T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HATİCE FİLİZ

ARALIK 2013

DÜZCE

KABUL VE ONAY BELGESİ

Hatice Filiz tarafından hazırlanan Riemann-Liouville Kesirli İntegraller İçin Genelleştirilmiş İntegral Eşitsizlikleri Üzerine isimli lisansüstü tez çalışması, Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 16.12.2013 tarih ve 2013651 sayılı kararı ile oluşturulan jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç Dr. Zeki SARIKAYA
Tez Danışmanı

Doç. Dr. Nesip AKTAN
Üye

Yrd. Doç. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ
Üye

Tezin Savunulduğu Tarih: 20.12.2013

ONAY

Bu tez ile Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Hatice Filiz'in Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans derecesini almasını onamıştır.

Prof. Dr. Haldun MÜDERRİSOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

01.12.2013

Hatice FİLİZ

Sevgili Aileme

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim ve bu tezin hazırlanmasında süresince gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı değerli tez danışman hocam Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA'ya ve sevgili eşim Yrd. Doç. Dr. Ertuğrul FİLİZ'e en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme ve çalışma arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Aralık 2013 **Hatice FİLİZ**

İÇİNDEKİLER **Sayfa**

ŞEKİL LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

J_a^α	α. Dereceden Kesirli İntegral
D_a^α	α. Dereceden Kesirli Türev
Γ	Gamma Fonksiyonu
β	Beta Fonksiyonu
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
R^n	n-boyutlu Öklid Uzayı
I	R’de Bir Aralık
I^0	I’nın İçi
$f^{'}$	f Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
$AC[a,b]$	Mutlak Sürekli Fonksiyonların Kümesi
$R(\alpha)$	Riemann-Liouville Kesirli İntegral veya Türevinin Sanal Kısmı
$L_P(a,b)$	p. Dereceden (a,b) Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
D_{RL}^α	α. Dereceden Riemann-Liouville Kesirli Türevi

ÖZET

RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ ÜZERİNE

Hatice FİLİZ
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Aralık 2013, 41 sayfa

Kesirli analiz teorisi son on yıldır ciddi bir gelişme gösterdiği çok iyi bilinmektedir. Kesirli integral ve türevler, reel nesnel ve işlemlerin matematiksel modellemesinin yeterince sağladığını gösteriyor. Dolayısıyla, kesirli diferansiyel denklemlerin çalışılması daha çok kesirli tipteki eşitsizliklerin gelişmesine ihtiyaç vardır. Bu tezin amacı kesirli integraller yardımıyla Ostrowski eşitsizliğinin bazı yeni versiyonu verilecektir. Bu nedenle, bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde Riemann-Liouville Fractional integrallerinin nasıl oluştuğu açıklanmıştır. İkinci bölümde, çalışmamız için gerekli olan tanım ve temel teoremler verildi. Üçüncü bölümde, Riemann-Liouville Fractional integralleri'nin elde edilişi ve bu konu hakkındaki çözüm yöntemleri açıklanmıştır. Dördüncü bölümde, Riemann-Liouville Fractional integrallerinde Montogomery özdeşliklerinin genelleştirilmesi gerçekleştirilmiştir.

Anahtar sözcükler: Riemann-Liouville Fractional İntegralleri, Ostrowski Eşitsizliği, Hölder Eşitsizliği, Konveks fonksiyonlar.

ABSTRACT

ON SOME GENERALIZED INTEGRAL INEQUALITIES FOR RIEMANN-LIOUVILLE FRACTIONAL INTEGRALS

Hatice FİLİZ
Duzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Mehmet Zeki SARIKAYA
December 2013, 41 pages

The theory of fractional calculus has known an intensive development over the last few decades. It is shown that derivatives and integrals of fractional type provide an adequate mathematical modelling of real objects and processes. Therefore, the study of fractional differential equations need more developmental of inequalities of fractional type. In the purpose of the present thesis is to establish some new forms of the inequality of Ostrowski via fractional integrals. Therefore, this thesis consists of four chapters; Riemann-Liouville Fractional integrals were described, including how they appear in the first chapter. Definition and basic theorems that are necessary for our study were explained in the second part. The derivation of the Riemann-Liouville Fractional integrals and solution methods on this topic were discussed in the third chapter. We use the Riemann-Liouville fractional integrals to establish several new inequalities for some differantiable mappings that are connected with the celebrated Ostrowski type integral inequality in fourth chapter.

Keywords: Riemann-Liouville Fractional Integrals, Ostrowski Inequality, Hölder's Inequality, Convex Functions

EXTENDED ABSTRACT

ON SOME GENERALIZED INTEGRAL INEQUALITIES FOR RIEMANN-LIOUVILLE FRACTIONAL INTEGRALS

Hatice FİLİZ
Duzce University
Graduade School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Mehmet Zeki SARIKAYA
December 2013, 41 pages

1. INTRODUCTION:

This thesis consists of five chapters. In the first chapter, there is information about how the concepts of fractional integral and fractional derivative are consist and how it evolves. In the second chapter, there is definitions and the basic theorems have been mentioned which is necessary in this work. The third chapter is about obtaining the fractional integrals and fractional derivatives and the solution methods about them. In the fourth chapter is divided into the implementation of the fractional integrals for Ostrowski-Grüss type inequality.

2. MATERIAL AND METHODS:

Recently, several generalizations of the Ostrowski integral inequality for mappings of bounded variation and for Lipschitzian, monotonic, absolutely continuous and n -times differentiable mappings with error estimates for some special means and for some numerical quadrature rules are considered by many authors. For recent results and generalizations concerning Ostrowski's inequality see the references therein.

3. RESULTS AND DISCUSSIONS:

Fractional integrals have used for problems of estimating the time and currents which is formed by rain and snowmelts in Frat river basin and also for financial mathematics. These are some examples of fractional integrals in applied field. In this study, we obtain new Ostrowski-Grüss type inequality by using fractional integrals.

4. CONCLUSION AND OUTLOOK:

We give a generalized Montogomery identities for the Riemann-Liouville fractional integrals. We also use this Montogomery identities to establish some new Ostrowski type integral inequalities.

1. GİRİŞ

Konvekslik, M.Ö. 250 yılında Archimedes'in ünlü değerini hesaplamasına kadar uzanan basit ve bilinen bir kavramdır. Buna rağmen matematikte yer alması 19. yüzyıl sonu 20. yüzyıl başını bulmaktadır. Konvekslik kavramı ilk olarak Hermite tarafından Ekim 1881'de elde edilen bir sonucun, 1883 yılında Mathesis adlı dergide yayınlanmasıyla ortaya çıkmıştır. Hadamard'ın 1893 yılındaki çalışmasında konveksliğe rastlansa da konveks fonksiyonların sistematik olarak çalışılması 1905-1906 yıllarında J.L.W.V. Jensen ile başlar.

Konveksliğin tanımı eşitsizlikle ifade edildiğinden Konveks Fonksiyonlar Teorisinde eşitsizliklerin önemli bir yeri vardır. Hardy, Littlewood, Polya, Beckenbach, Bellman, Mitrinović, Pachpatte, Pecaric ve Fink gibi matematikçiler Konveks Fonksiyonlar ile Eşitsizlikler Teorisi'ni bir arada inceleyerek çeşitli kitaplar yazmışlardır. Bu tür eşitsizlikleri konu alan ilk temel çalışma 1934'te Hardy, Littlewood ve Polya tarafından yazılan Inequalities adlı kitaptır (Hardy et al. 1952). İkinci çalışma ise E.F. Beckenbach ve R. Bellman tarafından 1961'de yazılan 1934-1960 yılları arasında elde edilen yeni eşitsizliklerin sonuçlarını içeren ve yine Inequalities adı verilen kitaptır. Bunu Mitrinović'in 1970 yılında yayınladığı ve ilk iki kitapta bulunmayan farklı konulara da yer verdiği Analytic Inequalities isimli kitabı takip eder. Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler içeren ilk kaynak ise Convex Functions: Inequalities başlığıyla 1987 yılında Pečarić tarafından yazılmıştır. Bu temel kaynakların yanı sıra Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives (Mitrinović et al. 1991), Classical and New Inequalities in Analysis (Mitrinović et al. 1993), Mathematical Inequalities (Pachpatte 2005) ve Convex Functions and Their Applications (Niculescu and Perssons 2006) literatürde mevcut olan diğer kaynaklardır.

Konveks Fonksiyonlar Teorisi ile ilişkili olan Eşitsizlik Teorisi ise C.F. Gauss, A.L. Cauchy ve P.L. Čebyšev ile gelişmeye başlamıştır. 19.-20. yy'da bulunan eşitsizliklerin bir kısım konveks fonksiyonlarla ilişkilendirilerek temel eşitsizlikler haline gelmiştir. Bunların en önemlileri 1981 yılında Hermite tarafından elde edilen, bu tezdeki çalışmaların da temelini oluşturacak olan Hermite-Hadamard eşitsizliği ve 1938 yılında Ostrowski tarafından elde edilen Ostrowski eşitsizliğidir. Hermite-Hadamard eşitsizliği ile ilgili çalışmaların büyük bir kısım S.S. Dragomir ve C.E.M. Pearce tarafından 2000 yılında yazılmış olan Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications isimli kitapta; Ostrowski eşitsizliği ile ilgili çalışmaların büyük bir kısım da S.S. Dragomir ve Themistocles M. Rassias tarafından 2002 yılında yazılmış olan Ostrowski Type Inequalities and Applications in Numerical Integration isimli kitapta bir araya getirilmiştir. Konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler üzerine çalışan diğer matematikçiler Ravi Agarval, G. Anastassiou, G.V. Milovanovic, A.M. Fink, Roberts and Varberg, N.S. Barnett, M.E. Özdemir, U.S. Krmac, H. Yıldırım, M.Z. Sarıkaya, N. Ujević, S. Varošanec, P.S. Bullen ve P. Cerone şeklinde sıralanabilir.

Kesirli türev ve kesirli integral kavramlar ilk olarak Liouville tarafından duyuruldu. Kesirli türev ve kesirli integral kavram türev ve integrallerin sadece tamsayılar için varmıdır sorusundan yola çıkılarak ortaya çıktı. Euler kesirli türevi ele aldı. 17. yüzyıldan itibaren Leibniz, Euler, Lagrange, Abel, Liouville ve diğer bir çok matematikçinin, kesirli mertebe için diferansiyel ve integrasyonun genelleştirilmesine dayanan öncü çalışmalarıyla gelişmeye başlanmıştır. Keyfi mertebeli diferansiyel ve integrasyon kavramlar, tamsayı mertebeli türev ve n -katlı integralleri birleştiren ve genelleştiren kavramlardır.

Uygulamalı alanlarda kesirli türev ve kesirli integral kavramlar hakkında birçok çalışma olmasına rağmen herhangi bir monografi yayınlanmamıştır. Bunun üzerine S.G. Samko ile A.A. Kilbas ve O.I. Marichev tarafından bu boşluk doldurulmuştur. Kesirli türev ve kesirli integral kavramlar ile geniş kapsamlı bir monografi yayınlanmıştır.

Kesirli diferansiyel teorisi çeşitli madde ve işlemlerin kalıtsal özelliklerinin tanımlanmasında kullanılabilecek çok iyi bir araçtır. Bu ise tamsayı mertebeli türevlerle karşılaştırıldığı zaman, kesirli türevler için önemli bir avantajdır. Kesirli türevlerin bu avantajı nesnelerin mekanik ve elektriksel özelliklerinin matematiksel modellemelerinde, akışkanlar teorisi, elektrik devreleri, elektro-analitik kimya gibi diğer bir çok alanda kullanılmaktadır.

Bu çalışmada kesirli türev kavramı ile konveks fonksiyonlar kavramların birlikte ele alarak çalışmamızın son kısmını oluşturacak olan genelleştirilmiş bazı integral eşitsizlikleri elde edildi. . İlk olarak sonuçların elde edilmesi için klasik olarak bilinen Montgomery özdeşliğini biz daha genel hali kesirli integraller için elde ederek bazı önemli sonuçlar elde edildi. Son olarak da farklı bir ispat yöntemiyle kesirli integraller için Ostrowski eşitsizliğini elde ettik.

2. KURAMSAL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmamız için gerekli olan tanım, teorem, bazı eşitlikler ve temel özellikler verilecektir. Gerekli görülenler için ispatlar yapılarak birer örnek verilecektir.

Tanım 2.1. Lineer uzaydan reel(kompleks) uzaya olan dönüşümlere fonksiyonel denir.

Tanım 2.2. Fonksiyonlar cümlesini fonksiyonlar cümlesine dönüştüren dönüşüme operatör denir.

Tanım 2.3. (Gamma Fonksiyonu) $n>0$ için

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty e^{-u}\, u^{n-1} du$$

ile tanımlanır. Bu integral n>0 için yakınsaktır. Gamma fonksiyonun bazı önemli özelliklerini şöyle sıralayabiliriz.

i. $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n!$ (2)

ii. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

iii. $\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x}dx=\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi} \quad 0<p<1$

iv. $2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\Gamma(2n).$

Tanım 2.4. (Konveks Fonksiyon) $f:[a,b]\subset \mathrm{R}\to \mathrm{R}$ konveks fonksiyon ise $x,y\in[a,b]$ ve $\lambda\in[0,1]$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

Konveks Fonksiyonların Temel Özellikleri:

i. k tane fonksiyon $\mathrm{R}^n\to\mathrm{R}$ ye konveks fonksiyonlar olsun. Bu takdirde;

$$f(x)=\sum_{j=1}^{k} a_j f_j(k), a_j>0; (j=1,2,3,...,k)$$

fonksiyonu da konvekstir.

ii. $g:\mathrm{R}^n\to\mathrm{R}$ konkav ve $S=\{x : g(x)>0\}$ olsun. $f : S\to\mathrm{R}$, $f(x)=\frac{1}{g(x)}$ olmak üzere f, S' de konvekstir.

iii. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ azalmayan ve konveks fonksiyon ayrıca $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveks olsun. Bu takdirde; $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = (g \circ h)(x)$ olarak tanımlanan f bileşke fonksiyonu da konvekstir.

iv. $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ konveks ve h, $h(x) = Ax + B$ formunda $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveks olmak üzere (Burada A uygun matristir.)

$$f(x) = g(h(x))$$

fonksiyonu konveks fonksiyondur.

v. f ve g J_- konveks ise $f(x) + g(x)$ de J_- konvekstir.

vi. f, $\overline{I'}$ 'de J_- konveks ve g, $\overline{I''}$ de J_- konveks ise bu takdirde $f(x)g(x)$ de $\bar{I} = \overline{I'} \cap \overline{I''}$ de J_- konvekstir.

Tanım 2.5. $f : L_1[a,b]$ olsun. $J_{a^+}^{\alpha} f$ ve $J_{b^-}^{\alpha} f$ Riemann-Liouville integralleri $\alpha > 0$ ile $a \geq 0$ için tanımladığımızda,

$$J_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad x > a$$

ve

$$J_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad x < b$$

dır. $\Gamma(\alpha)$ bir Gamma fonksiyonu ve $J_{a+}^{0} f(x) = J_{b-}^{0} f(x) = f(x)$ dır.

Tanım 2.6. (Beta Fonksiyonu) $m, n > 0$ için

$$\beta(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx$$

biçiminde tanımlanan β fonksiyonuna *Beta fonksiyonu* denir.

Tanım 2.7. V boş olmayan bir küme ve K bir cisim olsun. Aşağıdaki önermeler doğru ise, V kümesi K cismi üstünde bir *vektör uzayı* dır, denir.

(1) Her $u, v \in V$ için, $u + v$ tanımlıdır ve $u + v \in V$ dir. Sözle ifade ettiğimizde, V kümesi toplama işlemine göre kapalıdır.

$(V1)$ V kümesinde + ile gösterilen ve adına *toplama* denilen bir işlem tanımlanmıştır ve $(V,+)$ değişmeli gruptur.

(2) Her $u, v, w \in V$ için, $(u+v) + w = u + (v+w)$ dir. Sözle ifade ettiğimizde, V kümesinde toplama işleminin birleşme özelliği vardır.

(3) $\quad [\exists 0 \in V, (\forall u \in V \text{ için, } u+0=u \text{ ve } 0+u=u)]$ dır. Sözle ifade ettiğimizde, V kümesinde toplama işleminin etkisiz $(birim)$ eleman vardır. Bu etkisiz eleman 0 simgesi ile gösterdik.

(4) Her $u \in V$ için, V kümesinde $-u \in$ ile gösterilen ve

$u+(-u)=0 \text{ ve } (-u)+u=0$

eşitliklerini sağlayan bir $-u$ eleman vardır. Sözle ifade ettiğimizde, V kümesindeki her bir u elemanın toplamaya göre tersi vardır. u nun tersi $-u$ ile gösterilmiştir.

(5) Her $u,v \in V$ için, $u+v=v+u$ tir. Sözle ifade ettiğimizde, V kümesinde toplama işleminin değişme özelliği vardır.

$(V2)$ $\quad K \times V \to V(a,u) \to au$ biçiminde, adına *skalerle* çarpma işlemi denilen bir fonksiyon tanımlanmıştır ve bu fonksiyon aşağıdaki önermeleri doğrular:

(a) Her $a \in K,$ her $u.v \in V$ için, $a(u+v)=au+av.$

(b) Her $a,b \in K,$ her $u \in V$ için, $(a+b)u=au+bu.$

(c) K nın çarpmaya göre birim eleman 1 olduğuna göre, V nin her eleman için, $1u=u$ dır.

(d) Her $a,b \in K,$ her $u \in V$ için, $(ab)u=a(bu).$

Tanım 2.8. $V,$ reel sayı cismi üstünde vektör uzay ise, bu vektör uzayına *reel vektör uzayı* denir. $V,$ karmaşık sayı cismi üstünde vektör uzayı ise bu durumda V ye *kompleks vektör uzayı* denir.

Tanım 2.9. $\Omega_1=[a,b],$ $\Omega_2=[c,d]$ $\quad -\infty \le a < b \le \infty,$ $\quad -\infty \le c < d \le \infty$ ve $f(x,y),$ $\Omega_1 \times \Omega_2$ üzerinde tanımlı olsun. Bu durumda,

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x,y)dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x,y)dx$$

şeklindeki eşitliğe *Dirichlet formülü* denir.

Tanım 2.10. $(\textit{Mutlak Süreklilik})$ $I \subset \mathrm{R}$, $f : I \to \mathrm{R}$ bir fonksiyon ve (x_k, y_k) sonlu bir aralık olsun. Bu durumda, $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ vardır öyle ki,

$$\sum_k |y_k - x_k| < \delta \Rightarrow \sum_k |f(y_k) - f(x_k)| < \varepsilon$$

dır.

Tanım 2.11. $x,y \in R_\alpha$ için $|x+y| \le |x|+|y|$ şeklindeki eşitsizliğe üçgen eşitsizliği denir.

Tanım 2.12. (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu) f , $[a,b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left|\int_b^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx \quad (a<b)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Tanım 2.13. E ölçülebilir bir küme olmak üzere f bu küme üzerinde tanımlı ve reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda keyfi K sayısı için $f(x)>K$ olan $x\in E$ değerlerin kümesi ölçülebilirse f fonksiyonuna *Ölçülebilir fonksiyon* denir.

Tanım 2.14. $I\subset \mathbb{R}$, $f : I\to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $\forall x\in I$ için $|f(x)|\le K$ olacak şekilde bir K pozitif reel sayısı varsa f fonksiyonuna *sınırlı fonksiyon* denir.

Tanım 2.15. $1\le p<\infty$ olmak üzere

$$L^p = L_p = \left\{ f \ : \ \left(\int_E |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\} \quad , \quad \|f\|_\infty = \left(\int_E |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$ normuna göre bir *Banach* uzayıdır.

Ostrowski Eşitsizliği: $f : I\subset[0,\infty)\to \mathbb{R}$, I^o ' de diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $f' \in L[a,b]$ olacak şekilde I sınırlı olsun. Burada $a<b$ ve $a,b\in I$ dır. Eğer $|f'(x)|\le M$ ise

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \le M(b-a)\left[\frac{1}{4}+\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right]$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik literatürde Ostrowski Eşitsizliği olarak bilinir.

İspat. Kısmi integrasyon yöntemi kullanılarak,

$$P_1(x,t) := \begin{cases} \frac{t-a}{b-a}, & a\le t<x \\ \frac{t-b}{b-a}, & x\le t\le b \end{cases}$$

Peano çekirdeği yardımıyla *Montgomery* özdeşliği olarak bilinen

$$f(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt + \int_a^b P_1(x,t)f'(t)dt$$

ifadesi elde edilebilir. Burada $|f'(t)|<M$ kullanılırsa,

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \right| \le \int_a^b |P_1(x,t)| \left| f^{'}(t) \right| dt$$

$$\le \frac{M}{b-a}\left[\int_a^x (t-a)dt + \int_x^b (b-t)dt \right]$$

$$= \frac{M}{2(b-a)}\left[(x-a)^2 + (b-x)^2 \right]$$

elde edilir. Böylece

$$(x-a)^2 + (b-x)^2 = \left(x - \frac{a+b}{2} + \frac{a+b}{2} - a \right)^2 + \left(b - \frac{a+b}{2} + \frac{a+b}{2} - x \right)^2$$

$$= \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 + 2\left(x - \frac{a+b}{2} \right)\left(\frac{b-a}{2} \right) + \left(\frac{b-a}{2} \right)^2$$

$$+ \left(\frac{b-a}{2} \right)^2 + 2\left(\frac{b-a}{2} \right)\left(\frac{a+b}{2} - x \right) + \left(\frac{a+b}{2} - x \right)^2$$

$$= 2\left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 + 2\left(\frac{b-a}{2} \right)^2$$

$$= 2(b-a)^2\left[\frac{1}{4} + \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2} \right]$$

kullanılarak ispat tamamlanmış olur.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Fractional kalkülüs'ün ortaya çıkışı 1695 yılında Leibniz'in $f(x) = x$ lineer fonksiyonun n. dereceden türevinde $(\frac{D^n x}{Dx^n})$, $n = \frac{1}{2}$ için türev olabilir mi sorusunu sormasıyla başlamıştır. Leibnizden sonra Fourier, Euler, Laplace gibi matematikçilerde bu konuyla uğraşmaya başlamışlardır ve bu konuyla ilgili birçok tanım geliştirilmiştir. Bu tanımlamalar Riemann-Liouville ve Grunwald-Letnikov tanımlarıdır. Fractional Calculus'un anlaşılması için Gamma fonksiyonu, Beta fonksiyonu, Laplace dönüşümü ve Mittag-Leffler fonksiyonu önemli bir rol oynamaktadır.

Gamma fonksiyonu,

$$n > 0 \text{ için } \Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-u} u^{n-1} du \tag{1}$$

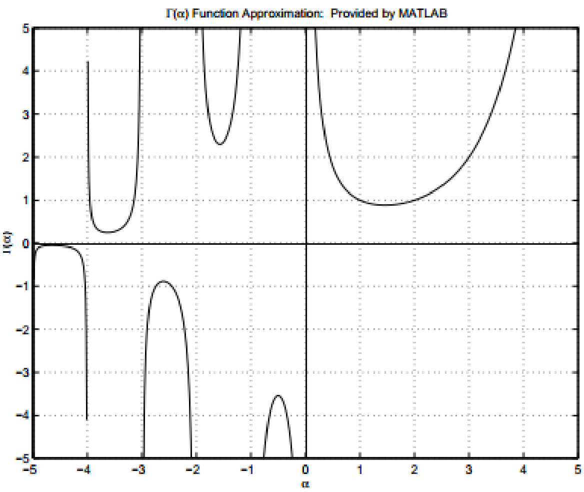
ile tanımlanır. Bu integral $n > 0$ için yakınsaktır. Gamma fonksiyonun bazı önemli özelliklerini şöyle sıralayabiliriz.

i. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$ (2)

ii. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

iii. $\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x} dx = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi} \quad 0 < p < 1$

iv. $2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2n).$



Şekil 3.1. Gamma fonksiyonunun grafiği.

Şekil 1'de Gamma fonksiyonunun sıfır civarındaki durumu gözükmektedir. Negatif tam sayı değerleri için gamma fonksiyonu sonsuza gider. Tam sayı olmayan değerler için ise tanımlanmamıştır.

$$\mathring{\Phi}_\alpha(t) := \frac{t_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \tag{3}$$

Gamma fonksiyonunu kullanarak, $\Phi(t)$ yi tanımlayabiliriz ki Fractional integralin alternatif formlarının gösterilmesi için oldukça faydalıdır.

Beta fonksiyonu,

$$\beta(\mathrm{p,q}) := \int_0^1 (1-u)^{p-1}\, u^{q-1} \mathrm{du} = \frac{\Gamma(\mathrm{p})\Gamma(\mathrm{q})}{\Gamma(\mathrm{p+q})} = \beta(\mathrm{q,p}), \quad \mathrm{p,q} \in R_+ \tag{4}$$

olarak tanımlanır ve Euler integrali olarak bilinir. Beta fonksiyonu Fractional kalkülüste önemli bir yere sahiptir. Çözümü çoklu gamma fonksiyonları ile değil bunun yanında pek çok fonksiyonun özellikle Mittag-Lefler fonksiyonu ve t^a nın polinomlarıyla benzer karakteristik formları paylaşır.

Laplace dönüşümü kompakt diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan önemli bir yöntemdir.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} := \int_0^\infty e^{-st}\, \mathrm{f(t)dt} = \tilde{f}(s) \tag{5}$$

(5) ile tanımlı Laplace dönüşümünde f(t) fonksiyonu yakınsak integraldir. e^{-st} azaldığında f(t) 'nin azalması mümkün değildir.

$$f(t) * g(t) := \int_0^t f(t-T)\, g(T) dT = g(t) * f(t) \tag{6}$$

t'nin tanım kümesinde iki fonksiyonun yakınsaklığını çözmek zordur. s'nin tanım kümesindeki basit bir fonksiyon (7)'deki Laplace ile daha kolayca sonuçlanır.

$$\mathcal{L}\big\{ f(t) * g(t) \big\} = \tilde{f}(s)\tilde{g}(s) \tag{7}$$

(8) de $f(t)$ fonksiyonunun n tamsayı değerlerindeki türevlerinin Laplace dönüşümleri

$$\mathcal{L}\{\mathrm{f^n(t)}\} = s^n\tilde{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) = s^n\tilde{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0) \tag{8}$$

şeklinde verilir.

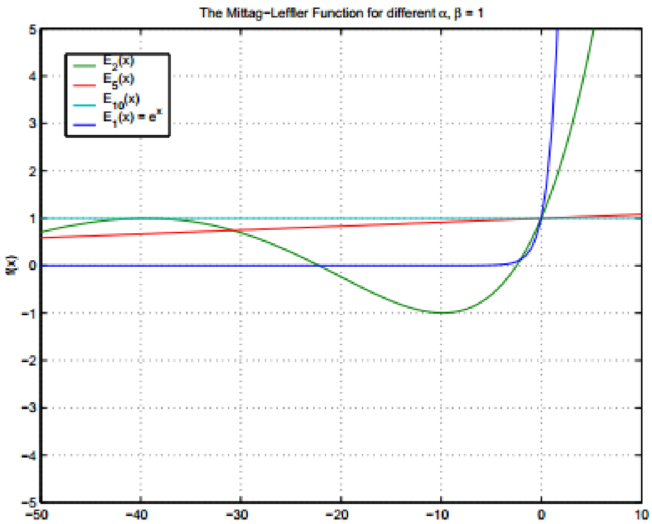
Mittag-Leffler fonksiyon Fractional calculusta sıklıkla kullanılır. Mittag-Leffler fonksiyonu diferansiyel denklemlerin tamsayı olmayan değerlerinin çözümünde özellikle kullanılır. $\alpha > 0$ için

$$E_\alpha(z) \quad = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \tag{9}$$

tanımlanır ve $\alpha = 1$ için üstel fonksiyon için aynı yönlüdür. $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ değerleri için daha genel olarak

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \tag{10}$$

olarak tanımlanır.



Şekil 3.2. $\alpha, \beta = 1$ için Mittag-Lefler fonksiyonunun grafiği.

Bir fonksiyonun tekrarlanan integralinin geleneksel açılımından Fractional integrali elde edilebilir. Bu yaklaşım Riemann-Liouville yaklaşımı olarak bilinir ve

$$\int \ldots \int_0^t f(T)dT = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-T)^{n-1} f(T)dT \tag{11}$$

olarak yazılabilir. Yukarıdaki formül gösteriyor ki f(t) fonksiyonunun n. dereceden integrali için Cauchy'e atıfta bulunur. Bu formülün kısaltılmış bir temsili için J^n operatörü kullanılır ve

$$J^n f(t) \coloneqq f_n(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-T)^{n-1} f(T)dT \tag{12}$$

olarak yazılır. Sıklıkla J^n yerine D^{-n} de kullanılabilir. Tekrarlayan integral fonksiyonlarının aynı formülasyonları kullanıldıklarında iç değişkeni olarak görülebilirler. Özellikle çoklu operatörler kullanıldığında D^{-n} kullanımında hata olabilir. (11) de direkt kullanıldığı zaman n tamsayı olarak sınırlandırılır. İlk kısıtlama fonksiyonelin kullanımıdır ki tamsayı olmayan değerlerde anlamsızdır. Buna karşın gamma fonksiyonu bütün reel değerler için faktöriyelin analitik genişlemesidir ve (2) de faktöriyelin yerinde kullanılır. Sonuç olarak gamma fonksiyonu eşitliği yerine konulduğunda $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}_+$ için (12) yi

$$J^\alpha f(t) \coloneqq f_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-T)^{\alpha-1} f(T)dT \tag{13}$$

şeklinde genişletilebilir. Fractional integral formülü önemli özellikler taşır. İlk olarak $\alpha = 0$ da

$$J^0 f(t) = f(t) \tag{14}$$

dır. İntegral tanımından ve Cauchy tekrarlanan integral denkleminden

$$J^n J^m = J^{n+m} = J^m J^n \qquad n, m \in \mathbb{N} \tag{15}$$

$$J^\alpha J^\beta = J^{\alpha+\beta} = J^\beta J^\alpha \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{N} \tag{16}$$

dır. f(t) bir causal (kompakt nedene sahip olsun) fonksiyonu olsun öyle ki $t < 0$ da sıfır olsun. Bu kuralın sonucu uygun olmasına rağmen bu durumun uygunluğu özellikle (16) da gösterilen özelliğin içeriğine uygundur. Bu etki $f(0) = f_n(0) = f_\alpha(0) \equiv 0$ dır.

Φ_α fonksiyonunu Riemann-Liouville integraline yerleştirirsek,

$$\Phi_\alpha = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \Rightarrow \Phi_\alpha(t) * f(t) = \int_0^t \frac{(t-T)_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(T) \tag{17}$$

olur. t_+, $t \leq 0$ için fonksiyonun sıfır olduğunu gösterir. Sonuçta (17) nedensel fonksiyon olarak adlandırılır. (6) da verilen Laplace konvulasyon tanımı yardımıyla

$$J^{\alpha} f(t) = \Phi_{\alpha}(t) * f(t)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - T)^{n-1} f(T) dT \tag{18}$$

yazılır. Burada Riemann-Liouville Fractional integrelinin Laplace dönüşümünü bulacağız. (17) de iki terim olan Φ_{α} ve f(t) nin konvulasyonunu gösterdik. $t^{\alpha-1}$ Laplace dönüşümü

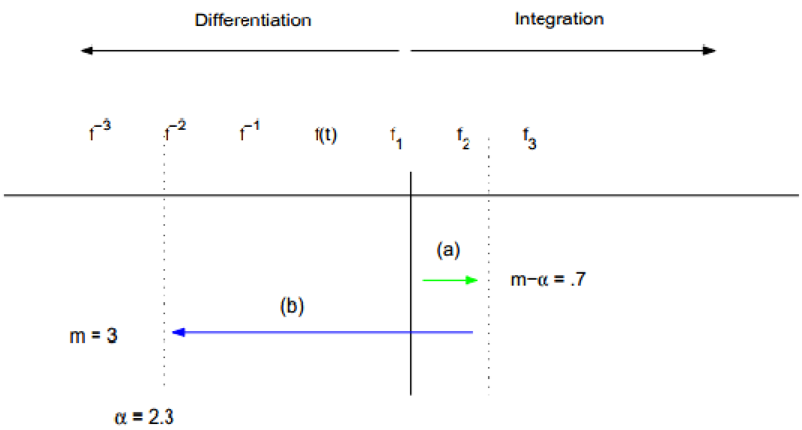
$$\mathcal{L}\{t^{\alpha-1}\} = \Gamma(\alpha) s^{-\alpha} \tag{19}$$

dır. Böylece (17) de gösterilen Φ_{α} fractional integralin konvulasyon ilişkisi ve (6) da gösterilen konvulasyonun Laplace dönüşümü Fractional integralin Laplece dönüşümü ise

$$\mathcal{L}\{J^{\alpha}\} = S^{-\alpha} \tilde{f}(s) \tag{20}$$

olarak bulunur.

Fractional türevlerde Riemann-Liouville fonksiyonun tekrarlanan integrallerin açılımı ile başlar. Türev içinde benzer yaklaşımlar tekrarlanabilir. $\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha \in R_+$ olduğunda diferansiyellenebildiğini düşünelim. Şimdi m tamsayısı seçelim öyle ki $m - 1 < \alpha < m$ olsun. O halde, çözüm için iki metot vardır. Birinci metot aşağıdaki grafik 3 de gösterilmiştir.

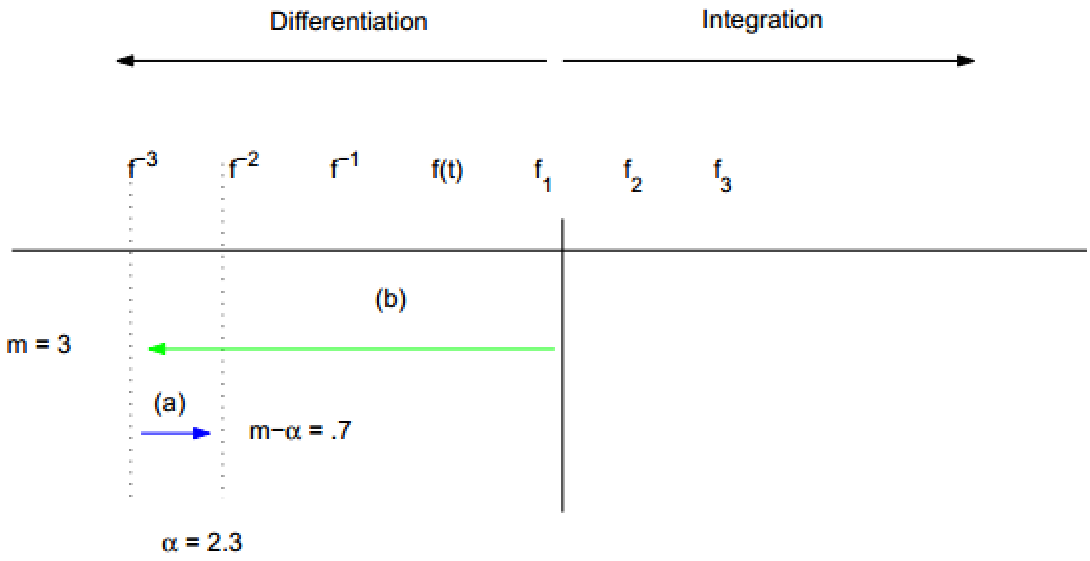


Şekil 3.3. Sağ-el kuralının grafikal gösterimi.

Bunun açıklaması basittir. m bir tamsayı olsun. İlk adım (a) geçişini tamamlamak olsun. f(t) fonksiyonunun integrali $m - \alpha = .7$ şekilde $\alpha = 2.3$ dür. İkinci olarak m=3(operatör(b)) ile $f_{.7}(t)$ fonksiyonunu diferansiyelleyelim. Sonuç olarak α 'nın diferansiyellenebildiği bitirmiş olduk. Bunun tamamı (21) de verilmiştir.

$$D^{\alpha} f(t) := \begin{cases} \dfrac{d^m}{dt^m}\left[\dfrac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\displaystyle\int_0^t \dfrac{f(\mathrm{T})}{(t-\mathrm{T})^{\alpha+1-m}} d\mathrm{T}\right], & m-1 < \alpha < m \\ \dfrac{d^m}{dt^m} f(t), & \alpha = m \end{cases} \tag{21}$$

Sağ-el kuralı olarak tanımlanan ikinci metot Şekil 4 de gösterilmiştir.



Şekil 3.4. Sol-el kuralının grafikal gösterimi.

Sağ-el kuralı (a) ve (b) operasyonlarını kullanarak aynı sonucu elde etmeye çalışır. Bunun matematiksel sonucu aşağıdaki denklemde gösterilmiştir.

$$D_*^{\alpha} f(t) := \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\displaystyle\int_0^t \dfrac{f^{(m)}(\mathrm{T})}{(t-\mathrm{T})^{\alpha+1-m}} d\mathrm{T}, & m-1 < \alpha < m \\ \dfrac{d^m}{dt^m} f(t), & \alpha = m \end{cases} \tag{22}$$

İkinci tanım sağ-el kuralı olarak burada tanımlanmasına rağmen Caputo tarafından formüle edilmiştir ve genel olarak Caputo Fractional Türevi olarak isimlendirilir.

Fractional türevler için sağ el kuralı sol el kuralından sınırlayıcıdır. Şimdi de Riemann-Liouville Fractional integrallerin sınırlamalarını görelim. Önceden bahsedildiği gibi causel fonksiyonu $f(t)$ ye ihtiyaç duyulur. $t \leq 0$ de kaybolur. Sol-el kuralı için t nin başlangıç fonksiyonu bu durumu sağladığında $\alpha > 0$ ın bütün tam sayıları için gereklidir. Buna rağmen sağ-el kuralı için m değerindeki $f(t)$ fonksiyonunun farklılaşması sadece $f(0) = 0$ yapmaz $f^{(1)} = f^{(2)} \ldots f^{(m)} = 0$ olur.

Matematik dünyasında sağ-el kuralının bu kırılganlığı zayıflatılabilinir. Herhangi biri sağ-el kuralı neden gereklidir sorusunu sorabilir. Bu sorunun cevabı diferansiyel denklemlerin tam sayı olmayan değerlerini çözüldüğü zaman bu soruların cevabı gelir. Matematiksel mantıkta uygun başlangıç şartlarının verildiği bu problemin çözümünde sol-el kuralını kullanmak mümkündür. Bu olduğu zaman, buna karşın tamsayı olmayan diferansiyel denklemlerin Fractional çözümleri için başlangıç şartları gereklidir. Ayrıca sol-el kuralı kullanılarak bir sabitin Fractional türevi sıfır değildir ve

$$D^{\alpha}C = \frac{Ct^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \tag{23}$$

sol-el kuralı üzerindeki sağ-el kuralı gösterimi basittir. Fractional integrallerin özellikler alt başlığında Fractional integrallerin Laplace dönüşümlerini gösterdik. Bu tanımı kullanarak sol-el kuralı Fractional türevlerin Laplace dönüşümünü benzer şekilde bulabiliriz. Bu formun Fractional türevleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$D^{\alpha}f(t) = g^{(m)}(t), \qquad g(t) = J^{m-\alpha}f(t) \quad m-1 \leq \alpha < m \tag{24}$$

(8) de kullanılan özellik ve Fractional integrallerin Laplace dönüşüm tanımları kullanılarak,

$$\mathcal{L}\{D^{\alpha}f(t)\} = s^{m}\tilde{g}(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{k} g^{(m-k-1)}(0) = s^{\alpha}\tilde{f}(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{k} D^{(\alpha-k-1)}f(0) \tag{25}$$

şeklinde buluruz. Burada anlaşılır ki tüm k dan n-1 terimleri için istenilen başlangıç şartları gereklidir. Sol-el kuralı için aşağıdaki şekilde türevleri yazarak başlayalım.

$$D_{*}^{\alpha}f(t) = J^{m-\alpha}g(t), \qquad g(t) = f^{(m)}(t), \quad m-1 \leq \alpha < m \tag{26}$$

(20) deki Laplace dönüşümünden sonra

$$\mathcal{L}\{D_{*}^{\alpha}f(t)\} = s^{-(m-\alpha)}\tilde{g}(s) = s^{\alpha}\tilde{f}(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \tag{27}$$

olur. Bu formülasyonda $f(t)$ nin türevinde α değeri gözükmez fakat tercihen çarpanı görünür, sol-el kuralı için bölgenin dışındadır. Böylece tamsayı değer türevleri başlangıç şartı olarak kullanılır ve sonunda fizikse veriler ve gözlemler aracılığıyla kolayca yorumlanır.

Riemann-Liouville yaklaşımının dışında Grunwald-Letnikov formülüzasyonu probleme türevlenen taraftan yaklaşır. Bunun için türevin temel tanımından başlayalım.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{28}$$

dır. Bu formülü tekrar uyguladığımızda ikinci türevi bulabiliriz.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \\ &= \lim_{h_1\to 0} \frac{\lim\limits_{h_2\to 0} \dfrac{f(x+h_1+h_2)}{h_2} - \lim\limits_{h_2\to 0} \dfrac{f(x+h_2) - f(x)}{h_2}}{h_1} \end{aligned} \tag{29}$$

h nin aynı değerleri seçilerek örneğin $h = h_1 = h_2$, ifadesi yazıldığında

$$f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} \tag{30}$$

n. türev için yukarıdaki işlem aşağıdaki toplam içinde gösterilebilir. Türevin n tekrarlarını temsil etmek için d^n operatörünü kullanırsak

$$d^n f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} f(x - mh) \tag{31}$$

yazılır. Bu ifade $\alpha \in \mathbb{R}$ olan n değerleri için tamsayı olmayan değerler için genelleştirilebilir ki binomial katsayı standart faktöriyelde Gamma fonksiyonu kullananıldığında anlaşılır. Ayrıca toplamın üst limiti $\frac{t-\alpha}{h}$ olarak sonsuza gider.(t ve α sırasıyla diferansiyelin üst ve alt limitidir.) Böylece Grunwald-Letnikov fractional türevinin genel formuna soldan yaklaşımı

$$d^\alpha f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{m=0}^{\frac{t-\alpha}{h}} (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha+1)}{m!\,\Gamma(\alpha - m + 1)} f(x - mh) \tag{32}$$

kabul edilir ki Fractional integral için aynen Riemann-Liouville tanımındaki gibi Fractional türevler tanımlamak için kullanılabilir. Grunwald-Letnikov türevinin yukarıdaki formu Fractional integrallerin alternatif tanımında kullanım için değiştirilebilir. Bu formun en doğal değişimi negatif α için Grunwald-Letnikov türevini gözden geçirmektir. Eğer formu $\binom{-n}{m}$ e döndürürsek faktöriyel ile açıklanamaz.

$$\binom{-n}{m} = \frac{-n(-n-1)(-n-2)(-n-3)\ldots(-n-m+1)}{m!} \tag{33}$$

Bu $\binom{-n}{m}$ form tekrar

$$\begin{aligned}\binom{-n}{m} &= (-1)^m \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+m-1)}{m!} \\ &= (-1)^m \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!\,m!}\end{aligned} \tag{34}$$

şekilde yazılabilir. Yukarıdaki faktöriyel ifadesi Gamma fonksiyonu kullanıldığında negatif değerler için genelleştirilebilir, böylece

$$\binom{-\alpha}{m} = (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha+m)}{\Gamma(\alpha)m!} \tag{35}$$

yukarıdaki denklem kullanıldığında $-\alpha$ için (32) yi tekrar yazabiliriz ve böylece Grunwald-Letnikov Fractional integraline soldan yaklaşılır.

$$d^{-\alpha}f(x) = \lim_{h\to 0} h^{\alpha} \sum_{m=0}^{\frac{t-\alpha}{h}} \frac{\Gamma(\alpha+m)}{\Gamma(\alpha)m!} f(x-mh) \tag{36}$$

Bu nokta Grunwald-Letnikov ve Riemann-Liouville tarafından önerilen Fractional calculus'un iki formülü gösterilmiştir. Fractional integral ve türevler için Riemann-Liouville tanımı göreceli basit fonksiyonlar için analitik çözümler bulunmasını sağlar. Bunun tersi olarak Grunwald-Letnikov tanımı nümerik değerlendirmeler için kolayca kullanılır.

Fractional integral eşitliğinin birinci formu

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{u(\mathrm{T})}{(t-\mathrm{T})^{1-\alpha}} d\mathrm{T} = f(t), \;\; 0 < \alpha < 1 \tag{37}$$

olarak tanımlanır. Bu eşitlik ayrıca şöyle de yazılabilir:

$$J^{\alpha}u(t) = f(t) \tag{38}$$

Bu türün çözümü basittir ve şöyle yazılır.

$$u(t) = D^{\alpha}f(t) \tag{39}$$

Sol-el kuralındaki iç değişkenli bu durumda fractional türev için Caputo veya sağ-el kuralı kullanılabilir, buna karşın şu vurgulanabilir ki her durumda $D_{*}^{\alpha}J^{\alpha}f(t)$ hesaplanamaz.

Gerçekte aşağıda gösterilecektir ki Laplace dönüşümünün kullanılmasıyla çözümüne ulaşılacaktır, sağ-el kuralı (37) yi çözmek için kullanıldığında arta kalan terim ortaya çıkar.

Laplace yardımıyla, birinci çeşit integral denklemleri aşağıdaki şekilde farz edilmiştir.

$$J^{\alpha}u(t) = \Phi_{\alpha}(t) * u(t) \Rightarrow \mathcal{L}\{\Phi_{\alpha}(t) * u(t)\} = \frac{\tilde{u}(s)}{s^{\alpha}} \tag{40}$$

Cebirsel olarak, (40) da ki denklemin sonucundan aşağıdaki sonuçlar

$$\tilde{u}(s) = s^{\alpha}\tilde{f}(s) \Rightarrow s\left[\frac{\tilde{f}(s)}{s^{1-\alpha}}\right] \tag{41}$$

veya

$$\tilde{u}(s) = s^{\alpha}\tilde{f}(s) \Rightarrow \frac{1}{s^{1-\alpha}}\left[s\tilde{f}(s) - f(0)\right] + \frac{f(0)}{s^{1-\alpha}} \tag{42}$$

olarak yazılabilir. (41) ifadesinden zaman alanına geri çevrildiğinde

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_{0}^{t}\frac{f(\mathrm{T})}{(t-\mathrm{T})^{\alpha}}d\mathrm{T} \\ &= f(t) \end{aligned} \tag{43}$$

elde ederiz ki sol-el kuralı denkleminin çözümüne eşittir. (42) ifadesinden de sonuç elde edebilmek için benzer olarak aşağıdaki şekilde ters çevrilebilir.

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f'(\mathrm{T})}{(t-\mathrm{T})^\alpha} d\mathrm{T}$$

$$= f(t) + f(0) \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \tag{44}$$

Bu sonucun ilk elementi sağ-el kuralıdır fakat önceden bahsedildiği gibi sıfır değerinde fonksiyonun değerine bağlı olarak arta kalan değerini kapsamalıdır.

İkinci çeşit integral denklemleri (45) de gösterilmiştir.

$$u(t) + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{u(\mathrm{T})}{(t-\mathrm{T})^{1-\alpha}} d\mathrm{T} = f(t) \Rightarrow (1 + \lambda J^\alpha) u(t) = f(t) \tag{45}$$

(45) deki çözüm ise şöyle bulunur:

$$u(t) = (1 - \lambda J^\alpha)^{-1} f(t) = \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda)^n J^{\alpha n}\right) f(t)$$

$$= f(t) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda)^n \Phi_{\alpha n}\right) * f(t) \tag{46}$$

(9) denklemini kullanarak şunu gösterebiliriz:

$$E_\alpha(-\lambda t^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \tag{47}$$

(47) nin ilk türevi alındığında $E_\alpha(-\lambda t^\alpha)$ genişlemasinde ilk terim elenir ve (46) daki form elde edilir. Böylece ikinci türün integral denklemlerinin çözümü şöyle yazılır:

$$u(t) = f(t) + \frac{d}{dt}[E_\alpha(-\lambda t^\alpha)] * f(t) \tag{48}$$

Aynı çözüm Laplace dönüşümleri kullanılarak ulaşılabilir. (45) in Laplace dönüşünü alarak başlayalım.

$$\mathcal{L}\{(1+\lambda)^\alpha u(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \rightarrow \left[1 + \frac{\lambda}{s^\alpha}\right] \tilde{u}(s) = \tilde{f}(s) \tag{49}$$

(49) daki denklem pek çok yolla tekrar düzenlenebilir fakat özellikle (48) de gösterilen sonuca ulaştırır.

$$\tilde{u}(s) = \left[s\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+\lambda} - 1\right]\tilde{f}(s) + \tilde{f}(s) \tag{50}$$

(50) deki denklem normal fonksiyon alanına geri çevrilecektir. Bunu yapmak için (51) de verilen Mittag-Lefler fonksiyonunun bir özel formunun Laplace dönşümünün kavranılması gereklidir.

$$\mathcal{L}\{E_{\alpha}(-\lambda t^{\alpha})\} = \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+\lambda} \tag{51}$$

(8) de verilen ilişki aracılığıyla şu açıktır ki (50) deki sol-el kuralındaki parantezler arasında ne olduğu (51) deki sol-el kuralının ilk türevini basitçe Laplace dönüşümüdür. Örneğin,

$$\mathcal{L}\left\{E_{\alpha}^{(1)}(-\lambda t^{\alpha})\right\} = s\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+\lambda} - 1 \tag{52}$$

(6) da verilen Laplace konvolüsyonunun tanımından kolaylıkla (50) nin nasıl ters olarak (48) ide aynı sonucu verdiği kolaylıkla görülür.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. RIEMANN-LİOUVİLLE KESİRLİ İNTEGRALLERİ İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

$f:[a,b]\to R$ fonksiyonu (a,b) üzerinde diferansiyellenebilir ve $f':[a,b]\to R$ türevi (a,b) üzerinde sınırlı yani, $\|f'\|_\infty = \sup_{t\in(a,b)}\left|f'(t)\right| < \infty$ ise her $x\in[a,b]$ için

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| \le \left[\frac{1}{4}+\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right](b-a)\|f'\|_\infty$$

dır. Bu eşitsizlikteki $\frac{1}{4}$ sabiti ise en iyi olası sabittir. Buradaki eşitsizlik literatürde Ostrowski eşitsizliği olarak adlandırılır.

Son zamanlarda Ostrowski integral eşitliklerinin bazı genelleştirmeleri, sınırlı varyosyanların gösterilmesi ve Lipschitz, bazı özel ortalamalar için hata tahminlerini içeren monotonik ve özelliklede sürekli ve n-kez diferansiyellenebilir fonksiyonlar için ve bazı nümerik alan hesabı kuralları için pek çok yazar tarafından yeni sonuçlar verilmiştir. Son yıllarda bu tip eşitsizlikler pek çok araştırmacı tarafından çalışılmakta ve bu tip eşitsizliklerin pek çok varyasyonları ve uzantıları ve genellemeleri çok sayıdaki bilimsel makalede mevcuttur. (Dragomir ve ark., 1999; Sarıkaya 2010)

Ostrowski eşitsizliğinin basit bir ispatı aşağıda belirlenmiştir. Eğer $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) üzerinde f' türevlenebilir ve f' de $[a,b]$ de integrallenebilirse, Montgomery özdeşliği

$$f(x)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt+\int_a^b P_1(x,t)f'(t)dt \qquad (1)$$

elde edilir. Burada $P_1(x,t)$ Peano çekirdeği olup aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$P_1(x,t) := \begin{cases} \dfrac{t-a}{b-a}, & a\le t<x \\ \dfrac{t-b}{b-a}, & x\le t\le b \end{cases}$$

Burada (1) ifadesi kullanılarak Ostrowski eşitsizliği kolayca hesaplanabilir. Şimdi çalışmalarımızda kullanacağımız Riemann-Liouville tanımını yeniden hatırlatalım.

Tanım 4.1.1. $f \in L_1[a,b]$ olsun. $\alpha > 0$ ve $a \geq 0$ ile $J_{a^+}^{\alpha} f$ ve $J_{b^-}^{\alpha} f$ sırasıyla sağ ve sol Riemann-Liouville kesirli integralleri

$$J_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \qquad x > a$$

$$J_{b^-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt, \qquad x < b$$

ile tanımlıdır. Burada $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha-1} du$ ve $J_{a^+}^{0} f(x) = J_{b^-}^{0} f(x) = f(x)$ dır. $\alpha = 1$ olarak alırsak Fractional kesirli integral bilinen integral olur. Fractional calculus teorisi son 30 yıldan fazladır yoğun bir gelişme gösterdiği bilinmektedir. Gösterilmiştir ki Fractional tipli integralleri ve türevleri reel nesneler ve süreçlerin matematiksel modellemesinde yaygın olarak kullanılmaktadır. Sonuç olarak, Fractional diferansiyel denklemlerin çalışması Fractional tipli eşitsizliklerinin gelişimine daha fazla imkan sağlar. Aşağıda Fractional integrallerle Ostrowski eşitsizliğinin bazı yeni formlarını oluşturması amaçlanmıştır.

Anastassio ve arkadaşları (2009), Sarıkaya ve Ogünmez (2012) çalışmalarında Riemann-Liouville Fractional integrallerini kullanarak, Ostrowski tipili eşitsizlikleri elde etmek için aşağıdaki genelleşmiş Montgomeri özdeşliğini elde etmişlerdir:

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha)}{b-a}(b-a)^{1-\alpha} J_a^{\alpha} f(b) - J_a^{\alpha-1}\big(P_2(x,b) f(b)\big) + J_a^{\alpha}\big(P_2(x,b) f'(b)\big), \ \alpha \geq 1 \quad (2)$$

burada fractionaller için Peono çekirdeği

$$P_2(x,t) = \begin{cases} \dfrac{t-a}{b-a}(b-x)^{1-\alpha}\Gamma(\alpha), & a \leq t < x \\ \dfrac{t-b}{b-a}(b-x)^{1-\alpha}\Gamma(\alpha), & x \leq t \leq b \end{cases}$$

olarak tanımlanmıştır.

Tezin bu kısmında yukarıda söz edilen (2) özdeşliğinin daha genel bir hali verilerek bu güne kadar yapılan tüm çalışmaların daha genel bir halini vereceğiz. Kolaylık olsun diye bu kısım boyunca

$$K_1(x,t)=\begin{cases}\left[t-a-\frac{\lambda}{2}(x-a)\right], & a\le t<x\\ \left[t-b+\frac{\lambda}{2}(b-x)\right], & x\le t\le b,\end{cases}$$

$$K_2(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}\left[t-a-\frac{\lambda}{2}(x-a)\right](b-x)^{1-\alpha}\,\Gamma(\alpha), & a\le t<x\\ \frac{1}{b-a}\left[t-b+\frac{\lambda}{2}(b-x)\right](b-x)^{1-\alpha}\Gamma(\alpha), & x\le t\le b,\end{cases}$$

$$h(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}\left[t-a+\frac{\lambda}{2}(x-a)\right](b-x)^{1-\alpha}\,\Gamma(\alpha), & a\le t<x\\ \frac{1}{b-a}\left[b-t+\frac{\lambda}{2}(b-x)\right](b-x)^{1-\alpha}\Gamma(\alpha), & x\le t\le b\end{cases}$$

tanımlamalarını kullanacağız.

Lemma 4.1.1. $f: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $a,b\in I$ $(a<b)$ ile I^0 üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. $\alpha\ge 1$, $0\le\lambda\le 1$ ve $f'\in L_1[a,b]$ fractional integraller için Montgomery özdeşliğini genelleştirilmesi:

$$(1-\frac{\lambda}{2})f(x)=J_a^{\alpha}\big(K_2(x,b)f'(b)\big)+\frac{(b-x)^{1-\alpha}}{b-a}\,\Gamma(\alpha)J_a^{\alpha}f(b)-J_a^{\alpha-1}\big(K_2(x,b)f(b)\big)$$
$$-\frac{\lambda}{2}(b-a)^{\alpha-2}(x-a)(b-x)^{\alpha-1}f(a) \tag{3}$$

dır.

İspat. İspatı yapmak için $K_1(x,t)$ çekirdeği ilk olarak kullanalım Dolayısıyla, Riemann-Liouville kesirli integrali tanımı yardımıyla,

$$\Gamma(\alpha)J_a^{\alpha}\big(K_1(x,b)f'(b)\big)=\int_a^b (b-t)^{\alpha-1}K_1(x,t)f'(b)dt$$

$$=\int_a^x (b-t)^{\alpha-1}\left(t-a-\frac{\lambda}{2}(x-a)\right)f'(t)dt$$

$$+\int_x^b (b-t)^{\alpha-1}\left(t-b+\frac{\lambda}{2}(b-x)\right)f'(t)dt$$

yazılır. Şimdi burada ilk olarak, sağdaki integrale kısmi integrasyon uygularsak,

$$\Gamma(\alpha)J_a^{\alpha}\big(K_1(x,b)f'(b)\big)=(b-t)^{\alpha-1}\left(t-a-\tfrac{\lambda}{2}(x-a)\right)\ f(t)\Big|_a^x$$

$$+(b-t)^{\alpha-1}\left(t-b+\frac{\lambda}{2}(b-x)\right)\ f(t)\Big|_x^b$$

$$-\int_a^x\left[(b-t)^{\alpha-1}-(\alpha-1)(b-t)^{\alpha-2}\left(t-a-\tfrac{\lambda}{2}(x-a)\right)\right]\ f(t)dt$$

$$-\int_x^b\left[(b-t)^{\alpha-1}-(\alpha-1)(b-t)^{\alpha-2}\left(t-b+\tfrac{\lambda}{2}(b-x)\right)\right]\ f(t)dt$$

$$=(b-x)^{\alpha-1}(x-a)(1-\tfrac{\lambda}{2})f(x)+\tfrac{\lambda}{2}(b-a)^{\alpha-1}(x-a)f(a)+(b-x)^{\alpha}(1-\tfrac{\lambda}{2})f(x)$$

$$-\int_a^b (b-t)^{\alpha-1}f(t)dt+(\alpha-1)\int_a^b (b-t)^{\alpha-2}K_1(x,t)f(t)dt$$

$$=\frac{\lambda}{2}(b-a)^{\alpha-1}(x-a)f(a)+\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)(b-x)^{\alpha-1}(b-a)f(x)$$

$$-\int_a^b (b-t)^{\alpha-1}f(t)dt+(\alpha-1)\int_a^b (b-t)^{\alpha-2}K_1(x,t)f(t)dt$$

elde edilir. Yukarıdaki ifade de $f(x)$ yalnız bırakılarak $K_2(x,t)$ nin tanımını kullanırsak,

$$(1-\tfrac{\lambda}{2})f(x) = \tfrac{(b-x)^{1-\alpha}\,\Gamma(\alpha)}{b-a} J_a^{\alpha}\big(K_1(x,b)f'(b)\big)$$

$$+\frac{(b-x)^{1-\alpha}}{b-a}\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-t)^{\alpha-1}f(t)dt$$

$$-\frac{(b-x)^{1-\alpha}}{b-a}\frac{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha-1)}\int_a^b (b-t)^{\alpha-2}K_1(x,t)f(t)dt$$

$$-\frac{\lambda}{2}(b-a)^{\alpha-1}\frac{(x-a)(b-x)^{1-\alpha}}{b-a}f(a)$$

$$= J_a^{\alpha}\big(K_2(x,b)f'(b)\big) + \tfrac{(b-x)^{1-\alpha}}{b-a}\,\Gamma(\alpha)J_a^{\alpha}f(b)$$

$$-J_a^{\alpha-1}\big(K_2(x,b)f(b)\big) - \frac{\lambda}{2}(b-a)^{\alpha-2}(x-a)(b-x)^{\alpha-1}f(a)$$

olacak şekilde elde ederiz. Bu da istediğimiz Montgomery özdeşliğinin bir genelleştirmesidir.

Not 4.1.1. (3) özdeşliğinde $\alpha = 1$ ve $\lambda = 0$ olarak alırsak (3) özdeşliği (1) klasik montgomery özdeşliğine dönüşür.

Not 4.1.2. (3) özdeşliğinde $\lambda = 0$ alınırsa (2) ile verilen fractional montgomery özdeşliğine dönüşür.

Sonuç 4.1.1. Lemma 4.1.1'in koşulları altında $\lambda = 1$ olarak alınırsa,

$$f(x) = 2J_a^{\alpha}\big(K_2(x,b)f'(b)\big) + \tfrac{2(b-x)^{1-\alpha}}{b-a}\Gamma(\alpha)J_a^{\alpha}f(b)$$

$$-2J_a^{\alpha-1}\big(K_2(x,b)f(b)\big) - (b-a)^{\alpha-2}(x-a)(b-x)^{\alpha-1}f(a)$$

olur. Benzer olarak $0 < \lambda < 1$ durumları için bir çok özellik yazabiliriz.

Teorem 4.1.1. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) üzerinde diferansiyellenebilir ve $f'\in L_1[a,b]$,$a<b$ ve $0\le\lambda\le 1$ olsun. Eğer her $x\in[a,b]$ ve $\alpha\ge 1$ için $|f'(x)|\le M$ ise Fractional Ostrowski eşitsizliği

$$\left|\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)f(x)-\frac{(b-x)^{1-\alpha}}{b-a}\Gamma(\alpha)J_a^{\alpha}f(b)+J_a^{\alpha-1}\big(K_2(x,b)f(b)\big)\right.$$
$$\left.+\frac{\lambda}{2}(b-a)^{\alpha-2}(x-a)(b-x)^{\alpha-1}f(a)\right|$$
$$\le\frac{M}{\Gamma(\alpha)}A(x) \tag{4}$$

dır. Burada $A(x)$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$A(x)=\frac{\Gamma(\alpha)(b-x)^{1-\alpha}}{b-a}\left\{(b-a)^{\alpha}\left[\frac{2(b-a)+\lambda(x-a)}{2\alpha}-\frac{b-a}{\alpha+1}\right]\right.$$
$$\left.+(b-x)^{\alpha}\left[\frac{2(b-x)}{\alpha+1}-\frac{(b-a)+\lambda\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}{\alpha}\right]\right\} \tag{5}$$

İspat. Lemma 4.1.1 yardımıyla

$$\left|(1-\frac{\lambda}{2})f(x)-\frac{(b-x)^{1-\alpha}}{b-a}\Gamma(\alpha)J_a^{\alpha}f(b)+J_a^{\alpha-1}\big(K_2(x,b)f(b)\big)\right.$$
$$\left.+\frac{\lambda}{2}(b-a)^{\alpha-2}(x-a)(b-x)^{\alpha-1}f(a)\right|$$
$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_a^b(b-t)^{\alpha-1}K_2(x,t)f'(t)dt\right| \tag{6}$$

$$\le\frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b(b-t)^{\alpha-1}|K_2(x,t)|dt$$

$$\le\frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b(b-t)^{\alpha-1}h(x,t)\,dt$$

yazılır. Dolayısıyla, son integali aşağıdaki şekilde hesaplayalım:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-t)^{\alpha-1} h(x,t)\,dt$$

$$= \frac{(b-x)^{1-\alpha}}{b-a}\left\{\int_a^x (b-t)^{\alpha-1}\left(t-a+\frac{\lambda}{2}(x-a)\right)dt\right.$$

$$\left.+\int_x^b (b-t)^{\alpha-1}\left(b-t+\frac{\lambda}{2}(b-x)\right)dt\right\}$$

$$= \frac{(b-x)^{1-\alpha}}{b-a}\left\{(b-a)^{\alpha}\left[\frac{2(b-a)+\lambda(x-a)}{2\alpha}-\frac{b-a}{\alpha+1}\right]\right.$$

$$\left.+(b-x)^{\alpha}\left[\frac{2(b-x)}{\alpha+1}-\frac{(b-a)+\lambda\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}{\alpha}\right]\right\} \tag{7}$$

olur. Buradan da (7) ifadesini (6) da yerine yazarsak, (4) ile belirtilen Ostrowski eşitsizliğini elde etmiş oluruz.

Not 4.1.3. Teorem 4.1.1 de $\lambda = 0$ alırsak, Anastassiou ve arkadaşları (2009) tarafından elde edilen Teorem 4.1.1`i verir. Böylece, bizim sonuçlarımız Anastassiou ve arkadaşlarının sonuçlarının bir genelleştirilmişidir.

Sonuç 4.1.2. Teorem 4.1.1 in koşulları altında $\lambda = 1$ olarak alırsak,

$$\left|\frac{1}{2}f(x)-\frac{(b-x)^{1-\alpha}}{b-a}\Gamma(\alpha)J_a^{\alpha}f(b)+J_a^{\alpha-1}\big(K_2(x,b)f(b)\big)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}(b-a)^{\alpha-2}(x-a)(b-x)^{\alpha-1}f(a)\right|$$

$$\leq \frac{M}{\alpha(\alpha+1)}\left\{(b-x)^{1-\alpha}(b-a)^{\alpha-1}[2(b-a)+\alpha(\alpha+1)(x-a)]\right.$$

$$\left.+\frac{(b-x)}{(b-a)}[3\alpha(a+b-2x)-(b-a)]\right\} \tag{8}$$

verilir.

Not 4.1.4. (8) eşitsizliğinde $\alpha = 1$ olarak alırsak,

$$\left|\frac{(b-a)f(x)+(x-a)f(a)}{2(b-a)} - \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(t)dt\right|$$
$$\leq \mathrm{M}\left\{(b-2a+x)+\frac{(b-x)}{(b-a)}(2a+b-3x)\right\}$$

olur.

Teorem 4.1.2. $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) üzerinde diferansiyellenebilir, $f'\in L_1[a,b]$,$a<b$,$0\leq\lambda\leq 1$ ve $\alpha\geq 1$ olsun. Eğer $[a,b]$ üzerinde $|f'|^q$, $q\geq 1$ konveks ise

$$\left|(1-\frac{\lambda}{2})f(x)-\frac{(b-x)^{1-\alpha}}{b-a}\Gamma(\alpha)J_a^{\alpha}f(b)+J_a^{\alpha-1}\big(K_2(x,b)f(b)\big)\right.$$
$$\left.+\frac{\lambda}{2}(b-a)^{\alpha-2}(x-a)(b-x)^{\alpha-1}f(a)\right|$$
$$\leq\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\big(A(x)\big)^{1-\frac{1}{q}}\big(|f'(a)|^qB(x)+|f'(b)|^qC(x)\big)^{\frac{1}{q}} \qquad (9)$$

dır. Burada A(x), (5) de tanımlandığı gibi B(x) ve C(x) ise

$$B(x)=\frac{\Gamma(\alpha)(b-x)^{1-\alpha}}{(b-a)^2}\left\{(b-a)^{\alpha+1}\left[\frac{2(b-a)+\lambda(x-a)}{2(\alpha+1)}-\frac{b-a}{\alpha+2}\right]\right.$$
$$\left.+(b-x)^{\alpha+1}\left[\frac{2(b-x)}{\alpha+2}-\frac{2(b-a)+\lambda\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}{\alpha+1}\right]\right\}$$

ve

$$C(x)=\frac{\Gamma(\alpha)(b-x)^{1-\alpha}}{(b-a)^2}\left\{(b-a)^{\alpha}\left[\frac{2(b-a)+\lambda(x-a)}{2\alpha(\alpha+1)}-\left(\frac{b-a}{\alpha+1}-\frac{1}{\alpha+2}\right)\right]\right.$$
$$+2(b-x)^{\alpha+1}\left(\frac{1}{\alpha+1}-\frac{(b-x)}{(\alpha+2)(b-a)}\right)$$
$$\left.-(b-x)^{\alpha}\left((b-a)+\lambda\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right)\left(\frac{(b-x)}{(b-a)(\alpha+1)}-\frac{1}{\alpha}\right)\right\}$$

şeklinde tanımlıdır.

İspat. Lemma 4.1.1 yardımıyla,

$$\bigg|(1-\frac{\lambda}{2})f(x)-\frac{(b-x)^{1-\alpha}}{b-a}\Gamma(\alpha)J_a^{\alpha}f(b)+J_a^{\alpha-1}\big(K_2(x,b)f(b)\big)$$

$$+\frac{\lambda}{2}(b-a)^{\alpha-2}(x-a)(b-x)^{\alpha-1}f(a)\bigg|$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_a^b (b-t)^{\alpha-2}K_2(x,t)f'(t)dt\right|$$

$$\leq\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-t)^{\alpha-2}|K_2(x,t)||f'(t)|dt$$

$$\leq\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-t)^{\alpha-2}h(x,t)|f'(t)|dt$$

yazılır. Hölder eşitsizliğinden ve $|f'|^q$ nin konveksliğini kullanarak,

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-t)^{\alpha-1}h(x,t)|f'(t)|dt$$

$$\leq\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_a^b (b-t)^{\alpha-1}h(x,t)dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b (b-t)^{\alpha-1}h(x,t)|f'(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_a^b (b-t)^{\alpha-1}h(x,t)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_a^b (b-t)^{\alpha-1}h(x,t)\left|f'\left(\frac{b-t}{b-a}a\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{t-a}{b-a}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \tag{10}$$

$$\leq\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_a^b (b-t)^{\alpha-1}h(x,t)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left(\int_a^b (b-t)^{\alpha-1}h(x,t)\frac{b-t}{b-a}|f'(a)|^q+\frac{t-a}{b-a}|f'(b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_a^b (b-t)^{\alpha-1} h(x,t)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left(\frac{|f'(a)|^q}{b-a}\int_a^b (b-t)^{\alpha}\, h(x,t)dt+\frac{|f'(b)|^q}{b-a}\int_a^b (b-t)^{\alpha}(t-a)\, h(x,t)dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

yazılır. Şimdi son ifadedeki integrali hesaplayalım.

$$\frac{|f'(a)|^q}{b-a}\int_a^b (b-t)^{\alpha}\, h(x,t)dt=B(x) \tag{11}$$

ve benzer olarak,

$$\int_a^b (b-t)^{\alpha}(t-a)\, h(x,t)dt$$

$$=|f'(b)|^q\int_a^b (b-t)^{\alpha}\, h(x,t)dt-\frac{|f'(b)|^q}{b-a}\int_a^b (b-t)^{\alpha}\, h(x,t)dt=C(x) \tag{12}$$

alabiliriz. Buradan da (10) ifadesinde (11) ve (12) sonuçları yerlerine yazılırsa (9) eşitliği elde edilmiş olur.

Not 4.1.3. Teorem 4.1.2 nin varsayımları altında, λ= 1 olarak alınırsa,

$$\left|\frac{1}{2}f(x)-f(x)-\frac{(b-x)^{1-\alpha}}{b-a}\Gamma(\alpha)J_a^{\alpha}f(b)+J_a^{\alpha-1}\big(K_2(x,b)f(b)\big)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}(b-a)^{\alpha-2}(x-a)(b-x)^{\alpha-1}f(a)\right|$$
$$\leq\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\big(A_1(x)\big)^{1-\frac{1}{q}}\big(|f'(a)|^qB_1(x)+|f'(b)|^qC_1(x)\big)^{\frac{1}{q}}$$

yazılır. Burada $A_1(x)$, $B_1(x)$ ve $C_1(x)$ fonksiyonları da aşağıdaki şekilde olur.

$$A_1(x)=\frac{\Gamma(\alpha)(b-x)^{1-\alpha}}{(b-a)^2}\left\{(b-a)^{\alpha}\frac{2(b-a)+(\alpha+1)(x-a)}{2\alpha(\alpha+1)}\right.$$
$$\left.+(b-x)^{\alpha}\frac{(\alpha-1)(b-a)+(a-x)-(x-a-b)}{\alpha(\alpha+1)}\right\},$$

$$B_1(x) = \frac{\Gamma(\alpha)(b-x)^{1-\alpha}}{(b-a)^2}\left\{(b-a)^{\alpha+1}\frac{(b-a)+(\alpha+2)(x-a)}{2\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}\right.$$
$$\left. + (b-a)^{\alpha+1}\frac{\alpha(b-a)+2(\alpha+1)(a-x)-(x-a-b)}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\right\},$$

$$C_1(x) = \frac{\Gamma(\alpha)(b-x)^{1-\alpha}}{(b-a)^2}\left\{(b-a)^{\alpha}\left[\frac{2(1-\alpha)(b-a)+(x-a)}{2\alpha(\alpha+1)}+\frac{1}{(\alpha+2)}\right]\right.$$
$$+ 2(b-a)^{\alpha+1}\frac{(b-x)+(\alpha+2)(x-a)}{(\alpha+2)(b-a)}$$
$$\left. - (b-x)^{\alpha}\left((b-a)+\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right)\left(\frac{(b-x)}{(b-a)(\alpha+1)}-\frac{1}{\alpha}\right)\right\}.$$

4.2. FRACTIONAL İNTEGRALLER İÇİN OSTROWSKİ TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Tezin bu kısmında fractional integraller için Ostrowski eşitsizliğinin daha genel bir halini farklı bir ispat yöntemi ile vereceğiz.

Teorem 4.2.1. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ üzerinde (a,b) diferansiyellenebilir ve her $x\in[a,b]$ ve $\alpha>0$ için $|f'(x)|\le M$ olsun. O zaman, Ostrowski tipli fractional eşitsizliği her $t\in[a,b]$ için

$$\left|\frac{(b-t)^{\alpha}+(t-a)^{\alpha}}{(b-a)}f(t)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)}\left[J_{t^+}^{\alpha}f(b)+J_{t^-}^{\alpha}f(a)\right]\right|$$
$$\le \frac{M}{\alpha+1}\left[(t-a)^{\alpha+1}+(b-t)^{\alpha+1}\right] \tag{13}$$

dır.

İspat. $t\in[a,b]$ için

$$\frac{(b-t)^{\alpha}+(t-a)^{\alpha}}{(b-a)}f(t)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)}\left[J_{t^+}^{\alpha}f(b)+J_{t^-}^{\alpha}f(a)\right]$$

$$= \frac{1}{(b-a)} \int_a^t \int_x^t (y-a)^{\alpha-1} f'(y)\,dy\,dx$$

$$- \frac{1}{(b-a)} \int_t^b \int_t^x (b-y)^{\alpha-1} f'(y)\,dy\,dx \tag{14}$$

$$= \int_a^t (y-a)^{\alpha} f'(y)\,dy + \int_t^b (b-y)^{\alpha} f'(y)\,dy$$

olarak yazalım. Modulusun özellikleri kullanarak ve her $x \in [a,b]$ için $|f'(x)| \leq M$ kullanırsak,

$$\left| \frac{(b-t)^{\alpha} + (t-a)^{\alpha}}{(b-a)} f(t) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)} \left[J_{t^+}^{\alpha} f(b) + J_{t^-}^{\alpha} f(a) \right] \right|$$

$$\leq M \left[\int_a^t (y-a)^{\alpha} dy + \int_t^b (b-y)^{\alpha} dy \right]$$

$$= \frac{M}{\alpha+1} \left[(t-a)^{\alpha+1} + (b-t)^{\alpha+1} \right]$$

elde edilir.

Not 4.2.1. (13) içinde $\alpha = 1$ alırsak, Ostrowski eşitsizliği

$$\left| f(t) - \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq 2M(b-a)^2 \left[\frac{1}{4} + \frac{\left(t - \frac{a+b}{2} \right)^2}{(b-a)^2} \right]$$

şeklinde olur.

Teorem 4.2.2. $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) de diferansiyellenebilir, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ile $\alpha > 0$ ve $p > 1$ olsun. O zaman, Ostrowski tipli factional eşitsizliği:

$$\left| \frac{(b-t)^{\alpha} + (t-a)^{\alpha}}{(b-a)} f(t) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)} \left[J_{t^+}^{\alpha} f(b) + J_{t^-}^{\alpha} f(a) \right] \right|$$

$$\leq \frac{1}{(\alpha q+1)^{\frac{1}{q}}} \left[(t-a)^{\alpha+\frac{1}{q}} \|f'\|_{p,[a,t]} + (b-t)^{\alpha+\frac{1}{q}} \|f'\|_{p,[a,t]} \right] \tag{15}$$

dır. Burada $\|.\|_{p,[a,t]}$ normu

$$\|f'\|_{p,[a,t]} = \left(\int_a^t |f'(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

dır.

İspat. Teoremin ispatı için Teorem 4.2.2 içinde (14) ifadesini alır ve Hölder eşitsizliği kullanılırsa,

$$\left| \frac{(b-t)^\alpha + (t-a)^\alpha}{(b-a)} f(t) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)} \left[J_{t^+}^{\alpha} f(b) + J_{t^-}^{\alpha} f(a) \right] \right|$$

$$\leq \left\{ \left(\int_a^t |f'(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^t (y-a)^{\alpha q} dy \right)^{\frac{1}{q}} \right.$$

$$\left. + \left(\int_t^b |f'(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^t (b-y)^{\alpha q} dy \right)^{\frac{1}{q}} \right\}$$

$$= \frac{1}{(\alpha q+1)^{\frac{1}{q}}} \left[(t-a)^{\alpha+\frac{1}{q}} \|f'\|_{p,[a,t]} + (b-t)^{\alpha+\frac{1}{q}} \|f'\|_{p,[a,t]} \right]$$

olacak şekilde elde edilir.

Not 4.2.2. (15) içinde $\alpha = 1$ olarak alınırsa,

$$\left| f(t) - \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{1}{(q+1)^{\frac{1}{q}}} \left[(t-a)^{1+\frac{1}{q}} \|f'\|_{p,[a,t]} + (b-t)^{1+\frac{1}{q}} \|f'\|_{p,[a,t]} \right]$$

şeklinde Ostrowski tipli integral eşitsizliğine dönüşür.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Lemma 4.1.1 de elde edilen (3) özdeşliği kullanılarak bazı Ostrowski tipli fractional integral eşitsizlikleri elde edildi. Bulgular ve Tartışma başlığı altındaki birinci bölüm olan Riemann-Liouville kesirli integralleri için genelleştirilmiş integral eşitsizlikleri başlığı altında yayına gönderilmiştir. İkinci bölüm olan fractional integralleri için Ostrowski tipli eşitsizlikler başlığı altında Vietnam Journal of Mathematics adlı dergide kabul edilmiştir.

Dolayısıyla, aynı özdeşlik yardımıyla literatürde bilinen bazı özel konveks fonksiyonlar, s-konveks, h-konveks, v-konveks, v_h-konveks vb. için bir çok yeni Ostrowski tipli fractional integral eşitsizlikleri elde edilebilir. Burada açık problem olarak ilgili okuyuculara bırakıyoruz.

6. KAYNAKLAR

Agrawal O.P., Formulation of Euler-Lagrange equations for fractional variational problems, J. *Math. Anal. Appl*, 272 **(2002)** 368-379.

Anastassiou G., Hooshmandasl M.R., Ghasemi A., Moftakharzadeh F., Montgomery identities for fractional integrals and related fractional inequalities, *J. Inequal. in Pure and Appl. Math*, 10(4) **(2009)** 97-103.

Beckenbach, E.F., Bellman R., *inequalities*, Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, **(1961).**

Dragomir S.S., Pearce C.E.M., *Selected topics on Hermite-Hadamard inequalities and applications*, RGMIA Monographs, Victoria University, **(2000a).**

Dragomir S.S., Rassias T.M., *Ostrowski type inequalities and applications in numerical integration*, RGMIA Monographs, Victoria University, **(2000b).**

Dragomir S.S., Barnett N.S., An Ostrowski type inequality for mappings whose second derivatives are bounded and applications, *RGMIA Research Report Collection*, 1 **(1999)** 67-76.

Hadamard J., Etudesures properties des fonctions entieres et en particulier d'une fonction consideree par Riemann , *J. Math. Pures Appl.*, 58 **(1893)** 171-215.

Hardy J.E., Littlewood S., . Pólya G., *inequalities (2nd ed.)*, Cambridge Univ. Press, **(1952).**

Kilbas A.A. , Saigo M., Saxena R.K., Generalized Mittag-Leffler function and generalized fractional calculus operators. *Integral Transforms and Special Functions*, 15 **(2004)** Issue 1.

Mitrinovic D.S., Pecaric J.E., Fink A.M., *Inequalities involving functions and their integrals and derivatives*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, **(1991).**

Mitrinovic D.S., Pecaric J., Fink A.M., *Classical and new inequalities in analysis*, Kluwer Academic, Dordrecht, **(1993)**.

Mitrinović D.S., Vasić P.M., *Analytic inequalities*, Springer-Verlag, **(1970).**

Mittag-Leffler G.M., Sur la nouvelle fonction E α(x), *C. R. Acad. Sci. Paris*, 137 **(1903)** 554-558.

Niculescu C., Persson L.E., *Convex functions and their applications: A contemporary approach CMS books in mathematics*, Springer Science, **(2006).**

Ostrowski A.M., Uber die absolutabweichung einer differentiebaren funktion von ihrem integralmitelwert, *Commentarii Mathematici Helvetici*, 10 **(1938)** 226–227.

Pachpatte B.G., *Mathematical inequalities*, Elsevier Ltd. Amsterdam-Netherland, **(2005).**

Sarikaya M.Z., On the Ostrowski type integral inequality, *Acta Math. Univ. Comenianae*, 1 **(2010)**129-134.

Sarikaya M.Z., Ogunmez H., On new inequalities via Riemann-Liouville fractional integration. *Abstract and Applied Analysis*, **(2012)**.

Sarikaya M.Z**.** and Yaldiz H. , *On weighted Montogomery identities for Riemann-Liouville fractional integrals*, Konuralp Journal of Mathematics, **(2013).**

Sarıkaya M.Z., Set E.,Yaldız H. and Başak N., Hermite-Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities, Mathematical and Computer Modelling, 57, 2403-2407, **(2013).**

Sarıkaya M.Z., Ostrowski type inequalities involving the right Caputo fractional derivatives belong to $\mathcal{L}_p$, Facta Universitatis, Series Math. And Inform, 27(2), 191-197, **(2012).**

Sarıkaya M.Z. and Yaldız H. , New generalization fractional inequalities of Ostrowski-Grüss type, Lobachevskii Journal of Math., 34(4), 326-331**, (2013).**

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	: FİLİZ, Hatice
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 27.05.1982/İSTANBUL
Telefon	: (0505)791 65 42
E-posta	: hatice-filiz82@hotmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	
Lisans	Z. Karaelmas Ü./Matematik B.	2004
Lise	Kandilli Kız Lisesi	1999

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2004-2007	Dershane	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. M. Zeki Sarikaya and **Hatice Filiz**, "Note on the Ostrowski type inequalities for fractional integrals", Vietnam Journal of Mathematics (Baskıda).

2. Mehmet Zeki Sarıkaya, **Hatice Filiz** and Mehmet Eyüp Kiriş, On Generalized Montogomery Identities For Riemann-Liouville Fractional Integrals (Baskıda).