	0,0015	$3,774 \times 10^{-4}$	$9,4410 \times 10^{-5}$

Tablo 1. den elde edilen hatalar incelendiğinde, ikinci basamaktan doğruluklu fark şemalarının birinci basamaktan doğruluklu fark şemasına göre daha doğruluklu olduğu görülmektedir.

7 SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu çalışma parabolik-Schrödinger denklemleri için lokal olmayan sınır-değer problemlerinin kararlılığı için ayrılmıştır. Çalışma sonunda aşağıdaki özgün sonuçlar elde edilmiştir:

- Hilbert uzayında parabolik-Schrödinger denkleminin lokal olmayan sınır-değer problemlerinin çözümü için kararlılık kestirimleri üzerindeki temel teorem ispatlanmıştır,
- Parabolik-Schrödinger denklemlerinin lokal olmayan sınır-değer problemlerinin çözümü için kararlılık kestirimlerindeki teoremler elde edilmiştir,
- Parabolik-Schrödinger denklemlerinin lokal olmayan sınır-değer problemlerinin yaklaşık çözümü için birinci ve ikinci basamaktan doğruluklu fark şemaları sunulmuştur,
- Parabolik-Schrödinger denklemlerinin lokal olmayan sınır-değer problemlerinin yaklaşık çözümü için kurulan birinci ve ikinci basamaktan doğruluklu fark şemalarının yaklaşık çözümleri için kararlılık kestirimlerindeki temel teorem kanıtlanmıştır,
- Parabolik-Schrödinger denklemleri için kurulan fark şemalarının çözümü için kararlılık kestirimlerindeki teoremler elde edilmiştir,
- Bu fark şemalarının teorik ifadeleri nümerik deneylerle desteklenmiştir,

Parabolik-Schrödinger denklemleri için lokal olmayan sınır-değer problemleri bölümünde elde edilen kararlı çözümler aşağıdaki;

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt} + Au(t) = f(t) \quad (0 \leq t \leq 1), \\ i \frac{du}{dt} + Au(t) = g(t) \quad (-1 \leq t \leq 0), \\ u(-1) = \sum_{j=1}^N \alpha_j u(\mu_j) + \varphi, \\ 0 < \mu_j \leq 1, 1 \leq j \leq N \end{array} \right.$$

H Hilbert uzayındaki pozitif tanımlı öz-eşlenik A operatörü ile karma tipli diferansiyel denklemin çok noktalı lokal olmayan sınır değer problemi için de elde edilebilir.

8. KAYNAKLAR

[1] Salakhitdinov M. S., *Equations of Mixed-Composite Type*, Tashkent: FAN, (1974) (Russian).

[2] Djuraev T. D., *Boundary Value Problems for Equations of Mixed and Mixed-Composite Types*, Tashkent: FAN, (1979) (Russian).

[3] Bazarov D., Soltanov H., *Some Local and Nonlocal Boundary Value Problems for Equations of Mixed and Mixed-Composite Types*, Ashgabat: Ylym, (1995) (Russian).

[4] Glazatov S. N., Nonlocal boundary value problems for linear and nonlinear equations of variable type, *Sobolev Institute of Mathematics SB RAS*, Preprint no. 46, (1998) (Russian).

[5] Ashyralyev A., Aggez N., A note on difference schemes of the nonlocal boundary problems for hyperbolic equations, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, (25) (2004) 439–462.

[6] Ashyralyev A., Ozdemir Y., On nonlocal boundary value problems for hyperbolic-parabolic equations, *Taiwanese Journal of Mathematics*, 4 (11) (2007) 1075–1089.

[7] Ashyralyev A., Gercek O., Nonlocal boundary value problems for elliptic-parabolic differential and difference equations, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, (2008) (2008) 1–16.

[8] Ashyralyev A., Sirma A., Nonlocal boundary value problems for the Schrodinger equation, *Computers and Mathematics with Applications*, 3 (55) (2008) 392–407.

[9] Ashyralyev A., Yildirim O., On multipoint nonlocal boundary value problems for hyperbolic differential and difference equations, *Taiwanese Journal of Mathematics*, 1 (14) (2010) 165–194.

- [10] Ashyralyev A., Hicdurmaz B., A note on the fractional Schrodinger differential equation, *Kybernetes*, 5-6 (40) (**2011**) 736–750.
- [11] Ashyralyev A., Ozger F., The hyperbolic-elliptic equation with the nonlocal condition, *AIP Conference Proceedings*, (1389) (**2011**) 581–584.
- [12] Ozdemir Y., Kucukunal M., A note on boundary value problems for hyperbolic-Schrödinger equation, *Abstract and Applied Analysis*, (2012) (**2012**) 1–12.
- [13] Kozłowski K., Kozłowska J. M., Development on the Schrodinger equation for attosecond laser pulse interaction with planck gas, *Laser in Engineering*, 3-4 (20) (**2010**) 157–166.
- [14] Quittner P., Souplet P., Optimal Liouville-type theorems for noncooperative elliptic Schrödinger systems and applications, *Communications in Mathematical Physics*, (311) (**2012**) 1–19.
- [15] Godet N., Tzvetkov N., Strichartz estimates for the periodic non-elliptic Schrödinger equation, *Comptes Rendus Mathématique*, 21–22 (350) (**2012**) 955–958.
- [16] Liu B., Ma L., Symmetry results for elliptic Schrödinger systems on half spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1 (401) (**2013**) 259–268.
- [17] Tselios K., Simos T. E., Runge-Kutta methods with minimal dispersion and dissipation for problem arising from computational acoustics, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1 (175) (**2005**) 173-181.
- [18] Sakas D. P., Simos T. E., Multiderivative methods of eighth algebraic order with minimal phase-lag for the numerical solution of the radial Schrodinger equation, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1 (175) (**2005**) 161-172.
- [19] Psihoyios G., Simos T. E., A fourth algebraic order trigonometrically fitted predictor-corrector scheme for IVPs with oscillating solutions, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1 (175) (**2005**) 137-147.

[20] Anastassi Z. A., Simos T. E., An optimized Runge-Kutta method for the solution of orbital problems, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1 (175) (2005) 1-9.

[21] Simos T. E., Closed Newton-Cotes trigonometrically-fitted formulae of high order for long-time integration of orbital problems, *Applied Mathematics Letters*, 10 (22) (2009) 1616-1621.

[22] Stavroyiannis S., Simos T. E., Optimization as a function of the phase-lag order of nonlinear explicit two-step P-stable method for linear periodic IVPs, *Applied Numerical Mathematics*, 10 (59) (2009) 2467-2474.

[23] Simos T. E., Exponentially and trigonometrically fitted methods for the solution of the Schrodinger equation, *Acta Applicandae Mathematicae*, 3 (110) (2010) 1331-1352.

[24] Suhubi E. S., Fonksiyonel Analiz, İtü Vakfi Yayınları no.38, (2001).

[25] Krein S. G., *Linear Differential Equations in a Banach Space*, Nauka: Moscow, (1966) (Russian).

[26] Samarskii A. A., Nikolaev E. S., *Numerical Methods for Grid Equations vol. 2: Iterative Methods*, Birkäuser: Basel, Switzerland, (1989).

9. EKLER

EK-1. ALGORİTMA

1. **Adım:** $\tau = \frac{1}{N}$ ve $h = \frac{\pi}{M}$ olarak al.

2. **Adım:** Birinci dereceden doğruluklu fark şemasını kullan ve matris formunda yaz.

$$AU_{n+1} + BU_n + CU_{n-1} = D\varphi_n, 1 \leq n \leq M - 1.$$

3. **Adım:** A, B, C ve D matrislerinin girdilerini belirle.

4. **Adım:** α_1, β_1 i bul.

5. **Adım:** $\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}$ i hesapla.

6. **Adım:** U_n için $n = M-1, \dots, 1, 0$ $U_n = \alpha_{n+1}U_{n+1} + \beta_{n+1}$, $n = M-1, \dots, 2, 1, 0$ formülünü kullanarak hesapla.

EK-2. BİRİNCİ BASAMAKTAN DOĞRULUKLU FARK ŞEMASI İÇİN MATLAB PROGRAMI

```
function [table,es,p]=rothermethod(N,M)

% first order accuracy rother method

% mixed type

close; close;

if nargin<1; N=30 ; M=30 ;end;

tau=1/N; h=pi/M;

A=zeros(2*N+1,2*N+1);

for i=2:N+1; A(i,i-1)=1/(h^2); end; %schödinger asıl köşegen aşağısı

for i=N+2:2*N; A(i,i)=1/(h^2); end; %eliptik asıl köşegen

B=zeros(2*N+1,2*N+1);

B(1,1)=-1;
```

```

B(1,2*N+1)=1;

for i=1:N; B(i+1,i)=(-complex(0,1)/tau)-(2/h^2); end; %schödinger asıl köşegen
aşağısı

for i=2:N+1; B(i,i)=complex(0,1)/tau; end; %schödinger asıl köşegen

for i=N+2:2*N; B(i,i)=(-2/(tau^2))-(2/(h^2)); end; %eliptik asıl köşegen

for i=N+2:2*N; B(i,i+1)=1/(tau^2); end; %eliptik asıl köşegen yukarısı

for i=N+1:2*N-1; B(i+1,i)=1/(tau^2); end; %eliptik asıl köşegen aşağısı

B(2*N+1,N)=1;

B(2*N+1,N+1)=-2;

B(2*N+1,N+2)=1;

C=A;

for i=1:2*N+1; D(i,i)=1; end ;

alpha(2*N+1,2*N+1,1:1)= 0 ;

betha(2*N+1,1:1) = 0 ;

'fi(j) = fi(k,j) hesaplanıyor ' ;

for j=1:2*N+1; x=j*h;

fii(1,j:j)=(exp(1)-exp(-1))*sin(x); %nonlocal

fii(2*N+1,j:j)=0; %süreklilik

for k=2:N+1; x=j*h; t=(-N+k-1)*tau; fii(k,j:j)=g(t,x); end; %schrödinger

for k=N+2:2*N; t=(-N+k-1)*tau+tau; x=j*h; fii(k,j:j)=f(t,x); end; %elliptic

end;

'alpha(N+1,N+1,j) ve betha(N+1,j) ler hesaplanacak' ;

for j=1:M-1;

alpha(:,j+1:j+1)=-inv(B+C*alpha(:,j:j))*A;

betha(:,j+1:j+1)=inv(B+C*alpha(:,j:j))*(D*(fii(:,j:j))-(C*betha(:,j:j)));

end;

```

```

U( 2*N+1,1, M:M ) = 0;

for z = M-1:-1:1 ;

U(:,z, z:z ) = alpha(:,z+1:z+1)* U(:,z+1:z+1 ) + betha(:,z+1:z+1);

end;

for z = 1:M ; p(:,z+1:z+1)=U(:,z:z); end;

'EXACT SOILUTION OF THIS PDE' ;

for j=1:M+1; for k=1:2*N+1; t=(-N+k-1)*tau;

x=(j-1)*h; %exact solution on grid points,

es(k,j) = exact(t,x);

end;

end;

'ERROR ANALYSIS' ;

ftf1=abs(es-p);

fmat1=abs(ftf1);

fmat2=fmat1.*fmat1*h;

fmat3=sum(fmat2,2);

fmat4=fmat3.^(1/2);

sumerror2=max(fmat4)

maxerror2=max(max(abs(es-p)))

%%%%%%%%%%%%%%ERROR ANALYSIS%%%%%%%%%%%%%%

maxes=max(max(es));

maxapp=max(max(p));

%%%%%%%%%%%%%%GRAPH OF THE SOLUTION %%%%%%%%%%%%%%%

figure;

m(1,1)=min(min(p))-0.01;

```

```

m(2,2)=nan;

surf(m);

hold;

surf(es) ; rotate3d ;axis tight;

title('EXACT SOLUTION');

figure ;

m(1,1)=min(min(p))-0.01;

m(2,2)=nan;

surf(m);

hold;

surf(p) ; rotate3d ;axis tight;

title('FIRST ORDER');

%%%%%%%%%% END GRAPH %%%%%%%%%%%

function estx=exact(t,x)

estx=(exp(t)-1)*sin(x);

function ftx=f(t,x)

ftx=sin(x);

function gtx=g(t,x)

gtx=((complex(0,1)-1)*exp(t)+1)*sin(x);

```

EK-3. ALGORİTMA

1. **Adım:** $\tau = \frac{1}{N}$ ve $h = \frac{\pi}{M}$ olarak al.

2. **Adım:** Birinci dereceden doğruluklu fark şemasını kullan ve matris formunda yaz.

$$AU_{n+1} + BU_n + CU_{n-1} = D\varphi_n, 1 \leq n \leq M - 1.$$

3. **Adım:** A, B, C ve D matrislerinin girdilerini belirle.

4. **Adım:** α_1, β_1 i bul.

5. **Adım:** $\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}$ i hesapla.

6. **Adım:** U_n için $n = M-1, \dots, 1, 0$ $U_n = \alpha_{n+1}U_{n+1} + \beta_{n+1}$, $n = M-1, \dots, 2, 1, 0$ formülünü kullanarak hesapla.

EK-4. İKİNCİ BASAMAKTAN DOĞRULUKLU FARK ŞEMASI İÇİN MATLAB PROGRAMI

```
function [table,es,p]=rothermethod(N,M)
```

```
close; close;
```

```
if nargin<1; N=30 ; M=30 ;end;
```

```
tau=1/N; h=pi/M;
```

```
A=zeros(2*N+1,2*N+1);
```

```
for i=2:N+1; A(i,i-1)=1/(2*h^2); end; %schrödinger asıl köşegen aşağısı
```

```
for i=2:N+1; A(i,i)=1/(2*h^2); end; %schrödinger asıl köşegen
```

```
for i=N+2:2*N; A(i,i)=1/(h^2); end; % %eliptik asıl köşegen
```

```
B=zeros(2*N+1,2*N+1);
```

```
B(1,1)=-1;
```

```
B(1,2*N+1)=1;
```

```
for i=1:N; B(i+1,i)=(-complex(0,1)/tau)-(1/h^2); end; %schrödinger asıl köşegen  
aşağısı
```

```

for i=2:N+1; B(i,i)=(complex(0,1)/tau)-(1/h^2); end; %schrödinger asıl köşegen
for i=N+2:2*N; B(i,i)=(-2/(tau^2))-(2/(h^2)); end; %eliptik asıl köşegen
for i=N+2:2*N; B(i,i+1)=1/(tau^2); end; %eliptik asıl köşegen yukarısı
for i=N+1:2*N-1; B(i+1,i)=1/(tau^2); end; %eliptik asıl köşegen aşağısı
B(2*N+1,N-2)=1;
B(2*N+1,N-1)=-4;
B(2*N+1,N)=6;
B(2*N+1,N+1)=-4;
B(2*N+1,N+2)=1;
C=A;
for i=1:2*N+1; D(i,i)=1; end ;
alpha(2*N+1,2*N+1,1:1)= 0 ;
betha(2*N+1,1:1) = 0 ;
'fi(j) = fi(k,j) hesaplanıyor ' ;
for j=1:2*N+1; x=j*h;
fii(1,j:j)=(exp(1)-exp(-1))*sin(x); %nonlocal
    fii(2*N+1,j:j)=0; %süreklilik
for k=2:N+1; x=j*h; t=(-N+k-1)*tau-tau/2 ; fii(k,j:j)=f(t,x); end; %schrödinger
for k=N+2:2*N; t=(-N+k-1)*tau; x=j*h; fii(k,j:j)=g(t,x); end; %elliptic
end;
'alpha(N+1,N+1,j) ve betha(N+1,j) ler hesaplanacak' ;
for j=1:M-1;
alpha(:,j+1:j+1)=-inv(B+C*alpha(:,j:j))*A;
betha(:,j+1:j+1)=inv(B+C*alpha(:,j:j))*(D*(fii(:,j:j))-(C*betha(:,j:j)));
end;

```

```

U( 2*N+1,1, M:M ) = 0;

for z = M-1:-1:1 ;

U(:,z, z:z ) = alpha(:,z+1:z+1)* U(:,z+1:z+1 ) + betha(:,z+1:z+1);

end;

for z = 1:M ; p(:,z+1:z+1)=U(:,z:z); end;

'EXACT SOILUTION OF THIS PDE' ;

for j=1:M+1; for k=1:2*N+1; t=(-N+k-1)*tau;

x=(j-1)*h; %exact solution on grid points,

es(k,j) = exact(t,x);

end; end;

'ERROR ANALYSIS' ;

ftf1=abs(es-p);

fmat1=abs(ftf1);

fmat2=fmat1.*fmat1*h;

fmat3=sum(fmat2,2);

fmat4=fmat3.^(1/2);

sumerror2=max(fmat4)

maxerror2=max(max(abs(es-p)))

%%%%%%%%%%%%%ERROR ANALYSIS%%%%%%%%%%%%%

maxes=max(max(es));

maxapp=max(max(p));

%%%%%%%%%%%%%GRAPH OF THE SOLUTION %%%%%%%%%%%%%%

figure;

m(1,1)=min(min(p))-0.01;

m(2,2)=nan;

```



```

surf(m);

hold;

surf(es) ; rotate3d ;axis tight;

title('EXACT SOLUTION');

figure ;

m(1,1)=min(min(p))-0.01;

m(2,2)=nan;

surf(m);

hold;

surf(p) ; rotate3d ;axis tight;

title('FIRST ORDER');

%%%%%%%%%% END GRAPH %%%%%%%%%%%

function estx=exact(t,x)

estx=(exp(t)-1)*sin(x);

function ftx=f(t,x)

ftx=((complex(0,1)-1)*exp(t)+1)*sin(x);

function gtx=g(t,x)

gtx=sin(x);

```

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : ALP, Mustafa
Uyruğu : T.C
Doğum tarihi ve yeri : 20.07.1988 / DÜZCE
Telefon : 0 (532) 702 99 60
E-posta : mus.alp@hotmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek Lisans	Düzce Üniversitesi/Matematik B.	2014
Lisans	Fatih Üniversitesi/Matematik B.	2009
Lise	Antalya Özel Yılmaz Koleji	2005

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2012-2013	Körfez Dershaneleri	Matematik Öğretmeni
2011-2012	Düzce Farabi A.L	Matematik Öğretmeni
2009-2011	Türkiye İş Bankası A.ş	Memur

Yabancı Dil

İngilizce