T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

φ-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN BAZI İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MELTEM BÜYÜKEKEN

HAZİRAN 2014

DÜZCE

KABUL VE ONAY BELGESİ

MELTEM BÜYÜKEKEN tarafından hazırlanan φ-Konveks Fonksiyonlar İçin Bazı İntegral Eşitsizlikleri isimli lisansüstü tez çalışması, Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 09/06/2014 tarih ve 2014/542 sayılı kararı ile oluşturulan jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir

Üye
(Tez Danışmanı)
Doç. Dr. Mehmet Zeki Sarıkaya
Düzce Üniversitesi

Üye
Yrd. Doç. Dr. Mahmut Akyiğit
Sakarya Üniversitesi

Üye
Yrd. Doç. Dr. Emrah Evren Kara
Düzce Üniversitesi

Tezin Savunulduğu Tarih : 16.06.2014

ONAY

Bu tez ile Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Meltem Büyükeken'in Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans derecesini almasını onaylamıştır.

Prof. Dr. Haldun MÜDERRİSOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

16/06/2014

MELTEM BÜYÜKEKEN

Sevgili Aileme…

TEŞEKKÜR

Tüm görüşlerini ve bilgisini herkes ile paylaşmaktan sakınmayan, bilgi ve deneyimleriyle sonuca ulaşmamda yol gösteren, herkese eşit tavrı ve işine tutku ile bağlı olan, hayatın her karesinde bana bir baba gibi sahip çıkan, kişiliği, tavırları ve edindiğim tecrübelerinden dolayı kendisine minnettar olduğum sayın hocam Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA' ya çok teşekkür ederim.

Çalışmalarım boyunca yardımlarını esirgemeyen arkadaşım Hatice YALDIZ'a çok teşekkür ederim.

Tez dönemim boyunca moralimi en üst düzeyde tutan ve kendilerinden her fırsatta güç aldığım aileme ve kardeşime müteşekkirim.

16 Haziran 2014 **Meltem BÜYÜKEKEN**

İÇİNDEKİLER **<u>Sayfa</u>**

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

ÖZET

φ-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN BAZI İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Meltem Büyükeken
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Doç. Dr. Mehmet Zeki Sarıkaya
Haziran 2014, 43 sayfa

Hermite-Hadamard eşitsizliği bir çok matematikçinin ilgisini çekmiştir. Özellikle son otuz yıldır, bu eşitsizlikle ilgili birçok genelleşmeler ve geliştirmeler yapılmaktadır. Bu tezin amacı φ-konveks fonksiyon için bazı yeni genel eşitsizlikler vererek ispatlamaktır.

Anahtar Sözcükler: E-Konveks Fonksiyonlar, Hermite-Hadamard Eşitsizliği, Konveks Fonksiyonlar.

ABSTRACT

ON SOME GENERALIZED INTEGRAL INEQUALITIES FOR φ-CONVEX FUNCTIONS

Meltem Büyükeken
Duzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Mehmet Zeki Sarıkaya
June 2014, 43 pages

The Hermite-Hadamard inequality has evoked the interest of many mathematicians. Especially in the last three decades numerous generalizations, variants and extensions of this inequality have been obtained. The main goal of the thesis is to state and prove some new general inequalities for φ-convex function.

Keywords: E-convex function, Hermite-Hadamard's Inequality, Convex Functions.

EXTENDED ABSTRACT

ON SOME GENERALIZED INTEGRAL INEQUALITIES FOR φ-CONVEX FUNCTIONS

Meltem Büyükeken
Düzce University
Graduade School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Mehmet Zeki Sarıkaya
June 2014, 43 pages

1. INTRODUCTION:

Inequalities have proven to be one of the most important and far-reaching tools for the development of many branches of mathematics. There are many types of inequalities of importance. Integral and finite difference inequalities with explicit estimates are powerful mathematical appartus which aid the study of the qualitative behavior of solutions of various types of differential, integral and finite difference equations. Because of its usefulness and importance, such inequalities have attracted much attention and a great number of papers, surveys and monographs have appeared in the literature.

2. MATERIAL AND METHODS:

φ - convex functions have been introduced by Youness in (Youness 1999) and they play an important role in optimization theory and mathematical economics. Various properties and applicatins of them can be found in (Cristescu 2002).

3. RESULTS AND DISCUSSIONS:

Over the past two decades or so, the field of inequalities has undergone explosive growth. Concerning numerous analytic inequalities, in particular a great many research papers have been written related to the inequalities associated to the names of Cebysev, Grüss, Ostrowski, Hermite-Hadamard and Jensen. A number of surveys and monographs published during the past few years described much of the progress.

4. CONCLUSION AND OUTLOOK:

In this thesis, using functions whose derivatives absolute values are φ-convex functions, we obtained new inequalities related to the right and left side of Hermite-Hadamard inequality by using new integral identities.

1 GİRİŞ

Konveks fonksiyonların sistematik araştırmasına ilk olarak 19. yüzyılın sonlarında rastlanmasına rağmen, 20. yüzyılın ortalarında matematiğin önemli bir alanı olarak görülmeye başlanmıştır. Konveks kümeler ve ilgili geometrik konular matematikçiler tarafından kullanılan 95 ana konudan biridir (52. sırada). Konvekslik, geometri, analiz, lineer cebir ve topolojide kullanılır ve sayı teorisi, klasik ekstremum problemleri, lineer programlama, oyun teorisi ve eşitsizlikler teorisi (lineer, klasik ve matris) gibi çeşitli konularda önemli rol oynar. Son yüzyılda gelişen disiplini ve artan uygulamalarıyla matematiksel analizin merkezi alanlarından biri olarak yerini almıştır.

Konveks terimine ilk olarak, 1883 de Ch. Hermite (1822-1901) in Mathesis 3 (1883, s.82) dergisine gönderdiği mektupta rastlanmıştır. Mektupta,

"Sur deux limites d'une intégrale définie. Soit $f(x)$ une fonction qui varie toujours dans le même sens de $x = a$, á $x = b$. On aura les relations

$$(b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad < \quad \int_a^b f(x)\, dx < (b-a)\, \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

ou bien

$$(b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad > \quad \int_a^b f(x)\, dx > (b-a)\, \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

suivant que la courbe $y = f(x)$ tourne sa convexit´e ou sa concavit´e vers l'axe desabcisses.

En faisant dans ces formules $f(x) = 1/(1+x), a = 0, b = x$ il vient

$$x - \frac{x^2}{2+x} \quad < \quad \log(1+x) < x - \frac{x^2}{2(1+x)}."$$

yazılıydı. Eşitsizlikler alanında daha fazla dikkate alınan, daha az önemli sonuçlar vardır ama maalesef Hermite'in temel çalışmaları sık sık onun orjinal yazar kimliği verilmeden belirtilmiştir. Bu bağlamda temel matematikte ilgi çeken/çekmekte olan Hermite-Hadamard Eşitsizliğinin geometrik yorumu ve çoğu uygulamasıyla konveks fonksiyonun ilk temel sonucu olduğunu söyleyebiliriz. Çoğu matematikçi farklı konveks fonksiyon sınıfları(quasi-convex fonksiyonlar, fonksiyonların Godunova-Levin sınıfı, log-convex ve r-convex fonksiyonlar, p-convex fonksiyonlar, vb.) ve özel ortalamalar(p-logarithmic ortalamaları, identric ortalama, Stolarsky ortalamaları, vb.) için onu uygulamaya, genişletmeye, sadeleştirmeye ve genelleştirmeye çalışmaktadır.

Hardy, Littlewood ve Polya tarafından 1934 yılında yazılan "Inequalities" adlı eser eşitsizlikler teorisi için temel başvuru kaynağıdır. Okuyucu bu eserde konveks fonksiyonlarla ilgili klasik ve yeni eşitsizlikleri, problemleri, ispat yöntemlerini ve sonuçları bulabilir. Buna ek olarak Beckenbach ve Bellman'ın yazdığı "Inequalities" adlı eser ve Mitrinovic'in 1970 de yazdığı "Analytic Inequalities" adlı eseri de söyleyebiliriz. Bu kaynaklar eşitsizlikler teorisini araştırmak isteyen okuyucu için el altında bulunması gereken kaynaklardır.

Daha sonra konveks fonksiyonlar daha kapsamlı bir şekilde A. W. Roberts ve D. E. Varberg tarafından "Convex Functions" adlı eserde kaleme alındı. Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler hakkında Pečarić 1987 yılında "Convex Functions: Inequalities" adlı eseri yayınlamıştır. Ayrıca okuyucu çeşitli konveks fonksiyon sınıfları için, Hermite-Hadamard eşitsizliğinin detaylı anlatımını S.S. Dragomir ve C.E.M Pearce tarafından yazılan "Selected Topics on Hermite Hadamard Inequalities and Applications" (Dragomir and Pearce 2000) adlı eserde bulabilir.

Son yılllarda klasik konvekslik tanımından daha genel konveks fonksiyon çeşitleri oluşturulmaktadır. Bunlardan birisi de 1999 yılında Youness tarafından tanıtılan $\varphi - konveks$ fonksiyonlardır. Her konveks fonksiyon aynı zamanda bir $\varphi - konveks$ fonksiyondur, ancak bunun tersinin her zaman doğru olmadığını örnekler ile Youness ve Cristescu (2002) vermişlerdir. Ayrıca, 2002 de Cristescu bu fonksiyonlar ile ilgili bir çok özellikler vererek ispatlamıştır. Daha sonra, Cristescu $\varphi - konveks$ fonksiyonlar için ilk kez Hermite-Hadamard integral eşitsizliğini 2002 yılında vermiştir.

Bu tezde amacımız, Youness tarafından tanıtılan $\varphi - konveks$ fonksiyonları kullanarak daha iyi bir sonuç veren Hermite-Hadamard eşitsizliğini elde ederek bu eşitsizliğin birinci ve ikinci tarafı için birinci mertebeden türevlerinin mutlak değerleri $\varphi - konveks$ olan fonksiyonlar kullanarak yeni tipten trapezoid ve midpoint eşitsizliklerini oluşturacağız.

2 KURAMSAL KAVRAMLAR

2.1 GENEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmamız için gerekli olan tanım, teorem, bazı eşitlikler ve temel özellikler verilecektir. Gerekli görülenler için ispatlar yapılarak birer örnek verilecektir.

Tanım 2.1.1 (Konveks Fonksiyon) $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in [a,b]$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \quad \leq \quad \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa bu f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Eşitsizlikte "$\geq$" olması halinde de f fonksiyonuna konkav fonksiyon denir. Yukarıdaki eşitsizlikte $\lambda = \frac{1}{2}$ alınırsa

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \quad \leq \quad \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

olur bu tip eşitsizlikleri sağlayan fonksiyonlara da J-konveks fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 2000).

Tanım 2.1.2 V boş olmayan bir küme ve K bir cisim olsun. Aşağıdaki önermeler doğru ise, V kümesi K cismi üzerinde bir *vektör uzayı*dır, denir.

$(V1)$ V kümesinde $+$ ile gösterilen ve adına *toplama* denilen bir işlem tanımlanmıştır ve $(V, +)$ değişmeli gruptur.

(1) Her $u, v \in V$ için, $u + v$ tanımlıdır ve $u + v \in V$ dir. Yani, V kümesi toplama işlemine göre kapalıdır.

(2) Her $u, v, w \in V$ için, $(u + v) + w = u + (v + w)$ dir. Yani, V kümesinde toplama işleminin birleşme özelliği vardır.

(3) Her $u \in V$ ve $\exists 0 \in V$ için, $u + 0 = u$ ve $0 + u = u$ dır.Yani, V kümesinde toplama işleminin etkisiz (*birim*) elemanı vardır. Bu etkisiz elemanı 0 simgesi ile gösterdik.

(4) Her $u \in V$ için, V kümesinde $-u \in V$ ile gösterilen ve

$$u + (-u) \ = \ 0 \text{ ve } (-u) + u = 0$$

eşitliklerini sağlayan bir $-u$ elemanı vardır. Yani, V kümesindeki her bir u elemanının toplamaya göre tersi vardır. u nun tersi $-u$ ile gösterilmiştir.

(5) Her $u, v \in V$ için $u + v = v + u$ dır. Yani, V kümesinde toplama işleminin değişme özelliği vardır.

$(V2)$ $K \times V \to V\ (a, u) \to au$ biçiminde, adına *skalerle* çarpma işlemi denilen bir fonksiyon tanımlanmıştır ve bu fonksiyon aşağıdaki önermeleri doğrular:

(a) Her $a \in K$ ve her $u.v \in V$ için $a(u + v) = au + av$ dır.

(b) Her $a, b \in K$ ve her $u \in V$ için $(a + b)u = au + bu$ dır.

(c) Her $a, b \in K$ ve her $u \in V$ için $(ab)u = a(bu)$ dır.

(d) K nın çarpmaya göre birim elemanı 1 olduğuna göre, V nin her elemanı için, $1u = u$ dır (Bayraktar 1998).

Tanım 2.1.3 V, reel sayı cismi üzerinde vektör uzayı ise, bu vektör uzayına *reel vektör uzayı* denir. V, karmaşık sayı cismi üzerinde vektör uzayı ise bu durumda V ye *kompleks vektör uzayı* denir (Bayraktar 1998).

Tanım 2.1.4 (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu) f, $[a, b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left| \int_b^b f(x)\, dx \right| \ \leq \ \int_a^b |f(x)|\, dx, \quad (a < b)$$

eşitsizliği geçerlidir (Bayraktar 1998).

Tanım 2.1.5 (Hölder Eşitsizliği) $a=(a_1,a_2,...,a_n)$ ve $b=(b_1,b_2,...,b_n)$ reel veya kompleks sayıların iki elemanı olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$$

olmak üzere

a. $p>1$ ise,

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

b. $p<0$ veya $q<0$ ise,

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k b_k| \geq \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Mitrinović 1970).

Tanım 2.1.6 (İntegraller için Hölder Eşitsizliği) $p>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olsun. f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)\,g(x)|\,dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović *et al.*1993).

Tanım 2.1.7 E ölçülebilir bir küme olmak üzere f bu küme üzerinde tanımlı ve reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda keyfi K sayısı için $f(x) > K$ olan $x \in E$ değerlerin kümesi ölçülebilirse f fonksiyonuna *ölçülebilir fonksiyon* denir (Dönmez 2001).

Teorem 2.1.1 (Lebesque integralinin varlık teoremi) Sonlu ölçümlü E kümesi üzerinde f fonksiyonu sınırlı ve ölçülebilir ise *Lebesque* integrali vardır (Dönmez 2001).

Teorem 2.1.2 f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise

a. f, (a, b) aralığında süreklidir ve

b. f, $[a, b]$ aralığında sınırlıdır (Azpeitia 1994).

Teorem2.1.3 f fonksiyonunun I aralığında ikinci türevi varsa f fonksiyonunun bu aralık üzerinde konveks olması için gerek ve yeter şart her $x \in I$ için $f''(x) \geq 0$ olmasıdır (Mitrinović 1970).

Teorem 2.1.4 $(Hermite - Hadamard\ Esitsizliği)$ $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu konveks ise $a, b \in I$ ve $a < b$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{1}$$

dir. (Pečarić et al. 1992).

İspat. Teorem 2.1.2 den dolayı f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında integrallenebilirdir. Sağ taraftaki eşitsizliğin ispatı konveksliğin geometrik yorumundan açıktır. Yani $x = a(1-t) + bt$, $t \in [0, 1]$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_0^1 f(a(1-t)+bt)\,dt \\
&\leq f(a)\int_0^1 (1-t)\,dt + f(b)\int_0^1 t\,dt \\
&= \frac{f(a)+f(b)}{2}
\end{aligned}$$

olur ve bu (1) eşitsizliğinin sağ tarafıdır. Şimdi sol tarafın ispatını verelim:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

integralini

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\,dx\right] \tag{2}$$

biçiminde yazıp, $x = a + t(b-a)/2$ değişken değiştirmesi yapılırsa son parantez içindeki ilk terim

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_0^1 f\left(a + \frac{t(b-a)}{2}\right)dt$$

biçiminde ve $x = b - t(b-a)/2$ değişken değiştirmesi yapılırsa ikinci terim

$$\begin{aligned}\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\,dx &= -\frac{b-a}{2}\int_1^0 f\left(b - \frac{t(b-a)}{2}\right)dt \\ &= \frac{b-a}{2}\int_0^1 f\left(b - \frac{t(b-a)}{2}\right)dt\end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. (2) de bu sonuçlar yazılır ve konveksliğin tanımı uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[f\left(a+\frac{t(b-a)}{2}\right)+f\left(b-\frac{t(b-a)}{2}\right)\right]dt \\ &\geq \int_0^1 f\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)dt = f\left(\frac{a+b}{2}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.1.5 $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde konveks olsun. Bu durumda $\forall\lambda \in [0,1]$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq l(\lambda) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq L(\lambda) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3}$$

dır. Burada

$$l(\lambda) := \lambda f\left(\frac{\lambda b+(2-\lambda)a}{2}\right)+(1-\lambda)f\left(\frac{(1+\lambda)b+(1-\lambda)a}{2}\right)$$

ve

$$L(\lambda) := \frac{1}{2}\left(f(\lambda b+(1-\lambda)a)+\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)\right)$$

dır (Azpeitia 1994).

İspat. f, I üzerinde konveks olsun. $\lambda \neq 0$ için $[a, \lambda b+(1-\lambda)a]$ aralığı üzerinde (1) uygulanırsa

$$f\left(\frac{\lambda b+(2-\lambda)a}{2}\right) \leq \frac{1}{\lambda(b-a)}\int_a^{\lambda b+(1-\lambda)a} f(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(\lambda b+(1-\lambda)a)}{2} \tag{4}$$

$\lambda \neq 1$ için $[\lambda b+(1-\lambda)a, b]$ aralığı üzerinde tekrar (1) uygulanırsa

$$f\left(\frac{(1+\lambda)\,b+(1-\lambda)\,a}{2}\right) \leq \frac{1}{(1-\lambda)\,(b-a)}\int\limits_{\lambda b+(1-\lambda)a}^{b} f(x)\,dx \qquad (5)$$
$$\leq \frac{f(b)+f(\lambda b+(1-\lambda)\,a)}{2}$$

(4) i λ ile (5) i $(1-\lambda)$ ile çarpıp eşitsizlikleri topladığımızda $l(\lambda)$ ve $L(\lambda)$ tanımlarından

$$l(\lambda) \leq \frac{1}{b-a}\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx \leq L(\lambda) \qquad (6)$$

elde edilir. f konveks fonksiyon olduğundan,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\lambda\frac{\lambda b+(2-\lambda)\,a}{2}+(1-\lambda)\,\frac{(1+\lambda)\,b+(1-\lambda)\,a}{2}\right) \qquad (7)$$
$$\leq \lambda f\left(\frac{\lambda b+(1-\lambda)\,a+a}{2}\right)+(1-\lambda)\,f\left(\frac{\lambda b+(1-\lambda)\,a+b}{2}\right)$$
$$\leq \frac{1}{2}\left(f(\lambda b+(1-\lambda)\,a)+\lambda f(a)+(1-\lambda)\,f(b)\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği bulunur. Bu durumda teorem ispatlanmış olur.

3 MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde küme sınıfları ve fonksiyon sınıflarında aranan konveks fonksiyon ve konveks kümeler için E-konveks kümeler ve E-konveks fonksiyonları tanıtacağız. Aşağıda verilen tüm sonuçlar Youness tarafından verilen çalışmadan yararlanılmıştır (Youness 1999).

3.1 E-KONVEKS KÜMELER, E-KONVEKS FONKSİYONLAR VE E-KONVEKS PROGRAMLAMA

Son zamanlarda konveks fonksiyonların sınıfı Bector ve Singh (1991) tarafından B-konveks fonksiyonların sınıfına ve Hanson ve Mond (1987) tarafından ise inveks fonksiyonların kümesine genişletildi.

Tezin bu bölümünde, ilk olarak konveks kümelerin notasyonunu E-konveks kümelere genişleteceğiz ve bu küme sınıfının bazı özelliklerini vereceğiz. Daha sonra da, konveks fonksiyonların kümesini de E-konveks fonksiyonlar sınıfına genişleteceğiz. Bu sınıf Hanson ve Mond (1987) ve Kaul ve Kaur (1985) tarafından genelleştirilen mevcut preinveks fonksiyonların sınıfından daha geniş bir sınıftır.

3.1.1 E-Konveks Kümeler

Tanım 3.1.1.1 $M \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin E-konveks olması için gerek ve yeter şart her $x, y \in M$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$(1-\lambda)E(x) + \lambda E(y) \quad \in \quad M$$

olacak şekilde bir $E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bir dönüşümünün olmasıdır.

Tanım 3.1.1.2 (İnveks Küme): $u, v \in K$ olsun. Eğer her $u, v \in K$ ve $t \in [0,1]$ için $u + t\eta(v,u) \in K$ oluyorsa K ya η ye göre inveks küme denir.

Tanım 3.1.1.3 (Preinveks Fonksiyon): Her $u, v \in K$ ve $t \in [0,1]$

için

$$f\left(u+t\eta(v,u)\right) \leq (1-t)\, f\left(u\right) + tf\left(v\right)$$

oluyorsa f ye K üzerinde η ye göre preinveks fonksiyon denir.

Önerme 3.1.1.1 Her $M \subset \mathbb{R}^n$ konveks kümesi E-konvekstir.

$E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ özdeş operatör verildiğinde ispatı açıktır.

Önerme 3.1.1.2 $M \subset \mathbb{R}^n$ kümesi E-konveks ise, $E(M) \subseteq M$ dir.

İspat. M, E-konveks olduğundan herhangi bir $x, y \in M$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$(1-\lambda)E(x) + \lambda E(y) \quad \in \quad M$$

elde ederiz. Burada $\lambda = 1$, $E(y) \in M$ dir. Bu durumda, $E(M) \subseteq M$ dir.

Önerme 3.1.1.3 $E(M)$ kümesi konveks ve $E(M) \subseteq M$ olsun. Bu durumda, M kümesi $E-konveks$tir.

İspat. Varsayalım ki $x, y \in M$ olsun. Bu durumda, $E(x)$, $E(y) \in E(M)$ dir. $E(M)$ nin konveksliğinden her bir $0 \leq \lambda \leq 1$ için

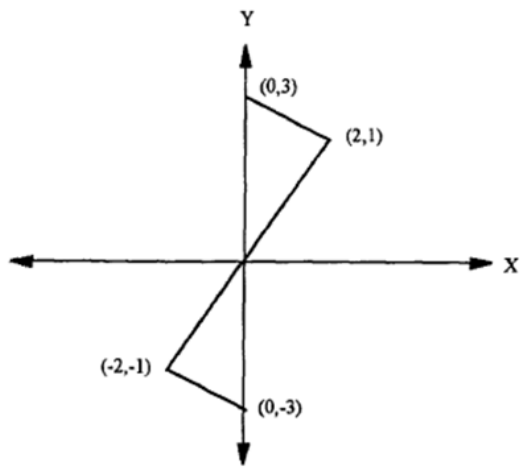
$$(1-\lambda)E(x) + \lambda E(y) \quad \in \quad E(M) \subseteq M$$

elde ederiz. O halde, M kümesi $E-konveks$tir.

E-konveks olup konveks olmayan kümelere örnek verilebilir, Önerme 3.1.1.3 için bir örnek verebiliriz.

Örnek 3.1.1.1 $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ fonksiyonu $E\left(x,y\right) = (0, y)$ olarak verilsin. Bu durumda, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$ ile, $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 1$ olmak üzere M kümesi

$$\begin{aligned} M &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = \lambda_1\left(0,0\right) + \lambda_2\left(2,1\right) + \lambda_3\left(0,3\right)\right\} \\ &\quad \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = \lambda_1\left(0,0\right) + \lambda_2\left(0,-3\right) + \lambda_3\left(-2,-1\right)\right\} \end{aligned}$$



Şekil 3.1. M kümesi $E - Konveks$ fakat Konveks değildir.

şeklinde tanımlansın. O halde M kümesi $E - konvekstir$ fakat konveks değildir.

Örnek 3.1.1.2 $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ fonksiyonu $E\left(x, y\right) = \left(2y/3 - x/3, y/3 + 4x/3\right)$ olacak şekilde tanımlı olsun. Örnek 3.1.1.1 de verilen M kümesini göz önüne alınırsa $E(M) = M$ dir. Ayrıca bu küme konveks fakat E-konveks değildir çünkü bazı $0 < \lambda < 1$ için

$$\lambda E\left(0, 3\right) + \left(1 - \lambda\right) E(-2, -1) \quad \notin \quad M$$

dir (bkz Şekil 3.1).

Önerme 3.1.1.4 M_1 ve M_2 iki E-konveks küme olsun. Burada $M_1 \cap M_2$ kümesi de $E - konveks$ kümedir.

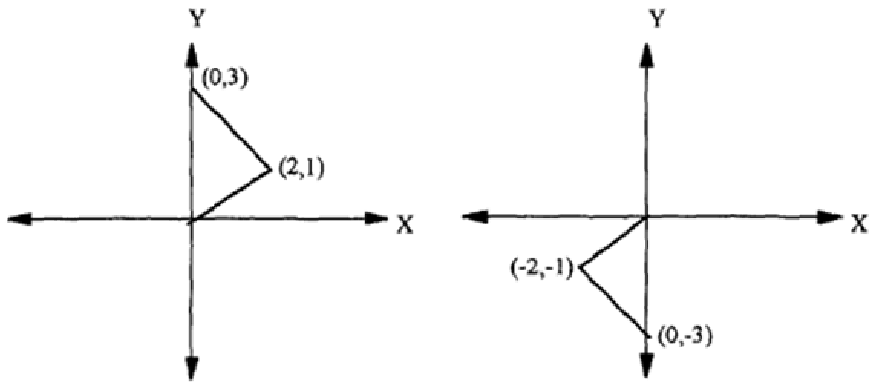
İspat. İspatı açıktır.

Uyarı 3.1.1.1 M_1 ve M_2 iki E-konveks küme ise, bu durumda $M_1 \cup M_2$ kümesi $E - konveks$ olmak zorunda değildir aşağıdaki örneği verebiliriz.

Örnek 3.1.1.3. Örnek 3.1.1.2 de verilen E fonksiyonu ele alınsın ve , bu iki küme gözönüne alınsın ve $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$, $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} M_1 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = \lambda_1 (0,0) + \lambda_2 (2,1) + \lambda_3 (0,3)\right\}, \\ M_2 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = \lambda_1 (0,0) + \lambda_2 (0,3) + \lambda_3 (-2,-1)\right\}, \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Bu iki küme,M_1 ve M_2 kümeleri $E-konveks$tir, fakat $M_1 \cup M_2$ kümesi $E-konveks$ değildir (bknz Şekil 3.2 ve Şekil 3.3).



Şekil 3.2. M_1 ve M_2 kümeleri $E-konvekstir$.

Lemma 3.1.1.1 $M \subset \mathbb{R}^n$ kümesi E_1 ve $E_2-konveks$ küme olsun. Bu durumda, M kümesi bir $(E_1 \circ E_2)$ ve $(E_2 \circ E_1)-konveks$ kümedir.

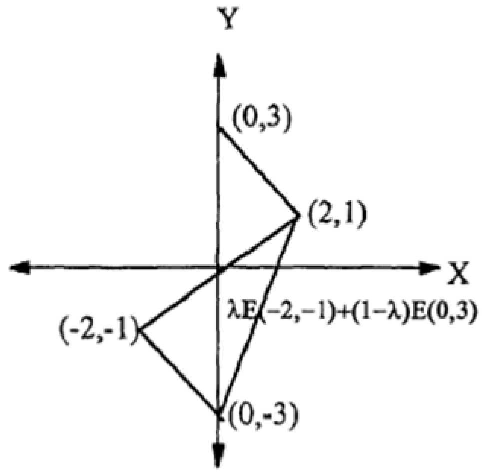
İspat. Varsayalım ki her $x, y \in M$, ve

$$\lambda (E_1 \circ E_2) x + (1-\lambda)(E_1 \circ E_2) y \quad \notin \quad M, \qquad \text{bazı } 0 \leq \lambda \leq 1 \text{ için}$$

ise,

$$\lambda E_1 (E_2 x) + (1-\lambda) E_1 (E_2 y) \quad \notin \quad M, \qquad \text{bazı } 0 \leq \lambda \leq 1 \text{ için}$$

dir.



Şekil 3.3. $M_1 \cup M_2$ kümesi $E-konveks$ değildir.

Önerme 3.1.1.2 den, (E_2x), $(E_2x) \in M$ dir, bu durumda

$$\lambda\left(E_1\left(E_2x\right)\right)+(1-\lambda)\left(E_1\left(E_2y\right)\right) \quad \notin \quad M$$

M'nin $E_1 - konveks$liğiyle çelişmektedir. Bundan dolayı, M kümesi $(E_1 \circ E_2)-konveks$ kümedir. Benzer şekilde, M kümesi $(E_2 \circ E_1)-konveks$ kümedir.

Lemma 3.1.1.2 $E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu lineer ve $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ kümeleri $E - konveks$ kümeler olsun. Buradan $M_1 + M_2$ bir $E - konveks$ kümedir.

İspat. $p, x \in M_1$ ve $q, y \in M_2$ için $(p+q), (x+y) \in M_1 + M_2$ dir. Ayrıca $0 \leq \lambda \leq 1$ olacak şekilde

$$\begin{aligned} & \lambda E(p+q)+(1-\lambda) E(x+y) \\ = \quad & (\lambda E(p)+(1-\lambda) E(x))+(\lambda E(q)+(1-\lambda) E(y)) \in M_1+M_2 \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece, $M_1 + M_2$ kümesinin $E - konveksliği$ elde edilir.

3.1.2. E-Konveks Fonksiyonlar

Tanım 3.1.2.1 Her bir $x, y \in M$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için bir $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $E - konveks$ olması için gerek ve yeter şart

$$f(\lambda E(x) + (1-\lambda) E(y)) \leq \lambda f(E(x)) + (1-\lambda) f(E(y))$$

olacak şekilde $E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bir dönüşümünün olmasıdır. Diğer taraftan,

$$f(\lambda E(x) + (1-\lambda) E(y)) \geq \lambda f(E(x)) + (1-\lambda) f(E(y))$$

ise f fonksiyonu M üzerinde $E - konkav$dır.

Uyarı 3.1.2.1 Her konveks fonksiyon M konveks kümesi üzerinde $E - konveks$ fonksiyondur, burada E nin özdeş fonksiyon olarak alınması yeterlidir.

$E - konveks$ olup konveks olmayan fonksiyonlara aşağıdaki iki örnek verilebilir.

Örnek 3.1.2.1. $M \subset \mathbb{R}^n$ olacak şekilde

$$M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = a_1(0,0) + a_2(0,3) + a_3(2,1)\right\}$$

$a_i > 0$ verilsin, $\sum_{i=1}^{3} a_i = 1$, ve $E(x, y) = (0, y)$ olacak şekilde $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ fonksiyonu tanımlı olsun. Bu fonksiyon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ile tanımlı

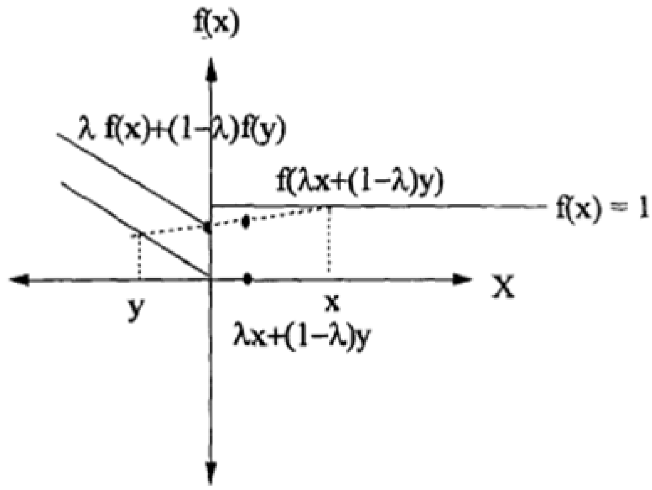
$$f(x,y) = \begin{cases} x^3, & y < 1 \quad \text{ise}, \\ xy^3, & y \geq 1 \quad \text{ise}, \end{cases}$$

M üzerinde $E - konveks$tir fakat konveks değildir.

Örnek 3.1.2.2 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ile tanımlı

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \quad \text{ise}, \\ -x, & x \leq 0 \quad \text{ise}, \end{cases}$$

ve $E(x) = -x^2$ olacak şekilde $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlı olsun. Bu durumda R kümesi $E-konveks$ küme ve f bir $E-konveks$ fonksiyondur fakat konveks değildir (bknz Şekil 3.4).



Şekil 3.4. f bir $E-konveks$ fonksiyondur fakat konveks değildir.

4 BULGULAR VE TARTIŞMA

Konveks fonksiyonlar teorisinde büyük bir yere sahip olan Hermite-Hadamard eşitsizliği ilk olarak C. Hermite ve J. Hadamard tarafından ortaya atılmıştır. Daha sonra bir çok matematikçinin de ilgisini çekmiş olan bu eşitsizlik aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$a < b$ için $a, b \in I$ ve $I \in \mathbb{R}$ için $f : I \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyonu olsun. O halde,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{8}$$

dır. Dragomir ve Agarwal (1998) de verilen eşitsizliğin sağ kısmı ile ilgili bazı kestirimler elde etmişlerdir bunun için de ilk olarak aşağıdaki Lemmayı ispatlamışlardır.

Lemma 4.1. $f : I^\circ \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir dönüşüm ve $a < b$, $a, b \in I$ olsun. $f' \in L[a, b]$ ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_0^1 (1-2t)f'(ta+(1-t)b)dt. \tag{9}$$

Teorem 4.1. $f : I^\circ \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir dönüşüm ve $a < b$, $a, b \in I$ olsun. $\left|f'\right|$, $[a, b]$ üzerinde konveks fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{(b-a)}{8}\left(|f'(a)| + |f'(b)|\right). \tag{10}$$

4.1 φ-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ BAZI EŞİTSİZLİKLER

$\varphi : [a,b] \to [a,b]$ fonksiyonu $[a,b] \subset \mathbb{R}$ olacak şekilde ele alınmıştır. Youness (1998) de aşağıdaki $\varphi-$konveks fonksiyonları tanımlamıştır:

Tanım 4.1.1 Her $x, y \in [a,b]$ için $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f\left(t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)\right) \leq tf\left(\varphi(x)\right) + (1-t)f\left(\varphi(y)\right)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, f fonksiyonuna $\varphi - konveks$ fonksiyon denir. Açıkça görülüyor ki φ fonksiyonu özdeş ise aşağıdaki tanımdan klasik konvekslik elde edilir. φ konveks fonksiyonun bir çok özelliği kurulabilir.

Bundan başka Cristescu (2002) $\varphi - konveks$ fonksiyonu için aşağıdaki Hermite-Hadamard tipi eşitsizliği sunmuştur:

Teorem 4.1.1. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli fonksiyon ve $\varphi : [a,b] \to [a,b]$ için $\varphi-$konveks fonksiyon ise aşağıdaki eşitsilik sağlanır:

$$f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right) \leq \frac{1}{\varphi(a)-\varphi(b)} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx \leq \frac{f\left(\varphi(a)\right)+f\left(\varphi(b)\right)}{2}. \tag{11}$$

Teorem 4.1.2. $a, b \in J$ olacak şekilde $a < b$ ve $\varphi : J \to \mathbb{R}$ sürekli, artan fonksiyon olsun. $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde φ-konveks fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right) \leq \frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f\left(\varphi(x)\right) d\varphi(x) \leq \frac{f(\varphi(a))+f(\varphi(b))}{2}. \tag{12}$$

İspat. φ-konveks fonksiyon tanımından

$$\begin{aligned}
& f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right) \\
= & \int_0^1 f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right) dt \\
= & \int_0^1 f\left(\frac{(1-t)\varphi(a)+t\varphi(b)+t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)}{2}\right) dt \\
\leq & \frac{1}{2}\int_0^1 \left[f\left((1-t)\varphi(a)+t\varphi(b)\right)+f\left(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)\right)\right] dt
\end{aligned}$$

yazılabilir. Son integralde değişken değiştirmesi yapılırsa

$$f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right) \leq \frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(x))\, d\varphi(x) \tag{13}$$

olur. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\varphi a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(x))\, d\varphi(x) \qquad (14) \\
= & \int_0^1 f\left((1-t)\varphi(a)+t\varphi(b)\right) dt \\
\leq & \int_0^1 \left[(1-t) f(\varphi(a))+t f(\varphi(b))\right] dt \\
= & \frac{f(\varphi(a))+f(\varphi(b))}{2}
\end{aligned}$$

bulunur. (13) ve (14) den istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 4.1.3. $a, b \in J$ olacak şekilde $a < b$ ve $\varphi : J \to \mathbb{R}$ sürekli,artan fonksiyon olsun. $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $I = [a, b]$ üzerinde $\varphi-$konveks fonksiyon ve $w : [\varphi(a), \varphi(b)] \to \mathbb{R}$ negatif olmayan, integrallenebilir ve $\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}$ e göre simetrik olsun. Bu durumda

$$f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} w(\varphi(x))\,d\varphi(x) \tag{15}$$

$$\leq \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(x))\,w(\varphi(x))\,d\varphi(x)$$

$$\leq \frac{f(\varphi(a))+f(\varphi(b))}{2}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} w(\varphi(x))\,d\varphi(x)$$

dır.

İspat. f fonksiyonu φ-konveks fonksiyon ve $w : [\varphi(a), \varphi(b)] \to \mathbb{R}$ negatif olmayan, integrallenebilir ve $\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}$ e göre simetrik ise

$$f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} w(\varphi(x))\,d\varphi(x)$$

$$= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right) w(\varphi(x))\,d\varphi(x)$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \left[f(\varphi(a)+\varphi(b)-\varphi(x))+f(\varphi(x))\right] w(\varphi(x))\,d\varphi(x)$$

$$= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(x))\,w(\varphi(x))\,d\varphi(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \left[f\left(\varphi\left(a\right)+\varphi\left(b\right)-\varphi(x)\right)\right] w\left(\varphi\left(x\right)\right) d\varphi\left(x\right) \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f\left(\varphi(x)\right) w\left(\varphi\left(x\right)\right) d\varphi\left(x\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \left[f\left(\varphi\left(a\right)\right)+f(\varphi\left(b\right))\right] w\left(\varphi\left(x\right)\right) d\varphi\left(x\right) \\
&= \frac{f\left(\varphi\left(a\right)\right)+f(\varphi\left(b\right))}{2}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} w\left(\varphi\left(x\right)\right) d\varphi\left(x\right)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.1.4. $a, b \in J$ olacak şekilde $a < b$ ve $\varphi : J \to \mathbb{R}$ sürekli, artan fonksiyon olsun. $f, w : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $I = [\varphi(a), \varphi(b)]$ üzerinde negatif olmayan $\varphi-$konveks fonksiyonlar olsun. Bu durumda her $t \in [0, 1]$ için

$$
\begin{aligned}
M\left(\varphi(a), \varphi(b)\right) &= f\left(\varphi(a)\right) w\left(\varphi(a)\right) + f\left(\varphi(b)\right) w\left(\varphi(b)\right) \\
N\left(\varphi(a), \varphi(b)\right) &= f\left(\varphi(a)\right) w\left(\varphi(b)\right) + f\left(\varphi(b)\right) w\left(\varphi(a)\right) \qquad (16)
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&2f\left(\frac{\varphi\left(a\right)+\varphi\left(b\right)}{2}\right) w\left(\frac{\varphi\left(a\right)+\varphi\left(b\right)}{2}\right) \\
&\leq \frac{1}{\varphi\left(a\right)-\varphi\left(b\right)}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f\left(\varphi\left(x\right)\right) w\left(\varphi\left(x\right)\right) d\varphi\left(x\right) \\
&\leq \frac{1}{6}M\left(\varphi(a), \varphi(b)\right) + \frac{1}{3}N\left(\varphi(a), \varphi(b)\right)
\end{aligned}
$$

dır.

İspat. f ve w, φ-konveks fonksiyonlar olduğundan,

$$\begin{aligned}
& f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right) w\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right) \\
= & f\left(\frac{t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)+(1-t)\varphi(a)+t\varphi(b)}{2}\right) \\
& \times w\left(\frac{t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)+(1-t)\varphi(a)+t\varphi(b)}{2}\right) \\
\leq & \frac{1}{2}\left[f(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b))+f((1-t)\varphi(a)+t\varphi(b))\right] \\
& \times\frac{1}{2}\left[w(t\varphi(a)+(1-t)v(b))+w((1-t)\varphi(a)+t\varphi(b))\right] \\
= & \frac{1}{4}\{f(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b))\,w(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)) \\
& +f((1-t)\varphi(a)+t\varphi(b))\,w((1-t)\varphi(a)+t\varphi(b))\} \\
& +\frac{1}{4}\{f(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b))\,w((1-t)\varphi(a)+t\varphi(b)) \\
& +f((1-t)\varphi(a)+t\varphi(b))\,w(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b))\} \\
\leq & \frac{1}{4}\{2t(1-t)f(\varphi(a)()w(\varphi(a))+2t(1-t)f(\varphi(b))w(\varphi(b)) \\
& +\left(t^2+(1-t)^2\right)[f(\varphi(a))w(\varphi(b))+f(\varphi(b))w(\varphi(a)]\}
\end{aligned}$$

olur. $[0,1]$ üzerinde t ye göre integral alınırsa

$$\begin{aligned}
& f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right) w\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right) \\
\leq & \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(x))\,w(\varphi(x))\,d\varphi(x)\right] \\
& +\frac{1}{2}\left[\frac{1}{6}M(\varphi(a),\varphi(b))+\frac{1}{3}N(\varphi(a),\varphi(b))\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda da ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.5. $a, b \in J$ olacak şekilde $a < b$ ve $\varphi : J \to \mathbb{R}$ sürekli, artan fonksiyon olsun. $f, w : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $I = [\varphi(a), \varphi(b)]$ üzerinde negatif olmayan $\varphi-$konveks fonksiyonlar olsun. Buradan her $t \in [0,1]$ için $M(\varphi(a), \varphi(b))$ ve $N(\varphi(a), \varphi(b))$ ifadeleri (16) da tanımlandığı gibi olmak üzere

$$\frac{1}{\varphi(a) - \varphi(b)} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(x))\, w(\varphi(x))\, d\varphi(x)$$

$$\leq \frac{1}{6} M(\varphi(a), \varphi(b)) + \frac{1}{3} N(\varphi(a), \varphi(b))$$

dır.

İspat. f ve w, φ-konveks fonksiyon olduklarından,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\varphi(a) - \varphi(b)} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(x))\, w(\varphi(x))\, d\varphi(x) \\
= & \frac{1}{\varphi(a) - \varphi(b)} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(x))\, w(\varphi(a) + \varphi(b) - \varphi(x))\, d\varphi(x) \\
= & \int_0^1 f(t\varphi(a) + (1-t)\varphi(b)) w((1-t)\varphi(a) + t\varphi(b)) dt \\
\leq & \int_0^1 [t f(\varphi(a)) + (1-t) f(\varphi(b))] [(1-t) w(\varphi(a)) + t w(\varphi(b))]\, dt \\
= & \int_0^1 \{t(1-t)[f(\varphi(a)) w(\varphi(a)) + f(\varphi(b)) w(\varphi(b))] \\
& + t^2 f(\varphi(a)) w(\varphi(b)) + (1-t)^2 f(\varphi(b)) w(\varphi(a)\}\, dt \\
= & \frac{1}{6} M(\varphi(a), \varphi(b)) + \frac{1}{3} N(\varphi(a), \varphi(b))
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da istenilen sonucun ispatını vermiş olur.

Lemma 4.1.1. $a, b \in J$ olacak şekilde $a < b$ ve $\varphi : J \to \mathbb{R}$ sürekli, artan fonksiyon olsun. $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I°(I aralığı) üzerinde diferansiyellenebilir olsun. $\varphi(a), \varphi(b) \in I$ için $f' \in L_1[\varphi(a), \varphi(b)]$ ise

$$p(t) = \begin{cases} t, & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ t-1, & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

olmak üzere

$$\frac{1}{\varphi(b) - \varphi(a)} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(x))\, d\varphi(x) - f\left(\frac{\varphi(a) + \varphi(b)}{2}\right) \tag{17}$$

$$= \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{2} \int_0^1 p(t) f'(t\varphi(a) + (1-t)\varphi(b))\, dt$$

dır.

İspat. Kısmi integrasyon formülü yardımıyla,

$$\int_0^1 p(t) f'(t\varphi(a) + (1-t)\varphi(b))\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} t f'(t\varphi(a) + (1-t)\varphi(b))\, dt$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}}^1 (t-1) f'(t\varphi(a) + (1-t)\varphi(b))\, dt$$

$$= -\left.\frac{t f(t\varphi(a) + (1-t)\varphi(b))}{\varphi(b) - \varphi(a)}\right|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \frac{1}{\varphi(b) - \varphi(a)} \int_0^{\frac{1}{2}} f(t\varphi(a) + (1-t)\varphi(b))\, dt$$

$$
\begin{aligned}
& - \left.\frac{(t-1) f\left(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)\right)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\right|_{\frac{1}{2}}^{1} \\
& + \frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)} \int_{0}^{\frac{1}{2}} f\left(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)\right) dt \\
= & -\frac{2}{\varphi(b)-\varphi(a)} f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)+\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)} \int_{0}^{1} f\left(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)\right) dt
\end{aligned}
$$

özdeşliği elde edilir. İntegrasyonda değişken değiştirmesi yapılırsa (17) de istenen özdeşlik elde edilir.

Teorem 4.1.6. $a, b \in J$ olacak şekilde $a < b$ ve $\varphi : J \to \mathbb{R}$ sürekli artan fonksiyon olsun. $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I°(I aralığı) üzerinde diferansiyellenebilir ve $\varphi(a), \varphi(b) \in I$ için $f' \in L_1[\varphi(a), \varphi(b)]$ olsun. $|f'|$ fonksiyonu $[\varphi(a), \varphi(b)]$ üzerinde φ- konveks ise:

$$
\begin{aligned}
& \left|\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(x))\, d\varphi(x)-f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)\right| \\
\leq & \frac{(\varphi(b)-\varphi(a))}{24}\left[\left|f'(\varphi(a))\right|+\left|f'(\varphi(b))\right|\right]
\end{aligned} \tag{18}
$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Lemma 4.1.1 kullanılarak ve $|f'|$ fonksiyonu φ-konveks olduğundan aşağıdaki eşitsizliği buluruz:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(x))\, d\varphi(x) - f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right) \right| \\
\leq\ & \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2} \int_0^1 |p(t)| \left| f'(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)) \right| dt \\
=\ & \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} t \left| f'(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)) \right| dt \right. \\
& \left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t) \left| f'(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)) \right| dt \right\} \\
\leq\ & \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} t \left[t \left| f'(\varphi(a)) \right| + (1-t) \left| f'(\varphi(b)) \right| \right] dt \right. \\
& \left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t) \left[t \left| f'(\varphi(a)) \right| + (1-t) \left| f'(\varphi(b)) \right| \right] dt \right\} \\
=\ & \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2} \left[\left| f'(\varphi(a)) \right| + \left| f'(\varphi(b)) \right| \right]
\end{aligned}$$

burada

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^2 dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^2 dt = \frac{1}{24}$$

ve

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t(1-t) dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 t(1-t) dt = \frac{1}{12}$$

olup ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.7. $a, b \in J$ olacak şekilde $a < b$ ve $\varphi : J \to \mathbb{R}$ sürekli, artan fonksiyon olsun. $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I°(I aralığı) üzerinde diferansiyellenebilir ve $\varphi(a), \varphi(b) \in I$ için $f' \in L_1[\varphi(a), \varphi(b)]$ olsun. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} =$

1 ve $q > 1$ olmak üzere $|f'|^q$ fonksiyonu $[\varphi(a), \varphi(b)]$, üzerinde φ- konveks ise:

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{\varphi(b) - \varphi(a)} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(x))\, d\varphi(x) - f\left(\frac{\varphi(a) + \varphi(b)}{2} \right) \right| \\
\leq\;& \frac{(g(b) - g(a))}{4(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left[\left(\frac{|f'(\varphi(a))|^q + 3\,|f'(\varphi(b))|^q}{8} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\left. + \left(\frac{3\,|f'(\varphi(a))|^q + |f'(\varphi(b))|^q}{8} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \qquad (19) \\
\leq\;& \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left(\frac{1}{8} \right)^{\frac{1}{q}} \left(|f'(\varphi(a))| + |f'(\varphi(b))| \right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Lemma 4.1.1, Hölder ve $|f'|^q$ fonksiyonunun φ-konveksliğinden,

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{\varphi(b) - \varphi(a)} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(x))\, d\varphi(x) - f\left(\frac{\varphi(a) + \varphi(b)}{2} \right) \right| \\
\leq\;& \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{2} \left\{ \left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |f'(t\varphi(a) + (1-t)\varphi(b))|^q\, dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\left. + \left(\int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-t)^p\, dt \right) \left(\int_{\frac{1}{2}}^{1} |f'(t\varphi(a) + (1-t)\varphi(b))|^q\, dt \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{(\varphi(b)-\varphi(a))}{4(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left\{\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left[t\left|f'(\varphi(a))\right|^q+(1-t)\left|f'(\varphi(b))\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\quad \left.+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left[t\left|f'(\varphi(a))\right|^q+(1-t)\left|f'(b)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\} \\
&\leq \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{4(p+1)^{\frac{1}{p}}} \\
&\quad \times\left\{\left(\frac{\left|f'(\varphi(a))\right|^q+3\left|f'(\varphi(b))\right|^q}{8}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{3\left|f'(\varphi(a))\right|^q+\left|f'(\varphi(b))\right|^q}{8}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}
\end{aligned}
$$

eşitsizliğini elde ederiz. $a_1 = |f'(a)|^q$, $b_1 = 3|f'(b)|^q$, $a_2 = 3|f'(a)|^q$, $b_2 = |f'(b)|^q$ olsun. Bu durumda, $q > 1$ için $0 < \frac{1}{q} < 1$ dır. O halde

$$
\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^s \leq \sum_{k=1}^{n}a_k^s+\sum_{k=1}^{n}b_k^s
$$

eşitsizliği kullanılırsa, $(0 \leq s \leq 1)$, $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$, $b_1, b_2, ..., b_n \geq 0$, için

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(x))\,d\varphi(x)-f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)\right| \\
&\leq \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{4(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad \times\left[\left(\left|f'(\varphi(a))\right|+3^{\frac{1}{q}}\left|f'(\varphi(b))\right|\right)+\left(3^{\frac{1}{q}}\left|f'(\varphi(a))\right|+\left|f'(\varphi(b))\right|\right)\right] \\
&= \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{4(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\left(1+3^{\frac{1}{q}}\right)\left(\left|f'(\varphi(a))\right|+\left|f'(\varphi(b))\right|\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$\leq \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\left|f'(\varphi(a))\right|+\left|f'(\varphi(b))\right|\right)$$

eşitsizliğini elde ederiz ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.8. $a, b \in J$ olacak şekilde $a < b$ ve $\varphi : J \to \mathbb{R}$ sürekli, artan fonksiyon olsun. $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I°(I aralığı) üzerinde diferansiyellenebilir olsun. $\varphi(a), \varphi(b) \in I$ için $f' \in L_1[\varphi(a), \varphi(b)]$ ise aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
&\frac{f(\varphi(a))+f(\varphi(b))}{2}-\frac{1}{(\varphi(b)-\varphi(a))}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(x))\,d\varphi(x) \qquad (20)\\
=\;&\frac{(\varphi(b)-\varphi(a))}{2}\int_0^1 (2t-1)\left[f'(t\varphi(b)+(1-t)\varphi(a))\right]dt.
\end{aligned}$$

İspat. Kısmi integrasyon formülü yardımıyla,

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 (2t-1)\left[f'(t\varphi(b)+(1-t)\varphi(a))\right]dt\\
&= (2t-1)\frac{f(t\varphi(b)+(1-t)\varphi(a))}{(\varphi(b)-\varphi(a))}\Bigg|_0^1\\
&\quad -\frac{2}{(\varphi(b)-\varphi(a))}\int_0^1 f(t\varphi(b)+(1-t)\varphi(a))\,dt\\
&= \frac{f(\varphi(b))+f(\varphi(a))}{(\varphi(b)-\varphi(a))}-\frac{2}{(\varphi(b)-\varphi(a))}\int_0^1 f(t\varphi(b)+(1-t)\varphi(a))\,dt
\end{aligned}$$

eşitsizliği belirtilebilir. $t \in [0,1]$ için $\varphi(x) = t\varphi(b)+(1-t)\varphi(a)$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$I=\frac{f\left(\varphi(b)\right)+f\left(\varphi(a)\right)}{\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)}-\frac{2}{\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)^{2}}\int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}f\left(\varphi(x)\right)d\varphi(x) \tag{21}$$

olur. (21) in her iki tarafını $\dfrac{\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)}{2}$ ile çarparak

$$\frac{\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)}{2}I \quad = \quad \frac{f\left(\varphi(b)\right)+f\left(\varphi(a)\right)}{2}-\frac{1}{\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)}\int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}f\left(\varphi(x)\right)d\varphi(x)$$

eşitliğini elde ederiz.

Teorem 4.1.9. $a,b\in J$ olacak şekilde $a<b$ ve $\varphi:J\to\mathbb{R}$ sürekli, artan fonksiyon olsun. $f:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $I^{\circ}(I$ aralığı) üzerinde diferansiyellenebilir olsun. $|f'|$ fonksiyonu $[\varphi(a),\varphi(b)]$ üzerinde φ- konveks ise:

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f\left(\varphi(a)\right)+f\left(\varphi(b)\right)}{2}-\frac{1}{\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)}\int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}f\left(\varphi(x)\right)d\varphi(x)\right| \\ \leq\ & \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{4}\left(\frac{|f'(\varphi(b))|+|f'(\varphi(a))|}{2}\right)\end{aligned} \tag{22}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Lemma 4.1.1 ve $|f'|$ fonksiyonunun $\varphi-$konveksliklğinden,

$$
\begin{aligned}
& \left| \frac{f(\varphi(a)) + f(\varphi(b))}{2} - \frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(x))\, d\varphi(x) \right| \\
\leq \; & \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2} \int_0^1 |2t-1| \left| f'(t\varphi(b) + (1-t)\varphi(a)) \right| dt \\
\leq \; & \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2} \int_0^1 |2t-1| \left[t\left| f'(\varphi(b)) \right| + (1-t)\left| f'(\varphi(a)) \right| \right] dt \\
= \; & \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2} \left[\frac{|f'(\varphi(b))| + |f'(\varphi(a))|}{4} \right]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Uyarı 4.1.1 Her $x \in [a,b]$ için $\varphi(x) = x$ alınırsa Dragomir ve Agarwal'ın (1999) da ispatladığı Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafını sağladığı elde edilir.

Teorem 4.1.10. $a, b \in J$ olacak şekilde $a < b$ ve $\varphi : J \to \mathbb{R}$ sürekli, artan fonksiyon olsun. $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $I^{\circ}(I$ aralığı) üzerinde diferansiyellenebilir, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $q > 1$ olacak şekilde $|f'|^q$ fonksiyonu $[\varphi(a), \varphi(b)]$ üzerinde φ- konveks ise :

$$
\begin{aligned}
& \left| \frac{f(\varphi(a)) + f(\varphi(b))}{2} - \frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(x))\, d\varphi(x) \right| \\
\leq \; & \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|f'(\varphi(b))|^q + |f'(\varphi(a))|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Lemma 4.1.1 ve Hölder eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(\varphi(a))+f(\varphi(b))}{2}-\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(x))\,d\varphi(x)\right| \\
\leq\ & \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2}\left(\int\limits_0^1 |2t-1|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\times\left(\int\limits_0^1 |f'(t\varphi(b)+(1-t)\varphi(a))|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir. $|f'|^q$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde $\varphi-$konveks olduğundan,

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(\varphi(a))+f(\varphi(b))}{2}-\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(x))\,d\varphi(x)\right| \\
\leq\ & \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_0^1 \left[t\,|f'(\varphi(b))|^q+(1-t)\,|f'(\varphi(a))|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

5 SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Son bölümde φ-konveks fonksiyonlar kullanılarak bir çok yeni integral eşitsizlikleri elde edildi. Benzer düşünceler altında literatürde verilmiş olan diğer bir çok konveks fonksiyonlar içinde yeni sonuçlar elde edilebilir. Ayrıca elde etmiş olduğumuz bu sonuçlar kesirli integraller yardımıyla daha da genelleştirilebilir. Dolayısıyla bunları açık problemler olarak bırakıyoruz.

6 KAYNAKLAR

Azpeitia, A.G., Convex functions and the Hadamard inequality, *Rev. Colombiana Mat.*, (**1994**) 28, 7-12.

Beckenbach, E.F. and R. Bellman, Inequalities, *Springer-Verlag,* Berlin-Newyork, (**1970**).

Bakula M. K. and Pečarić J., Note on some Hadamard-type inequalities, *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, vol. 5, no. 3, article 74 **(2004)**.

Bayraktar M., *Fonksiyonel Analiz*, Gazi Üniversitesi (**1998**).

Bector C. R. and Singh C., *B*- Vex Functions, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 71, **(1991)** pp. 237-253.

Cristescu G. and Lupşa L., Non-connected convexities and applications, *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht / Boston / London, **(2002)**.

Cristescu G., Hadamard type inequalities for φ - convex functions, Annals of the University of Oradea, Fascicle of Management and Technological Engineering, CD-Rom Edition, III(XIII) **(2004)**.

Dönmez A., *Reel analiz*, Seçkin Yayıncılık, Ankara **(2001)**.

Dragomir S. S., Pečarić J. and Persson L. E., Some inequalities of Hadamard type*, Soochow J. Math.* 21, **(1995)** 335-241.

Dragomir S. S. and Pearce C. E. M., Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications, *RGMIA Monographs*, Victoria University **(2000)**.

Dragomir S. S. and Agarwal R.P., Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula, *Appl. Math.* lett., 11(5), **(1998)** 91-95.

Godunova, E.K. and V.I. Levin, On an inequality of Maroni (in Russian), *Mat. Zametki 2* (1967), 221-224.

Godunova, E.K. and V.I. Levin, Neravenstva dlja funkcii shrokogo klassa soderzhashchego vypuklye, monotonnye i nekotorye drugie vidy funkcii, Vychisl. Mat. Fiz., Mezvuzov. Sb. Nauc. Trudov, MGPL, Moskow, 1985, pp. 138-142.

Hanson M. A. and Mond B., Convex Transformable Programming Problems and Invexity, *Journal of Information and Optimization Science*, Vol. 8, **(1987)** pp. 201-207.

Hardy, G.H., J.E. Littlewood and G. Polya, Inequalities, *Cambridge Univ. Press*, 1934.

Kaul,R. N. and Kaur, S., *Optimality Criteria in Nonlinear Programming Involving Nonconvex Functions, Journal of Mathemaical Analysis and Applications,* Vol. 105, pp. 104-112. **(1985)**

Kırmacı U.S., Inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to midpoint formula, *Appl. Math. Comp.,* 147, **(2004)** 137-146.

Mitrinovic, D.S., Analytic Inequalities, *Springer-Verlag*, Berlin-New York, (**1970**).

Mitrinovic, D.S., J.E. Pecaric and A.M. Fink, Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (**1991**).

Ozdemir M.E., Set E. and Alomari M.W., Integral inequalities via several kinds of convexity, *Creat. Math. Inform.*, 20, No.1, **(2011)** 62 - 73.

Ozdemir M.E., Avcı M. and Kavurmacı H., Hermite–Hadamard-type inequalities via (α, m)-convexity, *Comput. Math.Appl.*, **(2011)** 61, 2614–2620.

Pearce C.E.M. and Pečarić J., Inequalities for differentiable mappings with application to special means and quadrature formulae, *Appl. Math.* Lett., 13(2), **(2000)** 51–55.

Roberts A.W. and Varberg D.E., Convex Functions, Academic Press, **(1974)** pp:1-299.

Pečarić J.E., Proschan F. and Tong Y.L., Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications, *Academic Press*, Boston **(1992)**.

Pečarić J.E. , Proschan F. and Tong Y.L., Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications, *Academic Press, Boston* **(1992)**.

Sarikaya M. Z., On Hermite Hadamard-type inequalities for strongly φ-convex functions*, Southeast Asian Bull. Math.*, in press **(2013)**.

Sarikaya M. Z., On Hermite Hadamard-type inequalities for φ_h-convex functions, *Kochi J. of Math.*, *(***2014)** 9, 83-90.

Sarikaya M. Z., On strongly φ_h-convex functions in inner product spaces, *Arabian Journal of Mathematics,***(2013)** 2:295–302, DOI: 10.1007/s40065-013-0069-y.

Sarikaya M. Z. and Yaldiz H., On the Hadamard's type inequalities for L-Lipschitzian mapping, *Konuralp Journal of Mathematics,***(2013)** 1(2), pp:33-40.

Set E., Özdemir M. E., and Dragomir S. S., On Hadamard-Type inequalities involving several kinds of convexity, *Journal of Inequalities and Applications*, Article ID 286845, **(2010)** 12 pages.

Youness E. A., E - Convex Sets, E - Convex Functions and E - Convex Programming*, Journal of Optimization Theory and Applications*, **(1999)** 102, 2, 439-450.

7 EKLER

EK-1. YAYIN BİLGİSİ

1. Dördüncü bölümde ele alınan φ-konveks fonksiyonlar ile ilgili çalışma "On some generalized integral inequalities for φ-convex functions " başlığı altında Studia Universitatis Babes-Bolyai, Seria Mathematica dergide yayın için kabul edilmiştir.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	:BÜYÜKEKEN MELTEM
Uyruğu	:T.C
Doğum tarihi ve yeri	:29.03.1988 / KARAMAN
Telefon	:05393296428
E-posta	:meltembuyukeken@gmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek Lisans	Düzce Üniversitesi / Matematik Bölümü	2014
Lisans	Dumlupınar Üniversitesi / Matematik Bölümü	2012
Lise	Karaman Lisesi	2005