T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

# k-KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AYSEL KARACA

MAYIS 2014

DÜZCE

## KABUL VE ONAY BELGESİ

Aysel KARACA tarafından hazırlanan k-Kesirli İntegraller İçin Genelleştirilmiş İntegral Eşitsizlikleri isimli lisansüstü tez çalışması, Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 26.05.2014 tarih ve 2014/517 sayılı kararı ile oluşturulan jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans olarak kabul edilmiştir.

Üye
(Tez Danışmanı)
Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Düzce Üniversitesi

Üye
Doç. Dr. Nesip AKTAN
Düzce Üniversitesi

Üye
Yrd. Doç. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Tezin Savunulduğu Tarih : 30.05.2014

## ONAY

Bu tez ile Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Aysel KARACA'nın Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans derecesini almasını onamıştır.

**Prof. Dr. Haldun MÜDERRİSOĞLU**
**Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü**

# BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

30/05/2014

AYSEL KARACA

# TEŞEKKÜR

Tüm görüşlerini ve bilgisini herkes ile paylaşmaktan sakınmayan, bilgi ve deneyimleriyle sonuca ulaşmamda yol gösteren, herkese eşit tavrı ve işine tutku ile bağlı olan, hayatın her karesinde bana bir baba gibi sahip çıkan, kişiliği, tavırları ve edindiğim tecrübelerinden dolayı kendisine minnettar olduğum sayın hocam Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA' ya çok teşekkür ederim.

Çalışmalarım boyunca yardımlarını esirgemeyen arkadaşım Hatice YALDIZ'a çok teşekkür ederim.

Tez dönemim boyunca moralimi en üst düzeyde tutan ve kendilerinden her fırsatta güç aldığım aileme ve kardeşime müteşekkirim.

**30 Mayıs 2014** **Aysel KARACA**

**İÇİNDEKİLER** **Sayfa**

# ÖZET

## k-KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER ÜZERİNE

Aysel Karaca
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Doç. Dr. Mehmet Zeki Sarıkaya
Mayıs 2014, 53 sayfa

Bu tezde Riemann-Liouville kesirli integralin genelleşmesi olan k-Riemann-Liouville kesirli integral olarak adlandırılan kesirli integrali verilerek bazı özellikleri verildi. Daha sonra, k-Riemann-Liouville kesirli integrali kullanılarak bazı yeni integral eşitsizlikleri elde edildi.

**Anahtar Sözcükler:** Hermite-Hadamard Eşitsizliği, Kesirli İntegraller ve Kesirli Türevler, Konveks Fonksiyonlar.

# ABSTRACT

**ON SOME GENERALIZED INTEGRAL INEQUALITIES FOR k-FRACTIONAL INTEGRALS**

Aysel Karaca
Duzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Mehmet Zeki Sarıkaya
May 2014, 53 pages

In this thesis, we presents a new fractional integration is called k-Riemann-Liouville fractional integral, which generalizes the Riemann-Liouville. Then we give some properties of the k-Riemann-Liouville fractional integral. Later, using the k-Riemann-Liouville fractional integral, we establish some new integral inequalities.

**Keywords:** Convex Functions, Fractional Integrals and Fractional Derivatives, Hermite-Hadamard's Inequality.

# EXTENDED ABSTRACT

## ON SOME GENERALIZED INTEGRAL INEQUALITIES FOR k-FRACTIONAL INTEGRALS

Aysel Karaca
Düzce University
Graduade School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Mehmet Zeki Sarıkaya
May 2014, 53 pages

**1. INTRODUCTION:**

Inequalities have proven to be one of the most important and far-reaching tools for the development of many branches of mathematics. There are many types of inequalities of importance. Integral and finite difference inequalities with explicit estimates are powerful mathematical appartus which aid the study of the qualitative behavior of solutions of various types of differential, integral and finite difference equations. Because of its usefulness and importance, such inequalities have attracted much attention and a great number of papers, surveys and monographs have appeared in the literature.

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, of how the concepts of fractional integral and fractional derivative is given. In the second chapter, all the necessary definitions and basic theorems for this study have been given. The third section, the derivation of the fractional integrals and fractional derivatives and methods of solution on this issue are given. In the fourth chapter, the implementation of the Hermite-Hadamard-type inequalities for k-fractional integrals are obtained.

**2. MATERIAL AND METHODS:**

It is known that certain problems of modern physics and technology can be effectively described in terms of nonlocal problems for partial differential equations. These nonlocal conditions arise mainly when the data on the boundary cannot be measured directly.

## 3. RESULTS AND DISCUSSIONS:

Over the past two decades or so, the field of inequalities has undergone explosive growth. Concerning numerous analytic inequalities, in particular a great many research papers have been written related to the inequalities associated to the names of Cebysev, Grüss, Ostrowski, Hermite-Hadamard and Jensen. A number of surveys and monographs published during the past few years described much of the progress.

## 4. CONCLUSION AND OUTLOOK:

It is remarkable that Sarikaya et al. (2013) initial give some interesting integral inequalities involving k-Riemann-Liouville fractional integrals. Later, using the k-Riemann-Liouville fractional integral, we establish some new integral inequalities.

# 1 GİRİŞ

Kesirli türev ve kesirli integral kavramları ilk olarak Liouville tarafından duyuruldu. Kesirli türev ve kesirli integral kavramı türev ve integrallerin sadece tamsayılar için varmıdır sorusundan yola çıkılarak ortaya çıktı. Euler kesirli türevi ele aldı. 17. yüzyıldan itibaren Leibniz, Euler, Lagrange, Abel, Liouville ve diğer bir çok matematikçinin, kesirli mertebe için diferansiyel ve integrasyonun genelleştirilmesine dayanan öncü çalışmalarıyla gelişmeye başlanmıştır. Keyfi mertebeli diferansiyel ve integrasyon kavramları, tamsayı mertebeli türev ve $n$-katlı integralleri birleştiren ve genelleştiren kavramlardır.

Uygulamalı alanlarda kesirli türev ve kesirli integral kavramları hakkında birçok çalışma olmasına rağmen herhangi bir monografi yayınlanmamıştır. Bunun üzerine [S.G. Samko ile A.A. Kilbas ve O.I. Marichev](1993) tarafından bu boşluk doldurulmuştur. Kesirli türev ve kesirli integral kavramları ile geniş kapsamlı bir monografi yayınlanmıştır.

Kesirli diferansiyel teorisi çeşitli madde ve işlemlerin kalıtsal özelliklerinin tanımlanmasında kullanılabilecek çok iyi bir araçtır. Bu ise tamsayı mertebeli türevlerle karşılaştırıldığı zaman, kesirli türevler için önemli bir avantajdır. Kesirli türevlerin bu avantajı nesnelerin mekanik ve elektriksel özelliklerinin matematiksel modellemelerinde, akışkanlar teorisi, elektrik devreleri, elektro-analitik kimya gibi diğer bir çok alanda kullanılmaktadır.

Dördüncü bölümde ise ele aldığımız konveks fonksiyonların tarihi çok eskiye dayanmakla birlikte başlangıcı 19. yüzyılın sonları olarak gösterilebilir. 1893'te Hadamard'ın çalışmasında açıkça belirtilmese de bu türden fonksiyonların temellerinden bahsedilmektedir. Bu tarihten sonra literatürde konveks fonksiyonları ima eden sonuçlara rastlanılmasına rağmen konveks fonksiyonların ilk kez sistemli olarak 1905 ve 1906 yıllarında

J.L.W.V. Jensen tarafından çalışıldığı ve Jensen'ın bu öncü çalışmalarından itibaren konveks fonksiyonlar teorisinin hızlı bir gelişme gösterdiği kabul edilmektedir. Beckenbach ve Bellman (1961) ve Mitrinovic (1970) gibi pek çok araştırmacı, konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler konusunu kitaplarında ele almışlardır. Bu çalışmaların birçoğunu integral eşitsizlikleri oluşturmaktadır.

Bu tezde amacımız Rimeann Liouville kesirli integralin bir genelleşmesi olan $k$-Riemann Liouville kesirli ineralin bazı özellikleri verilerek bu kesirli integral için bazı yeni integral eşitsizlikleri elde edeceğiz.

# 2 KURAMSAL KAVRAMLAR

## 2.1 GENEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmamız için gerekli olan tanım, teorem, bazı eşitlikler ve temel özellikler verilecektir. Gerekli görülenler için ispatlar yapılarak birer örnek verilecektir.

**Tanım 2.1.1** Lineer uzaydan reel(kompleks) uzaya olan dönüşümlere fonksiyonel denir.

**Tanım 2.1.2** Fonksiyonlar cümlesini fonksiyonlar cümlesine dönüştüren dönüşüme operatör denir.

**Tanım 2.1.3 (Gamma Fonksiyonu).** Gamma fonksiyonu, $n > 0$ için

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

ile tanımlanır. Bu integral $n > 0$ için yakınsaktır. Gamma fonksiyonun bazı önemli özelliklerini şöyle sıralıyabiliriz.

**i.**$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$

**ii.** $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

**iii.** $\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x} dx = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \quad 0 < p < 1$

**iv.** $2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\Gamma(2n)$.

**Tanım 2.1.4 (Konveks Fonksiyon)** $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in [a,b]$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa bu $f$ fonksiyona konveks fonksiyon denir. Eşitsizlikte "$\geq$" olması halinde de $f$ fonksiyona konkav fonksiyon denir. Yukardaki eşitsizlikte $t = \frac{1}{2}$ alınırsa

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

olur bu tip eşitsizlikleri sağlayan fonksiyonlara da $J$-konveks fonksiyon denir.

**Konveks Fonksiyonların Temel Özellikleri:**

**i.** k tane fonksiyon $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ye konveks fonksiyonlar olsun. Bu takdirde;

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} a_j f_j(x), a_j > 0; (j = 1, 2, 3, ..., k)$$

fonksiyonuda konvekstir.

**ii.** $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konkav ve $S = \{x : g(x) > 0\}$ olsun. $f : S \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{g(x)}$ olmak üzere $f$, $S'$ de konvekstir.

**iii.** $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ azalmayan ve konveks fonksiyon ayrıca $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveks olsun. Bu takdirde; $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = (g \circ h)(x)$ olarak tanımlanan $f$ bileşke fonksiyonu da konvekstir.

**iv.** $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ konveks ve $h$, $h(x) = Ax + B$ formunda $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveks olmak üzere (Burada A uygun matristir.)

$$f(x) = g(h(x))$$

fonksiyonu konveks fonksiyondur.

**vi.** $f$ ve $g$ fonksiyonları $J$-konveks ise $f(x) + g(x)$ de $J$-konvekstir.

**vii.** $f$, $\overline{I'}$ 'de $J$-konveks ve $g$, $\overline{I''}$ de $J$-konveks ise bu takdirde $f(x) g(x)$ de $\overline{I} = \overline{I'} \cap \overline{I''}$ de $J$-konvekstir.

**Tanım 2.1.5** $f : L_1[a, b]$ olsun. Üst ve alt $J_{a+}^{\alpha} f$ ve $J_{b-}^{\alpha} f$ Riemann-Liouville integralleri sırasıyla $\alpha > 0$ ve $a \geq 0$ için,

$$J_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha - 1} f(t) dt, \quad x > a$$

ve

$$J_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t - x)^{\alpha - 1} f(t) dt, \quad x < b$$

olarak tanımlanır. Burada $\Gamma(\alpha)$ bir Gamma fonksiyonu ve $J_{a+}^{0} f(x) = J_{b-}^{0} f(x) = f(x)$ dır.

**Tanım 2.1.6 (Beta Fonksiyonu):** $m, n > 0$ için

$$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1 - x)^{n-1} dx$$

biçiminde tanımlanan $\beta$ fonksiyonuna *Beta fonksiyonu* denir.

**Tanım 2.1.7 ($k$-Gamma ve $k$-Beta Fonksiyonu):** $k$-gamma fonksiyonu

$$\Gamma_k(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!k^n (nk)^{\frac{x}{k}-1}}{(x)_{n,k}}$$

olarak tanımlanır. Burada, $(x)_{n,k} = \Pi_{j=0}^{n-1}(x+jk), k > 0$ Pochhammer $k$-symbol fonksiyonudur. $e^{-\frac{t^k}{k}}$ üstel fonksiyon dönüşümü için, $k$-gamma fonksiyonunu

$$\Gamma_k(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-\frac{t^k}{k}} dt$$

olarak tanımlanır.Açıkca,

$$\Gamma(x) = \lim_{k\to 1} \Gamma_k(x), \Gamma_k(x) = k^{\frac{x}{k}-1}\Gamma\left(\frac{x}{k}\right) \text{ ve } \Gamma_k(x+k) = x\Gamma_k(x)$$

dır.

$k$-beta fonksiyonunu

$$B_k(x,y) = \frac{1}{k}\int_0^1 t^{\frac{x}{k}-1}(1-t)^{\frac{x}{k}-1} dt$$

şeklinde tanımlanır ve böylece $k$-gamma fonksiyonu ile ilişkisi

$$B_k(x,y) = \frac{1}{k}B\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right) \text{ ve } B_k(x,y) = \frac{\Gamma_k(x)\Gamma_k(y)}{\Gamma_k(x+y)}$$

olarak ifade edilir.

**Tanım 2.1.8** $V$ boş olmayan bir küme ve $K$ bir cisim olsun. Aşağıdaki önermeler doğru ise, $V$ kümesi $K$ cismi üstünde bir *vektör uzayı*dır, denir.

($V1$) $V$ kümesinde $+$ ile gösterilen ve adına *toplam*a denilen bir işlem tanımlanmıştır ve $(V,+)$ değişmeli gruptur.

(1) Her $u,v \in V$ için, $u+v$ tanımlıdır ve $u+v \in V$ dir. Sözle ifade ettiğimizde, $V$ kümesi toplama işlemine göre kapalıdır.

(2) Her $u,v,w \in V$ için, $(u+v)+w = u+(v+w)$ dir. Sözle ifade ettiğimizde, $V$ kümesinde toplama işleminin birleşme özelliği vardır.

(3) $[\exists 0 \in V, (\forall u \in V$ için, $u + 0 = u$ ve $0 + u = u)]$ dır. Sözle ifade ettiğimizde, $V$ kümesinde toplama işleminin etkisiz (*birim*) elemanı vardır. Bu etkisiz elemanı 0 simgesi ile gösterdik.

(4) Her $u \in V$ için, $V$ kümesinde $-u \in$ ile gösterilen ve

$$u + (-u) = 0 \text{ ve } (-u) + u = 0$$

eşitliklerini sağlayan bir $-u$ elemanı vardır. Sözle ifade ettiğimizde, $V$ kümesindeki her bir $u$ elemanının toplamaya göre tersi vardır. $u$ nun tersi $-u$ ile gösterilmiştir.

(5) Her $u, v \in V$ için, $u + v = v + u$ tir. Sözle ifade ettiğimizde, $V$ kümesinde toplama işleminin değişme özelliği vardır.

$(V2)$ $K \times V \to V$ $(a, u) \to au$ biçiminde, adına *skalerle* çarpma işlemi denilen bir fonksiyon tanımlanmıştır ve bu fonksiyon aşağıdaki önermeleri doğrular:

$(a)$ Her $a \in K$, her $u.v \in V$ için, $a(u + v) = au + av$.

$(b)$ Her $a, b \in K$, her $u \in V$ için, $(a + b)u = au + bu$.

$(c)$ Her $a, b \in K$, her $u \in V$ için, $(ab)u = a(bu)$.

$(d)$ $K$ nı çarpmaya göre birim elemanı 1 olduğuna göre, $V$ nin her elemanı için, $1u = u$ dır.

**Tanım 2.1.9** $V$, reel sayı cismi üstünde vektör uzayı ise, bu vektör uzayına *reel vektör uzayı* denir. $V$, karmaşık sayı cismi üstünde vektör uzayı ise bu durumda $V$ ye *kompleks vektör uzayı* denir.

**Tanım 2.1.10** $\Omega_1 = [a, b], \Omega_2 = [c, d]$ $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $-\infty \leq c < d \leq \infty$ ve $f(x, y)$, $\Omega_1 \times \Omega_2$ üzerinde tanımlı olsun. Bu durumda,

$$\int_a^b \left( \int_a^x f(x, y)\, dy \right) dx = \int_a^b \left( \int_y^b f(x, y)\, dx \right) dy$$

şeklindeki eşitliğe *Dirichlet formülü* denir.

**Tanım 2.1.11 (Mutlak Süreklilik)** $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $(x_k, y_k)$ sonlu bir aralık olsun. Bu durumda, $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$

vardır öyleki,

$$\sum_k |y_k - x_k| < \delta \Rightarrow \sum_k |f(y_k) - f(x_k)| < \varepsilon$$

dır. $[a,b]$ üzerindemutlak süreklifonksiyonların sınıfı $AC^n[a,b]$ ile gösterilir.

**Tanım 2.1.12** $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

şeklindeki eşitsizliğe üçgen eşitsizliği denir.

**Tanım 2.1.13 (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu)** $f$, $[a,b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left| \int_b^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx, \qquad (a < b)$$

eşitsizliği geçerlidir.

**Tanım 2.1.14 (Hölder Eşitsizliği)** $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ ve $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$ reel veya kompleks sayıların iki $n$-lisi olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

olmak üzere

**a.** $p > 1$ ise,

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \left( \sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

**b.** $p < 0$ veya $q < 0$ ise,

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \left( \sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Mitrinović 1970).

**Tanım 2.1.15 (İntegraller için Hölder Eşitsizliği)** $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. $f$ ve $g$, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)\, g(x)|\, dx \leq \left( \int_a^b |f(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_a^b |g(x)|^q\, dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir. (Mitrinović *et al.*1993).

**Tanım 2.1.16** $E$ ölçülebilir bir küme olmak üzere $f$ bu küme üzerinde tanımlı ve reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda keyfi $K$ sayısı için $E\{x : f(x) > k\}$ kümesi ölçülebilirse $f$ fonksiyonuna $\ddot{o}l\c{c}\ddot{u}lebilir\ fonksiyon$ denir.

**Teorem 2.1.1 (Lebesque integralinin varlık teoremi)** Sonlu ölçümlü $E$ kümesi üzerinde $f$ fonksiyonu sınırlı ve ölçülebilir ise $f$ fonksiyonunun $Lebesque$ integrali vardır.

**Tanım 2.1.17** $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $\forall x \in I$ için $|f(x)| \leq K$ olacak şekilde bir $K$ pozitif reel sayısı varsa $f$ fonksiyonuna $s\imath n\imath rl\imath\ fonksiyon$ denir.

**Tanım 2.1.18** $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$L^p = L_p = \left\{ f : \left( \int_E |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}, \ \|f\|_\infty = \left( \int_E |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

normuna göre bir $Banach$ uzayıdır.

**Teorem 2.1.2** $f$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise

**a.** $f$, $(a, b)$ aralığında süreklidir ve

**b.** $f$, $[a, b]$ aralığında sınırlıdır (Azpeitia 1994).

**Teorem 2.1.3** $f$ fonksiyonunun $I$ aralığında ikinci türevi varsa, $f$ fonksiyonunun bu aralık üzerinde konveks olması için gerek ve yeter şart $x \in I$ için

$$f''(x) \geq 0$$

olmasıdır (Mitrinović 1970).

**Teorem 2.1.4 (Grüss İntegral Eşitsizliği)** $f$ ve $g$, $[a, b]$ aralığı üzerinde integrallenebilir fonksiyonlar olsun ve tüm $x \in [a, b]$ için

$$\varphi \leq f(x) \leq \phi, \gamma \leq g(x) \leq \Gamma \tag{1}$$

koşulu sağlamak üzere aşağıdaki eşitsizlik vardır:

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx\right|\leq\frac{1}{4}\left(\phi-\varphi\right)\left(\Gamma-\gamma\right).$$

**Teorem 2.1.5** $f$ ve $g$, $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir fonksiyonlar olarak tanımlansın. Her $x\in[a,b]$ için (1) sağlanıyorsa $\varphi,\phi,\gamma,\Gamma$ reel sabitleri verildiğinde ve $h:[a,b]\longrightarrow[0,\infty)$ olmak üzere $\int_a^b h(x)dx>0$ integrallenebilir olsun. Bu durumda

$$\left|\int_a^b h(x)dx.\int_a^b f(x)g(x)h(x)dx-\int_a^b f(x)h(x)dx.\int_a^b g(x)h(x)dx\right| \quad (2)$$

$$\leq \frac{1}{4}\left(\phi-\varphi\right)\left(\Gamma-\gamma\right)\left(\int_a^b h(x)dx\right)^2$$

dır. Bu eşitsizlik için en iyi sabit $\frac{1}{4}$ dir.

**İspat.** İlk olarak

$$\frac{1}{\int_a^b h(x)dx}\int_a^b f(x)g(x)h(x)dx$$
$$-\frac{1}{\int_a^b h(x)dx}\int_a^b f(x)h(x)dx.\frac{1}{\int_a^b h(x)dx}\int_a^b g(x)h(x)dx \quad (3)$$
$$=\frac{1}{2\left(\int_a^b h(x)dx\right)^2}\int_a^b\int_a^b\left(f(x)-f\left(y\right)\right)\left(g\left(x\right)-g\left(y\right)\right)h\left(x\right)h\left(y\right)dxdy$$

olarak yazılır.Burada Cauchy-Buniakowski-Schwarz integral eşitsizliği uygulanırsa,

$$
\left[\frac{1}{2\left(\int_a^b h(x)dx\right)^2}\int_a^b\int_a^b \left(f(x)-f\left(y\right)\right)\left(g\left(x\right)-g\left(y\right)\right)h\left(x\right)h\left(y\right)dxdy\right]^2 \tag{4}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2\left(\int_a^b h(x)dx\right)^2}\int_a^b\int_a^b \left(f(x)-f\left(y\right)\right)^2 h\left(x\right)h\left(y\right)dxdy \\
&\quad\times\frac{1}{2\left(\int_a^b h(x)dx\right)^2}\int_a^b\int_a^b \left(g\left(x\right)-g\left(y\right)\right)^2 h\left(x\right)h\left(y\right)dxdy \\
&= \left[\frac{1}{\int_a^b h(x)dx}\int_a^b f^2\left(x\right)h\left(x\right)dx-\left(\frac{1}{\int_a^b h(x)dx}\int_a^b f\left(x\right)h\left(x\right)dx\right)^2\right] \\
&\quad\times\left[\frac{1}{\int_a^b h(x)dx}\int_a^b g^2\left(x\right)h\left(x\right)dx-\left(\frac{1}{\int_a^b h(x)dx}\int_a^b f\left(x\right)h\left(x\right)dx\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

bulunur. Buradan da

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\int_a^b h(x)dx}\int_a^b f^2\left(x\right)h\left(x\right)dx-\left(\frac{1}{\int_a^b h(x)dx}\int_a^b f\left(x\right)h\left(x\right)dx\right)^2 \\
&= \left(\phi-\frac{1}{\int_a^b h(x)dx}\int_a^b f\left(x\right)h\left(x\right)dx\right)\left(\frac{1}{\int_a^b h(x)dx}\int_a^b f\left(x\right)h\left(x\right)dx-\varphi\right) \\
&\quad-\frac{1}{\int_a^b h(x)dx}\int_a^b \left(\phi-f\left(x\right)\right)\left(f\left(x\right)-\varphi\right)h\left(x\right)dx
\end{aligned}
$$

olup her $x\in[a,b]$ için $\left(\phi-f\left(x\right)\right)\left(f\left(x\right)-\varphi\right)\geq 0$ olarak alınırsa,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\int_a^b h(x)dx}\int_a^b f^2\left(x\right)h\left(x\right)dx-\left(\frac{1}{\int_a^b h(x)dx}\int_a^b f\left(x\right)h\left(x\right)dx\right)^2 \qquad (5)\\
&\leq \left(\phi-\frac{1}{\int_a^b h(x)dx}\int_a^b f\left(x\right)h\left(x\right)dx\right)\left(\frac{1}{\int_a^b h(x)dx}\int_a^b f\left(x\right)h\left(x\right)dx-\varphi\right)
\end{aligned}
$$

yazılır. Benzer şekilde,

$$\frac{1}{\int_a^b h(x)dx}\int_a^b g^2(x)\,h(x)\,dx-\left(\frac{1}{\int_a^b h(x)dx}\int_a^b g(x)\,h(x)\,dx\right)^2 \tag{6}$$
$$\leq \left(\Gamma-\frac{1}{\int_a^b h(x)dx}\int_a^b g(x)\,h(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{\int_a^b h(x)dx}\int_a^b g(x)\,h(x)\,dx-\gamma\right)$$

dır. Şimdi, (3), (4), (5) ve (6) eşitsizlikleri yardımıyla

$$\left|\frac{1}{\int_a^b h(x)dx}\int_a^b f(x)\,g(x)\,h(x)\,dx\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\int_a^b h(x)dx}\int_a^b f(x)\,h(x)\,dx.\frac{1}{\int_a^b h(x)dx}\int_a^b g(x)\,h(x)\,dx\right| \tag{7}$$
$$\leq \left(\phi-\frac{1}{\int_a^b h(x)dx}\int_a^b f(x)\,h(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{\int_a^b h(x)dx}\int_a^b f(x)\,h(x)\,dx-\varphi\right)$$
$$\times\left(\Gamma-\frac{1}{\int_a^b h(x)dx}\int_a^b g(x)\,h(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{\int_a^b h(x)dx}\int_a^b g(x)\,h(x)\,dx-\gamma\right)$$

yazılır. Buradan da reel sayılar için

$$4pq\leq(p+q)^2\,,p,q\in R$$

temel eşitsizliği kullanarak:

$$4\left(\phi-\frac{1}{\int_a^b h(x)dx}\int_a^b f(x)\,h(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{\int_a^b h(x)dx}\int_a^b f(x)\,h(x)\,dx-\varphi\right)\leq(\phi-\varphi)^2 \tag{8}$$

ve

$$4\left(\Gamma-\frac{1}{\int_a^b h(x)dx}\int_a^b g(x)\,h(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{\int_a^b h(x)dx}\int_a^b g(x)\,h(x)\,dx-\gamma\right)\leq(\Gamma-\gamma)^2 \tag{9}$$

elde edilir. Bu da istenilen sonucu verir.

En iyi sabit için; her $x \in [a,b]$ için $f(x) = g(x) = sgn\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$ olarak alınırsa,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = 1$$
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx = 0$$
$$\phi - \varphi = \Gamma - \gamma = 2$$

istenilen (2) eşitsizliği elde edilmiş olur.

# 3 MATERYAL VE YÖNTEM

İntegral ve diferansiyel kavramı elementer kalkülüsdeki çalışmalara benzemektedir. Örneğin, $f(x) = x^2$ fonksiyonunun birinci mertebeden integrali $\int f(x)\,dx = \frac{1}{3}x^3 + c$ ve aynı fonksiyonun ikinci mertebeden integrali

$$\int \left[ \int f(x)\,dx \right] dx = \frac{1}{12}x^4 + c_1 x + c_2$$

dır. Benzer olarak $\frac{d}{dx}f(x) = 2x$ ve $\frac{d^2}{dx^2}f(x) = 2$ dır. Bununla birlikte, $f(x)$ fonksiyonun $\frac{1}{2}-$ci mertebeden integrali ve türevi olabilir mi? Nasıl tanımlayabiliriz? Bu bölümde bu soruların cevabını aşağıdaki şekilde vermeye çalışacağız.

## 3.1 KESİRLİ HESAPLAMALARIN BAŞLANGICI

Kesirli Hesaplamaların başlangıcı $n-$ci mertebeden bir tamsayı için türevin anlamının $n-$ tamsayı olmadığında da olabilir mi sorusunun sorulmasıyla başlamıştır. Bu soru 30 Eylül 1695 de L'Hopital tarafından ortaya atılmıştır. Bir gün Leibniz mektubunda $\frac{D^n x}{Dx^n}$ şeklinde $f(x) = x$ fonksiyonun $n-$ci türevini bu sembol ile gösterilmiştir. L'Hopital da adi bir şekilde $n = \frac{1}{2}$ olduğunda sonucun ne olacağını sormuş ve Leibniz de cevaben "bir paradoks gibi bir gün yararlı bir sonuç olarak ortaya çıkacaktır" demiştir. Bu konu bir çok büyük matematikçinin ilgisini çekmiştir. Bunlardan bazıları, Euler, Laplace, Fourier, Lacroix, Abel, Riemann ve Liouville gibi matematikçilerdir.

1819 da Lacroix kesirli türev düşüncesini bir makale olarak ilk yayımlayan matematikçidir. Ona vermiş olduğu tanımı aşağıdaki şekilde verelim:

$m$ pozitif tamsayı olmak üzere $y = x^m$ fonksiyonunu alalım. $n-$ci mertebeden türevini Lacroix

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}, m \geq n \tag{10}$$

şeklinde bulmuş ve Legendre nin $\Gamma$ sembolünü kullanarak genelleşmiş faktöriyel için

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n} \tag{11}$$

şeklinde yazılmıştır. Son olarak $m = 1$ ve $n = \frac{1}{2}$ için Lacroix

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} y}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \tag{12}$$

elde etmiştir. Bununla birlikte kesirli operatörlerin ilk kullanım Lacroix tarafından değil Abel tarafından 1823 yılında verilmiştir. Abel tautochrone probleminin formülasyonundan ortaya çıkan bir integral denkleminin çözümünde kesirli hesaplamaları uygulamıştır.

Yıllarca birçok matematikçi kendi notasyonlarını ve yaklaşımlarını kullanarak tamsayı olmayan mertebeden integral ve türev fikrine uygun birçok tanım vermişlerdir. Bu tanımlamalardan en popüler olarak ortaya çıkan Riemann-Liouville nin tanımı olmuştur. İlginç olan bir kesirli türevin Riemann-Liouville tanımı Lacroix tarafından elde edilen (12) denklemine benzer sonuç olmuştur. Riemann-Liouville kesirli integral ve türevin tanımına bakmadan önce bazı önemli matematiksel kavramları verelim: Bunlar sırasıyla Gamma, beta, error(hata), Mittag-Leffler ve Mellin-Ross fonksiyonlarıdır.

**Tanım 3.1.1 (Gamma Fonksiyonu)**

$x \in \mathbb{R}^+$ için

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \tag{13}$$

olarak tanımlanır. Gamma fonksiyonun önemli bir özelliği

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), x \in \mathbb{R}^+ \tag{14}$$

$$\Gamma(x) = (x-1)!, x \in \mathbb{N} \tag{15}$$

dır. (15) dan $\Gamma(1) = 1$ dır. Şimdi $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ olduğunu gösterelim, (13) den

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt$$

yazılır. $t = y^2$ dönüşümü yapılırsa, $dt = 2ydy$ olacağından

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-y^2}dy \tag{16}$$

olur. (16) ye denk olarak

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-x^2}dx \tag{17}$$

yazılabilir. (16) ve (17) çarpımından,

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy$$

iki katlı integrale dönüşür. Bu integrali hesaplamak için kutupsal koordinatlara geçilirse,

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty e^{-r^2}rdrd\theta = \pi$$

yani

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

elde edilmiş olur. Incomplete Gamma Fonksiyonu

$$\Gamma^*(\nu,t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)\,t^\nu}\int_0^t e^{-x}x^{\nu-1}dx, \operatorname{Re}\nu > 0 \tag{18}$$

şeklinde tanımlanır.

**Tanım 3.1.2 (Beta Fonksiyonu)**

$x, y \in \mathbb{R}^+$ için

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt \tag{19}$$

olarak tanımlanır. Beta fonksiyonu gamma fonksiyonu cinsinden

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, x, y \in \mathbb{R}^+ \tag{20}$$

dır.

**Tanım 3.1.3 (Hata Fonksiyonu)**

$x \in \mathbb{R}$ için

$$Erf\left(x\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x} e^{-t^2} dt \tag{21}$$

olarak tanımlanır. Hata fonksiyonun tümleyeni $Erf_c\left(x\right)$ olup

$$Erf_c\left(x\right) = 1 - Erf\left(x\right) \tag{22}$$

ile gösterilir. (21) nin bir sonucu olarak $Erf\left(0\right) = 0$ ve $Erf\left(\infty\right) = 1$ dır.

**Tanım 3.1.4 (Mittag-Leffler Fonksiyonu)**

Mittag-Leffler fonksiyonu $e^x$ üstel fonksiyonun bir genelleştirmesi olup kesirli hesaplamalarda önemli bir role sahiptir. Bir ve iki parametreli Mittag-Leffler fonksiyonun gösterimi

$$E_{\alpha}\left(x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma\left(\alpha k + 1\right)}, \alpha > 0 \tag{23}$$

$$E_{\alpha,\beta}\left(x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma\left(\alpha k + \beta\right)}, \alpha > 0, \beta > 0 \tag{24}$$

kuvvet serisi olarak tanımlanır. (24) deki seri (23) ün bir genelleştirmesidir. Bu genelleştirme 1953 te Agarwal tarafından tanımlanmıştır. (24) de verilen tanımın bir sonucu olarak,

$$E_{\alpha,\beta}\left(x\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\beta\right)} + xE_{\alpha,\alpha+\beta}\left(x\right) \tag{25}$$

$$E_{\alpha,\beta}\left(x\right) = \beta E_{\alpha,\beta+1}\left(x\right) + \alpha x \frac{d}{dx} E_{\alpha,\beta+1}\left(x\right) \tag{26}$$

yazılır. (26) eşitliğinden

$$\frac{d}{dx} E_{\alpha,\beta+1}\left(x\right) = \frac{1}{\alpha x}\left[E_{\alpha,\beta}\left(x\right) - \beta E_{\alpha,\beta+1}\left(x\right)\right]$$

dır. Dolayısıyla $\beta$ yerine $\beta - 1$ yazılırsa

$$\frac{d}{dx} E_{\alpha,\beta}\left(x\right) = \frac{1}{\alpha x}\left[E_{\alpha,\beta-1}\left(x\right) - \left(\beta - 1\right) E_{\alpha,\beta}\left(x\right)\right] \tag{27}$$

olur. Şimdi (25) eşitliğini ispatlayalım. Bunun için (24) yardımıyla

$$\begin{aligned} E_{\alpha,\beta}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} = \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{\Gamma(\alpha(k+1)+\beta)} \\ &= \sum_{k=-1}^{\infty} x \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+(\alpha+\beta))} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + x\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+(\alpha+\beta))} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} + xE_{\alpha,\alpha+\beta}(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $E_{\alpha,\beta}(0) = 1$ dır. $\alpha$ ve $\beta$ nın bazı özel değerleri için Mittag-Leffler fonksiyonu bilinen bazı fonksiyonlara indigenir. Örneğin,

$$\begin{aligned} E_{1,1}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \\ E_{\frac{1}{2},1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)} = e^{x^2} Erf_c(-x) \\ E_{1,2} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+2)} = \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^x-1}{x} \end{aligned}$$

dır.

**Tanım 3.1.5 (Mellin-Ross Fonksiyonu)**

Mellin-Ross fonksiyonu $e^{at}$ nin kesirli integrali bulunduğu zaman ortaya çıkmıştır. Bu fonksiyon incomplete gamma ve mittag-leffler fonksiyonların ikisi ile ilişkilidir. Mellin-Ross fonksiyonu

$$E_t(\nu, a) = t^{\nu} e^{at} \Gamma^{*}(\nu, t) \tag{28}$$

şeklinde tanımlanır.

$$E_t(\nu, a) = t^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k+\nu+1)} = t^{\nu} E_{1,\nu+1}(at) \tag{29}$$

olarakta yazabiliriz.

## 3.2 RİEMANN-LİOUVİLLE KESİRLİ İNTEGRALİ

Burada ilk olarak daha çok kullanılan ${}_cD_x^{-\nu} f(x)$ $x-$ekseni boyunca keyfi $\nu-$ci mertebeden $f(x)$ fonksiyonun kesirli integrali olarak tanımlayacağız. Bu notasyonda $\nu$ pozitif reel sayı ve $c$ ve $x$ de integrasyon limitleridir.

$\nu$ negatif olmayan bir reel sayı olsun. $f$, $J' = (0,\infty)$ da noktasal sürekli ve $J = [0,\infty]$ nın herhangi bir sonlu alt aralığında integrallenebilir olsun. Bu durumda $t > 0$ için $\nu-$ci mertebeden $f$ nin Riemann-Liouville kesirli integrali

$$ {}_cD_x^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x-t)^{\nu-1} f(t)\,dt, \nu > 0 \tag{30} $$

olarak tanımlanır. (30) ifadesi birçok yolla elde edilebilir. Diferansiyel denklemler teorisinde kullanılan bir yaklaşımı göz önüne alalım. Bunun için

$$ y^{(n)}(x) = f(x) \tag{31} $$

$$ y(c) = 0, y'(c) = 0, ..., y^{(n-1)}(c) = 0 $$

başlangıç değer problemini göz önüne alalım.

$$ H(x,t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \tag{32} $$

Cauchy fonksiyonunu kullanacak olursak,

$$ y(x) = \int_c^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,dt \tag{33} $$

nın (31) denkleminin bir tek çözümü olduğunu iddia ediyoruz. Bunu göstermek için tümevarım yöntemini kullanalım:

$n = 1$ için

$$ y'(x) = f(x), y(c) = 0 \tag{34} $$

olur. (34) denklemini çözersek,

$$ \int_c^x y'(t)\,dt = \int_c^x \frac{(x-t)^{1-1}}{(1-1)!} f(t)\,dt $$

olup $y\left(c\right)=0$ den

$$y\left(x\right)=\int\limits_{c}^{x}f\left(t\right)dt$$

elde edilir. $n$ için (33) ifadesini doğru olduğunu kabul edelim ve $n+1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$y^{(n+1)}\left(x\right) = f\left(x\right) \tag{35}$$

$$y\left(c\right) = y^{'}\left(c\right)=...=y^{(n)}\left(c\right)=0$$

denklemini göz önüne alalım. $y^{(n+1)}\left(x\right)=\left(y^{'}\right)^{(n)}\left(x\right)$ olduğundan $u\left(x\right)=y^{'}\left(x\right)$ alınırsa (35) denklemi

$$u^{(n)}\left(x\right) = f\left(x\right) \tag{36}$$

$$u\left(c\right) = u^{'}\left(c\right)=...=u^{(n-1)}\left(c\right)=0$$

olur. O halde $n$ için doğru olduğundan,

$$\int\limits_{c}^{x}y^{'}\left(t\right)dt=\int\limits_{z=c}^{x}\left(\int\limits_{t=c}^{z}\frac{\left(z-t\right)^{n-1}}{(n-1)!}f\left(t\right)dt\right)dz$$

Dirichlet formülü kullanılırsa,

$$\begin{aligned} y\left(x\right)-y\left(c\right) &= \int\limits_{t=c}^{z}\left(\int\limits_{z=c}^{x}\frac{\left(z-t\right)^{n-1}}{(n-1)!}f\left(t\right)dz\right)dt \\ &= \int\limits_{c}^{x}\frac{\left(x-t\right)^{n}}{n!}f\left(t\right)dt \end{aligned}$$

olur. Burada $y\left(c\right)=0$ olduğundan

$$y\left(x\right)=\int\limits_{c}^{x}\frac{\left(x-t\right)^{n}}{n!}f\left(t\right)dt$$

elde edilir ki bu da (33) denkleminin bir çözümüdür. (31) de $f(x)$ $y$ nin $n-$ci mertebeden türevi olduğundan $f(x)$ in $n-$ ci mertebeden integrali olarak $y(x)$ i gösterebiliriz. Yani

$$
{}_cD_x^{-n} f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_c^x (x-t)^{n-1} f(t)\, dt \tag{37}
$$

yazılır. Son olarak $n$ yerine herhangi bir $\nu$ reel sayısını ve faktöriyel yerine de gamma fonksiyonu yazılırsa (37) ifadesi (30) Riemann-Liouville kesirli integral tanımına dönüşür. $c = 0$ olduğundan $D^{-\nu}$ notasyonunu kullanacağız.

**Örnek 3.2.1** $\operatorname{Re}\nu > 0, \mu > -1$ olmak üzere $D^{-\nu}x^{\mu}$ hesaplayalım:

Riemann-Liouville kesirli integral tanımından

$$
\begin{aligned}
D^{-\nu}x^{\mu} &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x-t)^{\nu-1} t^{\mu} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x \left(1-\frac{t}{x}\right)^{\nu-1} x^{\nu-1} t^{\mu} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^1 (1-u)^{\nu-1} x^{\nu-1} (xu)^{\mu} x du, \left(u = \frac{t}{x}\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\nu)} x^{\mu+\nu} \int_0^1 u^{\mu} (1-u)^{\nu-1} du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\nu)} x^{\mu+\nu} B(\mu+1,\nu) = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)} x^{\mu+\nu}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$
D^{-\nu}x^{\mu} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)} x^{\mu+\nu}, \nu > 0, \mu > -1, x > 0 \tag{38}
$$

dır. Benzer olarak $\nu-$ci mertebeden $k$ sabitinin kesirli integrali

$$
D^{-\nu}k = \frac{k}{\Gamma(\nu+1)} x^{\nu} \tag{39}
$$

dır. Özel olarak $\nu = \frac{1}{2}$ ise

$$\begin{aligned} D^{-\frac{1}{2}}x^0 &= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}} \\ D^{-\frac{1}{2}}x^1 &= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}x^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{x^3}{\pi}} \\ D^{-\frac{1}{2}}x^2 &= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}x^{\frac{5}{2}} = \frac{16}{15}\sqrt{\frac{x^5}{\pi}} \end{aligned}$$

yazılabilir.

Yukarıdaki örnekler genellikle kesirli integrallerin hesaplanmasının kolay olduğu görülür. Ancak bu doğru değildir. Gerçekten, bazı kesirli integraller üslü ifadeler, sinüs ve cosinüs gibi elementer fonksiyonlar bile büyük transcendental fonksiyonlara yol açabilir. Şimdi bunlarla ilgili olarak aşağıdaki örnekleri verebiliriz.

$a$ sabit olmak üzere $f(t) = e^{at}$ fonksiyonunu alalım. (30) tanımı kullanarak,

$$D^{-\nu}e^{at} = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^t (t-y)^{\nu-1} e^{ay}dy, \nu > 0 \tag{40}$$

yazılır. Burada $x = t - y$ dönüşümü yapılırsa (40) ifadesi

$$D^{-\nu}e^{at} = \frac{e^{at}}{\Gamma(\nu)}\int_0^t x^{\nu-1}e^{-ax}dx, \nu > 0 \tag{41}$$

olur. Açıkça, (41) ifadesi bir elementer fonksiyon değildir. (28) ve (29) Mellin-Ross fonksiyonları cinsinden (41) ifadesi

$$D^{-\nu}e^{at} = E_t(\nu, a) = t^{\nu}E_{1,\nu+1}(at)$$

şeklinde yazabiliriz. Benzer olarak kesirli integrallerin tanımının direk bir uygulamasıyla bazı değişken değiştirmelerle, aşağıdaki sonuçları verebiliriz:

$$D^{-\nu}\cos(at) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^t y^{\nu-1}\cos[a(t-y)]\,dy = C_t(\nu,a), \mathrm{Re}\,\nu>0$$

$$D^{-\nu}\sin(at) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^t y^{\nu-1}\sin[a(t-y)]\,dy = S_t(\nu,a), \mathrm{Re}\,\nu>0$$

Özellikle, $\nu=\frac{1}{2}$ alırsak

$$x=\sqrt{\frac{2at}{\pi}}, c(x)=\int_0^x \cos t^2 dt \text{ ve } s(x)=\int_0^x \sin t^2 dt$$

olmak üzere,

$$D^{-\frac{1}{2}}e^{at} = E_t\left(\frac{1}{2},a\right) = a^{-\frac{1}{2}}e^{at}Erf(at)^{\frac{1}{2}}$$

$$D^{-\frac{1}{2}}\cos(at) = C_t\left(\frac{1}{2},a\right) = \sqrt{\frac{2}{a}}\left[c(x)\cos(at)-s(x)\sin(at)\right]$$

$$D^{-\frac{1}{2}}\sin(at) = S_t\left(\frac{1}{2},a\right) = \sqrt{\frac{2}{a}}\left[c(x)\sin(at)-s(x)\cos(at)\right]$$

yazılır. Bazı durumlarda, diğer trigonometrik fonksiyonların kesirli integrallerin hesaplaması için basit trigonometrik özdeşlikler kullanılır. Örneğin,

$$\cos(2x)=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$$

için

$$D^{-\nu}\cos^2(at) = \frac{t^\nu}{2\Gamma(\nu+1)}+\frac{1}{2}C_t(\nu,2a)$$

$$D^{-\nu}\sin^2(at) = \frac{t^\nu}{2\Gamma(\nu+1)}-\frac{1}{2}C_t(\nu,2a)$$

yazılır.

Daha çok kesirli integraller Riemann versiyonu

$${}_cD_x^{-\nu}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_c^t (t-x)^{\nu-1}f(x)\,dx$$

ve Liouville versiyonuda

$$_{-\infty}D_x^{-\nu} f\left(t\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\nu\right)} \int\limits_{-\infty}^{t} \left(t-x\right)^{\nu-1} f\left(x\right) dx$$

ile gösterilir. $c = 0$ için

$$_{0}D_x^{-\nu} f\left(t\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\nu\right)} \int\limits_{0}^{t} \left(t-x\right)^{\nu-1} f\left(x\right) dx$$

ifadesine Riemann-Liouville kesirli integrali denir. $\alpha$ ve $\beta$ skaler sayıları için

$$D\left[\alpha f\left(t\right) + \beta g\left(t\right)\right] = \alpha D f\left(t\right) + \beta D g\left(t\right)$$

olduğu kolayca gösterilir. Benzer olarak kesirli integraller de lineerlik özelliği kolayca gösterilebilir.

$n-$tane integrali alarak

$$_{c}D_x^{-n} f\left(t\right) = \int\limits_{c}^{x} dx_1 \int\limits_{c}^{x_1} dx_2 \int\limits_{c}^{x_2} dx_3 ... \int\limits_{c}^{x_{n-1}} f\left(t\right) dt \tag{42}$$

alalım. (42) deki $f$ fonksiyonu $x < b$ için $[c, b]$ üzerinde sürekli olduğunu kabul edelim. (42) ifadesi $K_n\left(x,t\right)$, $n, x$ ve $t$ nin bir fonksiyonu olan bir çekirdek olmak üzere

$$\int\limits_{c}^{x} K_n\left(x,t\right) f\left(t\right) dt \tag{43}$$

şeklinde bir tek integral olarak yazılabilir. $n$ tamsayı olmadığında bile $K_n\left(x,t\right)$ anlamlı fonksiyon olacağını göstereceğiz. Böylece, $\mathrm{Re}\,\nu > 0$ tüm $\nu$ için $_{c}D_x^{-\nu} f\left(t\right)$ i

$$_{c}D_x^{-\nu} f\left(t\right) = \int\limits_{c}^{x} K_\nu\left(x,t\right) f\left(t\right) dt$$

şeklinde tanımlayacağız.

Şimdi bunları ispatlamak için $x < b$ olmak üzere $G\left(x,t\right)$, $[c, b] \times [c, b]$ üzerinde sürekli ise

$$\int\limits_{c}^{x} dx_1 \int\limits_{c}^{x_1} G\left(x,t\right) dt = \int\limits_{c}^{x} dt \int\limits_{t}^{x} G\left(x_1,t\right) dx_1$$

yazabiliriz. Özel olarak $G(x_1,t)=f(t)$ ise

$$\begin{aligned}\int_c^x dx_1\int_c^{x_1} f(t)\,dt &= \int_c^x f(t)\,dt\int_t^x dx_1\\ &= \int_c^x (x-t)\,f(t)\,dt\end{aligned}$$

yazılır. Böylece iki integral bir tek integrale dönüşmüş olur.

$n=3$ ise bu durumda

$${}_cD_x^{-3}f(t)=\int_c^x dx_1\left[\int_c^{x_1}(x_1-t)\,f(t)\,dt\right]$$

olur. Benzer işlemler altında

$$\begin{aligned}{}_cD_x^{-3}f(t) &= \int_c^x f(t)\,dt\int_t^x (x_1-t)\,dx_1\\ &= \int_c^x \frac{(x-t)^2}{2}f(t)\,dt\end{aligned}$$

olacaktır. Dolayısıyla bu işlem $n-$ kez uygulandığında (42) ifadesi

$$K_n(x,t)=\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

olmak üzere (43) indirgenmiş olacaktır. Böylece

$${}_cD_x^{-n}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_c^x (x-t)^{n-1}\,f(t)\,dt \tag{44}$$

olarak yazılır. (44) ifadesinin sağ tarafı sıfırdan büyük her $n$ reel sayısı için anlamlı olacağından $\nu-$ci mertebeden $f$ nin kesirli integralini

$${}_cD_x^{-\nu}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_c^x (x-t)^{\nu-1}\,f(t)\,dt,\mathrm{Re}\,\nu>0$$

yazabiliriz.

## 3.3 BAZI YENİ KESİRLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

İlk olarak aşağıdaki Cebysev fonksiyonel gözönüne alalım:

$f$ ve $g$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilir, sekronize iki fonksiyon yani her $x, y \in [a,b]$ için $(f(x)-f(y))(g(x)-g(y)) \geq 0$ olsun. O halde

$$T(f,g) := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{b-a}\left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\frac{1}{b-a}\left(\int_a^b g(x)dx\right)\right) \tag{45}$$

dır.

Riemann-Liouville kesirli integral tanımı yardımıyla, $f(t) = t^{\mu}$ fonksiyonun kesirli integrali

$$J^{\alpha}t^{\mu} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)}t^{\alpha+\mu}, \qquad \alpha > 0, \mu > -1, t > 0 \tag{46}$$

yazılır.

**Teorem 3.3.1** $[0,\infty[$ aralığında $f$ ve $g$ iki senkronize fonksiyon olsun. Her $t > 0, \alpha > 0$ için aşağıdaki eşitsizlik vardır:

$$J^{\alpha}(fg)(t) \geq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{t^{\alpha}}J^{\alpha}f(t)\,J^{\alpha}g(t) \tag{47}$$

**İspat.** $[0,\infty[$ aralığında $f$ ve $g$ senkroize fonksiyonlar olsun. Her $\tau > 0, \rho > 0$ için

$$(f(\tau)-f(\rho))(g(\tau)-g(\rho)) \geq 0 \tag{48}$$

olduğunu biliyoruz. Bu nedenle

$$f(\tau)g(\tau) + f(\rho)g(\rho) \geq f(\tau)g(\rho) + f(\rho)g(\tau) \tag{49}$$

yazılır. Şimdi (49)eşitsizliğinin her iki tarafını $\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \tau \in (0,t)$ çarparsak

$$\begin{aligned} &\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(\tau)g(\tau) + \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(\rho)g(\rho) \\ \geq\ &\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(\tau)g(\rho) + \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(\rho)g(\tau) \end{aligned} \tag{50}$$

olur. Buradan da (50) de $(0,t)$ aralığı üzerinde $\tau$ ya göre integral alırsak,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)g(\tau)d\tau+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\rho)g(\rho)d\tau \\ \geq\ &\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)g(\rho)d\tau+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\rho)g(\tau)d\tau\end{aligned} \tag{51}$$

bulunur. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}&J^{\alpha}(fg)(t)+f(\rho)g(\rho)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \\ \geq\ &\frac{g(\rho)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau+\frac{f(\rho)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} g(\tau)d\tau\end{aligned} \tag{52}$$

elde edilir. Böylece biz aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz,

$$J^{\alpha}(fg)(t)+f(\rho)g(\rho)J^{\alpha}(1)\geq g(\rho)J^{\alpha}(f)(t)+f(\rho)J^{\alpha}(g)(t) \tag{53}$$

O halde (53) in her iki tarafını $\frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \rho\in(0,t)$ ile çarparsak,

$$\begin{aligned}&\frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}J^{\alpha}(fg)(t)+\frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(\rho)g(\rho)J^{\alpha}(1) \\ \geq\ &\frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}g(\rho)J^{\alpha}(f)(t)+\frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(\rho)J^{\alpha}(g)(t)\end{aligned} \tag{54}$$

olur. Buradan da (54) ifadesine $(0,t)$ aralığı üzerinde $\rho$ ya göre integral alırsak,

$$\begin{aligned}&J^{\alpha}(fg)(t)\int_0^t \frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}d\rho+\frac{J^{\alpha}(1)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t f(\rho)g(\rho)(t-\rho)^{\alpha-1} d\rho \\ \geq\ &\frac{J^{\alpha}(f)(t)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\rho)^{\alpha-1} g(\rho)d\rho+\frac{J^{\alpha}(g)(t)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\rho)^{\alpha-1} f(\rho)d\rho\end{aligned} \tag{55}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$J^{\alpha}(fg)(t)\geq\frac{1}{J^{\alpha}(1)}J^{\alpha}(f)(t)\,J^{\alpha}(g)(t) \tag{56}$$

elde edilmiş olur. Bu da ispatı tamamlar.

**Teorem 3.3.2** $f$ ve $g$ , $[0,\infty[$ aralığında integrallenebilir iki fonksiyon olsun. Her $t>0,\alpha>0,\beta>0$ için,

$$\begin{aligned}&\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J^{\beta}(fg)(t)+\frac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}J^{\alpha}(fg)(t) \\ \geq\ &J^{\alpha}(f)(t)\,J^{\beta}(g)(t)+J^{\beta}(f)(t)\,J^{\alpha}(g)(t)\end{aligned} \tag{57}$$

dır.

**İspat.** Yukarıdaki teoremin ispatındaki gibi benzer argümanlar kullanılarak aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz.

$$\begin{aligned} & \frac{(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} J^{\alpha}(fg)(t) + J^{\alpha}(1) \frac{(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f(\rho)g(\rho) \\ \geq \;& \frac{(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} g(\rho) J^{\alpha}(f)(t) + \frac{(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f(\rho) J^{\alpha}(g)(t). \end{aligned} \tag{58}$$

Burada (58) ifadesine $(0,t)$ aralığı üzerinde $\rho$ ya göre integral alırsak,

$$\begin{aligned} & J^{\alpha}(fg)(t) \int_0^t \frac{(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} d\rho + \frac{J^{\alpha}(1)}{\Gamma(\beta)} \int_0^t f(\rho)g(\rho)(t-\rho)^{\beta-1} d\rho \\ \geq \;& \frac{J^{\alpha}(f)(t)}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\rho)^{\beta-1} g(\rho) d\rho + \frac{J^{\alpha}(g)(t)}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\rho)^{\beta-1} f(\rho) d\rho \end{aligned} \tag{59}$$

elde edilir.

**Uyarı.** (47) ve (57) eşitsizlikleri, fonksiyonlar $[0,\infty[$ aralığı üzerinde senkronize fonksiyonlar olmadığında geçerli değildir. $((f(x)-f(y))(g(x)-g(y)) \leq 0$, her $x,y \in [0,\infty[)$

**Uyarı.** (57) de $\alpha=\beta$ alarak, (47) elde ederiz.

**Teorem 3.3.3** $f_{i=1,\ldots,n}$ , her $n$ değeri için $[0,\infty[$ aralığı üzerinde pozitif artan fonksiyonlar olsun. Her $t>0, \alpha>o$ için

$$J^{\alpha}\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)(t) \geq (J^{\alpha}(1))^{1-n} \prod_{i=1}^{n} J^{\alpha} f_i(t) \tag{60}$$

dır.

**İspat.** Bu teoremi ispatlamak için tümevarım yöntemini kullanalım. Açıktır ki $n=1$ için $J^{\alpha}(f_1)(t) \geq J^{\alpha}(f_1)(t)$ eşitsizliği her $t>0$, $\alpha>0$ vardır. (47) de $n=2$ için uygularsak aşağıdaki eşitsizzliği elde ederiz:

$$J^{\alpha}(f_1 f_2)(t) \geq (J^{\alpha}(1))^{-1} J^{\alpha}(f_1)(t) J^{\alpha}(f_2)(t), \qquad t>0, \alpha>0.$$

Şimdi varsayalım ki (tümevarım gereği)

$$J^{\alpha}\left(\prod_{i=1}^{n-1} f_i\right)(t) \geq (J^{\alpha}(1))^{2-n} \prod_{i=1}^{n-1} J^{\alpha} f_i(t), \qquad t>0, \alpha>0 \tag{61}$$

dır. $f_{i=1,\ldots,n}$ her $n$ değeri için pozitif artan fonksiyonlar olduğundan , $\left(\prod_{i=1}^{n-1} f_i\right)(t)$ de artan fonksiyondur. Dolayısıyla (47) de fonksiyonlar $\prod_{i=1}^{n-1} f_i = g$ , $f_{n=f}$ olarak uygulayabiliriz, yani

$$J^{\alpha}\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)(t) = J^{\alpha}(fg)(t) \geq \left(J^{\alpha}(1)\right)^{-1} J^{\alpha}\left(\prod_{i=1}^{n-1} f_i\right)(t)\, J^{\alpha}(f_n)(t) \quad (62)$$

olur. Böylece, (61) dikkate alınarak aşağıdaki ifade elde edilir :

$$J^{\alpha}\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)(t) \geq \left(J^{\alpha}(1)\right)^{-1}\left(J^{\alpha}(1)\right)^{2-n}\left(\prod_{i=1}^{n-1} J^{\alpha} f_i\right)(t)\, J^{\alpha}(f_n)(t) \quad (63)$$

Buda ispatı tamamlar.

**Teorem 3.3.4** $f$ ve $g$ , $[o,+\infty[$ aralığında iki fonksiyon olsun öyleki $f$ artan, $g$ türevlenebilir ve $\alpha$ reel sayısı mevcut olsun. $m := \inf_{t\geq 0} g'(t)$ olmak üzere her $t > 0, \alpha > 0$ için

$$J^{\alpha}(fg)(t) \geq \left(J^{\alpha}(1)\right)^{-1} J^{\alpha}(f)(t)\, J^{\alpha}(g)(t) - \frac{mt}{\alpha+1} J^{\alpha}(f)(t) + mJ^{\alpha}(tf(t)) \quad (64)$$

dır.

**İspat.** $h(t) := g(t) - mt$ fonksiyonu tanımlayalım. Bu $h$ fonksiyonunun türevlenebilir ve $[o,+\infty[$ aralığında artan olduğu açıktır. (47) i kulanarak biz aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz:

$$\begin{aligned} J^{\alpha}((g-mt)f(t)) &\geq \left(J^{\alpha}(1)\right)^{-1} J^{\alpha}(f)(t)\left(J^{\alpha}g(t) - mJ^{\alpha}(t)\right) \quad (65) \\ &\geq \left(J^{\alpha}(1)\right)^{-1} J^{\alpha}(f)(t)\, J^{\alpha}g(t) - \frac{m\left(\left(J^{\alpha}(1)\right)^{-1} t^{\alpha+1}\right)}{\Gamma(\alpha+2)} J^{\alpha}(f)(t) \\ &\geq \left(J^{\alpha}(1)\right)^{-1} J^{\alpha}(f)(t)\, J^{\alpha}g(t) - \frac{m\Gamma(\alpha+1)\,t}{\Gamma(\alpha+2)} J^{\alpha}(f)(t) \\ &\geq \left(J^{\alpha}(1)\right)^{-1} J^{\alpha}(f)(t)\, J^{\alpha}g(t) - \frac{mt}{\alpha+1} J^{\alpha}(f)(t). \end{aligned}$$

Bundan dolayı,

$$J^{\alpha}(fg)(t) \geq \left(J^{\alpha}(1)\right)^{-1} J^{\alpha}(f)(t)\, J^{\alpha}(g)(t) - \frac{mt}{\alpha+1} J^{\alpha}(f)(t) + mJ^{\alpha}(tf(t)) \quad t > 0, \alpha > 0 \quad (66)$$

yazılır. Böylece teorem kanıtlanmış olur.

**Sonuç.** $f$ ve $g$, $[o,+\infty[$ aralığında tanımlanmış iki fonksiyon olsun.

(A) $f$ azalan, $g$ türevlenebilir ve reel bir $\alpha$ sayısı mevcut olsun. $M := \sup_{t\geq 0} g'(t)$ olmak üzere her $t>0, \alpha>0$ için aşağıdaki ifade yazılır:

$$J^{\alpha}(fg)(t) \geq (J^{\alpha}(1))^{-1} J^{\alpha}(f)(t) J^{\alpha}(g)(t) - \frac{Mt}{\alpha+1} J^{\alpha}(f)(t) + MJ^{\alpha}(tf(t)) \tag{67}$$

(B) $f$ ve $g$ türevlenebilir iki fonksiyon ve $m_{1.} := \inf_{t\geq 0} f'(x)$, $m_2 := \inf_{t\geq 0} g'(t)$ olmak üzere aşağıdaki ifade yazılır.

$$\begin{aligned} & J^{\alpha}(fg)(t) - m_1 J^{\alpha} tg(t) - m_2 J^{\alpha} tf(t) + m_1 m_2 J^{\alpha} t^2 \qquad (68) \\ \geq \; & (J^{\alpha}(1))^{-1} \left( J^{\alpha}(f)(t) J^{\alpha}(g)(t) - m_1 J^{\alpha} t J^{\alpha} g(t) - m_2 J^{\alpha} t J^{\alpha} f(t) + m_1 m_2 (J^{\alpha} t)^2 \right). \end{aligned}$$

(C) $f$ ve $g$ türevlenebilir iki fonksiyon ve $M_1 := \sup_{t\geq 0} f'(t)$, $M_2 := \sup_{t\geq 0} g'(t)$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik verilir.

$$\begin{aligned} & J^{\alpha}(fg)(t) - M_1 J^{\alpha} tg(t) - M_2 J^{\alpha} tf(t) + M_1 M_2 J^{\alpha} t^2 \qquad (69) \\ \geq \; & (J^{\alpha}(1))^{-1} \left( J^{\alpha}(f)(t) J^{\alpha}(g)(t) - M_1 J^{\alpha} t J^{\alpha} g(t) - M_2 J^{\alpha} t J^{\alpha} f(t) + M_1 M_2 (J^{\alpha} t)^2 \right) \end{aligned}$$

**İspat.** (A) (47) de $f$ ve $G(t) := g(t) - m_2 t$ olarak alınırsa ispat tamamlanır.

(B) (47) de $F$ ve $G$ fonksiyonları, $F(t) := f(t) - m_1 t$, $G(t) := g(t) - m_2 t$ olarak alınırsa ispat tamamlanır.

(C) (47) de $F(t) := f(t) - M_1 t$, $G(t) := g(t) - M_2 t$ olarak alınırsa ispat tamamlanır.

# 4 BULGULAR VE TARTIŞMA

## 4.1 k- KESİRLİ İNTEGRALİ

Kesirli integral ve uygulamaları son yıllarda ki çalışmalar önemli bir oranda artış göstermiştir. Kesirli integralin bilinen formları için oldukça yoğun çalışmalar yapılmıştır. Kesirli integral hesaplamalar ile ilgili gelişmeleri gözönüne alarak aşağıdaki sıralamayı verelim. $\alpha \in \mathbb{R}$ parametresi için Riemann-Liouville kesirli integrali

$$J_a^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad \alpha > 0, \ x > a,$$

şeklinde tanımlanır ve bu integral $n \in \mathbb{N}$ için

$$\int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 ... \int_a^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt,$$

Cauchy integral formülü yardımıyla elde edilir. Hadamard kesirli integrali, Hadamard tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$J_a^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f(t)\frac{dt}{t}, \quad \alpha > 0, \ x > a,$$

ve bu integral de $n \in \mathbb{N}$ için

$$\int_a^x \frac{dt_1}{t_1} \int_a^{t_1} \frac{dt_2}{t_2} ... \int_a^{t_{n-1}} \frac{f(t_n)}{t_n} dt_n = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{n-1} f(t)\frac{dt}{t}$$

yardımıyla yazılır. Katugampola, Riemann-Liouville ve Hadamard kesirli integralinin bir genelleştirmesini $\alpha \in \mathbb{N}$ için,

$$\int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 ... \int_a^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt,$$

dır. $\alpha$ reel olduğunda

$$J_a^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt$$

yukarıdaki form verilir.

Mubeen ve Habibullah tarafından Riemann-Liouville tipi kesirli integrali için aşağıda $k$-kesirli intregrali verilmiştir.

$$ {}_kJ^{\alpha}f(x) = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1} f(t)dt, \quad \alpha > 0, \; x > 0. $$

Dikkat edilirse, $k \to 1$ olarak limit alınırsa, $k$-kesirli integrali klasik Riemann-Liouville kesirli integraline dönüşür.

## 4.2 $k$-RİEMANN-LİOUVİLLE KESİRLİ İNTEGRAL

Burada yukarıda verilen $k$-Rimann-Liouville kesirli integralini belli koşullar altında aşağıda verelim. $\alpha$ negatif olmayan reel bir sayı olsun. $f$ ,$I' = (0, \infty)$ üzerinde parçalı sürekli ve $I = [0, \infty]$ aralığı herhangi bir sonlu alt aralık üzerinde integrallenebilir olsun. Bu durumda $t > 0$ için

$$ {}_kJ_a^{\alpha}f(x) = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1} f(t)dt, \quad x > a. \tag{70} $$

$k$-Riemann-Liouville kesirli integrali için aşağıdaki sonuçları verelim.

**Teorem 4.2.1** $f \in L_1[a,b], \; a > 0$ olsun. O halde ${}_kJ_a^{\alpha}f(x)$ hemen hemen her yerde $[a,b]$ üzerinde tanımlı ve ${}_kJ_a^{\alpha}f(x) \in L_1[a,b]$ dır.

**İspat.** Bir $P$ dönüşümü tanımlayalım $P : \Delta := [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ , $P_1(x,t) = \left[(x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1}\right]_+$, ve $P = P_+ + P_-$

$$ P_+(x,t) = \begin{cases} (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1} & , a \leq t \leq x \leq b \\ 0 & , a \leq x \leq t \leq b. \end{cases} $$

Böylece, $\Delta$ üzerinde $P$ ölçülebilir olduğundan

$$ \int_a^b P(x,t)dt = \int_a^x P(x,t)dt = \int_a^x (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1} dt = \frac{k}{\alpha}(x-a)^{\frac{\alpha}{k}}. $$

Buradan da

$$ \begin{aligned} \int_a^b \left( \int_a^b P(x,t) \left| f(x) \right| dt \right) dx &= \int_a^b \left| f(x) \right| \left( \int_a^b P(x,t)dt \right) dx \\ &= \frac{k}{\alpha} \int_a^b (x-a)^{\frac{\alpha}{k}} \left| f(x) \right| dx \\ &\leq \frac{k}{\alpha}(b-a)^{\frac{\alpha}{k}} \int_a^b \left| f(x) \right| dx = \frac{k}{\alpha}(b-a)^{\frac{\alpha}{k}} \left\| f(x) \right\|_{L_1[a,b]} < \infty. \end{aligned} $$

yazılır. Tonelli teoreminde, $\Delta$ üzerinde $Q : \Delta \to \mathbb{R}$ olacak şekilde $Q(x,t) := P(x,t)f(x)$ integrallenebilir olduğu verilmiştir. Fubini's teoreminde $t \in [a,b]$ için, $[a,b]$ üzerinde$\int_a^b P(x,t)f(x)dx$ integrallenebilir fonksiyondur. Bundan dolayı, ${}_kJ_a^{\alpha}f(x)$, $[a,b]$ üzerinde integrallenebilirdir.

Şimdi $k$-Riemann-Liouville kesirli integral yarı grubunun özelliklerini verelim.

**Teorem 4.2.2** $\alpha > 1$, $k > 0$ ve $f \in L_1[a,b]$ olsun. ${}_kJ_a^{\alpha}f \in C[a,b]$ dır.

**İspat.**$\frac{\alpha}{k} = 1$ içi ispat açıktır. O halde $\frac{\alpha}{k} \neq 1$ olduğunu varsayalım. $x, y \in [a,b]$, $x \leq y$ ve $x \to y$ olsun. O halde

$$
\begin{aligned}
& \left|{}_kJ_a^{\alpha}f(x) - {}_kJ_a^{\alpha}f(y)\right| \\
= & \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\left|\int_a^x (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1}f(t)\,dt - \int_a^y (y-t)^{\frac{\alpha}{k}-1}f(t)\,dt\right| \\
= & \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\left|\int_a^x (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1}f(t)\,dt - \int_x^y (y-t)^{\frac{\alpha}{k}-1}f(t)\,dt - \int_a^x (y-t)^{\frac{\alpha}{k}-1}f(t)\,dt\right| \\
\leq & \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\left\{\int_a^x \left|(x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1} - (y-t)^{\frac{\alpha}{k}-1}\right||f(t)|\,dt + \int_x^y (y-t)^{\frac{\alpha}{k}-1}|f(t)|\,dt\right\} \\
\leq & \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\left\{\int_a^x \left|(x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1} - (y-t)^{\frac{\alpha}{k}-1}\right||f(t)|\,dt + (y-x)^{\frac{\alpha}{k}-1}\|f(t)\|_{L_1[a,b]}\right\}
\end{aligned}
$$

dır. Burada $x \to y$ için $(x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1} \to (y-t)^{\frac{\alpha}{k}-1}$ olacağından

$$\left|(x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1} - (y-t)^{\frac{\alpha}{k}-1}\right| \to 0$$

vardır. Bundan dolayı

$$\left|(x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1} - (y-t)^{\frac{\alpha}{k}-1}\right| \leq 2(b-a)^{\frac{\alpha}{k}-1}$$

eşitsizliği sağlar. Bu nedenle, baskın yakınsama teoremini elde ederiz. $x \to y$ kabülünden, $\left|(x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1} - (y-t)^{\frac{\alpha}{k}-1}\right| \to 0$ ve ${}_kJ_a^{\alpha}f \in C[a,b]$ dır.

Şimdi biz $k$-Riemann-Liouville kesirli integralinin yarıgroup özelliğini aşağıdaki şekilde verelim.

**Teorem 4.2.3** $f$ , $I$ da sürekli ve $\alpha, \beta > 0$, $a > 0$ şartları sağlasın. Her $x$ için,

$${}_kJ_a^{\alpha}\left[{}_kJ_a^{\beta}f(x)\right] = {}_kJ_a^{\alpha+\beta}f(x) = {}_kJ_a^{\beta}\left[{}_kJ_a^{\alpha}f(x)\right]. \qquad k > 0$$

dır.

**İspat** $k$-kesirli integrali ve Dirichlet's formülü kullanılarak

$$\begin{aligned} {}_kJ_a^{\alpha}\left[\,{}_kJ_a^{\beta}f(x)\right] &= \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1}\, J_a^{\beta}f(t)dt \\ &= \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1}\left[\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\int_0^t (t-\tau)^{\frac{\beta}{k}-1} f(\tau)\,d\tau\right]dt \\ &= \frac{1}{k^2\Gamma_k(\alpha)\Gamma_k(\beta)}\int_a^x f(\tau)\left[\int_\tau^x (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1}(t-\tau)^{\frac{\beta}{k}-1}dt\right]d\tau \end{aligned} \tag{71}$$

yazılır. Son integralde değişken değiştirmesi yapılırsa, $y=(t-\tau)/(x-\tau)$;

$$\begin{aligned} \int_\tau^x (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1}(t-\tau)^{\frac{\beta}{k}-1}dt &= (x-\tau)^{\frac{\alpha+\beta}{k}-1}\int_0^1 (1-y)^{\frac{\alpha}{k}-1}y^{\frac{\beta}{k}-1}dy \qquad (72) \\ &= (x-\tau)^{\frac{\alpha+\beta}{k}-1}\, kB_k(\alpha,\beta), \end{aligned}$$

olur. $k$-beta fonksiyonu ile (71) ve (72) ifadelerinden

$$\begin{aligned} {}_kJ_a^{\alpha}\left[\,{}_kJ_a^{\beta}f(x)\right] &= \frac{(1)^{1-\frac{\alpha+\beta}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha+\beta)}\int_a^x (x-\tau)^{\frac{\alpha+\beta}{k}-1} f(\tau)d\tau \\ &= {}_kJ_a^{\alpha+\beta}f(x). \end{aligned}$$

olur. Buda ispatı tamamlar.

**Teorem 4.2.4.** $\alpha,\beta>0,\ a>0$ olsun. Bu durumda

$${}_kJ_a^{\alpha}((x-a)^{\frac{\beta}{k}-1}) = \frac{\Gamma_k(\beta)}{\Gamma_k(\alpha+\beta)}(x-a)^{\frac{\alpha+\beta}{k}-1}\ ,\quad k>0 \tag{73}$$

dır.

**İspat** $k$-kesirli integral tanımının yardımıyla, $y=(x-t)/(x-a)$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned} {}_kJ_a^{\alpha}((x-a)^{\frac{\beta}{k}-1}) &= \frac{(1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1}(t-a)^{\frac{\alpha+\beta}{k}-1}dt \\ &= \frac{(1)^{-\frac{\alpha}{k}}(x-a)^{\frac{\alpha+\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_0^1 (1-y)^{\frac{\alpha}{k}-1}y^{\frac{\beta}{k}-1}dy \\ &= \frac{(x-a)^{\frac{\alpha+\beta}{k}-1}}{\frac{\alpha}{k}\Gamma_k(\alpha)}B_k(\alpha,\beta) \end{aligned}$$

elde edilir.

**Uyarı1:** (73) den $k \to 1$ için limit alınırsa

$$J_a^{\alpha}((x-a)^{\beta-1}) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\,(x-a)^{\alpha+\beta-1}.$$

dır.

**Sonuç:** $\alpha, \beta > 0$ için

$$_kJ_a^{\alpha}(1) = \frac{1}{\frac{\alpha}{k}\Gamma_k(\alpha+k)}\,(x-a)^{\frac{\alpha}{k}-2}. \tag{74}$$

dır.

**Uyarı2:** (74) de $k \to 1$ için aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$J_a^{\alpha}(1) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\,(x-a)^{\alpha-2}.$$

## 4.3 BAZI YENİ $k$-RİEMANN-LİOUVİLLE KESİRLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Chebeyshev-Grüss tipli eşitsizlikler, $k$- kesirli integral yardımıyla aşağıdaki gibi verebiliriz.

**Teorem 4.3.1.** $f, g$ fonksiyonları $[0,\infty)$ üzerinde tanımlı senkronize fonksiyonlar olsun. Bu durumda her $t > a \geq 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0$ olmak üzere

$$_kJ_a^{\alpha}fg(t) \geq \frac{1}{J_a^{\alpha}(1)}\ {_kJ_a^{\alpha}}f(t)\ {_kJ_a^{\alpha}}g(t) \tag{75}$$

$$_kJ_a^{\alpha}fg(t)\ {_kJ_a^{\beta}}(1) + {_kJ_a^{\beta}}fg(t)\ {_kJ_a^{\alpha}}(1) \geq {_kJ_a^{\alpha}}f(t)\ {_kJ_a^{\beta}}g(t) + {_kJ_a^{\alpha}}g(t)\ {_kJ_a^{\beta}}f(t). \tag{76}$$

dır.

**İspat** $f$ ve $g$ fonksiyonları $[0,\infty)$ üzerinde tanımlı senkronize fonksiyon oldukları için her $x, y \geq 0$ olmak üzere

$$(f(x) - f(y))\,(g(x) - g(y)) \geq 0.$$

dır. Yani,

$$f(x)\,g(x)+f(y)\,g(y)\geq f(x)\,g(y)+f(y)\,g(x) \tag{77}$$

dır. (77) de her iki tarafı $\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}(t-x)^{\frac{\alpha}{k}-1}$ ile çarparsak ,$(a,t)$ aralığında $x$' e göre integral alınırsa,

$$\begin{aligned} & \frac{(1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t-x)^{\frac{\alpha}{k}-1} f(x)\,g(x)\,dx \\ & +\frac{(1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t-x)^{\frac{\alpha}{k}-1} f(y)\,g(y)\,dx \\ \geq\ & \frac{(1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t-x)^{\frac{\alpha}{k}-1} xf(x)\,g(y)\,dx \\ & +\frac{(1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t-x)^{\frac{\alpha}{k}-1} f(y)\,g(x)\,dx \end{aligned}$$

$${}_kJ_a^{\alpha}fg(t)+f(y)\,g(y)\ {}_kJ_a^{\alpha}(1)\geq g(y)\ {}_kJ_a^{\alpha}f(t)+f(y)\ {}_kJ_a^{\alpha}g(t). \tag{78}$$

elde edilir. (78) de her iki tarafı $\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}(t-y)^{\frac{\alpha}{k}-1}$çarpasak ve $(a,t)$ aralığında $y$'e göre integral alındığında,

$$\begin{aligned} & {}_kJ_a^{\alpha}fg(t)\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t-y)^{\frac{\alpha}{k}-1}\,dy \\ & +\ {}_kJ_a^{\alpha}(1)\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t-y)^{\frac{\alpha}{k}-1} f(y)\,g(y)\,dy \\ \geq\ & {}_kJ_a^{\alpha}f(t)\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t-y)^{\frac{\alpha}{k}-1} g(y)dy \\ & +\ {}_kJ_a^{\alpha}g(t)\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t-y)^{\frac{\alpha}{k}-1} f(y)\,dy, \end{aligned}$$

dır.

$${}_kJ_a^{\alpha}fg(t)\geq\frac{1}{J_a^{\alpha}(1)}\ {}_kJ_a^{\alpha}f(t)\ {}_kJ_a^{\alpha}g(t)$$

ve ilk eşitsizlik kanıtlanmıştır.

(78) de her iki tarafı $\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}(t-y)^{\frac{\beta}{k}-1}$ ile çarpasak ve $(a,t)$ aralığında $y$'e göre integral alındığında,

$$\begin{aligned} & {}_kJ_a^\alpha fg(t)\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t-y)^{\frac{\beta}{k}-1}\,dy \\ & + {}_kJ_a^\alpha(1)\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t-y)^{\frac{\beta}{k}-1} f\,(y)\,g\,(y)\,dy \\ \geq\quad & {}_kJ_a^\alpha f(t)\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t-y)^{\frac{\beta}{k}-1} g(y)dy \\ & + {}_kJ_a^\alpha g(t)\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t-y)^{\frac{\beta}{k}-1} f\,(y)\,dy, \end{aligned}$$

dır. Buradanda

$${}_kJ_a^\alpha fg(t)\ {}_kJ_a^\beta(1) + {}_kJ_a^\beta fg(t)\ {}_kJ_a^\alpha(1) \geq {}_kJ_a^\alpha f(t)\ {}_kJ_a^\beta g(t) + {}_kJ_a^\alpha g(t)\ {}_kJ_a^\beta f(t)$$

olup ikinci eşitsizlik kanıtlanmış olur. Bu da ispatı tamamlar..

**Teorem 4.3.2.** $f, g$ , $[0,\infty)$ üzerinde sekronize fonksiyonlar ve $h \geq 0$ olsun. $t > a \geq 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0$ için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma_k(\beta+k)}(t-a)^{\frac{\beta}{k}-2}\ {}_kJ_a^\alpha fgh(t) \\ & +\frac{1}{\Gamma_k(\alpha+k)}(t-a)^{\frac{\alpha}{k}-2}\ {}_kJ_a^\beta fgh(t) \\ \geq\quad & {}_kJ_a^\alpha fh(t)\ {}_kJ_a^\beta g(t) + {}_kJ_a^\alpha gh(t)\ {}_kJ_a^\beta f(t) - {}_kJ_a^\alpha h(t)\ {}_kJ_a^\beta fg(t) - {}_kJ_a^\alpha fg(t)\ {}_kJ_a^\beta h(t) \\ & + {}_kJ_a^\alpha f(t)\ {}_kJ_a^\beta gh(t) + {}_kJ_a^\alpha g(t)\ {}_kJ_a^\beta fh(t). \end{aligned}$$

dır.

**İspat.** $f$ ve $g$, $[0,\infty)$ üzerinde senkronize fonksiyonlar ve $h \geq 0$ olduğu için her $x, y \geq 0$ olmak üzere

$$\left(f\left(x\right)-f(y)\right)\left(g\left(x\right)-g(y)\right)\left(h\left(x\right)+h\left(y\right)\right)\geq 0.$$

yazılır. Yukarıdaki ifadeyi açarsak,

$$\begin{aligned} & f\left(x\right)g\left(x\right)h\left(x\right)+f\left(y\right)g\left(y\right)h\left(y\right) \\ \geq\ & f\left(x\right)g\left(y\right)h\left(x\right)+f\left(y\right)g\left(x\right)h\left(x\right)-f\left(y\right)g\left(y\right)h\left(x\right) \\ & -f\left(x\right)g\left(x\right)h\left(y\right)+f\left(x\right)g\left(y\right)h\left(y\right)+f\left(y\right)g\left(x\right)h\left(y\right). \end{aligned} \tag{79}$$

elde edilir. (79) de her iki tarafı $\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\left(t-x\right)^{\frac{\alpha}{k}-1}$ ile çarpıp ve $(a,t)$ aralığında $x$'e göre integral alınırsa,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t\left(t-x\right)^{\frac{\alpha}{k}-1}f\left(x\right)g\left(x\right)h\left(x\right)dx \\ & +f\left(y\right)g\left(y\right)h\left(y\right)\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t\left(t-x\right)^{\frac{\alpha}{k}-1}dx \\ \geq\ & g\left(y\right)\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t\left(t-x\right)^{\frac{\alpha}{k}-1}f\left(x\right)h\left(x\right)dx \\ & +f\left(y\right)\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t\left(t-x\right)^{\frac{\alpha}{k}-1}g\left(x\right)h\left(x\right)dx \\ & -f\left(y\right)g\left(y\right)\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t\left(t-x\right)^{\frac{\alpha}{k}-1}h\left(x\right)dx \\ & -h\left(y\right)\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t\left(t-x\right)^{\frac{\alpha}{k}-1}f\left(x\right)g\left(x\right)dx \\ & +g\left(y\right)h\left(y\right)\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t\left(t-x\right)^{\frac{\alpha}{k}-1}f\left(x\right)dx \\ & +f\left(y\right)h\left(y\right)\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t\left(t-x\right)^{\frac{\alpha}{k}-1}g\left(x\right)dx. \end{aligned}$$

dır. Yani,

$$ {}_kJ_a^\alpha fgh(t) + f(y)\,g(y)\,h(y)\ {}_kJ_a^\alpha(1) \tag{80}$$

$$\geq\ g(y)\ {}_kJ_a^\alpha fh(t) + f(y)\ {}_kJ_a^\alpha gh(t) - f(y)\,g(y)\ {}_kJ_a^\alpha h(t) - h(y)\ {}_kJ_a^\alpha fg(t)$$

$$+g(y)\,h(y)\ {}_kJ_a^\alpha f(t) + f(y)\,h(y)\ {}_kJ_a^\alpha g(t)$$

elde edilir. (80) de her iki taraf $\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}(t-y)^{\frac{\beta}{k}-1}$ ile çarpılıp ve $(a,t)$ aralığında $y$'e göre integral alınırsa,

$$\begin{aligned}
& {}_kJ_a^\alpha fgh(t)\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\int_a^t (t-y)^{\frac{\beta}{k}-1}\,dy \\
& +{}_kJ_a^\alpha(1)\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\int_a^t (t-y)^{\frac{\beta}{k}-1} f(y)\,g(y)\,h(y)dy \\
\geq\ & {}_kJ_a^\alpha fh(t)\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\int_a^t (t-y)^{\frac{\beta}{k}-1} g(y)\,dy \\
& + {}_kJ_a^\alpha gh(t)\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\int_a^t (t-y)^{\frac{\beta}{k}-1} f(y)\,dy \\
& - {}_kJ_a^\alpha h(t)\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\int_a^t (t-y)^{\frac{\beta}{k}-1} f(y)\,g(y)\,dy \\
& - {}_kJ_a^\alpha fg(t)\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\int_a^t (t-y)^{\frac{\beta}{k}-1} h(y)dy \\
& + {}_kJ_a^\alpha f(t)\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\int_a^t (t-y)^{\frac{\beta}{k}-1} g(y)\,h(y)\,dy \\
& + {}_kJ_a^\alpha g(t)\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\int_a^t (t-y)^{\frac{\beta}{k}-1} f(y)\,h(y)\,dy.
\end{aligned}$$

dır. Buradan da

$$
\begin{aligned}
{}_kJ_a^\alpha fgh(t)_kJ_a^\beta(1) +_k J_a^\alpha(1)_kJ_a^\beta fgh(t) \quad \geq \quad & {}_kJ_a^\alpha fh(t)\ {}_kJ_a^\beta g(t) + \ {}_kJ_a^\alpha gh(t)\ {}_kJ_a^\beta f(t) \\
& - {}_kJ_a^\alpha h(t)\ {}_kJ_a^\beta fg(t) - \ {}_kJ_a^\alpha fg(t)\ {}_kJ_a^\beta h(t) \\
& + {}_kJ_a^\alpha f(t)\ {}_kJ_a^\beta gh(t) + \ {}_kJ_a^\alpha g(t)\ {}_kJ_a^\beta fh(t)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

**Sonuç.** $f, g$ ,$[0,\infty)$ üzerinde senkronize ve $h \geq 0$ olsun. Her $t > a \geq 0$, $\alpha > 0$, için

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{\Gamma_k(\alpha+k)}(t-\alpha)_k^{\frac{\alpha}{k}-2}\ J_a^\alpha fgh(t) \\
\geq & \ {}_kJ_a^\alpha fh(t)_kJ_a^\alpha g(t) +_k J_a^\alpha gh(t)_kJ_a^\alpha f(t) -_k J_a^\alpha h(t)_kJ_a^\alpha fg(t)
\end{aligned}
$$

dır.

**Teorem 4.3.3.** $f, g$ ve $h$ , $[0,\infty)$ aralığında üç monoton fonksiyon olsun. Yani, her $x, y \in [a,t]$

$$
(f(x) - f(y))(g(x) - g(y))(h(x) - h(y)) \geq 0
$$

şartı sağlansın, her $t > a \geq 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{\Gamma_k(\beta+k)}(t-a)^{\frac{\beta}{k}-2}\ {}_kJ_a^\alpha fgh(t) \\
& -\frac{1}{\frac{\alpha}{k}\Gamma_k(\alpha+k)}(t-a)^{\frac{\alpha}{k}-2}\ {}_kJ_a^\beta fgh(t) \\
\geq \quad & {}_kJ_a^\alpha fh(t)\ {}_kJ_a^\beta g(t) + \ {}_kJ_a^\alpha gh(t)\ {}_kJ_a^\beta f(t) - \ {}_kJ_a^\alpha h(t)\ {}_kJ_a^\beta fg(t) + \ {}_kJ_a^\alpha fg(t)\ {}_kJ_a^\beta h(t) \\
& -{}_kJ_a^\alpha f(t)\ {}_kJ_a^\beta gh(t) - \ {}_kJ_a^\alpha g(t)\ {}_kJ_a^\beta fh(t).
\end{aligned}
$$

dır.

**İspat.** Teorem 4.3.2. nin ispatıyla benzerdir.

**Teorem 4.3.4.** $f$ ve $g$ , $[0,\infty)$ üzerinde iki fonksiyon olsun. Her $t>a\geq 0,\ \alpha>0,\ \beta>0$ olmak üzere $k$-kesirli integrali için

$$\frac{1}{\Gamma_k(\beta+k)}(t-a)^{\frac{\beta}{k}-2}\ {}_kJ_a^{\alpha}f^2(t) \tag{81}$$

$$+\frac{1}{\Gamma_k(\alpha+k)}(t-a)^{\frac{\alpha}{k}-2}\ {}_kJ_a^{\beta}g^2(t)$$

$$\geq\ 2\ {}_kJ_a^{\alpha}f(t)\ {}_kJ_a^{\beta}g(t)$$

ve

$${}_kJ_a^{\alpha}f^2(t)\ {}_kJ_a^{\beta}g^2(t)+\ {}_kJ_a^{\beta}f^2(t)\ {}_kJ_a^{\alpha}g^2(t)\geq 2\ {}_kJ_a^{\alpha}fg(t)\ {}_kJ_a^{\beta}fg(t) \tag{82}$$

dır.

**İspat** İspat için,

$$(f(x)-g(y))^2\geq 0$$

eşitsizliğini kullanalım. Bu durumda ,

$$f^2(x)+g^2(y)\geq 2f(x)g(y) \tag{83}$$

dır. (83) da her iki tarafı $\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}(t-x)^{\frac{\alpha}{k}-1}$ ve $\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}(t-y)^{\frac{\beta}{k}-1}$ ile çarpıp , $(a,t)$ aralığında $x$ ve $y$'e görne integral alınırsa, (81) elde edilir. Diğer yandan,

$$(f(x)g(y)-f(y)g(x))^2\geq 0$$

ifadesi için yukarıdaki şartlara uygun uygulamalar yapılırsa (82) elde edilir.

**Sonuç.** $f$ ve $g$ , $[0,\infty)$ aralığında iki fonksiyon olsun. Her $t>a\geq 0,\ \alpha>0$ olmak üzere $k$-kesirli integrali için aşağıdaki eşitsilikler sağlanılır.

$$\frac{1}{\Gamma_k(\alpha+k)}(t-a)^{\frac{\alpha}{k}-2}\ \left[{}_kJ_a^{\alpha}f^2(t)+\ {}_kJ_a^{\beta}g^2(t)\right]$$
$$\geq\ 2\ {}_kJ_a^{\alpha}f(t)\ {}_kJ_a^{\alpha}g(t)$$

$${}_kJ_a^{\alpha}f^2(t)\ {}_kJ_a^{\alpha}g^2(t)\geq\ \left[{}_kJ_a^{\alpha}fg(t)\right]^2.$$

**Teorem 4.3.5** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı ve

$$\bar{f}(x) = \int_a^x t^s f(t)dt, \quad x > a \geq 0$$

olsun. Bu durumda $\alpha \geq k > 0$ için

$${}_kJ_a^{\alpha} f(x) = \frac{1}{k}\ {}_kJ_a^{\alpha-k} \bar{f}(x)$$

dır.

**İspat.** $k$-kesirli integrali tanımı yardımıyla ve Dirichlet's formülü kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
{}_kJ_a^{\alpha} \bar{f}(x) &= \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1} \int_a^t f(u)dudt \\
&= \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_a^x f(u) \int_u^x (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1} dtdu \\
&= \frac{1}{\Gamma_k(\alpha+k)} \int_a^x (x-u)^{\frac{\alpha}{k}} uf(u)du \\
&= k\ {}_kJ_a^{\alpha+k} f(x).
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Aşağıdaki gibi Cauchy-Buniakovsky-Schwarz eşitsizliğini verelim.

**Lemma.** $f, g, h : [a, b] \to [0, \infty)$ , $a < b$ sürekli fonksiyonlar olsun. Bu durumda

$$\left(\int_a^b g^m(t)h^r(t)f(t)dt\right)\left(\int_a^b g^n(t)h^s(t)f(t)dt\right) \geq \left(\int_a^b g^{\frac{m+n}{2}}(t)h^{\frac{r+s}{2}}(t)f(t)dt\right)^2 \tag{84}$$

dır.

**İspat.**

$$\int_a^b \left[\sqrt{g^m(t)h^r(t)f(t)}\sqrt{\int_a^b g^n(t)h^s(t)f(t)dt} - \sqrt{g^n(t)h^s(t)f(t)}\sqrt{\int_a^b g^m(t)h^r(t)f(t)dt}\right]^2 dt \geq 0$$

$$\int_a^b \left[ \begin{array}{c} g^m(t)h^r(t)f(t)\int_a^b g^n(t)h^s(t)f(t)dt + g^n(t)h^s(t)f(t)\int_a^b g^m(t)h^r(t)f(t)dt \\ -2g^{\frac{m+n}{2}}(t)h^{\frac{r+s}{2}}(t)f(t)\sqrt{\int_a^b g^m(t)h^r(t)f(t)dt}\sqrt{\int_a^b g^n(t)h^s(t)f(t)dt} \end{array} \right] dt \geq 0$$

olduğu açıktır ve ayrıca

$$\begin{aligned} & 2\left(\int_a^b g^m(t)h^r(t)f(t)dt\right)\left(\int_a^b g^n(t)h^s(t)f(t)dt\right) \\ \geq\ & 2\left(\int_a^b g^{\frac{m+n}{2}}(t)h^{\frac{r+s}{2}}(t)f(t)dt\right)\sqrt{\int_a^b g^m(t)h^r(t)f(t)dt}\sqrt{\int_a^b g^n(t)h^s(t)f(t)dt} \end{aligned}$$

Bu istenen eşitsizliği verir.

**Teorem 4.3.6.** $f \in L_1[a,b]$ olsun. Bu durumda her $k, m, n, r, s > 0$ ve $\alpha > 1$ için

$$\begin{aligned} & \left({}_kJ_a^{m\left(\frac{\alpha}{k}-1\right)+1} f^r(x)\right)\left({}_kJ_a^{n\left(\frac{\alpha}{k}-1\right)+1} f^s(x)\right) \\ \geq\ & \left({}_kJ_a^{\frac{m+n}{2}\left(\frac{\alpha}{k}-1\right)+1} f^{\frac{r+s}{2}}(x)\right)^2 \end{aligned} \tag{85}$$

**İspat.** (84)da $g(t) = (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1}$, $f(t) = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}$ ve $h(t) = f(t)$ olarak alalım.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{m\left(\frac{\alpha}{k}-1\right)} f^r(t)\,dt\right)\left(\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n\left(\frac{\alpha}{k}-1\right)} f^s(t)\,dt\right) \\ \geq\ & \left(\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\frac{m+n}{2}\left(\frac{\alpha}{k}-1\right)} f^{\frac{r+s}{2}}(t)\,dt\right)^2 \end{aligned}$$

Yazılarak (85) elde edilir.

**Uyarı.** (85)de $k = 1$ alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned} & \left(J_a^{m(\alpha-1)+1} f^r(x)\right)\left({}_kJ_a^{n(\alpha-1)+1} f^s(x)\right) \\ \geq\ & \left({}_kJ_a^{\frac{m+n}{2}(\alpha-1)+1} f^{\frac{r+s}{2}}(x)\right)^2 \end{aligned}$$

dır.

# 5 SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Tezin son kısmında Riemann Liouville kesirli integralin bir genelleşmesi olan $k$-Riemann Liouville kesirli integrali verilerek bazı temel özellikler verimiştir. Daha sonra, $k$-Riemann Liouville kesirli integrali bazı yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Literatürde mevcut olan bir çok integral eşitsizlikleri için de $k$-Riemann Liouville kesirli integrali kullanılarak yeniden elde etmek mümkündür.

# 6 KAYNAKLAR


Azpeitia A.G., Convex functions and the Hadamard inequality, *Rev. Colombiana Math.*, 28 **(1994)**, 7-12.

Agrawal Om P., Formulation of Euler-Lagrange Equations for Fractional Variational Problems, *J. Math. Anal. Appl*, 272, 368-379, (**2002**).

Babakhani A., V. Daftardar-Gejji**,** On Calculus of Local Fractional Derivatives, *J. Math. Anal. Appl.*, 270, 66-79, (**2002**).

Bertram R., Fractional Calculus and Its Applications, *Springer-Verlag, Berlin Heidelberg* , (**1975**).

Butzer P.L., Westphal, U**.,** An Introduction to Fractional Calculus, in: R. Hilfer (Ed.), *Applications of Fractional Calculus in Physics, World scientific,* New Jersey, (**2000**).

Set E., Özdemir M. Ö., and Dragomir S. S., On the Hermite-Hadamard inequality and other integral inequalities involving two functions, *Journal of Inequalities and Applications*, Article ID 148102, 9 pages, (**2010**).

Set E., Özdemir M. E., and Dragomir S. S., On Hadamard-Type inequalities involving several kinds of convexity, *Journal of Inequalities and Applications,* Article ID 286845, 12 pages, (**2010).**

Podlubny, I.,Fractional Differential Equations, *Academic Press*, London, (**1999**).

Oldham, K.B., Spainer, J., The Fractional Calculus*, Academic Press*, New York and London, (**1974**).

Miller, K.S., Ross, B., An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, *John Wiley & Sons*, New York, (**1974**).

Samko, S.G., Kilbas, A.A., Marichev, O.I.**,** Fractional Integrals and Derivatives – Theory and Applications, Gordon and Breach, Longhorne, PA, (**1993**).

Alomari M. and Darus M. , On the Hadamard's inequality for log-convex functions on the coordinates, *Journal of Inequalities and Applications*, vol. 2009, Article ID 283147, 13 pages, (**2009**).

Anastassiou G., M.R. Hooshmandasl, Ghasemi A. and Moftakharzadeh F., Montogomery identities for fractional integrals and related fractional inequalities, *J. Ineq. Pure and Appl. Math.*, 10(4) **(2009)**, Art. 97.

Bakula M.K., Özdemir M.E., Pečarić J., Hadamard tpye inequalities for $m-$convex and $(\alpha, m)$-convex functions, *J. Ineq. Pure and Appl. Math.*, 9(4) **(2008)**, Art. 96.

Bakula M. K. and Pečarić J. , Note on some Hadamard-type inequalities, *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics,* vol. 5, no. 3, article 74, (**2004**).

Belarbi S. and Dahmani Z. , On some new fractional integral inequalities, *J. Ineq. Pure and Appl. Math.,* 10(3) **(2009)**, Art. 86.

Dahmani Z. , New inequalities in fractional integrals, *International Journal of Nonlinear Scinece*, 9(4) **(2010)**, 493-497.

Dahmani Z. , On Minkowski and Hermite-Hadamard integral inequalities via fractional integration, *Ann. Funct. Anal.* 1(1) **(2010)**, 51-58.

Dahmani Z. , Tabharit L., Taf S. , Some fractional integral inequalities, *Nonl. Sci. Lett. A*, 1(2) **(2010)**, 155-160.

Dahmani Z. , Tabharit L., Taf S. , New generalizations of Gruss inequality usin Riemann-Liouville fractional integrals*, Bull. Math. Anal. Appl.*, 2(3) **(2010)**, 93-99.

Dragomir S. S. and Pearce C. E. M. , Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications, *RGMIA Monographs,* Victoria University, (**2000**).

Dragomir S. S. and Agarwal R.P., Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula, *Appl. Math. lett.*, 11(5) **(1998)**, 91-95.

Dragomir S.S. , On some new inequalities of Hermite-Hadamard type for $m-$convex functions, *Tamkang J. Math.,* 3(1) **(2002)**.

Gill P. M. , Pearce C. E. M. , and Pečarić J. , Hadamard's inequality for $r$-convex functions, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 215, no. 2, pp. 461–470, (**1997)**.

Gorenflo R. , Mainardi F. , Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order, *Springer Verlag, Wien* **(1997)**, 223-276.

Kırmacı U.S., Bakula M.K., Özdemir M.E., Pečarić J., Hadamard-tpye inequalities for $s$-convex functions, *Appl. Math. and Comp.*, 193 **(2007)**, 26-35.

Miller S. and Ross B. , An introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, *John Wiley & Sons, USA,* (**1993)**, p.2.

Özdemir M. E. , Avci M. , and Set E., On some inequalities of Hermite-Hadamard type via $m$-convexity, *Applied Mathematics Letters*, vol. 23, no. 9, pp. 1065–1070, **(2010).**

Pečarić J.E. , Proschan F. and Tong Y.L. , Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications, *Academic Press, Boston*, 1992.

Podlubni I. , Fractional Differential Equations, *Academic Press, San Diego,* (**1999)**.

Sarikaya M. Z., E. Set, M. E. Ozdemir and S. S. Dragomir, New some Hadamard's type inequalities for co-ordinated convex functions, *Tamsui Oxford Journal of Information and Mathematical Sciences*, 28(2) **(2012)** 137-152.

Sarikaya M. Z. and Ogunmez H., On new inequalities via Riemann-Liouville fractional integration, *Abstract and Applied Analysis*, Volume 2012, Article ID 428983, 10 pages, doi:10.1155/2012/428983.

Sarikaya M. Z., Set E., Yaldiz H. and Basak N., Hermite -Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities, *Mathematical and Computer Modelling*, 2012, doi:10.1016/j.mcm.2011.12.048, in press

Sarikaya M. Z., Ostrowski type inequalities involving the right Caputo fractional derivatives belong to $L_p$, Facta Universitatis, *Series Mathematics and Informatics* , Vol. 27 No 2 **(2012)**, 191-197.

Sarikaya M. Z. and Yaldiz H., On weighted Montogomery identities for Riemann-Liouville fractional integrals, *Konuralp Journal of Mathematics,* Volume 1 No. 1 pp. 48-53, 2013.

Sarikaya M. Z. and Yaldiz H., On the Hadamard's type inequalities for $L$-Lipschitzian mapping, *Konuralp Journal of Mathematics*, accepted.

# 7 EKLER

## EK-1. YAYIN BİLGİSİ

**1.** Dördüncü bölümde ele alınan k-Riemann Liouville kesirli integraller ile ilgili çalışma "On the k-Rieman-Liouville fractional integral and applications" başlığı altında, British Journal of Mathematics and Computer Science, dergisinde **(2014)**, kabul edilmiştir.

# ÖZGEÇMİŞ

***Kişisel Bilgiler***


| | |
|---|---|
| Soyadı, adı | :KARACA AYSEL |
| Uyruğu | : T.C |
| Doğum tarihi ve yeri | : 24.03.1988 / MALATYA |
| Telefon | :05549682246 |
| E-posta | : filistin44@hotmail.com |


***Eğitim***

| Derece | Eğitim Birimi | Mezuniyet tarihi |
|---|---|---|
| Yüksek Lisans | Düzce Üniversitesi / Matematik Bölümü | 2014 |
| Lisans | Kırıkkale Üniversitesi / Matematik Bölümü | 2009 |
| Lise | Bolu Canip Baysal Lisesi | 2005 |

***İş Deneyimi***

| Yıl | Yer | Görev |
|---|---|---|
| 2009-2010 | Bolu Ticaret Meslek Lisesi | Matematik Öğr. |
| 2010-2011 | Bolu Kız Meslek Lisesi | Matematik Öğr. |