T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEK VE ÇOK KARMAŞIK DEĞİŞKENLİ ÜNİVALENT FONKSİYONLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SEVİL AYKANAT

ŞUBAT 2014

DÜZCE

KABUL VE ONAY BELGESİ

Sevil Aykanat tarafından hazırlanan Tek ve Çok Kompleks Değişkenli Ünivalent Fonksiyonlar isimli lisansüstü tez çalışması, Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 07/02/2014 tarih ve 2014/105 sayılı kararı ile oluşturulan jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Üye
(Tez Danışmanı)
Prof. Dr. İsmet YILDIZ
Düzce Üniversitesi

Üye
Prof. Dr. Cenap ÖZEL
Abant İzzet Baysal Üniversitesi

Üye
Yrd. Doç. Dr. E. Evren KARA
Düzce Üniversitesi

Tezin Savunulduğu Tarih : 27.02.2014

ONAY

Bu tez ile Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Sevil Aykanat'ın Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans derecesini almasını onamıştır.

Prof. Dr. Haldun MÜDERRİSOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

27/02/2014

(İmza)

Sevil Aykanat

Sevgili Aileme

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim ve bu tezin hazırlanması süresince gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Prof. Dr. İsmet YILDIZ'a en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen eşime, aileme ve çalışma arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

27 Şubat 2014 **Sevil Aykanat**

İÇİNDEKİLER **Sayfa**

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{C}$	Kompleks düzlem
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	$\mathbb{N} = \{1,2,...\}$ Doğal sayılar kümesi
I	İndis kümesi
$\mathbb{U}_r$	$\{z \in \mathbb{C}: \|z\| < r < 1\}$ şeklindeki açık disk
$\overline{\mathbb{U}}_r$	$\{z \in \mathbb{C}: \|z\| \leq r < 1\}$ şeklindeki kapalı disk
$\mathbb{U}$	$\{z \in \mathbb{C}: \|z\| < 1\}$ açık birim disk
$\overline{\mathbb{U}}$	$\{z \in \mathbb{C}: \|z\| \leq 1\}$ kapalı birim disk
$\dot{\mathbb{U}}$	$\{z \in \mathbb{C}: 0 \leq \|z\| < 1\}$ şeklindeki delinmiş açık birim disk
A	$\mathbb{U}$ birim diskinde tanımlı $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ şeklindeki analitik fonksiyonların sınıfı
S	Ünivalent fonksiyonların sınıfı
S^*	Yıldızıl fonksiyonların sınıfı
C	Konveks fonksiyoların sınıfı
P	Caratheodory fonksiyonların sınıfı
Ω	Schwarz fonksiyonların sınıfı
Π	$\dot{\mathbb{U}}$ kümesinde tanımlı $g(\zeta) = \frac{1}{\zeta} + b_0 + b_1\zeta + \cdots$ şeklindeki meromorf fonksiyonların sınıfı
$\tilde{\Sigma}$	Π sınıfına ait ünivalent meromorf fonksiyonların sınıfı
M	Δ kümesinde tanımlı $h(\xi) = \xi + c_0 + \frac{c_1}{\xi} + \cdots$ şeklindeki meromorf fonksiyonların sınıfı
$\prec$	Subordinasyon
$f \prec g$	f fonksiyonu g fonksiyonuna subordinedir.
$f(z,t)$	Subordinasyon (veya Loewner) zinciri
$\mathbb{C}^n$	Çok değişkenli kompleks düzlem
$I^m f$	İntegral operatörü

ÖZET

TEK VE ÇOK KARMAŞIK DEĞİŞKENLİ ÜNİVALENT FONKSİYONLAR

Sevil AYKANAT
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Prof. Dr. İsmet YILDIZ
Ocak 2014, 56 sayfa

Bu tezde tek ve çok karmaşık değişkenli ünivalent fonksiyonların özellikleri incelenmiş ve $I^m f$ integral operatörü kullanılarak ünivalent fonksiyonların bir alt sınıfi elde edilmiştir. Diferensiyel subordinasyon kuralı uygulanarak da bu yeni sınıfin özellikleri incelenmiştir. Ayrıca çok değişkenli ünivalent fonksiyonlar için Loewner denkleminin teorik yönleri incelenmiştir. Genel Loewner zincirleri ve bunların geçiş dönüşümleri için Lipschitz düzeni dikkate alınmıştır. Bunun bir sonucu olarak, keyfi bir Loewner zincirinin, Loewner diferensiyel denklemini karşıladığını ve bunların geçiş dönüşümlerinin bir başlangıç değer problemine karşılık geldiği gösterilmiştir. Bir boyut ve daha yüksek boyutlardaki Loewner teorisi arasındaki en önemli farklardan birinin parametrik gösterimlerin oynadığı roller olduğu gösterilmiştir. Tek değişkenli fonksiyonların içindeki durumun aksine, çok değişkenli fonksiyonların içinde ilk elemanının parametrik gösterimi olmayacak şekilde Loewner zincirlerinin mevcut olduğu gösterilmiştir. Çok değişkenli Loewner diferensiyel denklem için varlık teoremleri kompakt çok değişkenli Caratheodory sınıfina eş teoremlerin bir sonucu olarak gelişmiştir.

Anahtar sözcükler: Analitik fonksiyon, Biholomorfik dönüşüm, Diferensiyel subordinasyon, Diferensiyel süperordinasyon, İntegral operatör, Loewner zinciri, Ünivalent fonksiyon.

ABSTRACT

ONE AND SEVERAL COMPLEX VARIABLES OF UNIVALENT FUNCTIONS

Sevil AYKANAT
Duzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Prof. Dr. İsmet YILDIZ
February 2014, 56 pages

In this thesis univalent functions of one and several complex variables properties were investigated and a subclass of univalent functions was obtained by using $I^m f$ integral operatör. The properties of this new class has been examined by applying differential subordination rule. The theoric perspectives of Loewner equation for several variables of univalent functions were also analyzed. Lipschitz regularity was taken into consideration for general Loewner chains and their transition mappings as a result of this, it was showen that an arbitrary Loewner chain corresponds Loewner differential equation and their transition mappings corresponds to a initial value problem. One of the most important differences between Loewner theory in one dimension and in higher dimensions was shown as the role played by parametric representation. In contrast to the situation in one variable, in several variables there exist Loewner chains such that the initial elemant does not have parametric representation. In the existence theorems for the Loewner differential equation in several variables were improved as a consequence of a theorem that the analog of the Caratheodory class in several variables is compact.

Keywords: Analytic function, Biholomorphic mapping, Differential subordination, Differential Superordination, Integral operatör, Loewner chain, Univalent function.

EXTENDED ABSTRACT

ONE AND SEVERAL COMPLEX VARİABLES OF UNIVALANT FUNCTİONS

Sevil AYKANAT
Duzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Departmant of Mathematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Prof. Dr. İsmet YILDIZ
February 2014, 56 pages

1. INTRODUCTION:

In this thesis univalent functions of one several complex variables properties were investigated and a subclass of univalent functions was obtained by using $I^m f$ integral operatör. The properties of this new class has been examined by applying differential subordination rule.

2. MATERIAL AND METHODS:

In this section, we discussed the analytic, one and several complex variables of univalent functions and their basic features with the light of topologic general concepts. Furthermore, as one of the important problems in geometric function theory is searching whether analytic function is an univalent or not, we searched basic consepts about Loewner chains method, in other words subordination chains method which is one of the methods used to be a resolution for the problem.

3. RESULTS AND DISCUSSIONS:

In this section we searched the theoric parts of Loewner differential equation. We also searched the properties of defined integral operatörs described in different classes of analytic functions. Furthermore, we acquired a new class of univalent functions by using $I^m f$ integral operatör.

4. CONCLUSION AND OUTLOOK:

We realized that if $f(z,t)$ and $v(z,s,t)$ is related to $v(z,s,t)$, the transformation of any $f(z,t)$ Loewner chain into $v(z,s,t)$ for t local uniformly point on $z \in B$ can be possible under the conditions of Lipschitz. On the other hand, if the chain of $f(z,t)$

Loewner exists in a way that $f(z) = f(z, 0)$ and $\{e^{-t} f(z,t)\}_{t \geq 0}$ families for $z \in B$ is a normal family in B we showed that $f \in H(B)$ has parametric representation. Furthermore, when there is a normal family on $\{e^{-t} f(z,t)\}_{t \geq 0}$, we realized that the solutions of Loewner differential equations which are generalized in higher sizes of $f(z,t)$ univalent functions are unique. Then by using $I^m f$ integral operatör, we acquired the new class of univalent functions. We searched the properties of these classes by applying the rule of differential subordination.

1.GİRİŞ

Geometrik fonksiyonlar teorisi, analitik fonksiyonların geometrik özellikleri ile ilgilenen yani analiz ile geometri arasında ilişki kuran, kompleks analizin özel bir dalıdır. Geometrik fonksiyonlar teorisi, ilk olarak 1851 yılında G. Bernard Riemann tarafından doktora tezinde çalışılan ve literatürde "Riemann dönüşüm teoremi" olarak bilinen teoremiyle ortaya çıkmıştır. Şöyle ki, bu teorem basit bağlantılı bir $D \subset \mathbb{C}$ $(D \neq \mathbb{C})$ alt bölgesini, D_1 bölgesi üzerine resmeden bir f analitik fonksiyonunun olduğunu göstermiştir. Ancak bu teorem, günümüz yüzyılın başlarına kadar bazı araştırmacılara göre önemi fazla anlaşılamadığından bazılarına göre de pek kullanışlı bulunmadığından kompleks analizde kendine fazla uygulama alanı bulamamıştır. Şöyle ki, Koebe'nin [12] 1907 yılında bu teoremi analitik ve ünivalent fonksiyonlar için vermesi, 1914 yılında alan teoreminin Gronwall [13] tarafından yapılması ve son olarak ta Bieberbach'ın [14,15] 1916 yılında ortaya koyduğu normalize edilmiş fonksiyonlar için katsayı tahmini ve bu tahminin sonuçları, geometrik fonksiyonlar teorisinin kendisine bir uygulama alanı bulmasına ve bu uygulama alanları içinde de önemli bir yere sahip olan ünivalent fonksiyonların doğuşuna sebep olmuştur.

Bieberbach'ın $f \in S$ fonksiyonu için $n = 2, 3, ...$ olmak üzere $|a_n| \leq n$ tahmininin ispatı problemi birçok matematikçi tarafından önemli bir araştırma konusu haline gelmiştir. 1916 yılında ilk defa Bieberbach tarafından alan teoreminin bir sonucu olarak $|a_2| \leq 2$ eşitsizliğinin doğruluğu gösterilmiştir. Daha sonra 1923 yılında Loewner kendi bulduğu ve parametrik metod yani Loewner metodu olarak adlandırdığı metodla $|a_3| \leq 3$ eşitsizliğini, 1955 yılında Garabedian ve Schiffer, Grunsky eşitsizliklerini kullanarak $|a_4| \leq 4$ eşitsizliğini, 1968 yılında Pederson 1969 yılında Ozawa $|a_6| \leq 6$ ve 1972 yılında da Pederson ve Schiffer $|a_5| \leq 5$ eşitsizliklerini ispatlamışlardır. Son olarak 1985 yılında Louis de-Branges [17] Loewner teorisini kullanarak tüm $n = 2,3, ...$ için $|a_n| \leq n$ eşitsizliğinin doğruluğunu göstermiş ve problemi sonuca ulaştırmıştır. Bu problemin çözülmüş olması yeni problemlerin ortaya çıkmasına zemin hazırlamıştır. Öyle ki S sınıfı için; alt sınıflar, katsayı tahminleri, growth ve distortion teoremleri, yarıçap problemleri, komşuluklar, kısmi toplamlar, integral ve diferensiyel operatörler ve son olarak bugünün en popüler konularından olan subordinasyon ve süperordinasyon ilkeleri önemli problemlerden bazılarıdır. Bununla birlikte tek kompleks değişkenli ünivalent fonksiyonlar için çalışılan bu konular çok kompleks değişkenliler için de kendine yer bulmuştur. İlk olarak 1933 yılında H. Cartan'ın [18] P. Montel adlı kitabında çok kompleks değişkenli ünivalent fonksiyonlar formülize edilmiş ve daha sonra biholomorfik dönüşümlerin geometrik özellikleri 1960-1980 yılları arasında Japon matematikçiler I. Ono, T. Higuchi, K. Kikuchi tarafından çalışılmaya başlanmıştır. Son 20 yılda ise J. A. Pfaltzgraff, T. J. Suffridge, C. FitzGerald, S. Gong, I. Graham, G. Kohr, H. Hamada, P. Liczberski, P. Curt matematikçileri tarafından özetlenmiştir. Sunulan bu tezde, öncelikle tek kompleks değişkenli ünivalent fonksiyonların özellikleri incelenmiş bunlar için gerekli hem pür matematikteki temel tanım ve kavramlar hem de analitik ve ünivalent fonksiyonlar ile ilgili temel tanım, teorem ve kavramlara yer verilmiştir. Daha sonra çok kompleks değişkenli fonksiyonlar için ünivalentlık kriterleri verilmiş ve belli başlı özellikleri incelenmiştir. Ayrıca bu tez de çok değişkenliler içinde Loewner denkleminin teorik yönleri de verilmiştir. Son olarak diferensiyel subordinasyon ve süperordinasyon yöntemleri kullanılarak ünivalent fonksiyonların yeni bir sınıfı elde edilmiştir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. TOPOLOJİK KAVRAMLAR

Tanım 2.1.1 (Komşuluk): $z_0 \in \mathbb{C}$ noktası verilsin. $\mathrm{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| < r\}$ kümesine z_0 merkezli r yarıçaplı açık disk veya z_0 noktasının r komşuluğu denir. $\overline{D(z_0,r)} = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| \leq r\}$ kümesine z_0 merkezli r yarıçaplı kapalı disk, $\partial D(z_0,r) = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| = r\}$ kümesine z_0 merkezli r yarıçaplı çember ve $\overset{\circ}{D}(z_0,r) = \{z \in \mathbb{C}: 0 < |z - z_0| < r\} = D(z_0,r) - \{z_o\}$ kümesine de z_0 noktasının delinmiş komşuluğu denir.

Tanım 2.1.2 (İç Nokta): $\mathrm{A} \subset \mathbb{C}$ herhangi bir küme ve $z_0 \in A$ olsun. z_0 noktasının en az bir r komşuluğu tamamen A kümesine ait ise yani $D(z_0, r) \subset A$ olacak biçimde bir $r > 0$ sayısı varsa z_0 noktasına A kümesinin bir iç noktası denir.

Tanım 2.1.3 (Açık ve Kapalı Küme): Her noktası iç nokta olan kümeye açık küme, tümleyeni açık olan kümeye ise kapalı küme denir. $D(z_0,r)$ diski bir açık küme ve $\overline{D(z_0,r)}$ kümesi de kapalı bir kümedir.

Tanım 2.1.4 (Yakınsaklık): $(\mathrm{f_n})$, $A \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f_n: A \to \mathbb{C}$ fonksiyonlarının bir dizisi olsun.
(i) Her $\epsilon > 0$ sayısı ve herbir $z \in A$ için $n > n_0$ olduğunda $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ olacak biçimde bir $n_0 = n_0(\epsilon, z)$ sayısı bulunabiliyorsa, (f_n) dizisi A kümesinde f fonksiyonuna noktasal yakınsıyor denir ve $f_n \to f$ veya $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ ile gösterilir.
(ii) Her $\epsilon > 0$ sayısı ve her $z \in A$ için $n > n_0$ olduğunda $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ olacak biçimde sadece ϵ'a bağlı bir $n_0 = n_0(\epsilon)$ sayısı varsa, (f_n) dizisi A kümesinde f fonksiyonuna düzgün yakınsıyor denir.

Tanım 2.1.5 (Bağlantılı Küme): A, Y ve Z $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesinin alt kümeleri olsun. Eğer $A \subset Y \cup Z$, $A \cap Z \neq \emptyset$, $A \cap Y \neq \emptyset$ ve $A \cap Y \cap Z = \emptyset$ olacak biçimde Y ve Z gibi boş olmayan iki ayrık ve açık küme bulunamaz ise, $A \subset \mathbb{C}$ kümesine bağlantılıdır denir. Aksi halde bağlantısızdır denir.

Tanım 2.1.6 (Basit Bağlantılı Küme): $\mathrm{A} \subset \mathbb{C}$ olsun. Eğer bir A kümesi içindeki herhangi iki noktayı birleştiren bütün yollar yine küme içinde kalıyorsa, bu A kümesine basit bağlantılı küme denir.

Tanım 2.1.7 (Bölge): Kompleks düzlemde açık ve bağlantılı kümelere bölge denir. Kapalı ve bağlantılı kümelere ise özel olarak kapalı bölge denir.

Tanım 2.1.8 (Eğri): $[\mathrm{a,b}] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ sürekli fonksiyona $\mathbb{C}$ düzleminde bir eğri denir. Burada $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ noktalarına sırasıyla eğrinin başlangıç ve bitiş noktaları denir. Bir γ eğrisi için, $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise γ eğrisine kapalı eğri denir. Kendi kendini kesmeyen eğrilere basit eğri, hem basit hem de kapalı eğrilere de basit kapalı eğri veya Jordan eğrisi denir. Jordan eğrisi düzlemi Jordan eğrisinin içi ve dışı olmak üzere iki bölgeye ayırır. Jordan eğrisinin içine Jordan bölgesi denir. γ eğrisi $[a,b]$ kapalı aralığında türevlenebilir olsun. Eğer $[a,b]$ aralığında γ' türevi sürekli ve sıfırdan farklı ise γ eğrisine düzgün eğri denir. t, a dan b ye artarken, buna karşılık gelen $\gamma(t)$ değerlerinin $\gamma(a)$ dan $\gamma(b)$ ye doğru sıralanması eğrinin yönünü belirtir.

Tanım 2.1.9 (Örtü): X herhangi bir uzay olsun. Bileşimleri V kümesini kapsayan $\{G_i\}$ ailesine, $V \subset X$ kümesinin örtüsü denir. Bileşimleri $V \subset X$ kümesinin kapsayan ve $\cup_i G_i = X$ olan açık kümelerin $\{G_i\}$ ailesine $V \subset X$ kümesinin açık örtüsü denir. Bileşimleri $V \subset X$ kümesini kapsayan alt aileye veya V kümesini örten aileye, verilen sayıda küme kapsıyorsa, bu aileye de sonlu alt örtü denilir.

Tanım 2.1.10 (Kompaktlık): Eğer bir kümenin her açık örtüsünün sonlu alt örtüsü varsa, bu kümeye kompakttır, denir.

Tanım 2.1.11 (Dizisel Kompaktlık): Eğer bir kümedeki her bir dizi bu kümede bir noktaya yakınsayan bir alt diziye sahip ise, bu kümeye dizisel kompakt küme denir.

Tanım 2.1.12 (Süreklilik): $f: A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in A$ olsun.
(i) Her $\epsilon > 0$ sayısı ve $|z - z_0| < \delta$ şartını sağlayan her $z \in A$ için $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ olacak biçimde $\delta = \delta(\epsilon, z_0) > 0$ sayısı varsa, f fonksiyonu z_0 noktasında süreklidir, denir.
(ii) Her $\epsilon > 0$ sayısı ve $|z_1 - z_2| < \delta$ şartını sağlayan her $z_1, z_2 \in A$ için $|f(z_1) - f(z_2)| < \epsilon$ olacak şekilde sadece ϵ a bağlı bir $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sayısı varsa, f fonksiyonu A kümesinde düzgün süreklidir denir.

Tanım 2.1.13 (Lipschitz Süreklilik): $f: A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z \in A$ olsun.

(i) Eğer her $w, z \in A$ için $|f(w) - f(z)| \leq K|w - z|$ şartını sağlayacak şekilde bir $K > 0$ reel sayısı varsa, f ye A kümesi üzerinde Lipschitz süreklidir, denir. **(ii)** Her $r > 0$ sayısı için, f fonksiyonu her $D(z, r) \subset A$ diskinde Lipschitz sürekli ise f ye A kümesinde yerel Lipschitz süreklidir, denir.

Tanım 2.1.14 (Sınırlılık): $f: A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu verilsin. Her $z \in A$ için $|f(z)| \leq M$ olacak biçimde bir $M > 0$ sayısı varsa, f ye sınırlı fonksiyon denir.

Önerme 2.1.15: $A \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f: A \to \mathbb{C}$ fonksiyonu verilsin.
(i) f fonksiyonu A kümesinde diferensiyellenebilir ve her $z \in A$ için $|f'(z)| \leq K$ olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı varsa f fonksiyonu A da Lipschitz süreklidir.
(ii) Kompakt bir kümede sürekli her f fonksiyonu düzgün süreklidir.
Tanım 2.1.12 ve Tanım 2.1.13 den çıkarılacak sonuç şudur: Her Lipschitz veya yerel Lipschitz sürekli fonksiyon aynı zamanda süreklidir. Fakat bunun tersi her zaman doğru değildir. Ayrıca her Lipschitz sürekli fonksiyon aynı zamanda yerel Lipschitz süreklidir. Fakat tersinin doğru olması gerekmez.

Örnek 2.1.16: $\mathbb{R}$ de tanımlı $f(x) = x^2$ fonksiyonu yerel Lipschitz sürekli fakat Lipschitz sürekli değildir. Gerçekten, f sürekli diferensiyellenebilir olduğundan her $x \in \mathbb{R}$ ve $y \in (x-1, x+1)$ için üçgen eşitsizliği kullanılırsa $|y| \leq |x| + 1$ yazılır ve buradan

$$\sup_{y \in (x-1, x+1)} |f'(y)| = \sup_{y \in (x-1, x+1)} |2y| \leq 2(|x| + 1)$$

eşitliği elde edilir. Şimdi $y, z \in (x-1, x+1)$ noktalarını ele alalım. $\mathfrak{z}$ sayısını y ile z arasında seçmek kaydıyla ortalama değer teoreminden

$$|f(z) - f(y)| = |f'(\mathfrak{z})||z - y| \leq \sup_{\theta \in (x-1, x+1)} |f'(\theta)||z - y|$$

yazılır. Yukarıdaki denklemlerden her $y, z \in (x-1, x+1)$ için

$$|f(z) - f(y)| \leq 2(|x| + 1)|z - y|$$

bulunur. Son eşitsizlikten $(x-1, x+1)$ aralığında f nin Lipschitz sabiti $K = 2(|x| + 1)$ olur ve böylece fonksiyonun $\mathbb{R}$ de yerel Lipschitz sürekli olduğu görülür. Özel olarak $x \to \infty$ için $K \to \infty$ olduğu açıktır. Yani $z = 0, y \neq 0$ ve $y \to \infty$ için

$$K = \frac{|f(y) - f(0)|}{|y - 0|} = |y| \to \infty$$

olur. Bu da f nin $\mathbb{R}$ de Lipschitz sürekli olmadığını gösterir.

2.2. ANALİTİK FONKSİYONLAR

Bu kısımda analitik fonksiyon kavramının yanı sıra, bunlarla ilgili bazı tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.2.1 (Analitik Fonksiyon): f, kompleks değişkenli ve kompleks değerli fonksiyonu $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasının bir komşuluğunda tanımlı olsun. Eğer

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

limiti varsa, bu fonksiyona z_0 noktasında diferensiyellenebilirdir denir. Eğer $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktası ve bunun bir komşuluğunda diferensiyellenebilirse, $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitik fonksiyon denir [19]. Eğer $f(z)$ fonksiyonu $\mathbb{C}$ nin tüm noktalarında analitik ise $\mathbb{C}$ fonksiyonuna tam fonksiyon denir. e^z, $sinz$, $cosz$ gibi fonksiyonlar tam fonksiyona birer örnektir.

Teorem 2.2.2 (Cauchy İntegral Formülü): $f(z)$ fonksiyonu basit bağlantılı bir D bölgesinde analitik olsun. γ, D nin içinde kapalı bir eğri olmak üzere z_0 noktası γ nın içinde herhangi bir nokta ise,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

olur.

Teorem 2.2.3 (Taylor Teoremi): f fonksiyonu bir D bölgesinde analitik olsun. Bu bölgedeki herhangi bir z_0 merkezli r yarıçaplı diski de D_r ile gösterelim. Yani,

$D_r = \{z: |z - z_0| < r\}$ olsun. $\forall z \in D_r$ için,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

serisi D_r üzerinde yakınsaktır, bu seriye Taylor serisi denir.

Teorem 2.2.4 (Türevler için Cauchy Formülü): $f(z)$ fonksiyonu basit kapalı bir çevrenin içinde ve üzerinde analitik ise γ nın içindeki herhangi bir z_0 noktası için,

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz$$

olur.

İspat: γ, merkezi z_0 ve yarıçapı δ olan küçük bir çember olsun, öyle ki γ', γ nın içinde kalsın. Buna göre,

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}$$

γ ve γ' nün üzerinde ve bunların belirttiği bölgede tek değerli ve analitiktir. O halde Cauchy teoreminden dolayı,

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz = \int_{\gamma'} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz$$

eşitliği yazılır. Yine Cauchy teoreminden dolayı, γ' nün içindeki herhangi bir $z_0 + h$ noktasında,

$$f(z_0+h) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{f(z)}{z-z_0-h} dz$$

yazılır. Buradan,

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{h}\int_{\gamma'} [\frac{f(z)}{z-z_0-h} - \frac{f(z)}{z-z_0}]dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'} \frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_0-h)} dz$$

elde ederiz. Şimdi, $h \to 0$ için limit alınırsa istenilen bulunur. Fakat integral altında limit alınabileceğini ayrıca göstermek lazımdır. Gerçekten de,

$$\int_{\gamma'} \frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_0-h)} dz - \int_{\gamma'} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz = h\int_{\gamma'} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)} dz \quad \ldots(X)$$

yazılabilir. Farzedelim ki, γ'nün üzerinde $|f(z)| \leq M$ ve $|h| \leq \delta/2$ olsun. Buna göre,

$$\left| \int_{\gamma'} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)} dz \right| = \frac{M}{\delta^2 \frac{\delta}{2}} 2\pi\delta = \frac{4\pi M}{\delta^2}$$

integral sınırlıdır. O halde, (X) eşitliğinden,

$$\lim_{|h|\to 0} \left| \int_{\gamma'} \frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_0-h)} dz - \int_{\gamma'} \frac{f(z)}{(z-z_0)} dz \right| =0$$

ve

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz$$

$f'(z_0)$ bulunur. Dolayısıyla,

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz$$

olur. Bu formül tümevarım metodu ile,

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

şeklinde ifade edilir. Böylece varlık bölgesinde analitik bir fonksiyonun her mertebeden türevinin varlığı anlaşılır.

Teorem 2.2.5 (Laurent Teoremi): $f(z)$ fonksiyonu $\overline{D}=\{z\in\mathbb{C}: r_1<|z-z_0|<r_2\}$ halka bölgesinde tek değerli ve analitik olsun. Bu taktirde $f(z)$ fonksiyonu $\overline{D}$ halkasında yakınsak, $(z-z_0)$ ın pozitif ve negatif kuvvetlerine göre,

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

serisine açılabilir.

İspat: D de bir z noktası alalım. Halkayı z_0 dan geçen fakat z den geçmeyen bir doğru boyunca keselim. Bu kesitin kenarlarını a_2a_1, $a'_2a'_1$ ile gösterelim. Neticede pozitif yönlü $a_1a'_1a'_2a_2a_1$ çevresi elde edilir. Bu çevrenin belirttiği bölge basit irtibatlıdır ve dolayısıyla bir $f(z)$ fonksiyonu için Cauchy formülü

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^{+}_1}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_{a'_1a'_2}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^{-}_2}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_{a_2a_1}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}$$

şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan $f(z)$, D de tek değerli olduğu için doğru üzerinde alınan integraller birbirini götürürler. O halde $\xi\in\Gamma_1$ ve $\xi\in\Gamma^{-}_2$ olmak üzere,

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^{-}_2}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}$$

olur. Burada Γ^{-}_2 negatif yönlüdür. Son olarak,

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}$$

dır. Yine

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{(\xi-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{\xi-z_0}\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\xi-z_0}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}$$

açılımı yazılır. Bu seri Γ_1 üzerinde mutlak ve üniform olarak yakınsaktır. Buradan

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\int_{\Gamma_1}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

olur. Burada,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}d\xi\,,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

dir. Şimdi Γ_2 eğrisinde,

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0)-(z-z_0)} = -\frac{1}{z-z_0}\frac{1}{1-\dfrac{\xi - z_0}{z-z_0}}$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\xi - z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}$$

olur, seri Γ_2 üzerinde üniform yakınsaktır. Ayrıca,

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-z_0)^{(n+1)}}f(\xi)(\xi - z_0)^n d\xi$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^{n+1}}$$

Burada,

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}f(\xi)(\xi - z_0)^n d\xi\,,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

şeklindedir. Şayet,

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{-n+1}}d\xi\,,\ n = 1, 2, \ldots$$

farzedilirse, $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ yazılır.

Tanım 2.2.6 (Laurent Serisi): Az önce bir z_0 noktası civarındaki dairenin tümünde analitik olan f fonksiyonunun, z_0 noktası civarında yakınsak bir seriye açılabileceğini göstermek için Taylor serisini kullandık. Fakat;

$$f(z) = \frac{1}{z},\quad f(z) = \frac{e^z}{z^2}$$

şeklindeki fonksiyonlar $z = 0$ noktasında analitik olmadıklarından, bu tür durumlarda fonksiyonlara Taylor açılımı uygulanamaz. Bu tür fonksiyonları ifade etmede kullanılan ve 1840 yılları civarında Laurent tarafindan formülleştirilen açılımlara Laurent açılımı veya Laurent serisi adı verilmektedir. Bu seriler kompleks sayılar teorisinde büyük rol oynamaktadır. Örneğin; bir fonksiyonun singüler noktalarının bulunup, ne tür bir singülaritiye sahip olduğunun tespit edilmesinde, fonksiyona ait Laurent açılımını kullanırız. Diğer bir temel işlevi ise bizi Cauchy Rezidü Teoremine götürüyor olmasıdır. Genel olarak bir f fonksiyonunun Laurent serisi

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z - z_0)^n$$

şeklindedir. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$ serisine Laurent serisinin esas kısmı, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z - z_0)^n$ serisine de Laurent serisinin analitik kısmı denir.

Tanım 2.2.7 (Singüler Noktaların Sınıflandırılması): Bir f fonksiyonunun $z = z_0$ noktası civarındaki Laurent serisini göz önüne alalım. Bu durumda;

(i) f fonksiyonu z_0 noktasında analitik değilse z_0 noktasına f fonksiyonunun singüler noktası denir.

(ii) z_0, f fonksiyonunun bir singüler noktası olsun. Eğer f fonksiyonu z_0 noktasının $\overset{\circ}{D}(z_0,r)$ delinmiş komşuluğunda analitik oluyorsa z_0 noktasına f fonksiyonunun ayrık singüler noktası denir.

(iii) z_0, f fonksiyonunun bir singüler noktası olsun. Eğer f fonksiyonu z_0 noktasının $\overset{\circ}{D}(z_0,r)$ her delinmiş komşuluğunda en az bir singüler noktaya sahipse z_0 noktasına f fonksiyonunun ayrık olmayan singüler noktası denir. Ayrık singüler noktaların uygun bir delinmiş komşuluğunda fonksiyon analitik olup Laurent serisine açılabilir. Bu seri göz önüne alınarak ayrık singüler noktalar, kaldırılabilir singüler nokta, kutup noktası ve esas singüler nokta diye sınıflandırılabilir.

Tanım 2.2.8 (Esas Singüler Nokta): f fonksiyonunun Laurent açılımında esas kısım sonsuz terimden oluşuyorsa $z = z_0$ noktasına fonksiyonun esas singüler noktasıdır, denir.

Tanım 2.2.9 (Kaldırılabilir Singüler Nokta): f fonksiyonunun Laurent açılımında esas kısımda sonlu sayıda terim bulunduruyorsa; $z = z_0$ noktasına fonksiyonun kaldırılabilir singüler noktasıdır, denir.

Tanım 2.2.10 (Kutup Noktası): z_0, f fonksiyonunun bir ayrık singüler noktası olsun. Bu noktanın uygun bir delinmiş komşuluğundaki Laurent serisini göz önüne alalım. Bu serinin esas kısmında sonlu sayıda terim varsa z_0 noktasına f fonksiyonunun kutup noktası denir.

Tanım 2.2.11 (Meromorf Fonksiyon): Bir f fonksiyonunun herhangi bir B bölgesinde kutup noktalarından başka bir singüler noktası yoksa f fonksiyonuna B bölgesinde meromorf fonksiyon denir.

Tanım 2.2.12 (Maksimum Prensibi): f(z) fonksiyonu basit bağlantılı bir D bölgesinde tanımlanmış, sabit olmayan, analitik bir fonksiyon olsun. Bu taktirde $|f(z)|$ ifadesi maksimum değerini D nin sınırında alır. Maksimum prensibinin önemli sonuçlarından biri Schwarz lemmasıdır.

Lemma 2.2.13 (Schwarz Lemması): f fonksiyonu U birim diskinde analitik ve $f(0) = 0$ olsun. Eğer U birim diskinde $|f(z)| \leq 1$ ise bu durumda $|f'(0)| \leq 1$ ve $|f(z)| \leq |z|$ dir. Eşitlik sadece $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(z) = e^{i\theta}z$ fonksiyonu ile sağlanır.

Lemma 2.2.14 (Genelleştirilmiş Schwarz Lemması): f, $U_R = \{z \in \mathbb{C}: |z| < R\}$ diskinde analitik ve M bir sabit olmak üzere $|f(z)| < M$ olsun. Eğer f, $z = 0$ için m den daha büyük mertebeden bir tek sıfıra sahipse bu durumda

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R^m}|z|^m, z \in U_R$$

eşitsizliği gerçekleşir. Eşitlik sadece $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(z) = e^{i\theta}(\mathrm{M}\backslash R^m)z^m$ fonksiyonu ile sağlanır.

2.3. TEK KOMPLEKS DEĞİŞKENLİ ÜNİVALENT FONKİYONLAR

Bu bölümde tek kompleks değişkenli ünivalent fonksiyonların kavram ve temel sonuçları verilmiştir. Ünivalent fonksiyonların bazı sınıfları subordinasyon, süperordinasyon, Löwner zinciri metodu ve Sâlâgean tipi integral operatörüyle değerlendirilecektir.

Tanım 2.3.1 (Ünivalent Fonksiyon): f, $A \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Her z_1, $z_2 \in A$ için $f(z_1) = f(z_2)$ olması sadece ve sadece $z_1 = z_2$ olmasını gerektiriyorsa (veya $z_1 \neq z_2$ olduğunda $f(z_1) \neq f(z_2)$ gerçekleşiyorsa) $f(z)$

fonksiyonuna A bölgesinde ünivalent ya da yalınkat fonksiyon denir [19]. Eğer f, z_0 noktasının bir komşuluğunda ünivalent ise f ye yerel ünivalent fonksiyon denir.

Teorem 2.3.2: f, analitik bir fonksiyon olmak üzere f fonksiyonu z_0 noktasında yerel ünivalent olması için gerekli ve yeterli koşul $f'(z_0) \neq 0$ olmasıdır. Ancak $f'(z_0) \neq 0$ şartı $f(z)$ fonksiyonunun ünivalent olması için yeterli değildir gereklidir. Yani f analitik fonksiyonu ünivalent ise $f'(z_0) \neq 0$ dır. Dolayısıyla bir bölgede yerel ünivalent olan fonksiyonlar ünivalent olmayabilir. Örneğin; $f(z) = z^2$ fonksiyonu $B = \{z: 1 < |z| < 2,\ 0 < argz < {}^{3\pi}/_{2}\}$ bölgesinde yerel ünivalent olmasına rağmen ünivalent değildir. Gerçekten $f(z)$ fonksiyonu B bölgesinde analitik ve her $z_0 \in B$ için $f'(z_0) \neq 0$ olduğundan yerel ünivalenttir. Fakat $z_1 = \frac{5}{3\sqrt{2}} + i\frac{5}{3\sqrt{2}}$ ve $z_2 = \frac{-5}{3\sqrt{2}} - i\frac{5}{3\sqrt{2}}$ için $z_1 \neq z_2$ olmasına rağmen $f(z_1) = f(z_2)$ dir. Dolayısıyla ünivalent değildir.

Tanım 2.3.3 (Konform Dönüşüm): $f(z)$ fonksiyonunun $z = z_0$ noktasındaki $f'(z)$ fonksiyonu için $f'(z_0) \neq 0$ ise $f(z)$ fonksiyonuna bu nokta civarında konformdur, denir. Başka bir deyişle eğer bir dönüşüm, belli bir noktadan geçen iki düzgün eğri arasındaki açının büyüklüğünü ve yönünü koruyorsa, bu dönüşüme konform dönüşüm denir.

Teorem 2.3.4: f fonksiyonunun analitik olduğu her z noktasında $f'(z) \neq 0$ koşulu sağlanıyorsa, f fonksiyonu konformdur. Dolayısıyla bir bölgede analitik ve ünivalent bir fonksiyon konformdur. En önemli konform dönüşümlerden biri Möbiüs dönüşümüdür. Bu dönüşüm; a, b, c, d kompleks sabitler olmak üzere $w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc \neq 0$ genişletilmiş kompleks düzlemi $(\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\})$ kendi üzerine konform olarak resmeder.

Teorem 2.3.5 (Riemann Dönüşüm Teoremi): Kompleks düzlemin her $D \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılı bölgesi U birim diski üzerine konform olarak resmedilir. Ayrıca, $z_0 \in D$ olmak üzere $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ koşullarını sağlayan ve D yi U birim diski üzerine resmeden bir tek konform dönüşüm vardır.

Tanım 2.3.6 (Normalize Edilmiş Ünivalent Fonksiyonlar): Analitik olarak, bir ünivalent fonksiyon sıfırdan farklı türeve sahip iken; geometrik olarak da basit eğrileri basit eğrilere dönüştürür. Hem analitik hem de ünivalent fonksiyon ise basit bağlantılı bölgeleri basit bağlantılı bölgelere dönüştürür. Riemann dönüşüm teoreminden, keyfi bir basit bağlantılı bölgede tanımlı f ünivalent fonksiyonu yerine U açık birim diskte tanımlı bir f ünivalent fonksiyonu seçilebilir. Bu fonksiyon için $f(0) = 0$ ve $f'(0) = 1$ normalizasyon şartları göz önüne alınırsa $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ Taylor serisi $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in U$ şeklini alır. Bu şekilde tanımlanmış fonksiyona normalize edilmiş analitik fonksiyondur. Ünivalent fonksiyonlar teorisinde önemli olan bazı temel fonksiyon sınıfları;

$\mathcal{A} = \{f : \forall z \in U \; için \; f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \; şeklindeki \; analitik \; fonksiyon\}$

$S = \{f \in \mathcal{A} : \forall z \in U \; için \; f - ünivalent\}$

$M = \left\{h : \forall \mathfrak{z} \in \Delta \; için \; h(\mathfrak{z}) = \mathfrak{z} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\mathfrak{z}^n} \; şeklindeki \; meromorf \; fonksiyon\right\}$

$\sum = \{h \in M : \forall \mathfrak{z} \in \Delta \; için \; h - ünivalent\}$

şeklinde sıralanabilir.

Tanım 2.3.7: U birim diskinde $p(0) = 1$, $Rep(z) > 0$ koşullarını sağlayan $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ şeklindeki fonksiyonların oluşturduğu sınıfa Caratheodory sınıf veya P sınıfı denir [19].

Örneğin; $p(z) = (1 + z)/(1 - z)$, $z \in U$ fonksiyonu P sınıfına ait olup, U birim diskini sağ yarı düzlem üzerine resmeden bir konform dönüşümdür. Ayrıca P sınıfına ait bir fonksiyonun ünivalent olması gerekmez. Örneğin; $f(z) = 1 + z^n$ fonksiyonu P sınıfına ait olmasına rağmen $n \in \mathbb{N}_0$, $n \geq 2$ için ünivalent değildir.

Tanım 2.3.8: U birim diskinde $\varphi(0) = 0$ ve $|\varphi(z)| < 1$ koşullarını sağlayan analitik fonksiyonların oluşturduğu sınıfa Schwarz fonksiyonlarının sınıfi denir ve Ω ile gösterilir.

Bunların yanı sıra, P sınıf ile Schwarz fonksiyonları arasında aşağıda olduğu gibi önemli bir bağ vardır.

$$p(z) \in P \Leftrightarrow p(z) = \frac{1+\varphi(z)}{1-\varphi(z)}, \; \varphi(z) \in \Omega$$

P ve Ω sınıflarını tanımladıktan sonra, S sınıfının iki önemli alt sınıfını aşağıdaki şekilde verebiliriz.

Tanım 2.3.9: $D \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $w_0 \in D$ olsun. Eğer w_0 noktasını D nin diğer bir w noktasına birleştiren doğru parçası tamamen D nin içinde kalıyorsa D ye w_0 noktasına göre yıldızıl bölge denir. Birim diski orijin noktasına göre yıldızıl bir bölgeye konform olarak dönüştüren fonksiyona yıldızıl fonksiyon denir [3]. Yıldızıl fonksiyonların sınıfi

S^*ile gösterilir.

Yıldızıl fonksiyonların yukarıdaki geometrik tanımını analitik olarak ifade eden en önemli teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.3.10: $f \in \mathcal{A}$ olsun. Bu halde

$$f(z) \in S^* \Leftrightarrow \frac{zf'(z)}{f(z)} \in P$$

dir. Ayrıca $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in S^* \Rightarrow |a_n| \leq n \ (n = 2, 3, ...)$ yazılır.

Tanım 2.3.11: $B \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. Her $w_1, w_2 \in B$ için w_1 noktasını w_2 noktasına birleştiren doğru parçası tamamen B içinde kalıyorsa B ye konveks küme denir. Eğer bir f fonksiyonu konveks bir kümeyi, konveks bir kümeye resmediyorsa f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Konveks fonksiyonların sınıfı C ile gösterilir.

Konveks fonksiyonları analitik olarak ifade eden en önemli teorem aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.3.12: $f \in \mathcal{A}$ olsun. Bu halde

$$f(z) \in C \Leftrightarrow 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \in P$$

dir. Ayrıca $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in C \Rightarrow |a_n| \leq 1 \quad (n = 2, 3, ...)$ yazılır.

Şimdi tek değişkenli ünivalent fonksiyonlar teorisinde önemli bir yere sahip olan subordinasyon kavramını inceleyeceğiz.

Tanım 2.3.13: f ve g fonksiyonları U birim diskinde tanımlı iki analitik fonksiyon olsun. U birim diskinde $f(z) = g(w(z))$ olacak şekilde bir $w \in \Omega$ fonksiyonu varsa, f fonksiyonu U da g fonksiyonuna subordinedir denir ve $f \prec g$ ile gösterilir. Eğer g ünivalent ise $f \prec g \Leftrightarrow f(0) = g(0)$ ve $f(U) \subseteq g(U)$ olmasıdır [19].

Tanım 2.3.14 (Subordinasyon Prensibi): Eğer f fonksiyonu U birim diskinde analitik, ünivalent ve g fonksiyonu da U birim diskinde analitik bir fonksiyon ayrıca $g(0) = f(0)$ ve $g(U) \subseteq f(U)$ ise, bu durumda U_r diskinde her $r < 1$ için $|g'(0)| \leq |f'(0)|$ ve $g(U_r) \subseteq f(U_r)$ dir [19]. Özellikle, eğer $f \prec g$ ise

$$\max_{|z| \leq r} |f(z)| \leq \max_{|z| \leq r} |g(z)|, \ (r \in (0,1))$$

yazılır. Ayrıca

$$p(z) \in P \Leftrightarrow p(z) \prec \frac{1+z}{1-z}$$

ve

$$\varphi(z) \in \Omega \Leftrightarrow \varphi(z) \prec z$$

olmasıdır.

2.4 SUBORDİNASYON VE LOEWNER ZİNCİRLERİ:

Bu bölümde ilk olarak tezin ana unsuru olan Loewner zincirlerini diğer bir deyişle ünivalent subordinasyon zincirlerini tanımlayarak, bunların bazı özelliklerini inceleyeceğiz. Bu konuda ilk çalışma 1965 yılında Pommerenke [11] tarafından verilmiştir. Loewner zincirler teorisinde, eğer h fonksiyonu U da analitik ve aynı zamanda başka bir değişkene de (reel) bağlı bir fonksiyon ise, $z \in U$ olmak üzere $\frac{\partial h}{\partial z}(z,t)$ kısmi türevi bazen $h'(z,t)$ olarak gösterilir. Aşağıdaki teoremlerin ispatında kolaylık açısından $h'(z,t)$ kullanımı tercih edilmiştir.

Tanım 2.4.1: $f: U \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$ fonksiyonu verilsin. Eğer, $f(z,t)$ fonksiyonu için

(i) $f(z,t)$ fonksiyonu U da analitik,

(ii) Her $t \geq 0$ için $f'(0,t)$ $(f'(0,t) \neq 0)$ sürekli bir fonksiyon, $|f'(0,t)|$ kesin artan ve $t \to \infty$ iken $f'(0,t) \to \infty$,

(iii) Her $z \in U$ ve $0 \leq s \leq t < \infty$ için $f(z,s) \prec f(z,t)$

şartları sağlanıyorsa $f(z,t)$ fonksiyonuna subordinasyon zinciri denir [20].

Burada, $f(z,s) \prec f(z,t)$, $0 \leq s \leq t < \infty$ subordinasyonunun anlamı şudur:

$$f(z,s) = f(v(z,s,t),t), z \in U, 0 \leq s \leq t < \infty)$$

olacak şekilde $v = v(z,s,t)$ Schwarz fonksiyonlarının bir ailesinin var olmasıdır. Buradaki $v = v(z,s,t)$ fonksiyonuna subordinasyon zinciri için geçiş fonksiyonu denir. Eğer her $t \geq 0$ için $f(z,t)$ fonksiyonu U da ünivalent ise, bu durumda $f(z,t)$ subordinasyon zincirine Loewner zincir (ünivalent subordinasyon zinciri) denir. Burada $f(0,t) = 0$, $f'(0,t) = e^t, t \geq 0$ şartlarına $f(z,t)$ subordinasyon zincirinin normalleştirme şartları denir. Tanım 2.4.1 den açıktır ki $f(z,t)$ fonksiyonu, subordinasyon zinciri olması durumunda $t \geq 0$ için U da,

$$f(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)z^n = a_0(t) + a_1(t)z + a_2(t)z^2 + \cdots$$

şeklinde bir açılıma sahiptir. Bu seri genel subordinasyon zinciri olarak adlandırılır. Ayrıca normalleştime şartları altında genel subordinasyon zinciri

$$f(z,t) = e^t z + a_2(t)z^2 + \cdots$$

şeklinde olur. Buna standart subordinasyon zinciri denir.

Örneğin; $f(z,t) = \frac{e^t z}{(1-z)^2}$ ve $g(z,t) = e^t g(z)$ $(g - starlike)$ fonksiyonları birer

Loewner zinciridir.

$f(z,t)$ Loewner zinciri için, f_t fonksiyonu $f_t = f(z,t)$ şeklinde tanımlanan bir ünivalent fonksiyon olsun. Bu Loewner zincirini, U da ünivalent fonksiyonların $\{f_t\}_{t\in[0,\infty)}$ parametrelenmiş bir ailesi olarak düşünebiliriz. Burada t_0 ilk eleman ve $t \to \infty$ iken fonksiyonların görüntüleri de kompleks düzleme doğru genişler. Ayrıca $f(z,t)$ bir Loewner zinciri ise $\forall z \in U$ ve $0 \leq s \leq t < \infty$ için $f(z,s) = f(v(z,s,t),t)$ olacak şekilde bir $v = v(z,s,t)$ Schwarz fonksiyonlarının bir ailesi vardır. Normalleştirme şartları altında $0 \leq s \leq t < \infty$ için $v'(0,s,t) = e^{s-t}$ yazılır. Bunun yanı sıra f_t ve f_s fonksiyonları U da ünivalenttir. Yukarıda verilenlerden $f(z,t)$ subordinasyon zincirinin $v = v(z,s,t)$ geçiş fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i) $v(z,s,t)$ ünivalent ve $v(0,s,t) = 0$,

ii) Her $z \in U$ için $|v(z,s,t)| \leq |z|$ ve $v'(0,s,t) = e^{s-t}$,

iii) Her $z \in U$ için $v(z,s,s) = z$,

iv) Eğer $s \leq t \leq u$ ise $\forall z \in U$ için $v(z,s,u) = v(v(z,s,t),t,u)$.

Tanım 2.4.2 (Loewner Diferensiyel Denklemi): Loewner teorisinin ana unsurlarından biri olan Loewner diferensiyel denklemini inceleyeceğiz. Bu denklemin iki farklı biçimi vardır, bunlardan biri Loewner zincirine diğeri de geçiş fonksiyonuna bağlıdır. Bu denklemlerin her ikisi de t parametresine bağlı P sınıfına ait bir fonksiyon içerir. Aslında Loewner zinciri bir türlü genişlemeyi temsil eder. Loewner diferensiyel denklemini ilk kez Loewner [10] (1923) daha sonra Kufarev [21] (1943) çalışmıştır. Daha sonraki yıllarda Pommerenke [11] (1965) bu teoriye önemli katkılar sağlamıştır. Bu katkılardan en önemlisi verilen bir fonksiyonun Loewner zinciri olması diğer bir deyişle ünivalent olması için yeter olan şartları içermesidir.

Teorem 2.4.3: $f: U \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $t \geq 0$ için $f(0,t) = 0$ ve $f'(0,t) = e^t$ şartlarını sağlayan bir fonksiyon olsun. $f(z,t)$ fonksiyonunun bir Loewner zinciri olması için gerek ve yeter şart

(i) $f(z,t)$ fonksiyonu her $t \geq 0$ için U_r diskinde analitik, $t \geq 0$ için yerel mutlak, $z \in U_r$ ye göre yerel düzgün sürekli ve

$$|f(z,t)| \leq Me^t, \;\; (|z| < r, t \geq 0) \qquad \textbf{(2.1)}$$

olacak şekilde $r \in (0,1)$ ve $M > 0$ sabitinin olması,

(ii) $\forall z \in U$ için $[0,\infty)$ aralığı üzerinde ölçülebilir ve her $z \in U_r$ için

$$\frac{\partial f}{\partial t}(z,t) = zf'(z,t)p(z,t), \quad (t \geq 0) \qquad \textbf{(2.2)}$$

Loewner diferensiyel denklemini sağlayan, her $t \geq 0$ için $p(z,t) \in P$ olacak şekilde $p(z,t)$ fonksiyonunun var olması şartlarının sağlanmasıdır [11, 20].

2.5 İNTEGRAL OPERATÖRLERİ

Gr. Şt. Sâlâgean tarafından 1983 de tanımlanmıştır [22].

Tanım 2.5.1: $f \in H(U)$, $f(0) = 0$ olsun. $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere I^m integral operatörünü şöyle tanımlarız:

(i) $I^0 f(z) = f(z)$,

(ii) $I^1 f(z) = If(z) = \int_0^z f(t)t^{-1}dt$,

(iii) $I^m f(z) = I\big(I^{m-1}f(z)\big)$.

2.6. ÇOK KOMPLEKS DEĞİŞKENLİ ÜNİVALENT FONKSİYONLAR

Bu bölümde çok kompleks değişkenli ünivalent fonksiyonların sonuçlarına, bazı biholomorfik dönüşüm sınıflarına, Öklid birim yuvarında otomorfizmaya, Loewner zincir metoduna, Roper-Suffridge kurallarına yer verilmiştir. Genel olarak $\mathbb{C}^n$ Öklid birim yuvarında bu sonuçlar ortaya konmuştur.

Tanım 2.6.1 (Biholomorfik Dönüşümler, Pozitif Reel Kısımlı Fonksiyonlar İçin Genellemeler): B keyfi bir norm ile ilgili $\mathbb{C}^n$ de bir birim yuvar olsun. $\mathbb{C}^n$, n kompleks değişkenli keyfi bir $\|.\|$ normu ile $z = (z_1, \ldots, z_n)'$ şeklinde tanıtılmış bir alanı göstersin. $'$ sembolünün anlamı vektör ve matrislerin transpozu anlamına gelmektedir. $L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$: standart operatör normu ile $\mathbb{C}^n$ den $\mathbb{C}^m$ e gelen sürekli lineer operatörlerin uzayı olarak ifade edeceğiz. I, $L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ içinde benzer bir yapıdaki bir fonksiyon olsun. Her $z \in \mathbb{C}^n/\{0\}$ için $T(z) = \{l_z \in L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}) : l_z(z) = \|z\|,\ \|l_z\| = 1\}$ olsun. Bu küme Hahn-Banach teoremi gereği boştan farklıdır. Eğer $f \in H(B)$ ise $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ olduğunda $f$ye normalize edilmiş bir fonksiyon deriz. Ayrıca $f \in H(B)$ ise, $D^k f(z)$, $z \in B$ de f nin k. ncı Frechet türevi olur.

$\forall z \in B$ için f bir yerel holomorfik terse sahip ise, $f \in H(B)$ yi B üzerinde yerel biholomorfik fonksiyon olarak ifade ederiz. Bu da B deki her nokta için $Df(z)$ nin ters çevrilebilir olma şartına eşdeğer olduğu anlamına gelmektedir. B deki biholomorfik bir dönüşüm, ünivalent dönüşüm olarak ta adlandırılır.

Ayrıca, $z \in \mathbb{C}^n/\{0\}$ ve $l_z \in T(z)$ ise $l_z(w) = \langle w, \frac{z}{\|z\|} \rangle$, $w \in \mathbb{C}^n$ dir.

Tanım 2.6.2 (Starlike Dönüşümler): $f: B^n \to \mathbb{C}^n$ holomorfik bir dönüşüm olsun. Eğer f biholomorfik, $f(0) = 0$ ve $f(B^n)$ sıfıra göre starlike bir bölge $(tf(z) \subseteq f(B^n), \forall z \in B^n \; ve \; t \in [0,1] \; için)$ ise f ye starlike denir. $S^*(B^n)$, B^n deki normalize edilmiş starlike dönüşümlerin bir sınıfı olarak adlandırılır.

Starlike dönüşümlerin analitik karakterizasyonu teoremi 1955 yılında Matsuno [23] tarafından verilmiştir. Bu teorem $\mathbb{C}^n$ birim yuvarında keyfi bir norma göre genelleştirilmiştir.

Teorem 2.6.3: $f(0) = 0$ olmak üzere $f: B^n \to \mathbb{C}^n$ yerel olarak biholomorfik bir dönüşüm olsun. $Re\langle [Df(z)]^{-1} f(z), z \rangle > 0$, $z \in B^n/\{0\}$ olmak üzere

$$f(z) = Df(z)h(z), \quad z \in B^n$$

olacak şekilde $h \in M$ varsa f ye B^n de starlike'tır, denir.

Tanım 2.6.4 (Konveks Dönüşümler): Eğer f, B^n de biholomorfik ve $f(B^n)$, her $z, w \in B^n$ ve $t \in [0,1]$ için $(1-t)f(z) + tf(w) \in f(B^n)$ konveks bir bölge ise $f: B^n \to \mathbb{C}^n$ dönüşümü konvekstir, denir. $K(B^n)$, B^n deki birim yuvarın normalize edilmiş konveks dönüşümlerinin bir kümesi olarak adlandırılır.

Yerel olarak biholomorfik dönüşümlerin konvekslik için analitik karakterizasyonu teoremi 1973 yılında Kikuchi [24] ve 1993 yılında Gong, Wong, Yu [25] tarafından elde edilmiştir.

Teorem 2.6.5: $f: B^n \to \mathbb{C}^n$ lokal olarak biholomorfik bir dönüşüm olsun. Eğer

$1 - Re\langle [Df(z)]^{-1} D^2 f(z)(v, v), z \rangle > 0$, $z \in B^n$, $\|v\| = 1$ ve $Re\langle z, v \rangle = 0$ ise f dönüşümü konvekstir.

Tanım 2.6.6 (Loewner Zincirleri): $f: B \times [0, \infty) \to \mathbb{C}^n$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağladığında Loewner zinciri adını alır.

(i) $f(.\,, t)$, B üzerinde holomorfik ve ünivalent, $\forall t \geq 0$ için $f(0,t) = 0$ ve $Df(0,t) = e^t I$;

(ii) f, $B \times [0, \infty)$ üzerinde sürekli;

(iii) $0 \leq s \leq t < \infty$ ve $z \in B$ olduğunda $f(z,s) \prec f(z,t)$.

(iii) şartı için $v = v(z,s,t)$ nin özel bir ünivalent Schwarz dönüşümü olduğu dikkate alınır ve $f(z,t)$ ile ilişkili bir geçiş dönüşümü olarak adlandırılır. Şöyle ki,

$$f(z,s) = f(v(z,s,t),t), \quad z \in B, \quad 0 \leq s \leq t < \infty \qquad \textbf{(2.3)}$$

dır.

Ayrıca, normalize edilmiş $f(z,t)$, geçiş dönüşümleri için normalize olmuş

$$Dv(0,s,t) = e^{s-t}I, \quad 0 \leq s \leq t < \infty$$

eşitliği anlamına da gelir. Diğer taraftan (2.3) eşitliği ve $f(.\ ,t),\ t \geq 0$ nın ünivalanslığı, $v(z,s,t)$ geçiş dönüşümünün yarı grup özelliği anlamına da gelir. Yani,

$$v(z,s,u) = v(v(z,s,t),t,u), \quad z \in B, \ 0 \leq s \leq t \leq u < \infty \qquad \textbf{(2.4)}$$

dur.

Tartışmamız içinde n-boyutlu Caratheodory sınıfı

$$M = \{h \in H(B): h(0) = 0, \ Dh(0) = 1, \ Re[l_z\langle h(z)\rangle] > 0, \ z \in B/\{0\}, \ \ l_z \in T(z)\}$$

önemli bir rol oynar. Bu kümenin tek değişkenlilerde kompakt olduğu iyi bilinmektedir. 1974 yılında Pfaltzgraff [26] Loewner zincirlerini daha yüksek boyutlar için genelleştirmiştir. Son zamanlarda Graham, Hamada ve Kohr daha yüksek boyutlar için aynı sonucu bulmuşlardır.

Lemma 2.6.7: $h \in M$ olsun. Öyle ki $\|z\| \leq r$ için $\|h(z)\| \leq M(r)$ olacak şekilde (h den bağımsız) her $r \in (0,1)$ için $M = M(r) \leq 4r/(1-r)^2$ şeklinde bir sabiti vardır.

B üzerindeki Löwner diferensiyel denklemi için verilen temel teorem, $h(z,t)$ dönüşümünün sınırlı olma varsayımı atlanarak geliştirilebilir. (Pfaltzgraff, $\forall r \in (0,1)$ ve $T > 0$ için, $0 \leq t \leq T$ ve $\|z\| \leq r$ için $\|h(z,t)\| \leq K(r,T)$ olacak şekilde $K = K(r,T) > 0$ sayısının mevcut olduğunu kabul etmiştir). Böylece biz aşağıdaki sonuca ulaşabiliriz :

Lemma 2.6.8: $h: B \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ dönüşümü aşağıdaki varsayımları karşılar:

(i) $h(.\ ,t) \in M, \quad t \geq 0$

(ii) $\forall z \in B$ için $h(z,\ .)$, $[0,\infty)$ üzerinde ölçülebilirdir.

Daha sonra,

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -h(v,t) \qquad a.e.\, t \geq s, \quad v(s) = z \qquad \textbf{(2.5)}$$

başlangıç değer probleminin $v(t) = v(z,s,t)$ olacak şekilde bir tek çözümü vardır. $v(z,s,t) = e^{s-t}z + \cdots$ dönüşümü B üzerinde ünivalent Schwarz dönüşümü ve $z \in B$

ye göre yerel düzgün, $t \geq s$ için de yerel Lipschitz sürekli bir dönüşümdür. Ayrıca,

$$\lim_{t\to\infty} e^t v(z,s,t) = f(z,s) \qquad \textbf{(2.6)}$$

$\forall s \geq 0$ için B üzerinde yerel düzgün ve $f(z,s) = f(v(z,s,t),t)$, $z \in B$, $0 \leq s \leq t < \infty$ olacak şekilde (2.6) limiti mevcuttur. Böylece $f(z,t)$ dönüşümü bir Loewner zinciridir. Ek olarak, bu $z \in B$ ve $a.e.t \geq 0$ ile yerel düzgün, $t \geq 0$ da da yerel Lipschitz sürekli fonksiyondur.

$$\frac{\partial f}{\partial t}(z,t) = Df(z,t)h(z,t), \quad \forall z \in B \qquad \textbf{(2.7)}$$

Bundan başka $\{e^{-t}f(z,t)\}_{t\geq 0}$ ailesi B üzerinde normal bir ailedir.
Loewner zincirlerinin büyüme durumu yerine geçen, n-boyutlular için Loewner diferensiyel denkleminin çözümlerini aşağıdaki sonuçla yeniden göstereceğiz. Bu birçok karmaşık değişkenlilerde ünivalanslık teorisinin temel sonuçlarından biridir.

Lemma 2.6.9: $f(.,t) \in H(B)$, $f(0,t) = 0$, $Df(0,t) = e^t I \quad \forall t \geq 0$ için ve $f(z,t)$, $z \in B$ ye göre yerel düzgün $t \in [0,\infty)$ için de yerel mutlak sürekli olacak şekilde $f: B \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ şeklinde verilen bir dönüşüm olsun. $h: B \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ dönüşümü Lemma 2.6.8 deki (i) ve (ii) varsayımlarını karşılasın. Farzedelim ki, $f(z,t)$, her $z \in B$ ve hemen hemen tüm $t \geq 0$ için (2.7) diferensiyel denklemini yerine getirsin. Ayrıca, $t_m > 0$, $t_m \to \infty$ ve

$$\lim_{m\to\infty} e^{-tm} f(z,\ t_m) = F(z) \qquad \textbf{(2.8)}$$

olacak şekilde B üzerinde yerel düzgün bir $\{t_m\}$ artan dizisinin olduğunu varsayalım. Böylece $f(z,t)$ bir Loewner zinciridir ve $\forall s \geq 0$ için

$$\lim_{t\to\infty} e^t v(z,s,t) = f(z,s)$$

dir. $v(t) = v(z,s,t)$, (2.5) başlangıç değer probleminin çözümü olduğunda $f(z,s)$ eşitliği B üzerinde yerel düzgündür.
Lemma 2.6.7 ile bağlantılı olarak aşağıdaki tanımı hatırlayacağız:

Tanım 2.6.10 (Loewner Diferensiyel Denklemi): $h: B \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ dönüşümü Lemma 2.6.7 deki varsayımları sağlasın. Ayrıca $f \in H(B)$, $f(0) = 0$, $Df(0) = 1$ olsun. Eğer tüm $z \in B$ için $v = v(z,t)$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -h(v,t) \quad a.e.t \geq 0, \quad v(z,0) = z$$

başlangıç değer probleminin bir tek çözümü olduğunda,

$$f(z) = \lim_{t\to\infty} e^t v(z,t)$$

B üzerinde yerel düzgün ise, f ye B üzerinde parametrik gösterime sahip deriz ve

$f \in S^{\circ}(B)$ şeklinde yazarız. Tabi ki, $f(z,t)$ Loewner zinciri Lemma 2.6.9 koşullarını sağlarsa, $f(.,0) \in S^{\circ}(B)$ olur. Daha yüksek boyutlar için $S^{\circ}(B)$ nin $S(B)$ nin bir düzgün alt kümesi olduğu gösterilir ve ayrıca

$$S'(B) = \{f \in S(B) \colon \exists f(z,t)\ Loewner\ zinciri, \qquad f(z) = f(z,0), \qquad z \in B\}$$

olduğunda $S^{\circ}(B) \not\subseteq S'(B)$ dir.

Ancak, $S(B)$ nin birçok önemli alt kümeleri, örneğin, $S^*(B)$ (B de normalize edilmiş starlike dönüşümlerin kümesi), $G(B)$ (A ve B tipindeki normalize edilmiş yarı konveks dönüşümlerin kümesi) ve $\hat{S}_{\alpha}(B)$ ($\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ tipi normalize edilmiş spiral dönüşümlerin kümesi) $S^0(B)$ nin alt kümeleridir.

Bu tez de Loewner zincirleri ile ilgili geçiş dönüşümlerinin bazı özelliklerini elde edeceğiz ve şunu da birlikte göreceğiz; $\{e^{-t} f(z,t)\}_{t\geq 0}$ normal aile ve f, bu zincirin ilk elemanı olacak şekilde yani $z \in B$ de $f(z) = f(z,0)$ olacak şekilde bir $f(z,t)$ Loewner zinciri mevcut olduğunda f dönüşümünün $S^0(B)$ ye ait olduğunu göreceğiz.

Tanım 2.6.11 (Spiral Şeklindeki Dönüşümler): $A \in L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ lineer operatörü için aşağıdaki notasyonu kullanırız:

$$m(A) = min\{Re\langle A(z), z\rangle : \ \|z\| = 1\}$$

$f \colon B^n \to \mathbb{C}^n$, B^n de normalize edilmiş bir ünivalent dönüşüm olsun. $m(A) > 0$ olacak şekilde $A \in L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ olsun. Eğer

$$e^{-tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} t^k A^k \tag{2.9}$$

olacak şekilde $e^{-tA} f(B^n) \subseteq f(B^n)$, $\forall t \geq 0$ mevcut ise f ye A ile sarmal yapıdadır, denir.

Teorem 2.6.12: $m(A) > 0$ olacak şekilde $A \in L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ ve $f \colon B^n \to \mathbb{C}^n$ normalize edilmiş bölgesel biholomorfik bir dönüşüm olsun. Eğer,

$$[Df(z)]^{-1} A f(z) \in \varkappa$$

ise f, A ile sarmal yapıdadır.

Hamada ve Kohr [27], α tipi sarmal dönüşüm sınıflarını çalışmışlardır. Özel olarak $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ için $A = e^{-i\alpha} I_n$ alınacaktır. Bu durumda 2.9 koşulu

$$e^{-i\alpha} [Df(z)]^{-1} f(z) \in \varkappa \tag{2.10}$$

olacaktır.

Tanım 2.6.11 de $A = e^{-i\alpha}$, $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ olarak alırsak α tipi birim diskin sarmal yapıda olduğunu anlarız. Pommerenke tarafından verilen sonraki teorem holomorfik fonksiyonlar için α tipi sarmal yapısı için gerek ve yeter koşulu vermiştir.

Teorem 2.6.13: f, U da normalize edilmiş holomorfik bir fonksiyon, $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ ve $a = tan\alpha$ olduğunu farzedelim. Eğer

$$F(z,t) = e^{(1-ia)t} f(e^{iat}z), z \in U, t \geq 0$$

olacak şekilde bir Loewner zinciri ise f, α tipi spiral bir fonksiyondur.
Özellikle, $F(z,t) = e^t f(z)$ bir Loewner zinciri ise f starlike bir fonksiyondur. Hamada ve Kohr [27] α tipi spiral dönüşümlerin Loewner zinciri altında olabileceğini göstermiştir.

Teorem 2.6.14: f, B^n de normalize edilmiş bölgesel biholomorfik bir dönüşüm ve $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ için $a = tan\alpha$ olduğunu farzedelim. Eğer

$$F(z,t) = e^{(1-ia)t} f(e^{iat}z), \quad z \in B^n, \quad t \geq 0$$

bir Loewner zinciri ise f dönüşümü α tipi spiral dönüşümdür. Özel olarak eğer $F(z,t) = e^t f(z)$ bir Loewner zinciri ise f bir starlike dönüşümdür.

Tanım 2.6.15 (α Dereceli Yaklaşık Starlike Dönüşümler): Önümüzdeki bölümlerde kullanılan bir başka görüş α. dereceden $\alpha \in [0,1)$ yaklaşık (hemen hemen) starlike olmasıdır. (Tanım birim öklidyen yuvarı durumunda $\alpha = 1/2$ için G. Kohr [28] tarafından ortaya konulmuştur. Ayrıca $\alpha \in [0, 1)$ durumunda ve kompleks Banach uzayındaki birim yuvar için tanıtılmıştır). Amacımız sadece Öklidyen kuralına bağlı bu kavramı sunabilmektedir.

$0 \leq \alpha < 1$ olsun. $f: B^n \to \mathbb{C}^n$ normalize edilmiş bölgesel biholomorfik dönüşümü;

$$Re\langle [Df(z)]^{-1} f(z), z\rangle > \alpha \|z\|^2, \quad z \in B^n/\{0\} \qquad \textbf{(2.11)}$$

şartını sağlarsa bu dönüşüme α. dereceden yaklaşık starlike dönüşümü denir.
Tek kompleks değişken olması durumunda, aşağıdaki eşitsizlik (2.11) i azaltır (düşürür):

$$Re\frac{f(z)}{zf'(z)} > a, \quad z \in U$$

Q. H. Xu [29] ve T. S. Liu [29] Loewner zincirleri açısından α. dereceden yaklaşık starlike olma durumunu aşağıdaki teoremle karakterize etmiştir.

Teorem 2.6.16: f in U içinde normalize edilmiş holomorfik bir fonksiyon ve

$$F(z,t) = e^{\frac{t}{1-\alpha}} f(e^{\frac{\alpha}{\alpha-1}t}z), \quad z \in U, \quad t \geq 0$$

olacak şekilde bir Loewner zinciri ise f, α. dereceden yaklaşık starlike bir fonksiyondur [29]. Özel olarak $f(z,t) = e^t f(z)$ Loewner zinciri ise f bir starlike fonksiyondur (i. e. $\alpha = 0$).

Bir sonraki sonucu Q. H. Xu ve T. S. Liu n- boyutlu olması nedeniyle Teorem 2.6.14 ü tekrardan genelleştirmişlerdir. Bu sonucun aslında $\mathbb{C}^n$ birim yuvarında rasgele bir norm ile elde edildiği unutulmamalıdır.

Teorem 2.6.17: f in B^n de normalize edilmiş bölgesel biholomorfik bir dönüşüm ve $0 \leq \alpha < 1$ olduğunu farzedelim.

$$F(z,t) = e^{\frac{1}{1-\alpha}t} f(e^{\frac{\alpha}{\alpha-1}t} z), \quad z \in B^n, \quad t \geq 0$$

olacak şekilde bir Loewner zinciri ise f, α. dereceden yaklaşık starlike bir dönüşümdür. Özel olarak $f(z,t) = e^t f(z)$ Loewner zinciri ise f bir starlike dönüşümdür (i. e. $\alpha = 0$).

Tanım 2.6.18 (Roper-Suffridge Uzantısı Olan Operatörler İçin Genellemeler): Öklidyen $n-$boyutlu $\mathbb{C}^n$ uzayında; $z = (z_1, \tilde{z})$ olacak şekilde $\tilde{z} = (z_2, \dots, z_n)$ olsun. Roper-Suffridge uzantısı olan operatör U birim diskinde normalize edilmiş bölgesel ünivalent fonksiyonlar için tanıtılmıştır. Bu operatör

$$\varphi_n(f)(z) = F(z) = (f(z_1), \sqrt{f'(z_1)}\tilde{z}) \qquad \textbf{(2.12)}$$

şeklindedir. Karekök $\sqrt{f'(0)} = 1$ olacak şekilde seçilir.

Bu operatör Roper-Suffridge [30] tarafindan 1995 te tanıtılmıştır. $\mathbb{C}^n$ Öklidyen birim yuvarında konveks dönüşümle U birim diskinde keyfi olarak alınan bir konveks fonksiyonun genişlemesi amaçlanmıştır. I. Graham, G. Kohr, M. Kohr bu operatörü $\gamma \in [0, 1/2)$ ve $(f'(z))^\gamma \,|_{z_1=0} = 1$ olacak şekilde kuvvet foksiyonunun bir dalı olarak seçildiği taktirde,

$$\varphi_{n,\gamma}(f)(z) = (f(z_1), (f'(z_1))^\gamma \tilde{z})$$

şeklinde genelleştirmiştir.

Teorem 2.6.19: $f \in S$ ve $\gamma \in [0, {}^1\!/_2]$ olduğunu varsayalım.

$\varphi_{n,\gamma}(f)(z) = (f(z_1), (f'(z_1))^\gamma \tilde{z})$, $z = (z_1, \tilde{z}) \in B^n$ ve $z_1 \in U$, $\tilde{z} = (z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$ olduğunda $\varphi_{n,\gamma}(f)$ Loewner zincirinin içinde olabilir. Kuvvet fonksiyonunun bir dalı olarak

$$(f'(z_1))^\gamma \,|_{z_1=0} = 1$$

seçilebilir. I. Graham ve G. Kohr, Roper-Suffridge uzantısı olan diğer bir operatörü de

$$\varphi_{n,\beta}(f)(z) = \left(f(z_1),\ \left(\frac{f(z_1)}{z_1}\right)^{\beta} \tilde{z}\right) \qquad \beta \in [0,1] \tag{2.13}$$

şeklinde tanıtmışlardır. Kuvvet fonksiyonu $\left(\frac{f(z_1)}{z_1}\right)^{\beta} |_{z_1=0}=1$ olarak seçilir.

Teorem 2.6.20: $f \in S$ ve $\beta \in [0,1]$ olsun.

$\varphi_{n,\beta}(f)(z) = (f(z_1), \left(\frac{f(z_1)}{z_1}\right)^{\beta} \tilde{z}),\ z \in (z_1, \tilde{z}) \in B^n$ ve $z_1 \in U,\ \tilde{z} = (z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$ olduğunda $\varphi_{n,a}(f)$ Loewner zincirinin içerisine katılmış olabilir. Kuvvet fonksiyonunun bir dalı olarak $\left(\frac{f(z_1)}{z_1}\right)^{\beta} |_{z_1=0}= 1$ seçilebilir.

2002 de, I. Graham, H. Hamada, G. Kohr ve T. Suffridge [31], Roper-Suffridge uzantısı operatörünü

$$\varphi_{n,\beta,\gamma}(f)(z) = (f(z_1), \left(\frac{f(z_1)}{z_1}\right)^{\beta} \left(f'(z_1)\right)^{\gamma} \tilde{z}) \tag{2.14}$$

$\beta + \gamma \leq 1$ olacak şekilde $\left(\beta \in [0,1]\ ve\ \gamma \in [0, {}^{1}/_{2}]\right)$ farklı bir tipte genelleştirmişlerdir. Kuvvet fonksiyonunun bir dalı olarak $\left(\frac{f(z_1)}{z_1}\right)^{\beta} |_{z_1=0}= 1$ ve $\left(f'(z_1)\right)^{\gamma} |_{z_1=0}= 1$ olarak seçilmiştir.

Teorem 2.6.21: $f \in S$ ve $\gamma + \beta \leq 1$ olacak şekilde $\beta \in [0,1]$, $\gamma \in \left[0, {}^{1}/_{2}\right]$ aralığında olduğunu farzedelim. O halde

$\varphi_{n,\beta,\gamma}(f)(z) = \left(f(z_1), \left(\frac{f(z_1)}{z_1}\right)^{\beta} \left(f'(z_1)\right)^{\gamma} \tilde{z}\right), \qquad z = (z_1, \tilde{z}) \in B^n$ ve $z_1 \in U$, $\tilde{z} = (z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$ olur. Kuvvet fonksiyonunun bir dalı olarak $\left(\frac{f(z_1)}{z_1}\right)^{\beta} |_{z_1=0}= 1$ ve $(f'(z_1))^{\gamma} |_{z_1=0}= 1$ seçilebilir. $n \geq 1$ için $z' = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ ve $z = (z', z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$ dir.

B^n deki ünivalent dönüşümünü B^{n+1} deki ünivalent dönüşümüne genişleten operatör Pfaltzgraff ve Suffridge tarafından tanıtılan başka bir operatördür.

Tanım 2.6.22 (Pfaltzgraff-Suffridge Operatörü): Pfaltzgraff-Suffridge uzantısı operatör $\varphi_n : LS_n \to LS_{n+1}$

$$\varphi_n(f)(z) = \left(f(z'), z_{n+1}[J(z')]^{1/n+1}\right),\ \ z = (z', z_{n+1}) \in B^{n+1} \tag{2.15}$$

şeklinde tanımlanır [33].

Kuvvet fonksiyonunun bir dalı olarak

$$[Jf(z')]^{\frac{1}{n+1}}\ |_{z'=0} = 1$$

seçilir.

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

3.1. LOEWNER ZİNCİRLERİYLE İLGİLİ TEMEL SONUÇLAR

Teorem 3.1.1: $f(z,t)$ bir Loewner zinciri olsun. $\forall t \geq 0$ için $h(.\ ,\ t) \in M$ olacak şekilde $h = h(z,t)$ dönüşümü vardır. $\forall z \in B$ için $h(z,t)$, t içinde ölçülebilidir ve hemen hemen tüm $t \geq 0$ için

$$\frac{\partial f}{\partial t}(z,t) = Df(z,t)h(z,t), \quad \forall z \in B \tag{3.1}$$

dir.

(Yani, tüm $t \in [0,\infty)/E$ olacak şekilde $E \in [0,\infty)$ boş kümesi vardır. $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)(.\ ,\ t)$ sağlanır). Bundan başka, eğer $t_m > 0$ olacak şekilde bir $\{t_m\}$ dizisi mevcut, $t_m \to \infty$ ve

$$\lim_{m\to\infty} e^{-tm} f(z,t_m) = F(z) \tag{3.2}$$

B üzerinde lokal düzgün ise $\forall z \in B$ için $\frac{\partial w}{\partial t} = -h(w,t)\ \ a.e.\, t \geq s,\ w(s) = z$ başlangıç değer probleminin çözümü $w(t) = w(z,s,t)$ özel bir yerel mutlak sürekli olduğunda

$$f(z,s) = \lim_{t\to\infty} e^t w(z,s,t) \tag{3.3}$$

B üzerinde yerel düzgündür.

İspat: $v = v(z,s,t)$, $f(z,t)$ nin bir geçiş dönüşümü olsun. Subordinasyon ilkesi ve ortalama değer teoremine (f deki bileşenlerin gerçek ve sanal kısımlarına uygulanarak) göre,

$r \to 0$ ve $A(z,t,r) \to Df(z,t)$ olacak şekilde bir $A(z,t,r)$ reel lineer operatörü olduğunda,

$$\frac{1}{r}[f(z,\ t+r) - f(z,\ t)] = \frac{1}{r}[f(z,\ t+r) - f(v(z,\ t,\ t+r),\ t+r)]$$

$$= A(z,\ t,\ r)\left[\frac{1}{r}\big(z - v(z,\ t,\ r)\big)\right],\ z \in B,\ t \geq 0,\ r > 0 \tag{3.4}$$

eşitliği elde edilir. Teorem 3.1.1 gereği, $f(z,t)$, $z \in B$ ye göre yerel düzgün ve $t \geq 0$ için de yerel Lipschitz süreklidir. Bu şunu takip eder: (3.4) ün en sol tarafindaki fark katsayısı $z \in B$ de yerel sınırlı holomorfik bir fonksiyondur. B de holomorfik fonksiyonlar için Q tek bir sayılabilir küme olsun. $\forall z \in Q$ için, $t \in E_z$ dışında $r \to 0$ olacak şekilde fonksiyon katsayıları mevcuttur (ölçüsü 0 olan $[0,\infty)$ kümesinin E_z bir alt kümesi olacak şekilde) $E = \bigcup_{z \in Q} E_z$ olsun. Böylece E nin de ölçüsü 0 dır ve birçok karmaşık değişkenlilerde $t \notin E$ için Vitali teoremi olduğunu anlarız. Ayrıca (3.4) ün en sol tarafindaki fark katsayısı z üzerinde holomorfik olan $r \to 0$ gibi bir limite sahiptir. Bundan dolayı, her $t \in [0,\ \infty)/E$ için $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)(.\ ,\ t) \in H(B)$ dir. Bundan başka, $v(z,s,t)$ bir Schwarz dönüşümü ve $Dv(0,s,t) = e^{s-t}I$ olduğundan, her $z \in B/\{0\}$ ve $l_z \in T(z)$ için $Re[l_z(h(z,t))] = \lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\left[\|z\| - Re\left(l_z\big(v(z,t,t+r)\big)\right)\right] \geq 0$ ve $Dh(0,t) = I$, $h(0,t) = 0, \forall t \in [0,\infty)/E$ için

$$h(z,t) = \lim_{r\to 0}\frac{z - v(z,t,t+r)}{r}$$

nin B üzerinde bir holomorfik dönüşüm olduğunu anlarız. Ayrıca, harmonik fonksiyonlar için minimum ilkesini kullanarak, $t \in [0,\infty)/E$ ve $l_z \in T(z)$, $z \in B/\{0\}$ için $Re\big[l_z\big(h(z,t)\big)\big] > 0$ olduğunu göstermek kolaylaşır. Başka bir deyişle, her $t \in [0,\infty)$ için $h(.\ ,\ t) \in M$ dir. $t \in E$ ve $z \in B$ için $h(z,t) = z$ yi kurmak yeterlidir. Daha sonra tüm $t \geq 0$ için $h(.,t) \in M$ dir ve her $z \in B$ ve $t \in [0,\infty)/E$ için (3. 1) diferensiyel denklemi (3. 4) görünümü içinde geçerlidir.

$h(z,t)$ dönüşümü, $\forall z \in B$ için t içinde ölçülebilirdir. Çünkü, $(\partial f/\partial t)(z,t)$ ve $[Df(z,t)]^{-1}$ dönüşümlerinin her ikisi de t içinde ölçülebilirdir. $[Df(z,t)]^{-1}$ nin ölçülebilirliğini göstermek için, $Df(z,t)$ nin ölçülebilir olduğunu göstermek yeterlidir. Aslında, Cauchy İntegral formülü ve f içinde $f(z,t)$ nin lokal Lipschitz sürekliliği kullanılarak, $Df(z,t)$ nin $z \in B$ ye göre lokal düzgün, t içinde de yerel Lipschitz sürekli olduğunu elde ederiz.

Son olarak, eğer (3.2) nin B üzerinde yerel düzgünlüğe sahip olduğunu göstermek bunu ispatlamak için yeterlidir. Böylece (3.3) Lemma 2.6.8 görünümüne sahiptir. Bu da ispatı tamamlar.

Şimdi yukarıdaki ispatın çeşitli sonuçlarını düşünelim. Öncelikle görüyoruz ki, herhangi bir Loewner zinciri ile ilişkili geçiş dönüşümü, genelleştirilmiş bir Loewner diferensiyel denklemini sağlar.

Teorem 3.1.2: $f(z,t)$ bir Loewner zinciri ve $v(z,s,t)$ de $f(z,t)$ nin bir geçiş dönüşümü olsun. Ayrıca $h(z,t)$, (3.1) ile verilen bir dönüşüm olsun. Böylece her $s \geq 0$

ve $z \in B$ için, $v(z,s,t)$ başlangıç değer problemini karşılar.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -h(v,t) \quad a.e.\, t \geq s, \quad v(z,s,s) = z \tag{3.5}$$

Üstelik, herhangi bir $[0,t)$ aralığında $v(z,s,t)$ başlangıç değer problemini karşılar.

$$\frac{\partial v}{\partial s}(z,s,t) = Dv(z,s,t)h(z,s) \quad a.e.\, s \in (0,t], \quad v(z,t,t) = z \tag{3.6}$$

İspat: $\forall z \in B$ için $s \geq 0$ ve $w(t) = w(z,s,t)$ başlangıç değer probleminin tek lokal mutlak sürekli bir çözümü olsun.

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -h(w,t) \quad a.e.\, t \geq s, \quad w(s) = z \tag{3.7}$$

Ayrıca $\tau \geq s$ ve $z \in B$, $t \in [s,\tau]$ için $g(z,s,t) = f(w(z,s,t),t)$ olsun. Teorem 3.1.1 ve Lemma 2.6.7 ye göre, $f(z,.)$ ve $w(z,s,.)$ $z \in B$ ye göre yerel düzgün, $(s,\tau]$ üzerinde de Lipschitz süreklidir. Ayrıca $f(z,t)$, $t \in [s,\tau]$ ile düzgün, z içinde de lokal olarak Lipschitz süreklidir ve $w(.,s,t)$, B üzerinde ünivalent bir Schwarz dönüşümdür. Buradan kolayca anlarız ki, $f(z,s,t)$, $z \in B$ ye göre yerel düzgün, $t \in [s,\tau]$ içinde de Lipschitz sürekli bir dönüşümdür. Gerçekten,

$\forall r \in (0,1)$, $z \in \overline{B_r}$ ve $0 \leq s \leq t_1 \leq t_2 \leq \tau$ için

$$\begin{aligned}
\|g(z,s,t_1) - g(z,s,t_2)\| &= \|f(w(z,s,t_1),t_1) - f(w(z,s,t_2),t_2)\| \\
&\leq \|f(w(z,s,t_1),t_1) - f(w(z,s,t_1),t_2)\| \\
&\quad + \|f(w(z,s,t_1),t_2) - f(w(z,s,t_2),t_2)\| \\
&\leq K_1(r,\tau)(t_2 - t_1) + K_2(r,\tau)\|w(z,s,t_1) - w(z,s,t_2)\| \\
&\leq K_1(r,\tau)(t_2 - t_1) + K_2(r,\tau)K_3(r,\tau)(t_2 - t_1) \\
&= K(r,\tau)(t_2 - t_1)
\end{aligned}$$

olduğunu iddia ederiz.

Sonuç olarak, $g(z,s,t)$ t içinde yerel olarak mutlak süreklidir. Bu yüzden $\forall t \in [s,\tau]$ için, t ye göre diferensiyellenebilir (türevlenebilir) (3.7) ve (3.1) i kullanarak $\forall t \in [s,\tau]$ ve $\forall z \in B$ için

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial t}(z,s,t) &= \frac{\partial f}{\partial t}(w(z,s,t),t) + Df(w(z,s,t),t)\frac{\partial w}{\partial t}(z,s,t) \\
&= Df(w(z,s,t),t)h(w(z,s,t),t) - Df(w(z,s,t),t)h(w(z,s,t),t) = 0
\end{aligned}$$

olduğunu anlarız. Bundan dolayı $t \in [s,\tau]$ için

$$g(z,s,t) = g(z,s,s) = f(w(z,s,s),s) = f(z,s)$$

dir. $\left(\left(f(w(z,s,t),t)\right) = f(z,s)\right.$ olduğundan yukarıdaki yazılır). τ keyfi olarak seçilmiş olduğu için, $f(v(z,s,t),t) = f(z,s)$, $z \in B$, $0 \leq s \leq t < \infty$ olduğunu anlarız. Diğer taraftan, $v = v(z,s,t)$, $f(z,t)$ nin bir geçiş dönüşümü olduğundan $f(v(z,s,t),t) = f(z,s)$, $z \in B$, $0 \leq s \leq t < \infty$ eşitliğine de sahip oluruz. Yukarıdaki argümanları birleştirir ve $f(.,t)$ nin B üzerinde ünivalanslığını kullanırsak, $t \geq s \geq 0$ ve $\forall z \in B$ için $v(z,s,t) = w(z,s,t)$ sonucunu elde etmiş oluruz. (3.5) sonucu (3.7) yi takip eder. (3.6) yı kanıtlamak için, öncelikle $v(z,s,t)$ nin yarı grup özelliği gereğince, z için yerel düzgün, s içinde de yerel olarak Lipschitz sürekli olduğunu dikkate almalıyız. Böylece $v(z,s,t)$, tüm $s \in [0,\infty]$, $t > 0$ için türevlenebilir ve $s \in [0,t]$ ye göre $f(z,s) = f(v(z,s,t),t)$ eşitliğinin her iki tarafi türevlenirse,

$$\frac{\partial f}{\partial s}(z,s) = Df(v(z,s,t),t)\frac{\partial v}{\partial s}(z,s,t) \quad a.e. s \in [0,t]$$

sonucunu çıkarırız.

$Df(z,s) = Df(v(z,s,t),t)Dv(z,s,t)$ den hemen hemen tüm $s \in [0,t]$ için

$$Df(v(z,s,t),t)Dv(z,s,t)h(z,s) = Df(v(z,s,t),t)\frac{\partial v}{\partial s}(z,s,t)$$

eşitliğini elde ederiz.

$f(.,s)$, B üzerinde ünivalent olduğundan, $Df(v(z,s,t),t)$ tekil olmayan bir matristir. Bu da (3.6) yı takip eder. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.1.1 in bir diğer sonucu da aşağıda verilmiştir.

Sonuç 3.1.3: $\{e^{-t}f(z,t)\}_{t\geq 0}$ normal bir aile olacak şekilde $f(z,t)$ bir Loewner zinciri olsun. Böylece $\forall s \geq 0$ için,

$$f(z,s) = \lim_{t\to\infty} e^{t}v(z,s,t)$$

limiti B üzerinde lokal olarak düzgündür. Burada $v = v(z,s,t)$, $f(z,t)$ nin geçiş dönüşümüdür.

Sonuç 3.1.4: $f \in H(B)$ olsun. Eğer $\{e^{-t}f(z,t)\}_{t\geq 0}$ kümesi B üzerinde normal bir aile olacak şekilde $f(z,t)$ Loewner zinciri mevcut ve $z \in B$ için $f(z) = f(z,0)$ ise $f \in S^0(B)$ dir.

İspat: Öncelikle $f \in S^0(B)$ olduğunu farzedelim. Daha sonra sonuç, Lemma 2.6.7 yi izler. Sonuç olarak, eğer $\{e^{-t}f(z,t)\}_{t\geq 0}$ normal bir aile olacak şekilde $f(z,t)$ bir Loewner zinciri ise, sonuç 3.1.3 gereği $f(z) = f(z,0) \in S^0(B)$ dir.

$\{e^{-t}f(z,t)\}_{t\geq 0}$ B üzerinde normal bir aile olacak şekilde $f(z,t)$ Loewner zinciri için $1/4$-growth teoremini elde edeceğiz. (Bu büyüme sonuçlarına karşılık gelmeyen çok değişkenliler içinde Loewner zincirlerinin olduğunu unutmayalım).

Sonuç 3.1.5: $\{e^{-t}f(z,t)\}_{t\geq 0}$ B üzerinde normal bir aile olacak şekilde $f(z,t)$ bir Loewner zinciri olsun. Böylece

$$\frac{\|z\|}{(1+\|z\|)^2} \leq \|e^{-t}f(z,t)\| \leq \frac{\|z\|}{(1-\|z\|)^2}, \quad z \in B, \quad t \geq 0 \tag{3.8}$$

Sonuç olarak eğer $f \in S^0(B)$ ise;

$$\frac{\|z\|}{(1+\|z\|)^2} \leq \|f(z)\| \leq \frac{\|z\|}{(1-\|z\|)^2}, \quad z \in B \text{ dir.}$$

Teorem 3.1.6: $h(.,t) \in M,\ t \geq 0$ ve $\forall z \in B$ için $h(z,.)$, $[0,\infty)$ üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon olacak şekilde $h: B \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ bir dönüşüm olsun. Böylece $\{e^{-t}f(z,t)\}_{t\geq 0}$ B üzerinde normal bir aile ve

$$\frac{\partial f}{\partial t}(z,t) = Df(z,t)h(z,t) \quad a.e.\, t \geq 0, \quad \forall z \in B$$

olacak şekilde tek bir $f(z,t)$ Loewner zinciri vardır.

Lemma 3.1.7: Her $k \in \mathbb{N}$ için B üzerinde $\{e^{-t}f(z,t)\}_{t\geq 0}$ normal bir aile olacak şekilde $\{f_k(z,t)\}_{k\in\mathbb{N}}$ Loewner zincirindeki her bir dizi, $\{e^{-t}f(z,t)\}_{t\geq 0}$ normal bir aile olacak şekilde her $t \geq 0$ sabiti için B üzerine lokal olarak düzgün yakınsayan bir Loewner zinciri olacak şekilde bir alt dizi içerir.

İspat: (3.8) in üst sınırı ve Teorem 3.1.1 deki (ii) bölümündeki argümanları kullanarak her $r \in (0,1)$ ve $T > 0$ için,

$$\|f_k(z,t) - f_k(z,s)\| \leq K(r,T)(t-s), \ \|z\| \leq r, \ 0 \leq s \leq t \leq T, \ k \in \mathbb{N}$$

olacak şekilde bir $K = K(r,T) > 0$ sabitinin mevcut olduğunu anlarız. (3.8) in üst sınırı ayrıca $r \in (0,1)$ ve $T > 0$ için,

$$\|f_k(z,t) - f_k(w,t)\| \leq L(r,T)\|z-w\|, \ \|z\| \leq r, \ \|w\| \leq r, \ t \in [0,T], \ k \in \mathbb{N}$$

olacak şekilde bir $L = L(r,T)$ sabitinin mevcut olduğunu anlarız. Bunlar $f_k(z,t)$ dönüşümleri ile birlikte şu tahminleri doğurur.

$k \in \mathbb{N}$ için $\{(z,t): \|z\| \leq 1 - 1/m, 0 \leq t \leq m\}, m = 2, 3, \ldots$ üzerinde eşsüreklidir.

Arzela-Aseoli teoremi gereğince m sabiti için, $\bar{B}_{1-1/m} \times [0,m]$ üzerine noktasal yakınsayan ($\tilde{f}_m(z,t)$ limit durumunda) ve ayrıca $\bar{B}_{1-1/m} \times [0,m]$ üzerine düzgün yakınsayan bir $\left\{f_{k_p}(z,t)\right\}_{p\in\mathbb{N}}$ alt dizisinin olduğu anlaşılır. Bir köşegen dizi argümanı, limiti $f(z,t)$ olan $B \times [0,\infty)$ üzerine noktasal yakınsayan ve ayrıca $B \times [0,\infty)$ kompakt her alt kümesi üzerine düzgün yakınsayan yine $\left\{f_{k_p}\{z,t\}\right\}_{p\in\mathbb{N}}$ ile gösterilen bir alt dizisi bulunabilir. Özellikle, her $t \geq 0$ için $f_{k_p}(z,t) \to f(z,t)$ B üzerinde yerel düzgündür ve $f(z,t)$, z içinde holomorfik ve z ve t içinde de ortaklaşa süreklidir. $f_{k_p}(0,t) = 0$ ve $Df_{k_p}(0,t) = e^t I$ olduğundan $p \in \mathbb{N}$ de $f(z,t)$ için de doğru olması gerekir ve bu nedenle limit B üzerinde ünivalent (tek değerli) olmalıdır. Ayrıca, $f_{k_p}(z,s) \prec f_{k_p}(z,t)$ subordinasyonluk özelliğinden ve $0 \leq s \leq t < \infty$, $z \in B$ için

$$f_{k_p}(z,s) = f_{k_p}\left(v_{k_p}(z,s,t),t\right), \quad p = 1,2,\ldots \qquad \textbf{(3.9)}$$

olacak şekilde bir $v_{k_p} = v_{k_p}(z,s,t)$ ünivalent Schwarz dönüşümünün mevcut olduğunu elde ederiz.

Aslında, $\left\|v_{k_p}(z,s,t)\right\| \leq \|z\| \quad p = 1,2,\ldots$ ifadesi $\left\{v_{k_p}(z,s,t)\right\}_{p\in\mathbb{N}}$ nin bir normal aile olduğunu ifade eder. Bu nedenle, B üzerinde yerel düzgün olan $v_{k_p}{}'(z,s,t) \to v(z,s,t)$ olacak şekilde $\{k_p\}$ nin bir $\{k_p{}'\}$ gibi bir alt dizisi mevcuttur. Bu limit B üzerinde ünivalent ve aşağıdaki koşulu sağlar.

$v(0,s,t) = 0, \quad Dv(0,s,t) = e^{s-t}I, \quad \|v(z,s,t)\| \leq \|z\|, \quad \{k_p{}'\}$ alt dizisi ile (3.9) un limiti alınırsa,

$$f(z,s) = f(v(z,s,t),t), \quad z \in B, \quad 0 \leq s \leq t < \infty$$

olduğunu anlarız. Bu $f(z,t)$ nin bir Loewner zinciri olduğunu kanıtlar.

Ayrıca, (3.8) den

$$\left\|e^{-t} f_{k_p}(z,t)\right\| \leq \frac{\|z\|}{(1-\|z\|)^2}, \quad z \in B, \quad 0 \leq t < \infty, \quad p = 1,2,\ldots$$

elde ederiz. Yukarıda $p \to \infty$ alındığında $\{e^{-t} f(z,t)\}_{t\geq 0}$ normal bir aile olacak şekilde

$$\|e^{-t} f(z,t)\| \leq \frac{\|z\|}{(1-\|z\|)^2}$$

ifadesini elde etmiş oluruz. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.1.8: $S^0(B)$ kompakt bir kümedir.

İspat: Sonuç 3.1.5 den $S^0(B)$ yerel düzgün sınırlı bir kümedir. Bu nedenle, $S^0(B)$ nin $H(B)$ içinde kapalı olduğunu göstermek yeterlidir. Bu amaçla, $k \to \infty$ iken B üzerinde lokal düzgün $f_k \to f$ olacak şekilde $\{f_k\} \subset S^0(B)$ olsun. Böylece her $k \in \mathbb{N}$ için $f_k(z,0) = f_k(z)$, $z \in B$ olacak şekilde bir $f_k(z,t)$ Loewner zinciri vardır ve $\{e^{-t} f_k(z,t)\}_{t\geq 0}$ normal bir ailedir. Lemma 3.1.7 den $\forall t \geq 0$ için B üzerinde yerel olarak düzgün olan $f_{k_p}(z,t) \to f(z,t)$ olacak şekilde bir $\{f_k(z,t)\}_{p\in\mathbb{N}}$ alt dizisi vardır ve $\{e^{-t} f(z,t)\}_{t\geq 0}$ normal bir aile olacak şekilde $f(z,t)$ bir Loewner zinciridir.

$f(z) = f(z,0),\ z \in B$ olduğu açıktır ve sonuç 3.1.4 den sadece $f \in S^0(B)$ olduğunu anlarız. Bu da ispatı tamamlar.

3.2 İNTEGRAL OPERATÖRÜ TARAFINDAN TANIMLANAN DİFERENSİYEL SUBORDİNASYON

Bu bölümde, $I^m f$ integral operatörü kullanılarak ünivalent fonksiyoların yeni bir sınıfı tanımlanacaktır. Diferensiyel subordinasyon yöntemi kullanılarak bu sınıfın özellikleri vurgulanacaktır.

Tanım 3.2.1: $0 \leq a < 1$ ve $m \in \mathbb{N}$ olduğunda $f \in A_n$ de $I_n^m(a)$ fonksiyonlar sınıfı olsun. Öyle ki bu fonksiyonlar için aşağıdaki eşitsizlik karşılık gelir:

$$Re[I^m f(z)]' > a$$

Uyarı 3.2.2: $m = 0$ için,

$$Ref'(z) > a, \quad z \in U$$

eşitsizliği elde edilir. $f \in A$ olduğunda bundan sonraki tanımı elde ederiz.

Tanım 3.2.3: $0 \leq a < 1$ ve $m \in \mathbb{N}$ ise, $f \in A$ da $I^m(a)$ fonksiyon sınıfı tanımlanır. Öyle ki bu fonksiyon için

$$Re[I^m f(z)]' > a$$

eşitsizliği karşılık gelir. Eğer $m = 0$ ise $I^0(a)$ sınırlı dönme ile ilgili fonksiyon sınıflarından biridir.

Teorem 3.2.4: $0 \leq \alpha < 1$ ve $m, n \in \mathbb{N}$ ise,

$$\delta(\alpha,n) = 2\alpha - 1 + 2(1-\alpha)\frac{1}{n}\beta(\tfrac{1}{n}) \text{ ve}$$

$$\beta(\alpha) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}dt \text{ için}$$

$$I_n^m(\alpha) \subset I_n^{m+1}(\delta)$$

kesin sonucunu elde ederiz. $I^m(\alpha)$ sınıfı için bundan sonraki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.2.5: $0 \leq \alpha < 1$ ve $m \in \mathbb{N}$ ise,

$$\delta = \delta(\alpha) = 2\alpha - 1 + 2(1-\alpha)\ln 2 \text{ için}$$

$$I^m(\alpha) \subset I^{m+1}(\delta) \text{ kesin sonucuna ulaşırız.}$$

Teorem 3.2.6: q konveks bir fonksiyon, $q(0) = 1$ ve h,

$$h(z) = q(z) + nzq'(z), \quad z \in U$$

şeklinde tanımlanan bir fonksiyon olsun. Eğer $f \in A_n$ ve

$$[I^m f(z)]' \prec h(z) \tag{3.10}$$

diferensiyel subordinasyon ilkesini sağlıyorsa,

$$[I^{m+1} f(z)]' \prec q(z), \quad z \in U$$

sonucu elde edilir.

Teorem 3.2.7: $h(0) = 1$, $h'(0) \neq 0$ olacak şekilde $h \in H(U)$ olsun. Aşağıdaki eşitsizlik bunu doğrular:

$$Re\left[1 + \frac{zh''(z)}{h'(z)}\right] > -\frac{1}{2n}, \; z \in U, \; n \in \mathbb{N}^*.$$

Eğer $f \in A_n$ ve

$$[I^m f(z)]' \prec h(z) \tag{3.11}$$

diferensiyel subordinasyon ilkesini sağlıyorsa,

$$q(z) = \frac{1}{nz^{1/n}} \int_0^z h(t) t^{\frac{1}{n}-1} dt, \; z \in U \text{ için}$$

$$[I^{m+1} f(z)]' \prec q(z), \; z \in U$$

bağıntısı elde edilir. q fonksiyonu konveks bir fonksiyondur.

Teorem 3.2.8: q konveks bir fonksiyon, $q(0) = 1$ ve $h(z) = q(z) + nzq(z)$ olsun. Eğer $f \in A_n$ ve

$$[I^m f(z)]' \prec h(z) \tag{3.12}$$

diferensiyel subordinasyon sağlanırsa

$$\frac{I^m f(z)}{z} \prec q(z), \; z \in U, \; z \neq 0$$

kesin sonucu elde edilir.

Teorem 3.2.9:

$$Re\left[1 + \frac{zh''(z)}{h'(z)}\right] > -\frac{1}{2n}, \; z \in U$$

eşitsizliğine karşılık gelen $h \in H(U)$, $h(0) = 0$ ve $h'(0) \neq 0$ olsun.

Eğer $f \in A_n$ ve

$$[I^m f(z)]' \prec h(z) \tag{3.13}$$

diferensiyel subordinasyonu sağlanıyor ise,

$$q(z) = \frac{1}{nz^{1/n}} \int_0^z h(t) t^{\frac{1}{n}-1} dt, \ z \in U \text{ için}$$

$$\frac{I^m f(z)}{z} \prec q(z), \ z \in U, \ z \neq 0$$

elde edilir. q fonksiyonu konveks ve dominantlığı baskındır.

3.3 MEROMORFİK FONKSİYONLARA İNTEGRAL OPERATÖRÜ UYGULANARAK ÜNİVALENT FONKSİYON SINIFI ELDE EDİLMESİ

$k \geq 0$ için $f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=k}^{\infty} a_n z^n$ tarafından Ů üzerinde tanımlı meromorfik fonksiyonların sınıfını $\sum_k$ ile gösteririz.

Tanım 3.3.1: $0 \leq \alpha < 1$, $k \in \mathbb{Z}_+$ ve $m \in \mathbb{N}$ ise

$$Re\left[I^m\left(z^2 f(z)\right)\right]' > \alpha, \ z \in \mathring{U}$$

eşitsizliğine karşılık $f \in \sum_k$ fonksiyon sınıfı $\sum_k(\alpha, m)$ şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.3.2: $0 \leq \alpha < 1$, $k \in \mathbb{Z}_+$ ve $m \in \mathbb{N}$ ise

$$\delta = \delta(\alpha, m) = 2\alpha - 1 + 2(1-\alpha) \frac{1}{k+1} \beta\left(\frac{1}{k+1}\right) \text{ ve}$$

$$\beta(x) = \int_0^z \frac{t^{x-1}}{1+t} dt \text{ için}$$

$$\textstyle\sum_k(\alpha, m) \subset \sum_k(\delta, m+1) \text{ dir.}$$

Teorem 3.3.3: q konveks bir fonksiyon, $q(0) = 1$ ve h, $h(z) = q(z) + z(k+1)q'(z)$, $z \in U$ şeklinde tanımlı bir fonksiyon olsun.

Eğer $f \in \sum_k(\alpha, m)$ ve

$$[I^m(z^2 f(z))]' \prec h(z), \ z \in \mathring{U}$$

diferensiyel subordinasyonu sağlanıyor ise

$$\left[I^{m+1}\left(z^2 f(z)\right)\right]' \prec q(z), \ z \in \mathring{U}$$

kesin sonucu elde edilir.

Teorem 3.3.4: q, $q(0) = 1$ ve $h(z) = q(z) + z(k+1)q'(z)$, $z \in U$ ile konveks bir

Eğer $f \in \sum_k(\alpha, n)$ ve

$$\left[I^m\left(z^2 f(z)\right)\right]' \prec h(z), \ z \in \mathring{U}$$

diferensiyel subordinasyonu sağlanıyorsa,

$$\frac{I^m\left(z^2 f(z)\right)}{z} \prec q(z), \; z \in \mathring{U}$$

kesin sonucu elde edilir.

Teorem 3.3.5: $Re\left[1+\frac{zh''(z)}{h'(z)}\right] > -\frac{1}{2}, \; z \in U$ eşitsizliğinde $h(0) = 1$ ve $h'(0) \neq 0$ ile $h \in H(U)$ olsun.

Eğer $f \in \sum_k(\alpha,m)$ ve

$$\left[I^m\left(z^2 f(z)\right)\right]' \prec h(z), \; z \in \mathring{U}$$

diferensiyel subordinasyonu sağlanıyorsa,

$$q(z) = \frac{1}{(k+1)\, z^{\frac{1}{k+1}}} \int_0^z h(t) t^{\frac{1}{k+1}-1} dt, \; z \in U \text{ için}$$

$$[I^{m+1}(z^2 f(z))]' \prec q(z), \; z \in \mathring{U}$$

olur. q fonksiyonu konveks ve $(1, k+1)$ de en iyisidir.

Teorem 3.3.6: $Re\left[1+\frac{zh''(z)}{h'(z)}\right] > -\frac{1}{2}, \; z \in U$ eşitsizliğinde $h(0) = 1, \; h'(0) \neq 0$ olacak şekilde $h \in H(U)$ olsun.

Eğer $f \in \sum_k(\alpha,m)$ ve

$$\left[I^m\left(z^2 f(z)\right)\right]' \prec h(z), \; z \in \mathring{U}$$

diferensiyel subordinasyonu sağlanıyor ise,

$$q(z) = \frac{1}{(k+1)\, z^{\frac{1}{k+1}}} \int_0^z h(t) t^{\frac{1}{k+1}-1} dt, \; z \in U \text{ için}$$

$$\frac{I^m\left(z^2 f(z)\right)}{z} \prec q(z), \; z \in \mathring{U}$$

olur. q fonksiyonu konveks ve $(1, k+1)$ de en iyisidir.

3.4 α DERECELİ STARLİKE FONKSİYON SINIFI

Tanım 3.4.1: $0 \leq \alpha < 1$ ve $\frac{f(z)f'(z)}{z} \neq 0, \; 1+\frac{zf'(z)}{f(z)} \neq 0, \; z \in U$ olacak şekilde $f \in A_n$ olsun. $\beta \in \mathbb{R}$ ve $g(z) = f(z)\left[\frac{1}{2}\frac{zf'(z)}{f(z)}\left(1+\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)\right]^{\beta}$ ile verilen $f: U \to \mathbb{C}$ fonksiyonu α. dereceden starlike ise f fonksiyonu M_β^n sınıfının içindedir, denir.

Uyarı 3.4.2: Eğer Tanım 3.4.1 de $\beta = \frac{1}{2}$ ise $M^n(\alpha)$ sınıfı elde edilir.

Uyarı 3.4.3: Eğer $\beta = 0$ ise $g(z) = f(z)$ ve $M_\beta^n(\alpha) = S^*$ olur.

Teorem 3.4.4: $\alpha \in [0,1)$ ve $\beta > 0$ ile $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$M_\beta^n(\alpha) \subset S^*(\alpha)$$

elde edilir. Özel olarak $\beta = \frac{1}{2}$ alınırsa bundan sonraki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.4.5: $0 \leq \alpha < 1$ aralığındaki her bir reel sayısı için aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz:

$$M^n(\alpha) \subset S^*(\alpha).$$

3.5 İNTEGRAL OPERATÖRÜ TARAFINDAN TANIMLANAN DİFERENSİYEL SÜPERORDİNASYON

Teorem 3.5.1: $h(0) = 1$ ile $h \in H(U)$, U da konveks bir fonksiyon ve $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in A_n$ olsun.

$[I^m f(z)]'$ nın $[I^{m+1} f(z)] \in H[1,u] \cap Q$ ile ünivalent olduğunu farzedelim. Eğer

$$h(z) \prec [I^m f(z)]', z \in U \quad \textbf{(3.14)}$$

ise

$$q(z) = \frac{1}{nz^{1/n}} \int_0^z h(t) t^{\frac{1}{n}-1} dt$$

için

$$q(z) \prec [I^{m+1} f(z)]', z \in U \quad \textbf{(3.15)}$$

olur. q fonksiyonu konveks ve subordinantlığı en iyi şekildedir.

Teorem 3.5.2: $h(0) = 1$ ile $h \in H(U)$, U da konveks bir fonksiyon ve $f \in A_n$ olsun. $[I^m f(z)]'$ nin $[I^{m+1} f(z)] \in H[1,n] \cap Q$ ile ünivalent olduğunu farzedelim. Eğer

$$h(z) \prec [I^m f(z)]', z \in U \quad \textbf{(3.16)}$$

ise

$$q(z) = \frac{1}{nz^{1/n}} \int_0^z h(t) t^{\frac{1}{n}-1} dt$$

için

$$q(z) \prec [I^{m+1} f(z)]', z \in U \quad \textbf{(3.17)}$$

olur. q fonksiyonu konveks ve subordinantlığı en iyi şekildedir.

Teorem 3.5.3: q, U da konveks bir fonksiyon ve h, $h(z) = q(z) + zq'(z)$, $z \in U$ şeklinde tanımlansın.

Eğer $f \in A_n$, $[I^{m+1}]'$ U da ünivalent, $[I^{m+1}f(z)]' \in H[1,n] \cap Q$ ve

$$h(z) \prec [I^{m+1}f(z)]' \qquad \textbf{(3.18)}$$

ise

$$q(z) = \frac{1}{nz^{\frac{1}{n}}} \int_0^z h(t) t^{\frac{1}{n}-1} dt$$

için

$$q(z) \prec [I^{m+1}f(z)]' \qquad \textbf{(3.19)}$$

olur. q fonksiyonunun subordinantlığı en iyi şekildedir.

Teorem 3.5.4: q, U da konveks bir fonksiyon ve h, $h(z) = q(z) + zq'(z)$ şeklinde tanımlansın.

Eğer $f \in A_n$, $[I^m f(z)]'$ U da ünivalent, $\frac{I^m f(z)}{z} \in H[1,n] \cap Q$ ve

$$h(z) \prec [I^m f(z)]' \qquad \textbf{(3.20)}$$

ise

$$q(z) = \frac{1}{nz^{1/n}} \int_0^z h(t) t^{\frac{1}{n}-1} dt$$

için

$$q(z) \prec \frac{I^m f(z)}{z} \qquad \textbf{(3.21)}$$

elde edilir. q fonksiyonu konveks ve subordinantlığı baskındır.

Sonuç 3.5.5: $n = 1$ olması durumunda bu teoremler tezin sonuçlarını içerir.

3.6 BAZI DİFERENSİYEL SÜPERORDİNASYONLARIN SUBORDİNANTLARI

Bu bölümde Sălăgean türü ve konveks fonksiyonların somut örneklerine integral operatörü kullanarak bazı diferensiyel süperordinasyon sınıfları kurulacaktır.

Teorem 3.6.1: $R \in (0,1]$ ve h, $h(0) = 1$ ile

$$h(z) = 1 + Rz + \frac{Rz}{2+Rz} \qquad \textbf{(3.22)}$$

şeklinde tanımlanan U da konveks bir fonksiyon olsun. $f \in A_n$ ve $[I^m f(z)]'$ nın ünivalent ve $[I^{m+1}f(z)]' \in H[1,n] \cap Q$ olduğunu farzedelim.

Eğer

$$h(z) \prec [I^m f(z)]', z \in U \tag{3.23}$$

ise

$$q(z) = \frac{1}{nz^{1/n}} \int_0^z \left(1 + Rt + \frac{Rt}{2+Rt}\right) t^{\frac{1}{n}-1} dt \tag{3.24}$$

$$q(z) = 1 + \frac{Rz}{n+1} + R\frac{1}{n} M(z) \frac{1}{z^{1/n}}$$

ve

$$M(z) = \int_0^z \frac{t^{1/n}}{2+Rt} dt$$

için

$$q(z) \prec [I^{m+1} f(z)]', z \in U \tag{3.25}$$

elde edilir. q fonksiyonu konveks ve subordinantlığı baskındır.

Teorem 3.6.1 de eğer $n = 1$ ise, bundan sonraki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.6.2: $R \in (0,1]$ ve $h(0) = 1$ ile $h(z) = 1 + Rz + \frac{Rz}{2+Rz}$ şeklinde tanımlanan h, U içinde konveks olsun. $f \in A$ ve $[I^m f(z)]'$ ünivalent ve $[I^{m+1} f(z)]' \in H[1,1] \cap Q$ olduğunu varsayalım. Eğer

$$h(z) \prec [I^m f(z)]', z \in U$$

ise

$$q(z) = \frac{1}{z} \int_0^z \left(1 + Rt + \frac{Rt}{2+Rt}\right) dt$$

$$q(z) = 1 + \frac{Rz}{2} + RM(z)\frac{1}{z}$$

ve

$$M(z) = \frac{z}{R} - \frac{2}{R^2} \ln(2 + Rz) + \frac{2}{R} \ln 2, z \in U$$

olduğunda

$$q(z) \prec [I^{m+1} f(z)]', z \in U$$

olur. q fonksiyonu konveks ve subordinantlığı baskındır.

$R = 1$ için ise Sonuç 3.6.3 elde edilir:

Sonuç 3.6.3: $h(0) = 1$ ile

$$h(z) = 1 + z + \frac{z}{2+z} \tag{3.26}$$

şeklinde tanımlanan h, U içinde konveks olsun. $f \in A_n$ ve $[I^m f(z)]'$ ünivalent ve $[I^{m+1} f(z)]' \in H[1,n] \cap Q$ olduğunu varsayalım. Eğer

$$h(z) \prec [I^m f(z)]', z \in U$$

ise

$$q(z) = \frac{1}{nz^{1/n}} \int_0^z (1 + t + \frac{t}{2+t}) t^{\frac{1}{n}-1} dt \quad \textbf{(3.27)}$$

$q(z) = 1 + \frac{z}{n+1} + \frac{1}{n} M(z) \frac{1}{z^{1/n}}$ ve $M(z) = \int_0^z \frac{t^{1/n}}{2+t} dt$ olduğunda

$$q(z) \prec [I^{m+1} f(z)]', z \in U \quad \textbf{(3.28)}$$

elde edilir. q fonksiyonu konveks ve en iyi subordinanttır.

$n = 1$ ve $R = 1$ için bundan sonraki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.6.4: $h(0) = 1$ ile $h(z) = 1 + z + \frac{z}{2+z}$ şeklinde tanımlanan $h(z)$ fonksiyonu U içinde konveks olsun. $f \in A$ ve $[I^m f(z)]'$ ünivalent ve $[I^{m+1} f(z)]' \in H[1,1] \cap Q$ olduğunu farzedelim. Eğer

$$h(z) \prec [I^m f(z)]', z \in U$$

ise

$$q(z) = \frac{1}{z} \int_0^z \left(1 + t + \frac{t}{2+t}\right) dt$$

$$q(z) = 1 + \frac{z}{2} + M(z) \frac{1}{z}, \qquad M(z) = z - 2\ln(2 + z) + \ln 2, \qquad z \in U$$

olduğunda

$$q(z) \prec [I^{m+1} f(z)]', z \in U$$

dur. Burada q fonksiyonu konveks ve subordinantlığı en baskın olandır.

Teorem 3.6.5: $R \in (0,1]$ olsun ve $h(0) = 1$ ile $h(z) = 1 + Rz + \frac{Rz}{2+Rz}$ şeklinde tanımlanan h fonksiyonu U içinde konveks ve $f \in A_n$ olsun. $[I^m f(z)]'$ ünivalent ve $\frac{I^m f(z)}{z} \in H[1, n] \cap Q$ olduğunu varsayalım. Eğer

$$h(z) \prec [I^m f(z)]', z \in U$$

ise

$$q(z) = \frac{1}{nz^{1/n}} \int_0^z \left(1 + Rt + \frac{Rt}{2+Rt}\right) t^{\frac{1}{n}-1} dt = 1 + \frac{Rz}{n+1} + R \frac{1}{n} M(z) \frac{1}{z^{1/n}}$$

ve

$$M(z) = \int_0^z \frac{t^{\frac{1}{n}}}{2+Rt} dt, z \in U$$

olduğunda

$$q(z) \prec \frac{I^m f(z)}{z}, z \in U \quad \textbf{(3.29)}$$

elde edilir. Burada q fonksiyonu konveks ve subordinantlığı en iyidir.

Alışılmış olarak $n = 1$ ve $R = 1$ için bundan sonraki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.6.6: $R \in (0,1]$ olsun ve $h(0) = 1$ ile $h(z) = 1 + Rz + \frac{Rz}{2+Rz}$ şeklinde tanımlanan h fonksiyonu U içinde konveks ve $f \in A_n$ olsun. $[I^m f(z)]'$ ünivalent ve $\frac{I^m f(z)}{z} \in H[1,1] \cap Q$ olduğunu farzedelim. Eğer

$$h(z) \prec [I^m f(z)]', z \in U$$

ise

$$q(z) = \frac{1}{z}\int_0^z \left(1 + Rt + \frac{Rt}{2+Rt}\right) dt = 1 + \frac{Rz}{2} + RM(z)\frac{1}{z}$$

$$M(z) = \frac{z}{R} - \frac{2}{R^2}\ln(2 + Rz) + \frac{2}{R}\ln 2, z \in U$$

olduğunda

$$q(z) \prec \frac{I^m f(z)}{z}, z \in U$$

elde edilir. q fonksiyonu konveks ve subordinantlığı en baskın olandır.

Sonuç 3.6.7: $h(0) = 1$ ile $h(z) = 1 + z + \frac{z}{2+z}$ şeklinde tanımlanan h fonksiyonu U içinde konveks olsun. $f \in A_n$ olsun ve $[I^m f(z)]'$ ünivalent ve $\frac{I^m f(z)}{z} \in H[1,n] \cap Q$ olduğunu varsayalım. Eğer

$$h(z) \prec [I^m f(z)]', z \in U \tag{3.30}$$

ise

$$q(z) = \frac{1}{nz^{1/n}}\int_0^z \left(1 + t + \frac{t}{2+t}\right) t^{\frac{1}{n}-1} dt = 1 + \frac{z}{n+1} + \frac{1}{n}M(z)\frac{1}{z^{1/n}}$$

ve

$$M(z) = \int_0^z \frac{t^{1/n}}{2+t} dt, z \in U$$

olduğunda

$$q(z) \prec \frac{I^m f(z)}{z}, z \in U \tag{3.31}$$

elde edilir. q fonksiyonu konveks ve subordinantlığı baskındır.

Sonuç 3.6.8: h, U içinde konveks ve $h(0) = 1$ olmak üzere $h(z) = 1 + z + \frac{z}{2+z}$ şeklinde tanımlansın.

$f \in A$ olsun. $[I^m f(z)]'$ ünivalent ve $\frac{I^m f(z)}{z} \in H[1,1] \cap Q$ olduğunu varsayalım. Eğer

$$h(z) \prec [I^m f(z)]', z \in U$$

ise

$$q(z) = \frac{1}{z}\int_0^z \left(1 + t + \frac{t}{2+t}\right) dt = 1 + \frac{z}{2} + M(z)\frac{1}{z}$$

ve

$$M(z) = z - 2\ln(2+z) + 2\ln 2,\ z \in U$$

olduğunda

$$q(z) \prec \frac{I^m f(z)}{z},\ z \in U$$

elde edilir. q fonksiyonu konveks ve subordinantlığı baskındır.

Uyarı 3.6.9: Sălăgean diferensiyel operatör durumunda

$$h(z) = 1 + Rz + \frac{Rz}{2+Rz}$$

fonksiyonu için benzer sonuçlar A. Cătaş [34] tarafından elde edilmiştir.

Teorem 3.6.10: $h(0) = 1$ olmak üzere

$$h(z) = \frac{1+(2\alpha-1)z}{1+z},\ z \in U$$

fonksiyonu U içinde konveks bir fonksiyon olsun. $f \in I^m(\alpha)$ ve $[I^m f(z)]'$ nin ünivalent ve $[I^{m+1} f(z)]' \in H[1,1] \cap Q$ olduğunu varsayalım. Eğer

$$h(z) \prec [I^m f(z)]',\ z \in U \tag{3.32}$$

ise

$$q(z) = 2\alpha - 1 + 2(1-\alpha)\frac{\log(1+z)}{z} \tag{3.33}$$

olduğunda

$$q(z) \prec [I^{m+1} f(z)]',\ z \in U$$

olur. Burada q fonksiyonu konveks ve subordinantlığı baskındır.

Teorem 3.6.11: $h(z) = \frac{1+(2\alpha-1)z}{1+z}$ konveks bir fonksiyon olmak üzere $f \in I^m(\alpha)$, $[I^m f(z)]'$ ünivalent ve $\frac{I^m f(z)}{z} \in H[1,1] \cap Q$ olduğunu farzedelim. Eğer

$$h(z) \prec [I^m f(z)]',\ z \in U \tag{3.34}$$

ise

$$q(z) = 2\alpha - 1 + 2(1-\alpha)\frac{\log(1+z)}{z}$$

olduğunda

$$q(z) \prec \frac{I^m f(z)}{z},\ z \in U$$

olur. Burada q fonksiyonu konveks ve subordinantlığı en baskın olandır.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, temel tanım ve kavramların ışığında çok değişkenli ünivalent fonksiyonları ele alıp burada Loewner denkleminin teorik yönlerini inceledik. Şöyle ki; B, $\mathbb{C}^n$ de keyfi bir norm ile beraber bir birim yuvar olmak üzere bu birim yuvarın üzerinde Loewner zincirlerinin bazı özelliklerini ve bunların dönüşümlerini inceledik. Herhangi bir $f(z,t)$ Loewner zincirinin $z \in B$ de t yerel düzgün noktası için Lipschitz koşulları altında $v(z,s,t)$ noktasına dönüşümünün $f(z,t)$ ile $v(z,s,t)$ nin bağlantılı olması halinde gerçekleşebileceğini gördük. Diğer taraftan, $z \in B$ için $f(z) = f(z,0)$ ve $\{e^{-t}f(z,t)\}_{t\geq 0}$ ailesinin B de normal bir aile olacak şekilde $f(z,t)$ Loewner zincirinin mevcut olması halinde $f \in H(B)$ dönüşümünün parametrik bir gösterime sahip olduğunu gösterdik. Ayrıca $\{e^{-t}f(z,t)\}_{t\geq 0}$ B üzerinde normal bir aile olduğunda $f(z,t)$ ünivalent fonksiyonunun daha yüksek boyutlardaki genelleştirilmiş Loewner diferensiyel denklemlerin çözümlerinin tek olduğunu gördük.

Daha sonra $I^m f$ integral operatörünü kullanarak ünivalent fonksiyonların yeni bir sınıfını elde ettik. Diferensiyel subordinasyon kuralını uygulayarak da bu sınıfların özelliklerini inceledik.

5. KAYNAKLAR

[1] Feng S.X., *Some classes of holomorphic mappings in several complex variables*, University of Science and Technology of China, *Ph. D. Thesis*, **(2004)**.

[2] Gong S., *Convex and Starlike Mappings in Several Complex Variables*, Kluwer Acad. Publ. , Dordrecht, **(1998)**.

[3] Goodman A.W., *Univalent functions*, I-II, Mariner Publ. Comp. , Tampa, Florida, **(1983)**.

[4] Graham I., Hamada H., Kohr G., Parametric representation of univalent mappings in several comlex variables, *Canadian J. Math*., 54 **(2002)** 324-351.

[5] Graham I., Kohr G., An extension theorem and subclasses of univalent mappings in several complex variables, *Complex Variables,* 47 **(2002)** 59-72.

[6] Miller S.S., Mocanu P.T., Differential subordinations and univalent functions, *Michig. Math*. J., 28 **(1981)** 157-171.

[7] Kohr G., Liczberski P., *Univalent Mappings of Several Complex Variables*, Cluj University Press, Cluj-Napoca, **(2003)**.

[8] Miller S.S., Mocanu P.T., Subordinants of differental superordinations, *Complex Variables*, 48, 10 **(2003)** 815-826.

[9] Balcı M., **(1997)**. *Matematik Analiz, I. Cilt*. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Ankara

[10] Loewner K., **(1923)**. *Undersuchungen über sclichte konforme Abbildungen des Einheitskreises*, Math. Ann., 89, 103-121.

[11] Pommerenke Ch., *Über die Subordination analytischer Funktionen,* J. Reine Angew Math., 218(**1965)**, 159-173.

[12] Koebe P., *Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven,* Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen Math. Phys., (**1907)**, 191-210.

[13] Gronwall T. H., *Some remarks on conformal representation,* Ann. Of Math., (2), 16**(1914-1915)**, 72-76.

[14] Bieberbach L., *Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln,* Preuss, Akad. Wiss. Sitzungsb., **(1916)**, 940-955.

[15] Bieberbach L., *Über einige Extremalprobleme im Gebiete der Konformen Abbildung,* Math. Ann., 77**(1916)**, 153-172.

[16] Loewner K., *Untersuchungen über die Verzerrung bei konformen Abbidungen des Einheitskreises* $|z| < 1$, *die durch Funktionen mit nichtverschwindender Ableitung geliefert werden,* S. B. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig Berichte, 69**(1917)**, 89-106.

[17] De Branges L., *A proof of the Bieberbach conjecture,* Acta Math., 154**(1985)**, 137-152.

[18] Cartan H., *Sur la possibilité d'étendre aux functions de plusieurs variables complexes la théorie des functions univalentes*, 129-155. Appendix la P. Montel, *Leçons sur les Functions Univalentes ou Multivalentes*, Gauthier-Villars, Paris, **(1933)**.

[19] Duren P. L., *Univalent Functions*, Springer-Verlag, New York, **(1983)**.

[20] Graham I., Kohr G., *Geometric Function Theory in One and Higher Dimensions*, Marcel Dekker, Inc., New York Basel, **(2003)**.

[21] Kufarev P. P., *On one parameter families of analytic functions,* Mat. Sb., 13(55)**(1943)**.

[22] Sălăgean Gr. Şt., *Subcasses of univalent functions,* Lecture Notes in Math., Springer Verlag, 1013**(1983)**, 362-372.

[23] Matsuno T., *Star-like theorems and convex-like theorems in the complex space,* Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A, 5**(1955)**, 88-95.

[24] Kikuchi K., *Starlike and convex mappings in several complex variables,* Pacif. J. Math., 44**(1973)**, 569-580.

[25] Gong S., Wang S., Yu Q., *Biholomorphic convex mappings of ball in* $\mathbb{C}^n$, Pacif. J. Math., 161**(1993)**, 287-306.

[26] Pfaltzgraff J. A., *Subordination chains and univalence of holomorphic mappings in* $\mathbb{C}^n$, Math. Ann., 210**(1974)**, 55-68.

[27] Hamada H., Kohr G., *Subordination chains and the growth theorem of spirallike mappings*, Mathematica (Cluj), 42(65)**(2000)**, 153-161.

[28] Kohr G., *On some sufficient conditions of almost starlikeness of order* $1/2$ *in* $\mathbb{C}^n$, Studia (Univ. Babeş Bolyai), Mathematica, 41, (3)**(1996)**, 51-55.

[29] Liu T. S., Xu Q. H., *Loewner chains associated with the generalized Roper-Suffridge extension operator,* J. Math. Anal. Appl., 322**(2006)**, 107-120.

[30] Roper K., Suffridge T. J., *Convex mappings on the unit ball of* $\mathbb{C}^n$, J. Anal. Math., 65**(1995)**, 333-347.

[31] Graham I., Hamada H., Kohr G., Suffridge T., *Extension operators for locally univalent mappings,* Michigan Math. J., 50**(2002)**, 37-55.

[32] Pfaltzgraff J. A., Suffridge T. J., *Close-to-starlike holomorphic functions of several*

variables, Pacif. J. Math., 57**(1975)**, 271-279.

[33] Pfaltzgraff J. A., Suffridge T. J., *An extension theorem and liniar invariant families generated by starlike maps*, Ann. Univ. Mariae Curie Sklodowska, Sect. A, 53**(1999)**, 193-207.

[34] A. Cătaş, *A note on a certain superordinations results*, An. Univ. Oradea Fasc. Mat, Tom XIII, **(2006)**, 73-80.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: AYKANAT,Sevil
Uyruğu	: T.C
Doğum tarihi ve yeri	: 29.06.1986/G.ANTEP
Telefon	: 0 530 038 28 32
E-posta	: sevil_ayk@hotmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Yüksek Lisans	Düzce Ü./Matematik B.	2014
Lisans	Ahi Evran Ü./Matematik B.	2011
Lise	Bayraktar Y.D.A Lisesi	2004