T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

OSTROWSKİ TİPLİ EŞİTSİZLİKLER ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS

TÜRKER DEMİRCAN

MAYIS 2014

DÜZCE

KABUL VE ONAY BELGESİ

Türker DEMİRCAN tarafından hazırlanan Ostrowski Tipli Eşitsizlikler Üzerine isimli lisansüstü tez çalışması, Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 26.05.2014 tarih ve 2014/515 sayılı kararı ile oluşturulan jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans olarak kabul edilmiştir.

Üye
(Tez Danışmanı)
Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Düzce Üniversitesi

Üye
Doç. Dr. Nesip AKTAN
Düzce Üniversitesi

Üye
Doç. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Tezin Savunulduğu Tarih : 30.05.2014

ONAY

Bu tez ile Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Türker DEMİRCAN'ın Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans derecesini almasını onamıştır.

Prof. Dr. Haldun MÜDERRİSOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

Türker DEMİRCAN

Sevgili Aileme

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim ve bu tezin hazırlanmasında süresince gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA’ ya en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca dualarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili eşime ve aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Mayıs 2014 **Türker DEMİRCAN**

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

A.O= $A(.,.)$	Aritmetik Ortalama
f'	f in birinci türevi
f''	f in ikinci türevi
$\lvert f \rvert$	f in mutlak değeri
G.O= $G(.,.)$	Geometrik Ortalama
I	R nin içinde bir aralık
I^o	I nin içi
L.O= $L(.,.)$	Logaritmik Ortalama
R	Reel Sayılar Kümesi
R^n	n boyutlu Öklit Uzayı

ÖZET

OSTROWSKİ TİPLİ EŞİTSİZLİKLER ÜZERİNE

Türker DEMİRCAN
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimler Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
May 2014, 77 sayfa

Bu tezde, iki değişkenli fonksiyonlar için ağırlıklı Montgomery özdeşliğini elde ederek, bu özdeşliğin uygulanması ile elementer analiz kullanılarak iki bağımsız değişkenli fonksiyonları içeren iki katlı integral eşitsizlikleri vermektir.

Anahtar Sözcükler: Hölder Eşitsizliği, Montgomery Özdeşliği, Ostrowski Eşitsizliği.

ABSTRACT

ON THE OSTROWSKI TYPE INEQUALITIES

Türker DEMİRCAN
Düzce University
Graduate School of Natural and Applied Science, Department of Mathematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
May 2014, 77 pages

In this thesis, we obtain weighted Montgomery's identities for function of two variables and apply them to give new generalization weighted integral inequality for double integrals involving functions of two independent variables by using fairly elementary analysis.

Keywords : Hölder’s inequality, Montgomery’s identity, Ostrowski Inequality.

EXTENDED ABSTRACT

ON THE OSTROWSKI TYPE INEQUALITIES

Türker DEMİRCAN
Düzce University
Graduate School of Natural and Applied Science, Department of Mathematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
May 2014, 77 pages

1.INTRODUCTION:

Moving from the problem of computing one-dimensional integrals to the multidimensional case leads to a series of new problems. While in one dimension one may encounter three possible types of integration intervals - finite, semi-infinite and infinite, now we have to deal with a wide variety of domains. In addition, as is already evident in two dimensions, the functions being integrated can have singularities not only at a point, but even on an entire manifold. These complications make the multidimensional case considerably more difficult than the univariate one, and accounts for the fact that the theory of multidimensional cubature is by no means as complete as the one-dimensional case. Indeed, cubature formulae are most often evaluated as iterated one-dimensional integrals. The approach is straightforward but has some disadvantages, two of which, are that the error estimates are unnecessarily large, since they too rely on embedding the one-dimensional error results, and it is often
difficult to discretize regions that are other than ideal. That is, regions whose boundaries lie on coordinate lines of some orthogonal system.

2. MATERIAL AND METHODS:

Recently, several generalizations of the Ostrowski integral inequality for mappings of bounded variation and for Lipschitzian, monotonic, absolutely continuous and n -times differentiable mappings with error estimates for some special means and for some numerical quadrature rules are considered by many authors. For recent results and generalizations concerning Ostrowski's inequality see the references therein.

3. RESULTS AND DISCUSSIONS:

In this thesis, we employ the Peano kernel techniques of Chapter 3 to produce two dimensional integral inequalities. Specifically we will combine and extend the work of (Cerone and Dragomir 1999) and (Barnett and Dragomir 2001).

In (Cerone and Dragomir 1999), a one-dimensional three point inequality was investigated, while in (Cerone and Dragomir 1999) a two-dimensional version of the Ostrowski result was produced.

4. CONCLUSION AND OUTLOOK:

Here we will develop a two-dimensional three point integral inequality for functions with bounded first derivatives for different types of norms. The method presented here is based on Ostrowski's integral inequality, and as such is amenable to the production of error bounds for a variety of norms.

1. GİRİŞ

Konvekslik, M.Ö. 250 yılında Archimedes'in ünlü π değerini hesaplamasına kadar uzanan basit ve bilinen bir kavramdır. Konveks fonksiyonların sistematik araştırmasına ilk olarak 19. yüzyılın sonlarında rastlanmasına rağmen, 20. yüzyılın ortalarında matematiğin önemli bir alanı olarak görülmeye başlanmıştır. Konvekslik, geometri, analiz, lineer cebir ve topolojide kullanılır ve sayı teorisi, klasik ekstremum problemleri, lineer programlama, oyun teorisi ve eşitsizlikler teorisi (lineer, klasik ve matris) gibi çeşitli konularda önemli rol oynar. Son yüzyılda gelişen disiplini ve artan uygulamalarıyla matematiksel analizin merkezi alanlarından biri olarak yerini almıştır.

(Hardy, Littlewood ve Polya 1934) yazılan "Inequalities" adlı eser eşitsizlikler teorisi için temel başvuru kaynağıdır. Okuyucu bu eserde konveks fonksiyonlarla ilgili klasik ve yeni eşitsizlikleri, problemleri, ispat yöntemlerini ve sonuçlar bulabilir. Buna ek olarak (Beckenbach ve Bellman 1965) yazdığı "Inequalities" adlı eser ve (Mitrinovic 1970) de yazdığı "Analytic Inequalities" adlı eseri de söyleyebiliriz. Bu kaynaklar eşitsizlikler teorisini araştırmak isteyen okuyucu için el altında bulunması gereken kaynaklardır.

Analitik eşitsizlikler yaygın olarak matematik ve birçok uygulamalı matematiğin çeşitli dallarında gelişiminin arkasındaki temel itici güçlerinden biri olarak kabul edilmektedir. Eşitsizlikler ile ilgili çalışmalar son on yıldan fazladır matematiğin birçok farklı alanlardaki uygulamalara nasıl büyük bir katkı sağlandığı açıkça ortadadır. Örneğin, Cebysev, Grüss, Yamuk, Ostrowski, Hadamard ve Jensen eşitsizlikler ile ilgili birçok uygulama literatürde çok önemli bir yere sahiptir.

Tezimizin temel taşlarını oluşturan Ostrowski tipli eşitsizlikler ile ilgili çalışmaların büyük bir kısmı da (Dragomir ve Rassias 2002) tarafından yazılmış olan "Ostrowski Type Inequalities and Applications in Numerical Integration" isimli kitapta bir araya getirilmiştir.

Bu tezde amacımız iki katlı integraller için yeni Ostrowski tipli integral eşitsizlikleri vererek yukarıda bahsedilen gelişmeler çerçevesinde literatürde bu eşitsizliklerin de yer bulmasını sağlamaktır.

2. KURAMSAL KAVRAMLAR

2.1 GENEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezimiz için gerekli olan tanım ve teoremler verilerek gerekli görülen bazı önemli teoremlerin ispatları da verilmiştir.

Teorem 2.1 (Jensen Eşitsizliği) f fonksiyonu (a,b) aralığında konveks ve $x_i \in (a,b)$ olsun. Bu durumda $\alpha_i > 0$ ve $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ ise,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. f fonksiyonu her $x_0 \in (a,b)$ için bir suport doğruya sahiptir. Yani her x_0 noktası için $f(x) \geq f(x_0) + m(x - x_0)$ olacak şekilde x_0 a bağlı bir m noktası vardır. Bu eşitsizlikte özel olarak $i = 1,2,...,n$ için $x_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ seçilirse,

$$f(x_i) \geq f(x_0) + m(x_i - x_0)$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu eşitsizlikler α_i ile çarpılır, taraf tarafa toplanır ve düzenlenirse Jensen Eşitsizliği elde edilir.

Teorem 2.2 (AO-GO Eşitsizliği) Eğer her $i = 1,2,...,n$ için $x_i \geq 0$, $\alpha_i > 0$ ve $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ ise,

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. En az bir i için $x_i = 0$ ise ispat aşikârdır. $x_i > 0$ durumunda, $y_i = \log x_i$ seçilirse,

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\right)$$

olup $f(t) = e^t$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ ’de konveks olduğundan Jensen Eşitsizliğini uygularsak,

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} &= f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(y_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \end{aligned}$$

elde edilip ispat tamamlanmış olur. Özel olarak $n=2$, $\alpha_1=\frac{1}{p}$, $\alpha_2=\frac{1}{q}$, $x_1=x^p$ ve $x_2=y^q$ seçilirse Young Eşitsizliği olarak bilinen,

$$xy \le \frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}y^q$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 2.3 (Hölder Eşitsizliği) $x_1,...,x_n,y_1,...,y_n>0$, $p,q>1$ öyle ki $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğine Hölder Eşitsizliği denir. Özel olarak $p=q=2$ seçilirse yukardaki eşitsizlik Cauchy-Buniakowsky-Schwartz eşitsizliği elde edilir.

İspat. Yukardaki eşitsizlikte x_i ve y_i lerden en az birinin sıfırdan farklı olduğunu düşünebiliriz. O halde $u=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$ ve $v=\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$ her ikisi de pozitiftir, Young eşitsizliğinde $x=x_i/u$ ve $y=y_i/v$ seçersek,

$$\frac{x_i}{u}\cdot\frac{y_i}{v} \le \frac{1}{p}\left(\frac{x_i}{u}\right)^p+\frac{1}{q}\left(\frac{y_i}{v}\right)^q$$

elde edilip bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{uv} \le \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

olur. Bu da Hölder eşitsizliğini verir.

Tanım 2.1 (İntegraller İçin Hölder Eşitsizliği) $p>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olsun. f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Tanım 2.2 (Üstten Yarı sürekli Fonksiyon) $f : K \to \mathbb{R}$ reel değerli bir fonksiyon olmak üzere $x_0 \in K$ 'nın komşuluğunda her $x \in K$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için

$$f(x) \le f(x_0)+\varepsilon$$

veya

$$\lim_{x \to x_0} \sup f(x) \leq f(x_0)$$

oluyorsa f ye $x_0 \in K$ noktasında üstten yarı sürekli fonksiyon denir.

Tanım 2.3 (Alttan Yarı Sürekli Fonksiyon): $f : K \to \mathrm{R}$ reel değerli bir fonksiyon olmak üzere $x_0 \in K$ 'nın komşuluğunda her $x \in K$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için

$$f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon$$

veya

$$\lim_{x \to x_0} \inf(x) \geq f(x_0)$$

oluyorsa f ye $x_0 \in K$ noktasında üstten yarı sürekli fonksiyon denir.

Tanım 2.4 (Kuvvet Ortalama Eşitsizliği): $q \geq 1$ olsun. f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar $|f|$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)| dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 2.4 (Ostrowski Eşitsizliği): $a, b \in I, a < b$ ve $f' \in L[a,b]$ olacak şekilde $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tanımlı, I^0'de diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $|f'(x)| \leq M$ ise $\forall x \in [a,b]$ için

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \right| \leq \frac{M}{b-a} \left[\frac{(x-a)^2 + (b-x)^2}{2} \right]$$

$$= M(b-a) \left[\frac{1}{4} + \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2} \right]$$

eşitsizliği elde edilir. Buradaki $\frac{1}{4}$ katsayısı bu şartlar altındaki en iyi katsayıdır. Daha küçük olan bir katsayı ile yer değiştiremez (Ostrowski 1938).

İspat $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) de diferensiyellenebilen bir fonksiyon olduğundan $x \in (a,b)$ için

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt + \frac{1}{b-a} \int_a^b p(x,t) f'(t)dt$$

$$p(x,t) = \begin{cases} t-a, & a \leq t \leq x \\ t-b, & x \leq t \leq b \end{cases}$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitlikten

$$f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt=\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)f'(t)dt$$
$$=\frac{1}{b-a}\left[\int_a^x (t-a)f'(t)dt+\int_x^b (t-b)f'(t)dt\right]$$
elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte mutlak değer kullanıldığında
$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|=\left|\frac{1}{b-a}\left[\int_a^x (t-a)f'(t)dt+\int_x^b (t-b)f'(t)dt\right]\right|$$
olur. İntegralin mutlak değer özelliği kullanılarak
$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|\leq\frac{1}{b-a}\left[\int_a^x |t-a||f'(t)|dt+\int_x^b |t-b||f'(t)|dt\right]$$
yazılır. $|f'(x)\leq M|$ olduğundan
$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|\leq\frac{M}{b-a}\left[\int_a^x (t-a)dt+\int_x^b (t-b)dt\right]$$
$$=\frac{M}{b-a}\left[\left(\frac{t^2}{2}-ta\right)\Big|_a^x+\left(tb-\frac{t^2}{2}\right)\Big|_x^b\right]$$
$$=\frac{M}{b-a}\left[\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{2}\right]$$
elde edilir. Böylece
$$(x-a)^2+(b-x)^2=\left(x-\frac{a+b}{2}+\frac{a+b}{2}-a\right)^2+\left(b-\frac{a+b}{2}+\frac{a+b}{2}-x\right)^2$$
$$=\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2+2\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)+\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$
$$+\left(\frac{b-a}{2}\right)^2+2\left(\frac{b-a}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}-x\right)+\left(\frac{a+b}{2}-x\right)^2$$
$$=2\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2+2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$
$$=2(b-a)^2\left[\frac{1}{4}+\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right]$$
kullanılarak ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.5 (Grüss Eşitsizliği) f ve g, $[a,b]$ üzerinde integrallenebilen iki fonksiyon olsun. $m,n,M,N\in\mathbb{R}$ ve $\forall x\in[a,b]$ için
$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx-\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx\right|\leq\frac{1}{4}(M-m)(N-n)$$
dir. Bu eşitsizlik literatürde Grüss Eşitsizliği olarak bilinir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1 GİRİŞ

Ostrowski A.M.'nin 1981 de ispatladığı (Teorem 2.4) deki eşitsizliği şimdi literatürde Ostrowski eşitsizliği olarak bilinmektedir. 1938 deki ispattan bu yana araştırma faaliyetleri bu (Teorem 2.4) eşitsizliği ve bu eşitsizliğin uygulamaları üzerine bir çok çalışma yapılmaktadır. Referanslar önemli ölçüde Ostrowski eşitsizliği içermektedir.
Son 20 yılda Ostrowski eşitsizlikleri merkezli iddialara olan ilgiler hep yenilikler kazanılarak, çeşitli çalışmalar, genelleşmeler ve uzantıları, varyasyonlar ve uygulamaları literatürde kendine önemli bir ölçüde yer bulmuştur.
Bu bölümde biz Ostrowski eşitsizliği (Teorem 2.4) ile ilgili daha basit olan en son gelişmelere değineceğiz. Uygulamaların yararlılığını göstermek için bazı eşitsizlikler açıklayacağız.

3.2 OSTROWSKİ TİPİ EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde son zamanlarda bazı araştırmacılar tarafından kurulan bazı Ostrowski tipi eşitsizlikleri sunacağız. İlk olarak, Dragomir tarafından kurulan Lipschitzian dönüşümleri için Ostrowski eşitsizliklerinin genelleştirilmesi ile başlayalım:

Teorem 3.2.1 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $[a,b]$ üzerinde L-lipschitzian dönüşümü olsun. Her $x,y\in[a,b]$ ve $L\geq 0$ sabiti için

$$f(x)-f(y)\leq L|x-y|$$

sağlansın. Her $x\in[a,b]$ için

$$\left|\int_a^b f(t)dt-f(x)(b-a)\right|\leq L(b-a)^2\left[\frac{1}{4}+\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right] \quad (1)$$

$\frac{1}{4}$ bu şartlar altındaki en iyi sabittir.

İspat. Riemann-Stieltjes integrali için kısmi integrasyon formülünü kullanarak

$$\int_a^x (t-a)df(t)=f(x)(x-a)-\int_a^x f(t)dt$$

ve

$$\int_x^b (t-b)df(t)=f(x)(b-x)-\int_x^b f(t)dt$$

elde ederiz. Eğer üstteki eşitsizlikleri toplarsak,

$$f(x)(b-a)-\int_a^b f(t)dt=\int_a^x (t-a)df(t)+\int_x^b (t-b)df(t) \tag{2}$$

olur. Şimdi varsayalım ki sırasıyla $\Delta_n : a=x_0{}^{(n)}<x_1{}^{(n)}<\cdots<x_{n-1}{}^{(n)}<x_n{}^{(n)}=b$ aralığında $v(\Delta_n)\to 0,\ n\to\infty$, $v(\Delta_n):=max_{i\in\{0,1,\dots,n-1\}}\left(x_{i+1}^{(n)}-x_i^{(n)}\right)$ ve $\xi_i^{(n)}\in\left[x_i^{(n)},x_{i+1}^{(n)}\right]$ olsun. Eğer $p:[a,b]\to\mathbb{R}$, $[a,b]$ üzerinde Riemann integrali ve $v:[a,b]\to\mathbb{R}$, $[a,b]$ üzerinde L –Lispschitzian ise, o zaman

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b p(x)dv(x)\right| &= \left|\lim_{v(\Delta_n)\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} p\left(\xi_i^{(n)}\right)\left[v\left(x_{i+1}^{(n)}\right)-v\left(x_i^{(n)}\right)\right]\right| \\ &\le \lim_{v(\Delta_n)\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\left|p\left(\xi_i^{(n)}\right)\right|\left(x_{i+1}^{(n)}-x_i^{(n)}\right)\left|\frac{v\left(x_{i+1}^{(n)}\right)-v\left(x_i^{(n)}\right)}{x_{i+1}^{(n)}-x_i^{(n)}}\right| \\ &\le L\lim_{v(\Delta_n)\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\left|p\left(\xi_i^{(n)}\right)\right|\left(x_{i+1}^{(n)}-x_i^{(n)}\right) \\ &= L\int_a^b |p(x)|dx \end{aligned} \tag{3}$$

yazılır. Ayrıca, $[a,x]$ ve $[x,b]$ aralığında (3) eşitsizliğini kullanırsak,

$$\begin{aligned} &\left|\int_a^x (t-a)df(t)+\int_x^b (t-b)df(t)\right| \\ &\le \left|\int_a^x (t-a)df(t)\right|+\left|\int_x^b (t-b)df(t)\right| \\ &\le L\left[\int_a^x |t-a|dt+\int_x^b |t-b|dt\right] \\ &= \frac{L}{2}\left[(x-a)^2+(b-x)^2\right] \\ &= L(b-a)^2\left[\frac{1}{4}+\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right] \end{aligned} \tag{4}$$

elde ederiz. Böylece (4) ve (2) yardımı ile (1) eşitsizliği elde edilir.

Şimdi (1) eşitsizliğinde $C>0$ sabitinin olduğunu varsayalım, o halde

$$\left|\int_a^b f(t)dt-f(x)(b-a)\right|\le L(b-a)^2\left[C+\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right] \tag{5}$$

yazılır. Böylece, her $x \in [a,b]$ için (5) te $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ dönüşümünü düşünelim. Dolayısıyla,

$$\left|x - \frac{a+b}{2}\right| \leq \left[C + \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right](b-a)$$

olur. Ayrıca, her $x \in [a,b]$ ve $x = a$ için,

$$\frac{b-a}{2} \leq \left[C + \frac{1}{4}\right](b-a)$$

elde ederiz. Burada $C \geq \frac{1}{4}$ olduğu anlaşılır ve ispat tamamlanır.

Hatırlatma 3.2.1 Eğer f dönüşümü (a,b) üzerinde diferensiyellenebilir ve f' , (a,b) aralığında sınırlandırılmış ise, (1) de L nin yerine $\|f'\|_\infty$ koyabiliriz ve $\|f'\|_\infty = sup_{x\in(a,b)}|f'(t)| < \infty$ dır.

(Dragomir ve Wang 2002) aşağıdaki Ostrowski tipi eşitsizliği ispatlamıştır.

Teorem 3.2.2 $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, (a,b) üzerinde $(a < b)$ diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. f', $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir ve her $x \in [a,b], \gamma, \Gamma \in \mathbb{R}$ için $\gamma \leq f'(x) \leq \Gamma$ olsun. Bu durumda her $x \in [a,b]$ için,

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{4}(b-a)(\Gamma - \gamma) \qquad (6)$$

dır.

İspat. İlk olarak

$$p(x,t) = \begin{cases} t-a, & t \in [a,x] \\ t-b, & t \in (x,b] \end{cases} \qquad (7)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Kısmi integrasyon yardımıyla, her $x \in [a,b]$ için,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)f'(t)dt = f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \qquad (8)$$

yazılır. Açıktır ki her $x \in [a,b]$ ve $t \in [a,b]$ için (7) den,

$$x - b \leq p(x,t) \leq x - a$$

dır. $p(x,\cdot)$ ve $f'(c)$ dönüşümlerine Grüss eşitsizliğini (Teorem 2.5) uygulayarak,

$$\leq \frac{1}{4}(x - a - x + b)(\Gamma - \gamma) \qquad (9)$$

elde ederiz. Basit bir hesaplamayla

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)dt = \frac{1}{b-a}\left[\int_a^x (t-a)dt + \int_x^b (t-b)dt\right] = x - \frac{a+b}{2}$$

ve

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f'(t)dt = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

bulunur. (6) eşitsizliğinin ispatı (9) ve (8) deki iki eşitsizlik ile tamamlanmış olur.

Hatırlatma 3.2.2 Eğer sırasıyla (6) da, $x = \frac{a+b}{2}$ ve $x = b$ seçersek,

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| \leq \frac{1}{4}(b-a)(\Gamma-\gamma) \tag{10}$$

ve

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leq \frac{1}{4}(b-a)(\Gamma-\gamma)\right| \tag{11}$$

elde edilir. (Ujevic 2004) tarafından (6) ya benzer bir şekilde elde edilen teorem aşağıda belirtilmiştir.

Teorem 3.2.3 $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mutlak sürekli fonksiyon ve $f' \in L_2[a,b]$ olsun. Sonra her $x \in [a,b]$ için

$$\sigma(f') = (b-a)\left[\frac{1}{b-a}\|f'\|_2^2 - \frac{1}{(b-a)^2}\left(\int_a^b f'(t)dt\right)^2\right]$$

olduğu yerde

$$\left|(b-a)f(x) - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)[f(b)-f(a)] - \int_a^b f(t)dt\right| \leq \frac{(b-a)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{3}}\sqrt{\sigma(f')} \tag{12}$$

olur. $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ bu şartlar altındaki en iyi katsayıdır.

İspat: $p(x,t)$ dönüşümü (7) de tanımlanmıştı. Kısmi integrasyonla,

$$\int_a^b p(x,t)f'(t)dt = (b-a)f(x) - \int_a^b f(t)dt \tag{13}$$

dahası

$$\int_a^b p(x,t)dt = (b-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) \tag{14}$$

ve

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a) \tag{15}$$

elde ederiz. (13)–(15) den

$$\int_a^b \left[p(x,t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,s)ds\right]\left[f'(t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f'(s)ds\right]dt$$

$$= (b-a)f(x) - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)[f(b)-f(a)] - \int_a^b f(t)dt \tag{16}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\left|\int_a^b \left[p(x,t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,s)ds\right]\left[f'(t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f'(s)ds\right]dt\right|$$

$$\leq \left\|p(x,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,s)ds\right\|_2 \left\|f' - \frac{1}{b-a}\int_a^b f'(s)ds\right\|_2 \tag{17}$$

dahası

$$\left\|p(x,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,s)ds\right\|_2^2 = \frac{(b-a)^3}{12} \tag{18}$$

$$\left\|f' - \frac{1}{b-a}\int_a^b f'(s)ds\right\|_2^2 = \|f'\|_2^2 - \frac{\big(f(b)-f(a)\big)^2}{b-a} \tag{19}$$

elde edilir. (16)–(19) den biz kolayca (12) ye ulaşırız çünkü:

$$\sqrt{\sigma(f')} = \left[\|f'\|_2^2 - \frac{\big(f(b)-f(a)\big)^2}{b-a}\right]^{\frac{1}{2}}$$

dır. (12) nin ispatını göstermiş olduk. Bu amaçla, $x \in [0,1]$ olduğu yerde

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 \qquad , & t \in [0,x] \\ \frac{1}{2}t^2 - t + x, & t \in (x,1] \end{cases} \tag{20}$$

fonksiyonu tanımlanır. (20) de verdiğimiz fonksiyon mutlak süreklidir çünkü parçalı polinom fonksiyonudur. Şimdi (12) de $C > 0$ sabitini varsayalım,

$$\left|(b-a)f(x) - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)[f(b)-f(a)] - \int_a^b f(t)dt\right|$$

$$\leq C(b-a)^{\frac{3}{2}}\left[\|f'\|_2^2 - \frac{\big(f(b)-f(a)\big)^2}{b-a}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{21}$$

yukarıda $a = 0,\ b = 1$ ve f i (20) de tanımlandığı gibi seçelim. O halde

$$\int_0^1 f(t)dt = x - \frac{1}{3} - \frac{x^2}{2}, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = x - \frac{1}{2}, \quad f(x) = \frac{x^2}{2}$$

olur ve buradan da (21) in sol tarafını $\frac{1}{12}$ olarak elde ederiz. Ayrıca (21) in sağ tarafı da $\frac{C}{2\sqrt{3}}$ olarak elde edilir ve dolayısıyla $C \geq \frac{1}{2\sqrt{3}}$ bulunur. $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ sabitinin (12) deki en iyi sabit olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanmış olur.

(Ujevic 2002) tarafından kurulan Ostrowski tipi eşitsizliklerde, daha iyi hata sınırı elde etmek için uygulamalar genişletilmiştir.

Teorem 3.2.4 $f: I \to \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$), I^0 (I' nın içi) da $a, b \in I^0$ ve $a < b$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Eğer $\gamma, \Gamma \in \mathbb{R}$ sabitleri var ve öyleki her $t \in [a, b]$ için $\gamma \leq f'(t) \leq \Gamma$ ve f' $[a, b]$ de integrallenebilir ise,

$$S = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

olmak üzere

$$\left| f(x) - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)\frac{f(b) - f(a)}{b - a} - \frac{1}{b - a}\int_a^b f(t)dt \right| \leq \frac{b - a}{2}(S - \gamma) \tag{22}$$

ve

$$\left| f(x) - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)\frac{f(b) - f(a)}{b - a} - \frac{1}{b - a}\int_a^b f(t)dt \right| \leq \frac{b - a}{2}(\Gamma - S) \tag{23}$$

dır.

İspat. $p(x, t)$, (3.2.7) de tanımlanan bir dönüşüm olsun. Kısmi integrasyonla

$$\frac{1}{b - a}\int_a^b p(x, t)f'(t)dt = f(x) - \frac{1}{b - a}\int_a^b f(t)dt \tag{24}$$

$$\frac{1}{b - a}\int_a^b p(x, t)dt = x - \frac{a+b}{2} \tag{25}$$

dahası ve

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a) \tag{26}$$

elde edilir. (24)–(26) dan

$$f(x) - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)\frac{f(b) - f(a)}{b - a} - \frac{1}{b - a}\int_a^b f(t)dt$$

$$= \frac{1}{b - a}\int_a^b p(x, t)f'(t)dt - \frac{1}{(b - a)^2}\int_a^b f'(t)dt \int_a^b p(x, t)dt \tag{27}$$

$$R_n(x) = \frac{1}{b - a}\int_a^b p(x, t)f'(t)dt - \frac{1}{(b - a)^2}\int_a^b f'(t)dt \int_a^b p(x, t)dt \tag{28}$$

elde edilir. Eğer $C \in R$ keyfi bir sabit ise,

$$R_n(x) = \frac{1}{b - a}\int_a^b (f'(t) - C)\left[p(x, t) - \frac{1}{b - a}\int_a^b p(x, s)ds\right]dt \tag{29}$$

elde edilir. Çünkü:

$$\int_a^b \left[p(x, t) - \frac{1}{b - a}\int_a^b p(x, s)ds\right]dt = 0 \tag{30}$$

dır. İlk olarak (29) da $C = \gamma$ seçelim. O zaman

$$R_n(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b (f'(t)-\gamma)\left[p(x,t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,s)ds\right]dt,$$

ve

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{b-a}\max_{t\in[a,b]}\left|p(x,t) - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right|\int_a^b |f'(t)-\gamma|dt \tag{31}$$

elde edilir. (31) de

$$\max_{t\in[a,b]}\left|p(x,t) - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right| = \frac{b-a}{2} \tag{32}$$

ve

$$\int_a^b |f'(t)-\gamma|dt = f(b) - f(a) - \gamma(b-a) = (S-\gamma)(b-a)$$

olduğundan

$$|R_n(x)| \leq \frac{b-a}{2}(S-\gamma) \tag{33}$$

elde edilir ve (27), (28) ve (33) den de kolayca (22) elde edilir.

İkinci olarak (29) da $C = \Gamma$ seçelim. O zaman

$$R_n(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b (f'(t)-\Gamma)\left[p(x,t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,s)ds\right]dt$$

ve

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{b-a}\max_{t\in[a,b]}\left|p(x,t) - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right|\int_a^b |f'(t)-\Gamma|dt \tag{34}$$

elde edilir.

$$\int_a^b |f'(t)-\Gamma|dt = \Gamma(b-a) - f(b) + f(a) = (\Gamma - S)(b-a) \tag{35}$$

dır. (34), (32) ve (35) den,

$$|R_n(x)| \leq \frac{b-a}{2}(\Gamma - S) \tag{36}$$

elde edilir. (27), (28) ve (36) dan kolayca (23) elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.5 $I \subset \mathbb{R}$ açık bir aralık ve $a, b \in I$, $a < b$ olsun. Eğer $f: I \to \mathbb{R}$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon ve öyleki her $t \in [a,b]$ için $\gamma \leq f'(t) \leq \Gamma$ ve $\gamma, \Gamma \in \mathbb{R}$ bazı sabitler olsun.

$S = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ve $\lambda \in [0,1]$ için $a + \lambda\frac{b-a}{2} \leq x \leq b - \lambda\frac{b-a}{2}$ olmak üzere,

$$\left|(b-a)\left[\frac{\lambda}{2}\big(f(a)+f(b)\big)+(1-\lambda)f(x)-\gamma(1-\lambda)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right]-\int_a^b f(t)dt\right|$$

$$\leq (S-\gamma)max\left\{\lambda\frac{b-a}{2}, x-a-\lambda\frac{b-a}{2}, b-x-\lambda\frac{b-a}{2}\right\}(b-a) \tag{37}$$

$$\left|(b-a)\left[\frac{\lambda}{2}\big(f(a)+f(b)\big)+(1-\lambda)f(x)-\Gamma(1-\lambda)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right]-\int_a^b f(t)dt\right|$$

$$\leq (\Gamma-S)max\left\{\lambda\frac{b-a}{2}, x-a-\lambda\frac{b-a}{2}, b-x-\lambda\frac{b-a}{2}\right\}(b-a) \tag{38}$$

dır.

İspat.

$$k(x,t)=\begin{cases} t-\left(a+\lambda\dfrac{b-a}{2}\right), t\in[a,x] \\ t-\left(b-\lambda\dfrac{b-a}{2}\right), t\in(x,b] \end{cases} \tag{39}$$

dönüşümü tanımlansın. Kısmi integrasyonla

$$\int_a^b k(x,t)\,f'(t)dt$$

$$=\int_a^x\left[t-\left(a+\lambda\frac{b-a}{2}\right)\right]f'(t)dt+\int_x^b\left[t-\left(b-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\right]f'(t)dt$$

$$=(b-a)\left[\frac{\lambda}{2}\big(f(a)+f(b)\big)+(1-\lambda)f(x)\right]-\int_a^b f(t)dt \tag{40}$$

elde edilir. Dahası

$$\int_a^b k(x,t)dt=\int_a^x\left[t-\left(a+\lambda\frac{b-a}{2}\right)\right]dt+\int_x^b\left[t-\left(b-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\right]dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[(x-a)-\lambda\frac{b-a}{2}\right]^2-\frac{1}{2}\left[(x-b)+\lambda\frac{b-a}{2}\right]^2$$

$$=(1-\lambda)(b-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right) \tag{41}$$

elde edilir. $C\ \in\ R$ bir sabit olsun. (40) ve (41) den

$$\int_a^b k(x,t)[f'(t)-C]\,dt=\int_a^b k(x,t)f'(t)\,dt-C\int_a^b k(x,t)dt$$

$$=(b-a)\left[\frac{\lambda}{2}\big(f(a)+f(b)\big)+(1-\lambda)f(x)-C(1-\lambda)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right]-\int_a^b f(t)\,dt \tag{42}$$

elde edilir. Eğer (42) de $C\ =\gamma$ seçersek

$$(b-a)\left[\frac{\lambda}{2}\big(f(a)+f(b)\big)+(1-\lambda)f(x)-\gamma(1-\lambda)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right]-\int_a^b f(t)\,dt$$

$$= \int_a^b k(x,t)[f'(t) - \gamma]\, dt \tag{43}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\left| \int_a^b k(x,t)[f'(t) - \gamma]\, dt \right| \le \max_{t\in[a,b]} |k(x,t)| \int_a^b |f'(t) - \Gamma| dt \tag{44}$$

elde edilir. Çünkü

$$\max_{t\in[a,b]} |k(x,t)| = max\left\{\lambda \frac{b-a}{2}, x - a - \lambda \frac{b-a}{2}, b - x - \lambda \frac{b-a}{2}\right\}) \tag{45}$$

ve

$$\int_a^b |f'(t) - \Gamma| dt = f(b) - f(a) - \gamma(b-a) = (S - \gamma)(b-a) \tag{46}$$

dır. (43)–(46) dan (37) elde edilmiş olur. Eğer (42) de $C = \Gamma$ seçersek,

$$(b-a)\left[\frac{\lambda}{2}\big(f(a) + f(b)\big) + (1-\lambda) f(x) - \Gamma(1-\lambda)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right] - \int_a^b f(t)\, dt$$

$$= \int_a^b k(x,t)[f'(t) - \gamma]\, dt \tag{47}$$

ve

$$\int_a^b |f'(t) - \Gamma| dt = \Gamma(b-a) - \big(f(b) - f(a)\big) = (\Gamma - S)(b-a) \tag{48}$$

elde edilir. (47), (45) ve (48) den kolayca (38) elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.2.1 Teorem 3.2.5 nin varsayımı altında,

$$\left| f(x)(b-a) - \gamma(b-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) - \int_a^b f(t)\, dt \right|$$

$$\le (S - \gamma)\left[\frac{b-a}{2} + \left| x - \frac{a+b}{2} \right|\right](b-a) \tag{49}$$

$$\left| f(x)(b-a) - \Gamma(b-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) - \int_a^b f(t)\, dt \right|$$

$$\le (\Gamma - S)\left[\frac{b-a}{2} + \left| x - \frac{a+b}{2} \right|\right](b-a) \tag{50}$$

dır.

İspat. (37) ve (38) de $\lambda = 0$ alalım. O zaman

$$max\{x - a, b - x\} = \frac{1}{2}[b - a + |2x - a - b|] = \frac{b-a}{2} + \left| x - \frac{a+b}{2} \right| \tag{51}$$

elde edilir. Yukarıdaki ispatta

$$max\{A,B\}=\frac{1}{2}[A+B+|A-B|], \quad a,b\in\mathbb{R}$$

eşitini kulanmış olduk. (51) deki eşitlikten, (49) ve (50) nin geçerli olduğu kolayca görülür.

Sonuç 3.2.2 Teorem 3.2.5 nin varsayımı altında,

$$\left|\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]-\int_a^b f(t)\,dt\right|\leq(S-\gamma)\frac{(b-a)^2}{2} \tag{52}$$

$$\left|\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]-\int_a^b f(t)\,dt\right|\leq(\Gamma-S)\frac{(b-a)^2}{2} \tag{53}$$

dır.

İspat. (37) ve (38) de $\lambda\ =\ 1$ alalım. O zaman

$$x\ =\frac{a+b}{2}$$

ve

$$max\left\{\lambda\frac{b-a}{2},x-a-\lambda\frac{b-a}{2},b-x-\lambda\frac{b-a}{2}\right\}=\frac{b-a}{2}$$

elde edilir. (52) ve (53) açıkça görülmüş olur.

Sonuç 3.2.3 Teorem 3.2.5 deki varsayımı altında,

$$\left|(b-a)\left[\frac{f(a)+f(b)}{4}+\frac{1}{2}f(x)-\frac{\gamma}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right]-\int_a^b f(t)\,dt\right|$$
$$\leq(S-\gamma)\left[\frac{b-a}{4}+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right](b-a) \tag{54}$$

$$\left|(b-a)\left[\frac{f(a)+f(b)}{4}+\frac{1}{2}f(x)-\frac{\Gamma}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right]-\int_a^b f(t)\,dt\right|$$
$$\leq(\Gamma-S)\left[\frac{b-a}{4}+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right](b-a) \tag{55}$$

dır.

İspat. (37) ve (38) de $\lambda=\frac{1}{2}$ alalım. O zaman

$$max\left\{\frac{b-a}{4},x-\frac{3a+b}{4},\frac{a+3b}{4}-x\right\}$$
$$=max\left\{\frac{1}{2}\left(x-a+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right),\frac{1}{2}\left(b-x+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\left[b-a+2\left|x-\frac{a+b}{2}\right|+|2x-(a+b)|\right]$$
$$=\frac{b-a}{4}+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|$$

elde edilir. (54) ve (55) açıkça görülmüş olur.

Sonuç 3.2.4 Teorem 3.2.5 nin varsayımı altında

$$\left|\frac{b-a}{6}[f(a)+4f(x)+f(b)]-\frac{2\gamma}{3}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)-\int_a^b f(t)\,dt\right|$$
$$\leq (S-\gamma)\left[\frac{b-a}{3}+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right](b-a) \tag{56}$$
$$\left|\frac{b-a}{6}[f(a)+4f(x)+f(b)]-\frac{2\Gamma}{3}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)-\int_a^b f(t)\,dt\right|$$
$$\leq (\Gamma-S)\left[\frac{b-a}{3}+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right](b-a) \tag{57}$$

dır.

İspat. (37) ve (38) de $\lambda = \frac{1}{3}$ alalım. O zaman

$$max\left\{\lambda\frac{b-a}{2}, x-a-\lambda\frac{b-a}{2}, b-x-\lambda\frac{b-a}{2}\right\}$$
$$= max\left\{\frac{b-a}{6}, x-\frac{5a+b}{6}, \frac{a+5b}{6}-x\right\}$$
$$= max\left\{\frac{1}{2}\left(x-a+\left|x-\frac{2a+b}{3}\right|\right), \frac{1}{2}\left(b-x+\left|x-\frac{a+2b}{3}\right|\right)\right\}$$
$$= \left\{\frac{b-a}{6}, \frac{b-a}{3}+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{b-a}{2}+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{b-a}{6}+\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right|\right]$$
$$= \frac{b-a}{3}+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|$$

elde edilir. (56) ve (57) açıkça görülmüş olur.

Hatırlatma 3.2.3 Eğer (49) ve (50); (54) ve (55); (56) ve (57) de $x = \frac{a+b}{2}$ alırsak, x e bağlı olmayan eşitsizliklere sahip oluruz.

3.3 İKİ FONKSİYONUN YAPISINI İÇEREN OSTROWSKİ-TİPİ EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde, Pachpatte tarafından kurulan ve iki fonksiyonun yapısını içeren bazı yeni Ostrowski tipi eşitsizlikleri ele alacağız. Aşağıdaki Ostrowski tipli integral eşitsizliklerini içeren teoremle başlayalım.

Teorem 3.3.1 $f, g \in C^1([a,b],\mathbb{R})$, $[a,b] \in \mathbb{R}$, $a < b$ olsun.

$$F = \frac{f(a)+f(b)}{2}, G = \frac{g(a)+g(b)}{2}$$

olmak üzere her $x \in [a,b]$ için

$$\left|f(x)g(x) - \frac{1}{2}[g(x)F + f(x)G]\right|$$
$$\leq \frac{1}{4}\left[|g(x)|\int_a^b |f'(t)|dt + |f(x)|\int_a^b |g'(t)|dt\right] \tag{1}$$

ve

$$|f(x)g(x) - [g(x)F + f(x)G] + FG|$$
$$\leq \frac{1}{4}\left(\int_a^b |f'(t)|dt\right)\left(\int_a^b |g'(t)|dt\right) \tag{2}$$

dır. $\frac{1}{4}$ sabiti (1) ve (2) için kesindir.

İspat: Hipotezden aşağıdaki ifadeler

$$f(x) - F = \frac{1}{2}\left[\int_a^x f'(t)dt - \int_x^b f'(t)dt\right] \int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a) \tag{3}$$

$$g(x) - G = \frac{1}{2}\left[\int_a^x g'(t)dt - \int_x^b g'(t)dt\right] \tag{4}$$

yazılır. (3) ve (4) ün her iki tarafını sırasıyla $g(x)$ ve $f(x)$ ile çarpar ve taraf tarafa toplarsak

$$f(x).g(x) - \frac{1}{2}[g(x)F + f(x)G]$$
$$= \frac{1}{4}\left[g(x)\left[\int_a^x f'(t)dt - \int_x^b f(t)\,dt\right] + f(x)\left[\int_a^x g'(t)dt - \int_x^b g'(t)dt\right]\right] \tag{5}$$

elde edilir. (5) de mutlak değer ve integralin özelliklerini kullanırsak

$$\left|f(x).g(x) - \frac{1}{2}[g(x)F + f(x)G]\right| \leq \frac{1}{4}\left[|g(x)|\int_a^b |f'(t)|dt + |f(x)|\int_a^b |g'(t)|dt\right]$$

elde etmiş oluruz. Bu (1) de verilen eşitsizliktir.

(3) ve (4) deki her iki tarafı çarpılırsa

$$f(x).g(x) - [g(x)F + f(x)G] + FG$$
$$= \frac{1}{4}\left[\int_a^x f'(t)dt - \int_x^b f'(t)dt\right]\left[\int_a^x g'(t)dt - \int_x^b g'(t)dt\right] \tag{6}$$

olur. (5) de mutlak değer ve integralin özelliklerini kullanarak

$$|f(x).g(x) - [g(x)F + f(x)G] + FG| \leq \frac{1}{4}\left[\int_a^b |f'(t)|dt\right]\left[\int_a^b |g'(t)|\,dt\right]$$

elde etmiş oluruz. Bu (2) de verilen eşitsizliktir. (1) ve (2) deki $\frac{1}{4}$ sabiti kesindir. Varsayalım ki (1) ve (2) deki katsayılar $c > 0$ ve $k > 0$ olsun. Her $x \in [a, b]$ için,

$$\left|f(x).g(x) - \frac{1}{2}[|g(x)|F + |f(x)|G]\right|$$
$$\leq c\left[|g(x)|\int_a^b |f'(t)|dt + |f(x)|\int_a^b |g'(t)|dt\right] \tag{7}$$

ve

$$|f(x).g(x) - [|g(x)|F + |f(x)|G] + FG| \leq k\left(\int_a^b |f'(t)|dt\right)\left(\int_a^b |g'(t)|dt\right) \tag{8}$$

olur. (7) ve (8) de $f(x) = g(x) = x$ seçersek $f'(x) = g'(x) = 1$, $F = G = \frac{a+b}{2}$ olur. O zaman basit bir hesaplamayla

$$\left|x - \frac{1}{2}(a+b)\right| \leq 2c(b-a) \tag{9}$$

ve

$$\left|x\big(x-(a+b)\big) + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right| \leq k(b-a)^2 \tag{10}$$

elde etmiş oluruz. $x = b$ alınırsa (9) da $c \geq \frac{1}{4}$ olur. (10) da $k \geq \frac{1}{4}$ olduğu kolayca görülür. (1) ve (2) deki sabitlerin ispatı kolayca yapılmış ve böylece ispat tamamlanmış oldu.

Hatırlatma 3.3.1 (5) ve (6) da her iki tarafı $(b-a)$ ya böldükten sonra $[a,b]$ üzerinde x e göre her iki tarafın integralini alırsak Teorem 3.3.1 in ispatı kolayca görülmüş olur.

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x) - \frac{1}{2(b-a)}\left[F\int_a^b g(x)dx + G\int_a^b f(x)dx\right]\right|$$
$$\leq \frac{1}{4(b-a)}\left[\left(\int_a^b |g(x)|dx\right)\left(\int_a^b |f'(x)|dx\right) + \left(\int_a^b |f(x)|dx\right)\left(\int_a^b |g'(x)|dx\right)\right] \tag{11}$$

ve

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x) - \frac{1}{(b-a)}\left[F\int_a^b g(x)dx + G\int_a^b f(x)dx - FG\right]\right|$$
$$\leq \frac{1}{4}\left(\int_a^b |f'(x)|dx\right)\left(\int_a^b |g'(x)|dx\right) \tag{12}$$

elde edilir. (11) ve (12) de not ettiğimiz eşitsizlikler (Grüss 2001) ve (Čebyšev 1882) in iyi bilinen eşitsizliklerine benzemektedir.

Bir sonraki teoremde farklı Ostrowski tipi eşitsizlikler incelenmiştir (Pachpatte 2005).

Teorem 3.3.2 $f, g: [a.b] \to \mathbb{R}$, $[a,b]$ üzerinde sürekli bir fonksiyon ve (a,b) de diferensiyellenebilir ve ayrıca $f', g': (a,b) \to \mathbb{R}$, (a,b) aralığı ile sınırlandırılmış olsun. Sonra her $x \in [a,b]$ için

$$\left|f(x)g(x)-\frac{1}{2(b-a)}\left[g(x)\int_a^b f(y)dy+f(x)\int_a^b g(y)dy\right]\right|$$

$$\leq \frac{1}{2}\{|g(x)|\|f'\|_\infty+|f(x)|\|g'\|_\infty\}\left[\frac{1}{4}+\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right](b-a) \tag{13}$$

ve

$$\left|f(x)g(x)-\frac{1}{(b-a)}\left[g(x)\int_a^b f(y)dy+f(x)\int_a^b g(y)dy\right]+\frac{1}{b-a}\int_a^b f(y)\,g(y)dy\right|$$

$$\leq \frac{1}{b-a}\|f'\|_\infty\|g'\|_\infty\left[\frac{(x-a)^3+(b-x)^3}{3}\right] \tag{14}$$

olur.

İspat. Her $x,y\in[a,b]$ için aşağıdaki tanımlamalar yazılabilir.

$$f(x)-f(y)=\int_y^x f'(t)dt \tag{15}$$

$$g(x)-g(y)=\int_y^x g'(t)dt \tag{16}$$

(15) ve (16) nın her iki tarafı sırasıyla $g(x)$ ve $f(x)$ ile çarpılarak toplanır ve aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$2f(x)g(x)-[g(x)f(y)+f(x)g(y)]=g(x)\int_y^x f'(t)dt+f(x)\int_y^x g'(t)dt \tag{17}$$

(17) nin her iki tarafı $[a,b]$ üzerinde y ye göre integrali alınıp tekrar yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$f(x)g(x)-\frac{1}{2(b-a)}\left[g(x)\int_a^b f(y)dy+f(x)\int_a^b g(y)dy\right]$$

$$=\frac{1}{2(b-a)}\int_a^b\left\{g(x)\int_y^x f'(t)dt+f(x)\int_y^x g'(t)dt\right\}dy \tag{18}$$

(18) de mutlak değer in özelliğini kullanırsak

$$\left|f(x)g(x)-\frac{1}{2(b-a)}\left[g(x)\int_a^b f(y)dy+f(x)\int_a^b g(y)dy\right]\right|$$

$$\leq\frac{1}{2(b-a)}\int_a^b\{|g(x)|\|f'\|_\infty|x-y|+|f(x)|\|g'\|_\infty|x-y|\}\,dy$$

$$=\frac{1}{2(b-a)}\{|g(x)|\|f'\|_\infty+|f(x)|\|g'\|_\infty\}\left[\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\{|g(x)|\|f'\|_\infty + |f(x)|\|g'\|_\infty\}\left[\frac{1}{4} + \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right](b-a)$$

elde edilir. Bu (13) deki eşitsizliği gerektirir. (15) ve (16) nın sol ve sağ tarafları çarpılarak

$$f(x)g(x) - [g(x)f(y) + f(x)g(y)] + f(y)g(y) = \left\{\int_y^x f'(t)\right\}\left\{\int_y^x g'(t)\right\} \tag{19}$$

denklemi elde edilir. (19) nin her iki tarafı $[a,b]$ üzerinde y ye göre integrali alınıp tekrar yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$f(x)g(x) - \frac{1}{b-a}\left[g(x)\int_a^b f(y)dy + f(x)\int_a^b g(y)dy\right] + \frac{1}{b-a}\int_a^b f(y)\,g(y)dy$$
$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b \left\{\int_y^x f'(t)dt\right\}\left\{\int_y^x g'(t)dt\right\}dy \tag{20}$$

(20) de mutlak değer in özelliğini kullanırsak

$$\left|f(x)g(x) - \frac{1}{b-a}\left[g(x)\int_a^b f(y)dy + f(x)\int_a^b g(y)dy\right] + \frac{1}{b-a}\int_a^b f(y)\,g(y)dy\right|$$
$$\leq \frac{1}{b-a}\|f'\|_\infty\|g'\|_\infty \int_a^b |x-y|^2\,dy$$
$$= \frac{1}{b-a}\|f'\|_\infty\|g'\|_\infty\left[\frac{(x-a)^3 + (b-x)^3}{3}\right]$$

elde ederiz. Bu (14) deki istenilen eşitsizliktir. İspat tamamlanmış olur.

Hatırlatma 3.3.2 (18) ve (20) nin her iki tarafı $b-a$ ya bölünüp, $[a,b]$ üzerinde x e göre integrali alınarak mutlak değerin özelliği kullanılıp basitçe hesaplama yapılırsa,

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx - \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx\right)\right|$$
$$\leq \frac{1}{2(b-a)^2}\int_a^b\left[\int_a^b \{|g(x)|\|f'\|_\infty + |f(x)|\|g'\|_\infty\}|x-y|dy\right]dx \tag{21}$$

ve

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx - \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx\right)\right|$$
$$\leq \frac{1}{12}(b-a)^2\|f'\|_\infty\,\|g'\|_\infty \tag{22}$$

elde ederiz. Burada (21) deki eşitsizlik (Tanım 2.6) daki iyi bilinen Grüss eşitsizliğine benzemekte ve (22) deki eşitsizlik Čebyšev eşitsizliğine benzemektedir.

Dikkat edersek, (13) de $g(x) = 1$ ve bundan dolayı $g'(x) = 0$ olur, yeniden ünlü Ostrowski eşitsizliğini elde ederiz.

Aşağıda sonuçları basitçe verilen teoremde fonksiyonun türevleri Lp uzaylarına aittir.

Teorem 3.3.3 $f, g: [a.b] \to \mathbb{R}$ kesin sürekli fonksiyon ve $f', g' \in L_p[a,b], p > 1$ olsun.

$$\left|f(x)g(x) - \frac{1}{2(b-a)}\left[g(x)\int_a^b f(t)dt + f(x)\int_a^b g(t)dt\right]\right|$$

$$\leq \frac{1}{2(b-a)}\left[|g(x)|\|f'\|_p + |f(x)|\|g'\|_p\right]\big(B(x)\big)^{\frac{1}{q}} \tag{23}$$

ve

$$\left|\left|f(x)g(x) - \frac{1}{(b-a)}\left[g(x)\int_a^b f(t)dt + f(x)\int_a^b g(t)dt\right]\right|\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right)\right|$$

$$\leq \frac{1}{(b-a)^2}\|f'\|_p\|g'\|_p\big(B(x)\big)^{\frac{2}{q}} \tag{24}$$

her $x \in [a,b]$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$olduğu yerde

$$B(x) = \frac{1}{q+1}\left[(x-a)^{q+1} + (b-x)^{q+1}\right] \tag{25}$$

elde edilir.

İspat. Hipotezden aşağıdaki tanımlamayı elde ederiz.

Her $x \in [a,b]$ için de $p(x,t)$ tanımından

$$f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)\, f'(t)dt \tag{26}$$

ve

$$g(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)\, g'(t)dt \tag{27}$$

elde edilir. (26) ve (27) nin her iki tarafını sırasıyla $g(x)$ ve $f\,(x)$ ile çarpıp sonra toplarsak aşağıdaki gibi yeni bir sonuç tanımlamış oluruz.

$$f(x)g(x) - \frac{1}{2(b-a)}\left[g(x)\int_a^b f(t)dt + f(x)\int_a^b g(t)dt\right]$$

$$= \frac{1}{2(b-a)}\left[g(x)\int_a^b p(x,t)f'(t)dt + f(x)\int_a^b p(x,t)g'(t)dt\right] \tag{28}$$

(28) de mutlak değer özelliklerini ve Hölder integral eşitsizliğini kullanırsak,

$$\left|f(x)g(x)-\frac{1}{2(b-a)}\left[g(x)\int_a^b f(t)dt+f(x)\int_a^b g(t)dt\right]\right|$$

$$\leq \frac{1}{2(b-a)}\left[|g(x)|\int_a^b |p(x,t)||f'(t)|dt+|f(x)|\int_a^b |p(x,t)||g'(t)|dt\right]$$

$$\leq \frac{1}{2(b-a)}\left[|g(x)|\left(\int_a^b |p(x,t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^b |f'(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\right.$$

$$\left.+|f(x)|\left(\int_a^b |p(x,t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^b |g'(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

$$=\frac{1}{2(b-a)}\left[|g(x)|\|f'\|_p+|f(x)|\|g'\|_p\right]\left(\int_a^b |p(x,t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \tag{29}$$

elde ederiz. Basit bir hesaplamayla,

$$\begin{aligned}\int_a^b |p(x,t)|^q dt &= \int_a^x |t-a|^q dt+\int_x^b |t-b|^q dt\\ &= \int_a^x (t-a)^q dt+\int_x^b (b-t)^q dt\\ &= \frac{1}{q+1}\left[(x-a)^{q+1}+(b-x)^{q+1}\right]\\ &= B(x)\end{aligned} \tag{30}$$

olur. (29) da (30) kullanılarak (23) elde edilir. (26) ve (27) nin sağ ve sol tarafını taraf taraf çarparsak,

$$f(x)g(x)-\frac{1}{(b-a)}\left[g(x)\int_a^b f(t)dt+f(x)\int_a^b g(t)dt\right]$$

$$+\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right)$$

$$=\frac{1}{(b-a)^2}\left(\int_a^b p(x,t)f'(t)dt\right)\left(\int_a^b p(x,t)g'(t)dt\right) \tag{31}$$

elde edilir. (31) de mutlak değer özelliğini ve Hölder integral eşitsizliğini ve (30) u da kullanarak,

$$\left|f(x)g(x)-\frac{1}{(b-a)}\left[g(x)\int_a^b f(t)dt+f(x)\int_a^b g(t)dt\right]\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right)\right|$$

$$\le \frac{1}{(b-a)^2}\left(\int_a^b |p(x,t)||f'(t)|dt\right)\left(\int_a^b |p(x,t)||g'(t)|dt\right)$$

$$\le \frac{1}{(b-a)^2}\left(\int_a^b |p(x,t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^b |f'(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |p(x,t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^b |g'(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \frac{1}{(b-a)^2}\|f'\|_p\|g'\|_p\big(B(x)\big)^{2/q}$$

elde ederiz. Bu (24) de verilen eşitsizliktir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Hatırlatma 3.3.3 (23) de $g(x) = 1$ alırsak $g'(x) = 0$ olur. Basit bir hesaplamayla, her $x \in [a,b]$ için

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right|$$

$$\le \frac{1}{(q+1)^{\frac{1}{q}}}\left[\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{q+1} + \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{q+1}\right](b-a)^{\frac{1}{q}}\|f'\|_p \tag{32}$$

elde edilir. (Dragomir ve Wang 1998) tarafından kurulan (32) eşitsizliğini hatırlamış olduk.

Bu bölümün sonunda, Biz ispatı yapılan bu eşitsizlikleri içeren teoremi verdik.

$z: [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$L[z(x)] = (b-a)\left[\frac{\lambda}{2}\big(z(a) + z(b)\big) + (1-\lambda)z(x)\right]$$

notasyonunu kullanalım.

Teorem 3.3.4 $f, g \in [a,b] \to \mathbb{R}$, $[a,b]$ de sürekli fonksiyon ve (a,b) üzerinde diferensiyellenebilir olsun ayrıca $f', g' \in [a,b] \to \mathbb{R}$, (a,b)de sınırlandırılsın. Sonra

$$\left|g(x)L[f(x)] + f(x)L[g(x)] - g(x)\int_a^b f(t)dt - f(x)\int_a^b g(t)dt\right|$$

$$\le [|g(x)|\|f'\|_\infty + |f(x)|\|g'\|_\infty]M(x) \tag{33}$$

ve

$$\left|L[f(x)]L[g(x)] - L[g(x)]\int_a^b f(t)dt - L[f(x)]\int_a^b g(t)dt + \left(\int_a^b f(t)dt\right)\left(\int_a^b g(t)dt\right)\right|$$

$$\le \|f'\|_\infty\|g'\|_\infty M(x)^2 \tag{34}$$

$a+\lambda\frac{b-a}{2} \leq x \leq b-\lambda\frac{b-a}{2}, \lambda \in [0,1]$ için

$$M(x)=\frac{1}{4}(b-a)^2[\lambda^2+(\lambda-1)^2]+\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 \tag{35}$$

elde edilir.

İspat. Hipotezden aşağıdaki tanıma sahip oluruz.

$$L[f(x)]-\int_a^b f(t)dt=\int_a^b k(x,t)f'(t)dt \tag{36}$$

$$L[g(x)]-\int_a^b g(t)dt=\int_a^b k(x,t)g'(t)dt \tag{37}$$

$k(x,t)$ (39) da tanımlanmıştır. (36) ve (37) sırasıyla $g(x)$ ve $f\,(x)$ ile çarpılıp toplanırsa aşağıdaki gibi yeni bir sonuç tanımlamış oluruz.

$$g(x)L[f(x)]+f(x)L[g(x)]-g(x)\int_a^b f(t)dt-f(x)\int_a^b g(t)dt$$

$$=g(x)\int_a^b k(x,t)f'(t)dt+f(x)\int_a^b k(x,t)g'(t)dt \tag{38}$$

(38) de mutlak değer özelliğini kullanırsak,

$$\left|g(x)L[f(x)]+f(x)L[g(x)]-g(x)\int_a^b f(t)dt-f(x)\int_a^b g(t)dt\right|$$

$$\leq \left[|g(x)|\int_a^b |k(x,t)||f'(t)|dt+|f(x)|\int_a^b |k(x,t)||g'(t)|dt\right]$$

$$\leq [|g(x)|\|f'\|_\infty+|f(x)|\|g'\|_\infty]\int_a^b |k(x,t)|dt$$

$$=[|g(x)|\|f'\|_\infty+|f(x)|\|g'\|_\infty]$$

$$\times\left[\int_a^x \left|t-\left(a+\lambda\frac{b-a}{2}\right)\right|dt+\int_x^b \left|t-\left(b-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\right|dt\right] \tag{39}$$

elde ederiz. (39) un sağ tarafındaki integrali kullanarak (33) de istenen eşitsizlik elde edilir. (36) ve (37) nin sağ ve sol tarafını taraf tarafa çarparsak

$$L[f(x)]L[g(x)]-L[g(x)]\int_a^b f(t)dt-L[f(x)]\int_a^b g(t)dt$$

$$+\left(\int_a^b f(t)dt\right)\left(\int_a^b g(t)dt\right)$$

$$=\left(\int_a^b k(x,t)f'(t)\right)\left(\int_a^b k(x,t)g'(t)\right) \tag{40}$$

elde ederiz. (40) dan ve (33) eşitsizliğinin ispatındaki uygun değişiklikler ile (34) de istenen eşitsizlik elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Hatırlatma 3.3.4 (29) da $g(x) = 1$ alınır ve böylece $g'(x) = 0$ olur. (Dragomir, Cerone ve Roumeliotics 2000) tarafından kurulan aşağıdaki eşitsizliği biliyoruz.

$$\left| L[f(x)] - \int_a^b f(t)dt \right| \leq M(x)\|f'\|_\infty$$

her $\lambda \in [0,1]$ ve $a + \lambda \frac{b-a}{2} \leq x \leq b - \lambda \frac{b-a}{2}, \lambda \in [0,1]$ için ve ek olarak $(i)\ \lambda = 0$ seçersek,

Ostrowski Eşitsizliği (Tanım 2.4) elde edilir. $(ii)\ \lambda = 1\ , x = \frac{a+b}{2}$ seçersek Yamuk-tipi eşitsizlik elde edilir.

3.4 OSTROWSKİ VE GRÜSS TİPİ EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde, Ostrowski ve Grüss-tipinde bazı eşitsizlikler sunacağız. Son zamanlarda (Pachpatte 2004), (Cerone, Dragomir ve Roumeliotis 1999) tarafından bu eşitsizlikler verildi. Aşağıdaki teoremler (Pachpatte 2007) tarafından basitçe ispatlandı. $f, g \in [a,b] \to \mathbb{R}$ olacak şekilde uygun fonksiyonlar için aşağıda kullandığımız basitleştirilmiş notasyonları alalım:

$$S(f,g) = f(x)g(x) - \frac{1}{2(b-a)}\left[g(x)\int_a^b f(t)dt + f(x)\int_a^b g(t)dt\right]$$
$$-\frac{1}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)[Fg(x) + Gf(x)]$$

$$H(f,g) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,g(x)dx - \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx\right)$$
$$-\frac{1}{2(b-a)}\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)[Fg(x) + Gf(x)]dx$$

$$F = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}, \quad G = \frac{g(b) - g(a)}{b-a}$$

Teorem 3.4.1 $f, g \in [a,b] \to \mathbb{R}$ mutlak sürekli fonksiyonlar ve türevleri $f', g' \in L_2[a,b] \to \mathbb{R}$ olsun. Her $x \in [a,b]$ için

$$|S(f,g)| \leq \frac{b-a}{4\sqrt{3}}\left[|g(x)|\left(\frac{1}{b-a}\|f'\|_2^2 - F^2\right)^{\frac{1}{2}} + |f(x)|\left(\frac{1}{b-a}\|g'\|_2^2 - G^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]dx \qquad (1)$$

ve

$$|H(f,g)| \leq \frac{1}{4\sqrt{3}} \int_a^b \left[|g(x)| \left(\frac{1}{b-a} \|f'\|_2^2 - F^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right.$$

$$\left. + |f(x)| \left(\frac{1}{b-a} \|g'\|_2^2 - G^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] dx \qquad (2)$$

dır.

Teorem 3.4.2 Teorem (3.4.1) i varsayalım. Eğer $\gamma \leq f'(x) \leq \Gamma,\ \phi \leq g'(x) \leq \Phi$, $x \in [a,b]$ için $\gamma, \Gamma, \phi, \Phi$ reel sabitler ise, o zaman her $x \in [a,b]$ için

$$|S(f,g)| \leq \frac{b-a}{8\sqrt{3}} [|g(x)|(\Gamma - \gamma) + |f(x)|\Phi - \phi] \qquad (3)$$

ve

$$|H(f,g)| \leq \frac{1}{8\sqrt{3}} \int_a^b [|g(x)|(\Gamma - \gamma) + |f(x)|\Phi - \phi] dx \qquad (4)$$

dır.

Hatırlatma 3.4.1 Eğer (1) ve (3) te $g(x) = 1$ ve $g'(x) = 0$ alırsak basit bir hesaplamayla (Barnett, Dragomir ve Sofo 2000) nun kurmuş olduğu eşitsizliğe sahip oluruz ve eğer (1) ve (3) de $x = \frac{a+b}{2}$ seçersek, o zaman eşitsizlikte orta noktaya sahip oluruz.

3.4.1 ve 3.4.2 Teoremlerinin İspatları

$$p(x,t) = \begin{cases} t-a, & t \in [a,x] \\ t-b, & t \in (x,b] \end{cases}$$

$f, g \in [a,b] \to \mathbb{R}$ dönüşümleri için iyi bilinen (Korkine 1993) nin tanımından kolayca kanıtlanarak doğrudan ispatlanabilir.

$$T(f,g) = \frac{1}{2(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b \big(f(t) - f(s)\big)\big(g(t) - g(s)\big) dt ds$$

$T(\ f\ , g)$ tanımından

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b p(x,t) f'(t) dt - \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b p(x,t)\, dt \right) \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f'(t) dt \right)$$

$$= \frac{1}{2(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b \big(p(x,t) - p(x,s)\big)\big(f'(t) - f'(s)\big) dt ds \qquad (5)$$

elde edilir. Basit bir hesaplamayla

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b p(x,t) f'(t) dt = f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)\,dt = x - \frac{a+b}{2}$$

ve

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f'\,(t)dt = \frac{f(b)-f(a)}{2} = F$$

elde edilir. (5) i kullanarak, aşağıdaki tanıma sahip oluruz.

$$f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f\,(t)dt - F\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b \big(p(x,t)-p(x,s)\big)\big(f'(t)-f'(s)\big)dtds \tag{6}$$

her $x \in [a,b]$ için benzer olarak,

$$g(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b g\,(t)dt - G\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b \big(p(x,t)-p(x,s)\big)\big(g'(t)-g'(s)\big)dtds \tag{7}$$

elde ederiz. (6) ve (7) sırasıyla $g(x)$ ve $f\,(x)$ ile çarpılıp toplanırsa aşağıdaki gibi yeni bir sonuç tanımlamış oluruz.

$$S(f,g) = \frac{1}{2}\left[g(x)\frac{1}{2(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b \big(p(x,t)-p(x,s)\big)\big(f'(t)-f'(s)\big)dtds\right.$$

$$\left. + f(x)\frac{1}{2(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b \big(p(x,t)-p(x,s)\big)\big(g'(t)-g'(s)\big)dtds\right] \tag{8}$$

(8) de mutlak değer özelliğini kullanarak,

$$|S(f,g)| \le \frac{1}{2}\left[|g(x)|\frac{1}{2(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b |p(x,t)-p(x,s)||f'(t)-f'(s)|dtds\right.$$

$$\left. + |f(x)|\frac{1}{2(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b |p(x,t)-p(x,s)||g'(t)-g'(s)|dtds\right] \tag{9}$$

elde ederiz. İki katlı integralde Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullanırsak

$$\frac{1}{2(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b |p(x,t)-p(x,s)||f'(t)-f'(s)|dtds$$

$$\le \left(\frac{1}{2(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b \big(p(x,t)-p(x,s)\big)^2 dtds\right)^{1/2}$$

$$\times\left(\frac{1}{2(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b \big(f'(t)-f'(s)\big)^2 dtds\right)^{1/2} \tag{10}$$

görülmüş olur. Kolayca görülür ki

$$\frac{1}{2(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b\big(p(x,t)-p(x,s)\big)^2dtds$$
$$=\frac{1}{b-a}\int_a^b p^2(x,t)-\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)dt\right)^2$$
$$=\frac{1}{b-a}\left[\int_a^x(t-a)^2dt+\int_x^b(b-t)^2dt-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]$$
$$=\frac{1}{b-a}\left[\frac{(x-a)^3+(b-x)^3}{3}\right]-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{12}(b-a)^2 \qquad (11)$$

ve

$$\frac{1}{2(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b\big(f'(t)-f'(s)\big)^2dtds$$
$$=\frac{1}{b-a}\|f'\|_2^2-\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)^2$$
$$=\frac{1}{b-a}\|f'\|_2^2-F^2 \qquad (12)$$

olur. (10) da (11) ve (12) yi kullanırsak,

$$\frac{1}{2(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b|p(x,t)-p(x,s)||f'(t)-f'(s)|dtds$$
$$\leq\frac{b-a}{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{b-a}\|f'\|_2^2-F^2\right)^{1/2} \qquad (13)$$

elde edilir. Benzer olarak

$$\frac{1}{2(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b|p(x,t)-p(x,s)||g'(t)-g'(s)|dtds$$
$$\leq\frac{b-a}{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{b-a}\|g'\|_2^2-G^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (14)$$

elde edilir. (9) da (13) ve (14) kullanılarak, (1) i elde ederiz. (8) in her iki tarafı $[a,b]$ üzerinde x e göre integrali alınıp $b-a$ ya bölünürse

$$H(f,g)=\frac{1}{2(b-a)}\int_a^b\left[\frac{g(x)}{2(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b\big(p(x,t)-p(x,s)\big)\big(f'(t)-f'(s)\big)dtds\right.$$
$$\left.+\frac{f(x)}{2(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b\big(p(x,t)-p(x,s)\big)\big(g'(t)-g'(s)\big)dtds\right]dx \qquad (15)$$

elde edilir. (15) de mutlak değer özelliğini kullanarak,

$$|H(f,g)|\leq\frac{1}{2(b-a)}\int_a^b\left[\frac{|g(x)|}{2(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b|p(x,t)-p(x,s)||f'(t)-f'(s)|dtds\right.$$

$$+\frac{|f(x)|}{2(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b |p(x,t)-p(x,s)||g'(t)-g'(s)|dtds\Bigg]dx \tag{16}$$

elde edilir. (16) da (13) ve (14) kullanılırsa, (2) deki eşitsizlik elde edilir. 3.4.1 deki teoremin ispatı tamamlanmış olur. Gruss eşitsizliğini kullanırsak,

$$0\le \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(f'(t)\right)^2 dt-\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f'(t)dt\right)^2\le \frac{1}{4}(\Gamma-\gamma)^2$$

diğer bir deyişle

$$0\le \frac{1}{b-a}\|f'\|_2^2-F^2\le \frac{1}{4}(\Gamma-\gamma)^2 \tag{17}$$

kolayca elde ederiz. Benzer olarak,

$$0\le \frac{1}{b-a}\|g'\|_2^2-G^2\le \frac{1}{4}(\Phi-\phi)^2 \tag{18}$$

olur. (1) ve (2) de (17) ve (18) kullanarak (3) ve (4) deki eşitsizliği elde ederiz ve (2) deki teoremin ispatı tamamlanmış olur. Aşağıda (Cerone, Dragomir ve Roumeliotis 1999) un elde ettiği Ostrowski-Gruss tipi eşitsizlikler için iki kez diferensiyellenebilir dönüşümden bahsedilmiştir.

Teorem 3.4.3 $f\in[a,b]\to\mathbb{R}$, $[a,b]$ üzerinde sürekli ve (a,b) de iki kez diferensiyellenebilir olsun. Varsayalım ki ikinci türev $f'(a,b)\to\mathbb{R}$ de her $x\in(a,b)$ için $\Phi\le f''(x)\le\phi$ koşulunu karşılasın. O zaman her $x\in[a,b]$ için,

$$\left|f(x)-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'(x)+\left[\frac{(b-a)^2}{24}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$

$$\le \frac{1}{8}(\Phi-\phi)\left[\frac{1}{2}(b-a)+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right]^2 \tag{19}$$

dır.

İspat. Hipotezden, aşağıdaki tanıma sahip oluruz.

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b k(x,t)f''(t)dt=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt+\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'(x)-f(x) \tag{20}$$

çekirdek $k:[a,b]^2\to\mathbb{R}$ olduğu yerde tanımdan

$$k(x,t)=\begin{cases}\dfrac{(t-a)^2}{2} & if\ t\in[a,x]\\ \dfrac{(t-b)^2}{2} & if\ t\in(x,b]\end{cases}$$

dır. Kolayca gözlemleriz ki çekirdek k, her $t\in[a,b]$ için

$$0 \leq k(x,t) \leq \begin{cases} \dfrac{(b-x)^2}{2}, & x \in \left[a, \dfrac{a+b}{2}\right) \\ \dfrac{(x-a)^2}{2}, & x \in \left[\dfrac{a+b}{2}, b\right] \end{cases} \tag{21}$$

olur. $f''(\cdot)$ ve $k(x,\cdot)$ dönüşümlerinde Gruss integral eşitsizliğini uygulayarak,

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b k(x,t)f''(t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b k(x,t)d(t)\frac{1}{b-a}\int_a^b f''(t)dt\right|$$

$$\leq \frac{1}{4}(\Phi-\phi)\times\begin{cases} \dfrac{(b-x)^2}{2}, & x \in \left[a, \dfrac{a+b}{2}\right) \\ \dfrac{(x-a)^2}{2}, & x \in \left[\dfrac{a+b}{2}, b\right] \end{cases} \tag{22}$$

elde ederiz.

$$\int_a^b k(x,t)\,dt = \int_a^x \frac{(t-a)^2}{2}dt + \int_x^b \frac{(t-b)^2}{2}dt = \frac{1}{6}[(x-a)^3 + (b-x)^3]$$

olduğunu görürüz. Basit bir hesaplamayla şunu da görürüz.

$$\begin{aligned}
(x-a)^3 + (b-x)^3 &= (b-a)[(x-a)^2 + (b-x)^2 - (x-a)(b-x)] \\
&= (b-a)[(b-a)^2 - 3(x-a)(b-x)] \\
&= (b-a)\left[(b-a)^2 + 3[x^2 - (a+b)x + ab]\right] \\
&= (b-a)\left[(b-a)^2 + 3[x^2 - (a+b)x + ab]\right] \\
&= (b-a)\left[(b-a)^2 + 3\left[\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2\right]\right] \\
&= (b-a)\left[\frac{(b-a)^2}{4} + 3\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\right]
\end{aligned}$$

sonuç olarak,

$$\int_a^b k(x,t)\,dt = (b-a)\left[\frac{(b-a)^2}{24} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\right]$$

(22) kullanılarak

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b k(x,t)f''(t)dt - \left[\frac{(b-a)^2}{24} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\right]\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}\right|$$

$$\leq \frac{1}{4}(\Phi-\phi)\times\begin{cases} \dfrac{(b-x)^2}{2}, & x \in \left[a, \dfrac{a+b}{2}\right) \\ \dfrac{(x-a)^2}{2}, & x \in \left[\dfrac{a+b}{2}, b\right] \end{cases} \tag{23}$$

elde ederiz. (20) ve (23) den,

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt - f(x) + \left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'(x)\right.$$
$$\left.-\left[\frac{(b-a)^2}{24}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}\right|$$
$$\leq \frac{1}{4}(\Phi-\phi)\times\begin{cases}\frac{(b-x)^2}{2}, & x\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right)\\ \frac{(x-a)^2}{2}, & x\in\left[\frac{a+b}{2},b\right]\end{cases}$$

elde ederiz. Şimdi bu ifadeyi kabul ederek

$$max\left\{\frac{(b-x)^2}{2},\frac{(x-a)^2}{2}\right\}=\begin{cases}\frac{(b-x)^2}{2}, & x\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right)\\ \frac{(x-a)^2}{2}, & x\in\left[\frac{a+b}{2},b\right]\end{cases}$$

diğer bir değişle,

$$max\left\{\frac{(b-x)^2}{2},\frac{(x-a)^2}{2}\right\}=\frac{1}{2}\left[\frac{(b-x)^2+(x-a)^2}{2}+\frac{1}{2}|(b-x)^2-(x-a)^2|\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{(b-a)^2}{4}+\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2+(b-a)\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(b-a)+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right]^2$$

ve (19) kanıtlanmış olur. Aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.4.1 f Teorem (3.4.3) deki gibi olsun. (19) da eşitsizliğin orta noktası $x=\frac{a+b}{2}$ seçersek o zaman

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{24}(b-a)\big(f'(b)-f'(a)\big)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$
$$\leq\frac{1}{32}(\Phi-\phi)(b-a)^2 \tag{24}$$

elde ederiz.

Hatırlatma 3.4.2 Klasik orta nokta eşitsizliğini bildiren

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|\leq\frac{1}{24}(b-a)^2\|f''\|_\infty \tag{25}$$

$\|f''\|_\infty=\sup_{t\in(a,b)}|f''(t)|<\infty$ ifadesidir. Dikkat edersek eğer $\Phi-\phi\leq\frac{4}{3}\|f''\|_\infty$ ise o zaman (24) daki sonuç tahmin edilir. (25) de verilen tahmin en iyisidir. Varsayımda yeterli bir durum $\Phi-\phi\leq\frac{4}{3}\|f''\|_\infty$, $0\leq\phi\leq\Phi$ için doğru olur.

Sonuç 3.4.2 f Teorem (3.4.3) deki gibi olsun. Aşağıdaki yamuk eşitsizliğine sahip oluruz:

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{12}(b-a)\big(f'(b)-f'(a)\big)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$
$$\leq \frac{1}{8}(\Phi-\phi)(b-a)^2 \tag{26}$$

İspat. (19) da sırasıyla $x = a\ ve\ x = b$ seçelim,

$$\left|f(a)+\frac{b-a}{2}f'(a)+\frac{1}{6}(b-a)\big(f'(b)-f'(a)\big)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$
$$\leq \frac{1}{8}(\Phi-\phi)(b-a)^2 \tag{27}$$

ve

$$\left|f(b)+\frac{b-a}{2}f'(b)+\frac{1}{6}(b-a)\big(f'(b)-f'(a)\big)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$
$$\leq \frac{1}{8}(\Phi-\phi)(b-a)^2 \tag{28}$$

Özetle (27) ve (28) de üçgen eşitsizliği kullanılıp ve iki ile bölünürse, (26) da istenen eşitsizlik elde edilir.

Hatırlatma 3.4.3 Klasik yamuk eşitsizliği durumu

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| \leq \frac{1}{12}(b-a)^2\|f''\|_\infty \tag{29}$$

Şimdi varsayalım ki $\Phi-\phi \leq \frac{2}{3}\|f''\|_\infty$ olsun. Bu durumda ikinci türev f'' nün yeteri kadar yakın alt ve üst eğer değerlerini varsayabiliriz. O zaman (26) nın kanıtı tahmin edilebilir. En iyi tahmin (29) klasik yamuk eşitsizliğidir. Sonra iki kez diferensiyellenebilme ile ilgili dönüşüm basitçe (Pachpatte 2004) tarafından kurulmuştur.

Teorem 3.4.4 $f,g \in [a,b] \to \mathbb{R}$, (a,b) de iki kez diferensiyellenebilir dönüşüm ve $f'',g''\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ sınırlı olsun. O zaman her $x \in [a,b]$,

$$\left|2\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right)-\left[f(x)-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'(x)\right]\right.$$
$$\left.\text{x}\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right)-\left[g(x)-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)g'(x)\right]\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right)\right|$$
$$\leq E(x)\left[\|f''\|_\infty\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |g(t)|dt\right)+\|g''\|_\infty\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(t)|dt\right)\right] \tag{30}$$

ve

$$\left|\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)g(x)+\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right)f(x)+\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(fg)'(x)-2f(x)g(x)\right|$$
$$\leq E(x)[\|f''\|_\infty|g(x)|+\|g''\|_\infty|f(x)|] \tag{31}$$
ifadesi
$$E(x)=\frac{1}{24}(b-a)^2+\frac{1}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 \tag{32}$$
olduğu yerde elde edilir.

Teorem 3.4.5 $f\,,g$ Teorem (3.4.4) deki gibi olsun. O zaman $x\in[a,b]$ için
$$\left|f(x)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right)+g(x)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)-2\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)\right.$$
$$\times\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right)-\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right)\right.$$
$$\left.\left.+\frac{g(b)-g(a)}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)\right]\right|$$
$$\leq L(x)\left[\|f''\|_\infty\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |g(t)|dt\right)+\|g''\|_\infty\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(t)|dt\right)\right] \tag{33}$$
ve
$$\left|2f(x)g(x)-\left\{\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt+\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right]g(x)\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt+\frac{g(b)-g(a)}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right]f(x)\right\}\right|$$
$$\leq L(x)[\|f''\|_\infty|g(x)|+\|g''\|_\infty|f(x)|] \tag{34}$$
ifadesi
$$L(x)=\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}+\frac{1}{4}\right]^2+\frac{1}{12}\right\}(b-a)^2 \tag{35}$$
olduğu yerde elde edilir.

Hatırlatma 3.4.4 Kolayca görülür ki, (4) ve (5) de $g(x)=1$ alınır ve böylece $g'(x)=0$, $g''(x)=0$ olur. Sırasıyla (Cerone, Dragomir ve Roumeliotis 1999), (Dragomir ve Barnett 1998) in elde ettiği temel eşitsizliği yeniden bulmuş olduk.

3.4.4 ve 3.4.5 deki Teoremlerin İspatı. Hipotezden aşağıdaki tanımlamalara sahip oluruz. $x\in[a,b]$ için
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt=\left[f(x)-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'(x)\right]+\frac{1}{b-a}\int_a^b k(x,t)f''(t)dt \tag{36}$$

ve

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt = \left[g(x) - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)g'(x)\right] + \frac{1}{b-a}\int_a^b k(x,t)g''(t)dt \qquad (37)$$

elde edilir. $k(x,t)$ (1.2.28) de verilmiştir. Sırasıyla (36) ve (37), $\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt$ ve $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$ ile çarpılıp toplanırsa yeni bir sonuç tanımlanır.

$$\begin{aligned}
&2\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right)\\
&= \left[f(x) - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)f'(x)\right]\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right)\\
&+ \left[g(x) - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)g'(x)\right]\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)\\
&+ \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b k(x,t)f''(t)dt\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right)\\
&+ \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b k(x,t)g''(t)dt\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right) \qquad (38)
\end{aligned}$$

elde edilir. $x \in [a,b]$ için (38) i ve mutlak değer in özelliklerini kullanırsak,

$$\begin{aligned}
&\Bigg|2\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right)\\
&- \left[f(x) - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)f'(x)\right]\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right)\\
&- \left[g(x) - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)g'(x)\right]\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)\Bigg|\\
&\le \left[\|f''\|_\infty\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |g(t)|dt\right) + \|g''\|_\infty\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(t)|dt\right)\right]\\
&\times\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |k(x,t)|dt\right) \qquad (39)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Temel bir hesaplama kullanarak (Bakınız Teorem 3.4.3 ün ispatına), $x \in [a,b]$ için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b-a}\int_a^b |k(x,t)|dt &= \frac{(b-a)^2}{24} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\\
&= E(x) \qquad (40)
\end{aligned}$$

elde edilir. (39) da (40) kullanılarak, (30) da gereken eşitsizlik elde edilmiş olur. (36) ve (37) yeniden yazılırsa $x \in [a,b]$ için aşağıdaki gibi

$$f(x)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt+\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b k(x,t)f''(t)dt \qquad (36.1)$$

ve

$$g(x)=\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt+\left(x-\frac{a+b}{2}\right)g'(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b k(x,t)g''(t)dt \qquad (37.1)$$

yazılır. (36.1) ve (37.1) nin her iki tarafı sırasıyla $g(x)$ ve $f\ (x)$ ile çarpılıp sonra toplanırsa yeni bir sonuç tanımlanır.

$$\begin{aligned}2f(x)g(x)&=\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)g(x)+\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right)f(x)\\&+\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(fg)'(x)-\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b k(x,t)f''(t)dt\right)g(x)\\&-\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b k(x,t)g''(t)dt\right)f(x)\end{aligned} \qquad (41)$$

yeniden yazılır, mutlak değer özelliği ve (40) kullanılırsa (31) deki istenen eşitsizlik elde edilir. (3.4.4) deki Teoremin ispatı tamamlanmış olur. Hipotezden aşağıdaki tanıma sahip oluruz. $x\in[a,b]$ için

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\\&+\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b p(x,t)p(t,s)\,f''(s)dsdt\end{aligned} \qquad (42)$$

ve

$$\begin{aligned}g(x)&=\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt+\frac{g(b)-g(a)}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\\&+\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b p(x,t)p(t,s)\,g''(s)dsdt\end{aligned} \qquad (43)$$

elde ederiz. $p(x,t)$, (1.2.11) de verilmiştir. (42) ve (43) ün her iki tarafı sırasıyla $\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt$ ve $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$ ile çarpılır ve toplanırsa aşağıdaki gibi yeni bir sonuç tanımlanır. $x\in[a,b]$ için

$$\begin{aligned}&f(x)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right)+g(x)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)\\&=2\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right)\\&+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right)\end{aligned}$$

$$+\frac{g(b)-g(a)}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)$$

$$+\left(\frac{1}{(b-a)^2}\right)\int_a^b\int_a^b p(x,t)p(t,s)\,f''(s)dsdt\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right)$$

$$+\left(\frac{1}{(b-a)^2}\right)\int_a^b\int_a^b p(x,t)p(t,s)\,g''(s)dsdt\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right) \quad (44)$$

elde edilir. (44) den ve mutlak değer in özelliğini kullanarak,

$$\Bigg|f(x)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right)+g(x)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)$$

$$-2\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right)$$

$$-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right)$$

$$-\frac{g(b)-g(a)}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)\Bigg|$$

$$\leq\left[\left[\|f''\|_\infty\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b|g(t)|dt\right)+\|g''\|_\infty\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b|f(t)|dt\right)\right]\right]$$

$$\times\left(\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b|p(x,t)||p(t,s)|\,dsdt\right) \quad (45)$$

sahip oluruz. Basit cebirsel işlemler ile $x\in[a,b]$ için

$$\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b|p(x,t)||p(t,s)|\,dsdt=L(x) \quad (46)$$

elde edilir. (35) de $L(x)$ elde edilmiştir. (45) de (46) kullanılarak (33) eşitsizliği elde edilir. (34) eşitsizliğini ispatlamak için, (42) ve (43) ün her iki tarafı sırasıyla $g(x)$ ve $f\ (x)$ ile çarpılıp toplanırsa aşağıdaki gibi yeni bir sonuç

$$2f(x)g(x)=\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right]g(x)$$

$$+\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt+\frac{g(b)-g(a)}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right]f(x)$$

$$+\left(\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b p(x,t)p(t,s)\,f''(s)dsdt\right)g(x)$$

$$+\left(\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b p(x,t)p(t,s)\,g''(s)dsdt\right)f(x) \quad (47)$$

elde edilir. (47) yeniden yazılır, mutlak değerin özelliği ve (46) kullanılarak, (34) de gerekli olan eşitsizlik elde edilir. Teorem 3.4.5 ün ispatı tamamlanmış olur.

3.5 BAŞKA OSTROWSKİ TİPİ EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde, n-li diferensiyellenebilir dönüşümlerle ilgili çeşitli araştırmacılar tarafından kurulan bazı Ostrowski tipi eşitsizlikler sırasıyla verilecek. Aşağıda, (Cerone, Dragomir ve Roumeliotis 2006) tarafından kanıtlanan eşitsizlikler verilmiştir.

Teorem 3.5.1 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ bir dönüşüm olsun öyleki $f^{(n-1)}[a,b]$ de mutlak sürekli ve her $x\in[a,b]$ için $f^{(n)}\in L_\infty[a,b]$ için

$$\left|\int_a^b f(t)dt-\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{(b-x)^{k+1}+(-1)^k(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}\right]f^k(x)\right|$$
$$\leq\frac{\left\|f^{(n)}\right\|_\infty}{(n+1)!}\left[(x-a)^{n+1}+(b-x)^{n+1}\right]$$
$$\leq\frac{\left\|f^{(n)}\right\|_\infty}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \tag{1}$$

$\left\|f^{(n)}\right\|_\infty=\sup_{t\in[a,b]}\left|f^{(n)}(t)\right|<\infty$ olduğunda (1) eşitsizliği elde edilir.

İspat. Hipotezden, aşağıdaki tanımlamayı yapabiliriz;

$$\int_a^b f(t)dt=\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{(b-x)^{k+1}+(-1)^k(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}\right]f^k(x)$$
$$+(-1)^n\int_a^b E_n(x,t)f^{(n)}(t)\,dt \tag{2}$$

Her $x\in[a,b]$ için (1.5.23) de verilen $E_n(x,t)$ olduğu yerde, (2) den,

$$\left|\int_a^b f(t)dt-\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{(b-x)^{k+1}+(-1)^k(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}\right]f^k(x)\right|$$
$$=\left|\int_a^b E_n(x,t)f^{(n)}(t)\,dt\right|\leq\left\|f^{(n)}\right\|_\infty\int_a^b|E_n(x,t)|dt$$
$$=\left\|f^{(n)}\right\|_\infty\left[\int_a^x\frac{(t-a)^n}{n!}dt+\int_x^b\frac{(b-t)^n}{n!}dt\right]$$
$$=\frac{\left\|f^{(n)}\right\|_\infty}{(n+1)!}\left[(x-a)^{n+1}+(b-x)^{n+1}\right]$$

ifadesini elde ederiz ve (1) eşitsizliği kanıtlanmış olur. (1) deki ikinci eşitsizliğin kanıtı $x\in[a,b]$ için

$$(x-a)^{n+1}+(b-x)^{n+1} \leq (b-a)^{n+1}$$

den gözlemlenir.

Hatırlatma 3.5.1 (1) de $x=\frac{a+b}{2}$ alınırsa,

$$\left|\int_a^b f(t)dt-\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1+(-1)^k}{(k+1)!}\right]\frac{(b-a)^{k+1}}{2^{k+1}}f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{\left\|f^{(n)}\right\|_\infty}{2^n(n+1)!}(b-a)^{n+1} \tag{3}$$

eşitsizliği elde edilir. Eğer (1) de $n = 1$ seçilirse basit bir hesaplamayla, Ostrowski nin (Teorem 2.5) deki eşitsizliği elde edilir. Diğer bir sonuç benzer olarak Teorem 3.5.1 de (Matic, Pecaric ve Ujevic 2000) in elde ettiği aşağıdaki somutlaşan teoremdir.

Teorem 3.5.2 $f: I \to \mathbb{R}$ $I \subseteq \mathbb{R}$ aralığında olsun. Varsayalım ki f in n-lisi I^0 (I nın içi) da diferensiyellenebilir ve $f^{(n)}$ $[a,b]$ üzerinde $a,b \in I^0$, $a<b$ integrallenebilir ve varsayalım ki her $x \in [a,b]$ için γ ve Γ reel sabitleri için $\gamma \leq f^{(n)} \leq \Gamma$ olsun. $x \in [a,b]$ için

$$R_n(x)=f(x)+\frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(b-x)^{k+1}+(-1)^k(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}f^k(x)$$

$$+\frac{(b-x)^{n+1}+(-1)^n(x-a)^{n+1}}{(n+1)!\,(b-a)^2}\left[f^{(n-1)}(b)-f^{(n-1)}(a)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$

tanımlanır. Sonra her $x \in [a,b]$ için,

$$|R_n(x)|$$

$$\leq \frac{\Gamma-\gamma}{2(n)!}\left[\frac{(x-a)^{2n+1}-(x-b)^{2n+1}}{(b-a)(2n+1)}-\left(\frac{(x-a)^{n+1}-(x-b)^{n+1}}{(b-a)(n+1)}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

dır.

İspat. Hipotezden (2) yi kullanalım. (2) yi yeniden yazarsak

$$\int_a^b f(t)dt=(b-a)f(x)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(b-x)^{k+1}+(-1)^k(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}f^k(x)$$

$$+(-1)^n\int_a^b E_n(x,t)f^{(n)}(t)\,dt$$

veya

$$\frac{(-1)^{n+1}}{b-a}\int_a^b E_n(x,t)f^{(n)}(t)\,dt$$

$$= f(x) + \frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(b-x)^{k+1} + (-1)^k(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}f^k(x)$$
$$-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \quad (5)$$

dahası

$$\int_a^b E_n(x,t)dt = \int_a^x \frac{(t-a)^n}{n!}dt + \int_x^b \frac{(t-b)^n}{n!}dt = \frac{(x-a)^{n+1} - (x-b)^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$= (-1)^{n+1}\frac{(b-x)^{n+1} + (-1)^n(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

ve

$$\int_a^b f^{(n)}dt = f^{(n-1)}(b) - f^{(n-1)}(a)$$

böylelikle,

$$-\frac{(-1)^{n+1}}{(b-a)^2}\int_a^b E_n(x,t)dt\int_a^b f^{(n)}(t)dt$$
$$= \frac{(b-x)^{n+1} + (-1)^n(x-a)^{n+1}}{(n+1)!\,(b-a)^2}\left[f^{(n-1)}(b) - f^{(n-1)}(a)\right] \quad (6)$$

elde edilir. (5) ve (6) kullanarak,

$$(-1)^{n+1}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b E_n(x,t)f^{(n)}(t)dt - \frac{1}{(b-a)^2}E_n(x,t)dt\int_a^b f^{(n)}(t)dt\right]$$

$R_n(x)$ e eşit olduğunu görürüz. Şimdi Teorem de $E_n(x,\cdot)$ ve $f^{(n)}(\cdot)$ olduğu yerde sırasıyla f ve g yi uygularsak,

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{2}(\Gamma - \gamma)\sqrt{T\big(E_n(x,\cdot), E_n(x,\cdot)\big)} \quad (7)$$

elde edilir. $T(\cdot,\cdot)$ (2) de verilmiştir ve zaten hesaplanmıştı.

$$\int_a^b E_n(x,t)dt = \frac{(x-a)^{n+1} - (x-b)^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$\int_a^b E_n^2(x,t)dt = \frac{(x-a)^{2n+1} - (x-b)^{2n+1}}{(n!)^2(2n+1)}$$

öyle ki

$$T\big(E_n(x,\cdot), E_n(x,\cdot)\big) = \frac{1}{b-a}\int_a^b E_n^2(x,t)dt - \frac{1}{(b-a)^2}\left(\int_a^b E_n(x,t)dt\right)^2$$
$$= \frac{1}{(n!)^2}\frac{(x-a)^{2n+1} - (x-b)^{2n+1}}{(b-a)(2n+1)} - \left(\frac{(x-a)^{n+1} - (x-b)^{n+1}}{(b-a)(n+1)}\right)^2 \quad (8)$$

(7) ve (8) i birleştirirsek, (4) ü elde ederiz. İspat tamamlanmış olur. Aşağıda Pachpatte nin kurmuş olduğu yeni genelleme (Milovanovič, Pečarič 1976) eşitsizliği, bir çift diferensiyellenebilir n-li dönüşüm ile ilgilidir.

Teorem 3.5.3 $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$, $[a,b]$ üzerinde sürekli fonksiyon ve (a,b) n-kez diferensiyellenebilir ve türevleri $f^{(n)}, g^{(n)}: (a,b) \to \mathbb{R}$ (a,b) de sınırlı olsun. Yani $\left\|f^{(n)}\right\|_{\infty} = \sup_{t\in(a,b)}\left|f^{(n)}(t)\right| < \infty, \left\|g^{(n)}\right\|_{\infty} = \sup_{t\in(a,b)}\left|g^{(n)}(t)\right| < \infty$. Sonra her $x \in [a,b]$ için I_k, I_0 ve J_k, J_0 sırasıyla bölüm 1.5 teki (1.5.9) ve (1.5.10) de verilmiştir.

$$\left|f(x)g(x) - \frac{1}{2(b-a)}[g(x)I_0 + f(x)J_0] - \frac{1}{2(b-a)}\left[g(x)\sum_{k=1}^{n-1} I_k + f(x)\sum_{k=1}^{n-1} J_k\right]\right|$$

$$\leq \frac{1}{(2n+1)!}\left[|g(x)|\left\|f^{(n)}\right\|_{\infty} + f(x)\left\|g^{(n)}\right\|_{\infty}\right]\left[\frac{(x-a)^{n+1} - (b-x)^{n+1}}{(b-a)}\right] \tag{9}$$

İspat. $x \in [a,b], y \in (a,b)$ olsun hipotezden, Taylor formülü ile Lagrange formunun kalanına,

$$f(x) = f(y) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(y)}{k!}(x-y)^k + \frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)(x-y)^n \tag{10}$$

ve

$$g(x) = g(y) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{g^{(k)}(y)}{k!}(x-y)^k + \frac{1}{n!}g^{(n)}(\sigma)(x-y)^n \tag{11}$$

$\xi = y + \alpha(x-y)(0 < \alpha < 1)$ ve $\sigma = y + \beta(x-y)(0 < \beta < 1)$ ya bu şartlar altında sahip oluruz. $F_k(x)$ ve $G_k(x)$ bölüm 1.5 te sırasıyla (1.5.6) ve (1.5.7) de verilmiş olsun. I_k, J_k nın tanımlarından ve kısmi integrasyondan

$$I_0 + \sum_{k=1}^{n-1} I_k = nI_0 - (b-a)\sum_{k=1}^{n-1} F_k(x) \tag{12}$$

$$J_0 + \sum_{k=1}^{n-1} J_k = nJ_0 - (b-a)\sum_{k=1}^{n-1} G_k(x) \tag{13}$$

elde edilir. (10) ve (11) da sırasıyla $g(x)$ ve $f\,(x)$ çarpılır ve toplanırsa yeni bir sonuç tanımlanır ve yeniden yazılırsa

$$f(x)g(x) = \frac{1}{2}g(x)f(y) + \frac{1}{2}f(x)g(y)$$

$$+\frac{1}{2}g(x)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(y)}{k!}(x-y)^k + \frac{1}{2}f(x)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{g^{(k)}(y)}{k!}(x-y)^k$$

$$+\frac{1}{2}\frac{1}{n!}g(x)f^{(n)}(\xi)(x-y)^n+\frac{1}{2}\frac{1}{n!}f(x)g^{(n)}(\sigma)(x-y)^n \qquad (14)$$

elde edilir.

(14) (a,b) üzerinde y ye göre integrallenir ve yeniden yazılırsa,

$$f(x)g(x)=\frac{1}{2(b-a)}[g(x)I_0+f(x)J_0]+\frac{1}{2(b-a)}\left[g(x)\sum_{k=1}^{n-1}I_k+f(x)\sum_{k=1}^{n-1}J_k\right]$$

$$+\frac{1}{2(b-a)}\frac{1}{n!}\left[g(x)\int_a^b f^{(n)}(\xi)(x-y)^n dy+f(x)\int_a^b g^{(n)}(\sigma)(x-y)^n dy\right] \qquad (15)$$

elde edilir. (15) den ve mutlak değerin özelliğini kullanarak,

$$\left|f(x)g(x)-\frac{1}{2(b-a)}[g(x)I_0+f(x)J_0]-\frac{1}{2(b-a)}\left[g(x)\sum_{k=1}^{n-1}I_k+f(x)\sum_{k=1}^{n-1}J_k\right]\right|$$

$$\leq\frac{1}{2(b-a)}\frac{1}{n!}\left[|g(x)|\int_a^b\left|f^{(n)}(\xi)\right||x-y|^n+|f(x)|\int_a^b\left|g^{(n)}(\sigma)\right||x-y|^n dy\right]$$

$$\leq\frac{1}{2(b-a)}\frac{1}{n!}\left[|g(x)|\left\|f^{(n)}\right\|_\infty+|f(x)|\|g^{(n)}\|_\infty\right]\int_a^b|x-y|^n dy$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{(n+1)!}\left[|g(x)|\left\|f^{(n)}\right\|_\infty+|f(x)|\|g^{(n)}\|_\infty\right]\left[\frac{(x-a)^{n+1}-(b-x)^{n+1}}{(b-a)}\right]$$

sahip oluruz. (39) daki gerekli olan eşitsizlik elde edilir. İspat tamamlanır. Aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.5.1 $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$, $[a,b]$ üzerinde sürekli bir fonksiyon ve (a,b) de diferensiyellenebilir olsun ve türevleri $f',g':[a,b]\to\mathbb{R}$ (a,b) de sınırlandırılmış yani $\|f'\|_\infty=\sup_{t\in(a,b)}|f'(t)|<\infty, \|g'\|_\infty=\sup_{t\in(a,b)}|g'(t)|<\infty$ olsun, o zaman her $x\in[a,b]$ için I_0 ve J_0 Teorem 3.5.3 verildiği şekilde

$$\left|f(x)g(x)-\frac{1}{2(b-a)}[g(x)I_0+f(x)J_0]\right|$$

$$\leq\frac{1}{2}[|g(x)|\|f'\|_\infty+|f(x)|\|g'\|_\infty]\left[\frac{1}{4}+\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right](b-a) \qquad (16)$$

olur.

Hatırlatma 3.5.2 Özel durumlara dikkat edelim, Eğer (i) (9) da $g(x)=1$ alırsak böylece $g^{(n)}(x)=0$ olur ve (ii) (16) da $g(x)=1$ alırsak böylece $g'(x)=0$ olur, sonra basit bir hesaplamayla sırasıyla (Milovanovič ve Pečarič 1976) ve (Ostrowski 1938) eşitsizlikleri elde edilir.

Aşağıda Ostrowski tipi eşitsizlikleri içeren teoremler sırasıyla (Pachpatte 2006) tarafından harmonik bir dizi içeren polinomlar ve bir çift n-li diferensiyellenebilir fonksiyonlar şeklinde kurulmuştur.

Teorem 3.5.4 P_n polinomlarda harmonik bir dizi olsun, $P'_n = P_{n-1}, n \geq 1$, $P_0 = 1$ dır. $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ öyleki $f^{(n-1)}, g^{(n-1)}$, $n \geq 1$ ve $f^{(n)}, g^{(n)} \in L_p[a,b], 1 \leq p \leq \infty$ için mutlak sürekli olsun. Sonra her $x \in [a,b]$ için

$$\left| g(x)B[f(x)] + f(x)B[g(x)] - \frac{1}{b-a}\left[g(x)\int_a^b f(t)dt + f(x)\int_a^b g(t)dt\right]\right|$$
$$\leq D(n,p,x)\left[|g(x)|\|f^n\|_p + |f(x)|\|g^n\|_p\right] \tag{17}$$

ve

$$\left| B[f,x]B[g,x] - \frac{1}{b-a}\left[B[g,x]\int_a^b f(t)dt + B[f,x]\int_a^b g(t)dt\right]\right|$$
$$+\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right) \leq \{D(n,p,x)\}^2\|f^n\|_p\|g^n\|_p \tag{18}$$

elde edilir.

$$D(n,p,x) = \frac{1}{n(b-a)}\|P_{n-1}e(\cdot,x)\|_{p'} \tag{19}$$

$$e(t,x) = \begin{cases} t-a \; if \; t \in [a,x] \\ t-b \; if \; t \in (x,b] \end{cases}$$

ve her zamanki gibi $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ile $p' = 1$ için $p = \infty, p' = \infty$ için $p = 1$ ve $\|\cdot\|_p$, $L_p[a,b]$ de normdur.

İspat. Hipotezden, aşağıdaki tanımlara sahip oluruz. (Bakınız Yardımcı teorem 1.5.4): $x \in [a,b]$ için

$$B[f,x] - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = \frac{(-1)^{n-1}}{n(b-a)}\int_a^b P_{n-1}(t)e(t,x)f^{(n)}(t)dt \tag{20}$$

ve

$$B[g,x] - \frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt = \frac{(-1)^{n-1}}{n(b-a)}\int_a^b P_{n-1}(t)e(t,x)g^{(n)}(t)dt \tag{21}$$

(20) ve (21) sırasıyla $g(x)$ ve $f(x)$ ile çarpılır ve toplanırsa yeni bir sonuç tanımlanır.

$$g(x)B[f,x] + f(x)B[g,x] - \frac{1}{b-a}\left[g(x)\int_a^b f(t)dt + f(x)\int_a^b g(t)dt\right]$$
$$= \frac{(-1)^{n-1}}{n(b-a)}\left[g(x)\int_a^b P_{n-1}(t)e(t,x)f^{(n)}(t)dt + f(x)\int_a^b P_{n-1}(t)e(t,x)g^{(n)}(t)dt\right] \tag{22}$$

sahip oluruz. (22) den mutlak değerin özelliğini ve Hölder integral eşitsizliğini kullanarak,

$$\left|g(x)B[f,x]+f(x)B[g,x]-\frac{1}{b-a}\left[g(x)\int_a^b f(t)dt+f(x)\int_a^b g(t)dt\right]\right|$$

$$\leq \frac{1}{n(b-a)}\left[|g(x)|\int_a^b \left|P_{n-1}(t)e(t,x)f^{(n)}(t)\right|dt\right.$$

$$\left.+|f(x)|\int_a^b \left|P_{n-1}(t)e(t,x)g^{(n)}(t)\right|dt\right]$$

$$\leq \frac{1}{n(b-a)}\left[|g(x)|\left\{\int_a^b |P_{n-1}(t)e(t,x))|^{p'}dt\right\}^{\frac{1}{p'}}\left\{\int_a^b \left|f^{(n)}(t)\right|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}\right.$$

$$\left.+|f(x)|\left\{\int_a^b |P_{n-1}(t)e(t,x))|^{p'}dt\right\}^{\frac{1}{p'}}\left\{\int_a^b \left|g^{(n)}(t)\right|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}\right]$$

$$= D(n,p,x)\left[|g(x)|\|f^n\|_p+|f(x)|\|g^n\|_p\right]$$

sahip oluruz. Bu (17) de gerekli olan eşitsizliktir. (20) ve (21) in sağ ve sol taraflarını çarparsak,

$$B[f,x]B[g,x]-\frac{1}{b-a}\left[B[g,x]\int_a^b f(t)dt+B[f,x]\int_a^b g(t)dt\right]$$

$$+\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right)$$

$$=\frac{(-1)^{2n-2}}{n^2(b-a)^2}\left\{\int_a^b P_{n-1}(t)e(t,x)f^{(n)}(t)dt\right\}\left\{\int_a^b P_{n-1}(t)e(t,x)g^{(n)}(t)dt\right\} \qquad (23)$$

elde edilir. (23) den ve devamında (17) eşitsizliğinin ispatında uygun olan değişiklikler ile (18) deki gerekli olan eşitsizlik elde edilir. İspat tamamlanır.

Hatırlatma 3.5.3 Eğer (17) de $g(t)=1$ alırsak böylece $n\geq 2$ için $g^{(n-1)}(t)=0$ olur. Sonra (Dedič, Pečarič ve Ujevič 2003) de verilen Ostrowski tipi eşitsizliklerinin varyantı elde edilir.

3.6 FARKLI OSTROWSKİ TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde Pachpatte tarafından son zamanlarda incelenen farklı Ostrowski-tipi eşitsizlikler ele alınmıştır. Birinci teorem de (Pachpatte 2002) de ispatlanan Ostrowski-tipi eşitsizlikleri ele alınmıştır.

Teorem 3.6.1 $\{x_i\}$ $i = 0,1,\ldots,n$ $(n \in N)$ için reel sayılar dizisi olsun. O zaman aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir. $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ olduğu yerde

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} x_i - n\left(\frac{x_0 + x_n}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{2} n \sum_{i=0}^{n-1} |\Delta x_i| \tag{1}$$

ve

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} x_i^2 - n\left(\frac{x_0^2 + x_n^2}{2}\right)\right| \leq n \sum_{i=0}^{n-1} |(x_{i+1} + x_i)\Delta x_i| \tag{2}$$

olur.

İspat. Aşağıdaki tanımlamalar kolaylıkla görülür.

$$x_i = x_0 + \sum_{j=0}^{i-1} \Delta x_j \tag{3}$$

$$x_i = x_n - \sum_{j=i}^{n-1} \Delta x_j \tag{4}$$

$$x_i^2 = x_0^2 + \sum_{j=0}^{i-1} (x_{j+1} + x_j)\Delta x_j \tag{5}$$

$$x_i^2 = x_n^2 - \sum_{j=i}^{n-1} (x_{j+1} + x_j)\Delta x_j \tag{6}$$

(3), (4) ve (5), (6) den

$$x_i = \frac{x_0 + x_n}{2} + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{i-1} \Delta x_j - \frac{1}{2}\sum_{j=i}^{n-1} \Delta x_j \tag{7}$$

ve

$$x_i^2 = \frac{x_0^2 + x_n^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{i-1} (x_{j+1} + x_j)(\Delta x_j) - \frac{1}{2}\sum_{j=i}^{n-1} (x_{j+1} + x_j)(\Delta x_j) \tag{8}$$

sahip oluruz. Özetle (7) ve (8) in her iki tarafı $i = 0$ dan $n - 1$ e kadar alınır ve temel hesaplamalar yapılırsa (1) ve (2) deki istenen eşitsizlikler elde edilir. İspat tamamlanır.

Bir sonraki teorem (Pachpatte 2006) de verilen farklı Ostrowski tipi eşitsizlikleri ve iki tane dizi içermektedir.

Teorem 3.6.2 $\{u_i\}, \{v_i\}$ $i = 0,1,\ldots,n$ $(n \in N)$ için reel bir dizi olsun.

O zaman aşağıdaki eşitsizlikler $i = 0,1,\ldots,n$ için

$$\left|u_i v_i - \frac{1}{2}[v_i U + u_i V]\right| \leq \frac{1}{4}\left[|v_i|\sum_{j=0}^{n-1}\left|\Delta u_j\right| + |u_i|\sum_{j=0}^{n-1}\left|\Delta v_j\right|\right] \tag{9}$$

ve

$$|u_i v_i - [v_i U + u_i V] + UV| \leq \frac{1}{4}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\left|\Delta u_j\right|\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1}\left|\Delta v_j\right|\right) \tag{10}$$

$$U = \frac{u_1 + u_n}{2}, \qquad V = \frac{v_1 + v_n}{2} \tag{11}$$

olduğu yerde geçerlidir ve Δ ileri diferensiyel operatördür.

İspat. Hipotezden aşağıdaki tanımlamalara sahibiz.

$$u_i - U = \frac{1}{2}\left[\sum_{j=0}^{i-1}\Delta u_j - \sum_{j=i}^{n-1}\Delta u_j\right] \tag{12}$$

ve

$$v_i - V = \frac{1}{2}\left[\sum_{j=0}^{i-1}\Delta v_j - \sum_{j=i}^{n-1}\Delta v_j\right] \tag{13}$$

(12) ve (13) ün her iki tarafı sırasıyla v_i ve u_i $(i = 0,1, \dots, n)$, ile çarpılıp toplanırsa yeni bir sonuç tanımlanır ve yeniden yazılırsa

$$u_i v_i - \frac{1}{2}[v_i U + u_i V] = \frac{1}{4}\left[v_i\left[\sum_{j=0}^{i-1}\Delta u_j - \sum_{j=i}^{n-1}\Delta u_j\right] + u_i\left[\sum_{j=0}^{i-1}\Delta v_j - \sum_{j=i}^{n-1}\Delta v_j\right]\right] \tag{14}$$

elde edilir. (12) ve (13) ün sağ ve sol tarafı çarpılırsa

$$u_i v_i - [v_i U + u_i V] + UV = \frac{1}{4}\left[\sum_{j=0}^{i-1}\Delta u_j - \sum_{j=i}^{n-1}\Delta u_j\right]\left[\sum_{j=0}^{i-1}\Delta v_j - \sum_{j=i}^{n-1}\Delta v_j\right] \tag{15}$$

elde edilir. (14), (15) da mutlak değer özellikleri kullanılır ve hesaplanırsa (9) ve (10) daki gerekli olan eşitsizlikler elde edilir. İspat tamamlanmış olur.

Aşağıdaki teoremde biz basitçe (Pachpatte 2007) deki eşitsizliği kurarız. Benzeri yukarıdaki teoremde verilmişti, biraz farklı olarak kullanacağız.

Teorem 3.6.3 $\{u_k\}, \{v_k\}$ $k = 0,1, \dots, n$ için reel sayılarda iki sonlu dizi olsun. Öyleki $max_{1 \leq k \leq n-1}\{|\Delta u_k|\} = A, max_{1 \leq k \leq n-1}\{|\Delta v_k|\} = B$, A ve B negatif olmayan sabitlerdir. Sonra aşağıdaki eşitsizlik $k = 1, \dots, n$ için

$$\left|u_k v_k - \frac{1}{2n}\left[v_k \sum_{i=1}^{n} u_i + u_k \sum_{i=1}^{n} v_i\right]\right| \leq \frac{1}{2}[|v_k|A + |u_k|B]H_n(K) \tag{16}$$

ve

$$\left|u_k v_k - \frac{1}{n}\left[v_k \sum_{i=1}^{n} u_i + u_k \sum_{i=1}^{n} v_i\right] + \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right)\right| \leq AB\{H_n(k)\}^2 \qquad (17)$$

olarak elde edilir. $H_n(k)$ (1.6.35) te verilmiştir.

İspat. Teorem 1.6.5 in ispatından, (1.6.38) ve (1.6.40) a sahibiz.(1.6.38) ve (1.6.40) dan ve mutlak değerin özelliğinden (16) ve (17) de gerekli olan eşitsizlikleri elde ederiz.

Hatırlatma 3.6.1 (16) da $v_k = 1$ alınır ve böylece $k = 1, \ldots, n$ için $\Delta v_k = 0$ olur ve basit bir hesapla $k = 1, \ldots, n$ için

$$\left|u_k - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i\right| \leq H_n(k) \max_{1\leq k\leq n-1}\{|\Delta u_k|\} \qquad (18)$$

elde edilir. Basit bir hesaplama ile

$$H_n(k) = \sum_{i=1}^{n-1} |D_n(k,i)| = \frac{1}{n}\left[\frac{n^2-1}{4} + \left(k - \frac{n+1}{2}\right)^2\right] \qquad (19)$$

sahip oluruz.

Aslında (18) eşitsizliği (Dragomir 2002) tarafından kurulan normlu lineer uzaydır.

Sonuç olarak bu bölümde (Pachpatte 2005) deki farklı Ostrowski tipi eşitsizlikleri sırasıyla ispatladık.

Teorem 3.6.4 $N_{a,b} = \{a, a+1, \ldots, a+n = b\}$ $a \in \mathbb{R}$, $n \in N$ için olsun. $f(t), g(t), h(t)$ $N_{a,b}$ üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlar olsun ve $t \notin N_{a,b}$ sıfır olduğunda ve $N_{a,b}$ üzerinde $|\Delta f(t)| \leq M_1$, $|\Delta g(t)| \leq M_2$, $|\Delta h(t)| \leq M_3$, M_1, M_2, M_3 sıfırdan farklı katsayılardır. Sonra her $t \in N_{a,b}$ için

$$\left|f(t)g(t)h(t) - \frac{1}{3(b-a)}\left[g(t)h(t)\sum_{s=a}^{b-1} f(s) + h(t)f(t)\sum_{s=a}^{b-1} g(s) + f(t)g(t)\sum_{s=a}^{b-1} h(s)\right]\right|$$

$$\leq \frac{1}{3}[|g(t)||h(t)|M_1 + |h(t)||f(t)|M_2 + |f(t)||g(t)|M_3]B(t) \qquad (20)$$

ifadesi

$$B(t) = \left[\frac{1}{2} + \left|t - \frac{a+b}{2}\right|\right] \qquad (21)$$

olduğu yerde geçerli olur.

İspat. Her $t, s \in N_{a,b}$ için aşağıdaki tanımlamalar kolayca görülür.

$$f(t) - f(s) = \sum_{m=s}^{t-1} \Delta f(m) \qquad (22)$$

$$g(t) - g(s) = \sum_{m=s}^{t-1} \Delta g(m) \tag{23}$$

$$h(t) - h(s) = \sum_{m=s}^{t-1} \Delta h(m) \tag{24}$$

(22), (23) ve (24) ün her iki tarafı sırasıyla $g(t)h(t), h(t)f(t)$ ve $f(t)g(t)$ ile çarpılır ve toplanırsa yeni bir sonuç tanımlanır,

$$3f(t)g(t)h(t) - [g(t)h(t)f(s) + h(t)f(t)g(s) + f(t)g(t)h(s)]$$

$$= g(t)h(t)\sum_{m=s}^{t-1} \Delta f(m) + h(t)f(t)\sum_{m=s}^{t-1} \Delta g(m) + f(t)g(t)\sum_{m=s}^{t-1} \Delta h(m) \tag{25}$$

elde edilir. Özetle (25) in her iki tarafı üzerinde s, a dan $b-1$ e kadar alınır ve yeniden yazılırsa,

$$f(t)g(t)h(t) - \frac{1}{3(b-a)}\left[g(t)h(t)\sum_{s=a}^{b-1} f(s) + h(t)f(t)\sum_{s=a}^{b-1} g(s) + f(t)g(t)\sum_{s=a}^{b-1} h(s)\right]$$

$$= \frac{1}{3(b-a)}\sum_{s=a}^{b-1}\left[g(t)h(t)\sum_{m=s}^{t-1} \Delta f(m) + h(t)f(t)\sum_{m=s}^{t-1} \Delta g(m)\right.$$

$$\left. + f(t)g(t)\sum_{m=s}^{t-1} \Delta h(m)\right] \tag{26}$$

sahip oluruz. (26) dan ve mutlak değerin özelliklerini kullanarak,

$$\left|f(t)g(t)h(t) - \frac{1}{3(b-a)}\left[g(t)h(t)\sum_{s=a}^{b-1} f(s) + h(t)f(t)\sum_{s=a}^{b-1} g(s) + f(t)g(t)\sum_{s=a}^{b-1} h(s)\right]\right|$$

$$\leq \frac{1}{3(b-a)}[|g(t)||h(t)|M_1 + |h(t)||f(t)|M_2 + |f(t)||g(t)|M_3]\left|\sum_{s=a}^{b-1}(t-s)\right| \tag{27}$$

sahip oluruz. Toplam formülü aritmetik ilerleme için kullanılır, şu kolayca görülür,

$$\left|\sum_{s=a}^{b-1}(t-s)\right| = \left|t(b-a) - \frac{b-a}{2}[2a+b-a-1]\right|$$

$$= \left[\frac{1}{2} + \left|t - \frac{a+b}{2}\right|\right](b-a) = B(t)(b-a) \tag{28}$$

(27) de (28) kullanılırsa (20) elde edilir. İspat tamamlanır.

Hatırlatma 3.6.2 Teorem 3.6.4 de $h(t) = 1$ alınır ve böylece $\Delta h(t) = 0$ bulunur ve basit hesaplamayla kolaylıkla (20) deki eşitsizliğe ulaşılır. Her $t \in N_{a,b}$ için,

$$\left| f(t)g(t) - \frac{1}{2(b-a)}\left[g(t)\sum_{s=a}^{b-1} f(s) + f(t)\sum_{s=a}^{b-1} g(s) \right] \right|$$

$$\leq \frac{1}{2}[|g(t)|M_1 + |f(t)|M_2]B(t) \tag{29}$$

olur. Dahası (29) da $g(t) = 1$ alınır ve böylece $\Delta g(t) = 0$ olur basit bir hesaplamayla her $t \in N_{a,b}$ için

$$\left| f(t) - \frac{1}{(b-a)}\sum_{s=a}^{b-1} f(s) \right| \leq M_1 B(t) \tag{30}$$

olur.

3.7 UYGULAMALAR

Literatürdeki ünlü Ostrowski eşitsizlikleri ile ilgili uygulamalar büyük bir hızla ilerlemektedir. Bu bölümde, önceki bölümlerde verilen geçmiş yıllarda araştırılmış bazı eşitsizliklerin basit uygulamalarına yer vereceğiz.

3.7.1 Bazı Özel Durumlar İçin Uygulamalar

Biz aşağıda basitçe (Dragomir ve Wang 1997) tarafından verilen teorem 3.2.2 nin bazı özel durumlarında hata sınırları için uygulamalar verdik. (Dragomir ve Wang 1997) tarafından bazı özel ilişkiler arasında aşağıdaki durumlar verilmiştir.

a) Aritmetik anlam:

$$A = A(a,b) = \frac{a+b}{2}, a, b \geq 0$$

(b) Geometrik anlam:

$$G = G(a,b) = \sqrt{ab}, a, b \ \geq 0$$

(c) Harmonik anlam:

$$H = H(a,b) = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}, a, b \ \geq 0$$

(d) Logaritmik anlam:

$$L = L(a,b) = \begin{cases} \dfrac{b-a}{logb - loga} & eğer\ a \neq b, \\ a & eğer\ a = b \end{cases} a, b > 0$$

(e) İdentric anlam:

$$I = I(a,b) = \begin{cases} \frac{1}{e}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}} & eğer\ a \neq b,\ a,b > 0 \\ a & eğer\ a = b, \end{cases}$$

(f) p-Logaritmik anlam:

$$L_p = L_p(a,b) = \begin{cases} \left[\frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{(p+1)(b-a)}\right]^{\frac{1}{p}} & eğer\ a \neq b,\ p \in \mathbb{R} - \{-1,0\};\ a,b > 0 \\ a & eğer\ a = b \end{cases}$$

Literatürde iyi bilinen anlamlar arasındaki ilişkiler aşağıda basitçe ifade edilmiştir.

$$H \leq G \leq L \leq I \leq A,$$

ve $Lp, p \in \mathbb{R}$ de monoton artan ve bunula birlikte $L_0 = I$ ve $L_{-1} = L$.

1. (3.2.6) daki eşitsizliğe $f(x) = x^p (p > 1), x \in [a,b] \subset (0,\infty)$, dönüşümü uygularsak

$$\left|x^p - L_p^p - pL_{p-1}^{p-1}(x-a)\right| \leq \frac{1}{4}(b-a)^2(p-1)L_{p-2}^{p-2} \tag{1}$$

elde ederiz. Eğer (1) de $x = A$ ve x = I seçersek o zaman sırasıyla

$$\left|A^p - L_p^p\right| \leq \frac{1}{4}(b-a)^2(p-1)L_{p-2}^{p-2},$$

ve

$$\left|I^p - L_p^p - pL_{p-1}^{p-1}(I-A)\right| \leq \frac{1}{4}(b-a)^2(p-1)L_{p-2}^{p-2}$$

sahip oluruz.

2. (3.2.6) da $f(x) = \frac{1}{x}, x \in [a,b] \subset (0,\infty)$ seçilirse her $x \in [a,b]$ için,

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{L} - \frac{x-A}{G^2}\right| \leq \frac{A(b-a)^2}{2G^4} \tag{2}$$

elde edilir. (2) de x, sırasıyla A ve L ile yer değiştirirse,

$$0 \leq A - L \leq \frac{A^2L(b-a)^2}{2G^4} \tag{3}$$

$$0 \leq A - L \leq \frac{A(b-a)^2}{2G^2} \tag{4}$$

elde edilir. Dikkat edersek $\frac{A^2L}{G^4} \geq \frac{A}{G^2}$, çünkü $AL \geq G^2$ dir. Sonra (4) deki son terim (3) deki $A - L$ ye bağlı kesin bir sonuçtur.

3. Şimdi $f(x) = -\log x, x \in [a,b] \subset (0,\infty)$, dönüşümünü (3.2.6) ya uygulayalım her $x \in [a,b]$ için

$$\left|\log\left[\frac{I\left(\frac{b}{a}\right)^{\left(\frac{x-A}{b-a}\right)}}{x}\right]\right| \leq \log\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{b-a}{4}} \quad (5)$$

olur. (5) de $x = A$ ve $x = I$ seçilirse aşağıdaki eşitsizlikler sırasıyla

$$1 \leq \frac{A}{I} \leq \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{b-a}{4}}$$

ve

$$0 \leq A - I \leq \frac{1}{4}(b-a)^2$$

elde edilir. (1), (2) ve (5) eşitsizliklerinde $x = L$, $x = G$, ve $x = H$ seçelim. Sonuç olarak L, G ve H daki eşitsizlikler benzer olarak yukarıda elde edilecektir. Ayrıntıları atlayacağız.

3.7.2 Sayısal İntegrasyonda Uygulamalar

Ujevic sayısal integrasyondaki çalışmak için Teorem 3.2.5 deki Ostrowski-tipi eşitsizliklerin çeşitli özel versiyonlarını kullandı. $\int_a^b f(t)dt$ integral yaklaşımları ile ilgili aşağıdaki sonuçları verelim.

Teorem 3.7.1 Teorem 3.2.5 deki tüm varsayımları kabul olsun. Eğer $I_n = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$, $[a,b]$ nin alt aralığında verilsin ve $h_i = x_{i+1} - x_i, i = 0,1,\ldots,n-1$ için

$$\int_a^b f(t)dt = A(I_n,\xi,f) + R_\gamma(I_n,\xi,f) \quad (6)$$

olmak üzere $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}, i = 0,1,\ldots,n-1$ için

$$A(I_n,\xi,f) = \sum_{i=0}^{n-1}\left[f(\xi_i) - \gamma\left(\xi_i - \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)\right]h_i \quad (7)$$

elde edilir. Kalan terimler

$$\left|R_\gamma(I_n,\xi,f)\right| \leq \sum_{i=0}^{n-1}(S_i - \gamma)\left[\frac{h_i}{2} + \left|\xi_i - \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right|\right]h_i \quad (8)$$

ifadesini $S_i = \frac{1}{h_i}\big(f(x_{i+1}) - f(x_i)\big), i = 0,1,\ldots,n-1$ olduğunda karşılar.

$$\int_a^b f(t)dt = A(I_n,\xi,f) + R_\Gamma(I_n,\xi,f) \quad (9)$$

olmak üzere

$$|R_{\Gamma}(I_n,\xi,f)| \leq \sum_{i=0}^{n-1}(\Gamma - S_i)\left[\frac{h_i}{2} + \left|\xi_i - \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right|\right] h_i \tag{10}$$

dır.

İspat. Sonuç 3.2.1 deki $[x_i, x_{i+1}]$ aralığında (49) eşitsizliğini uygularsak $i = 0,1,\dots,n-1$ için

$$\left|f(\xi_i)h_i - \gamma\left(\xi_i - \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)h_i - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt\right|$$

$$\leq (S_i - \gamma)\left[\frac{h_i}{2} + \left|\xi_i - \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right|\right] h_i \tag{11}$$

elde edilir. Dahası

$$f(\xi_i)h_i - \gamma\left(\xi_i - \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)h_i - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \hat{k}(\xi_i,t)[f'(t) - \gamma]dt \tag{12}$$

ifadesi

$$\hat{k}(\xi_i,t) = \begin{cases} t - x_i, & t \in [x_i, \xi_i] \\ t - x_{i+1}, & t \in (\xi_i, x_{i+1}] \end{cases} \tag{13}$$

$i = 0,1,\dots,n-1$ olduğunda elde edilir. Eğer özetlersek (3.7.12) de i yi 0 dan $n-1$ e kadar alıp ve üçgen eşitsizliğini ve (11) i uygularsak, (6), (7) ve (8) elde edilir. Benzer bir şekilde, (9) ve (10) da kanıtlanır.

Hatırlatma 3.7.1 Eğer Teorem 1 de $\xi_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ seçersek birleşik orta nokta kuralını elde ederiz.

Teorem 3.7.2 Teorem 3.2.5 deki tüm varsayımlar kabul olsun. Eğer $I_n = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ $[a,b]$ nin alt aralığında verilirse ve $h_i = x_{i+1} - x_i, i = 0,1,\dots,n-,$ sonra

$$\int_a^b f(t)dt = A_T(I_n,f) + R_{T\gamma}(I_n,f) \tag{14}$$

ifadesi

$$A_T(I_n,f) = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2}[f(x_i) + f(x_{i+1})]h_i \tag{15}$$

$$\left|R_{T\gamma}(I_n,f)\right| \leq \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(S_i - \gamma)h_i^2 \tag{16}$$

olduğu yerde elde edilir ve S_i Teorem 3.7.1 de verildiği gibidir.

$$\int_a^b f(t)dt = A_T(I_n,f) + R_{T\Gamma}(I_n,f) \tag{17}$$

olmak üzer

$$|R_{T\Gamma}(I_n,f)| \leq \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(\Gamma - S_i)h_i^2 \tag{18}$$

dır.

İspat. Sonuç 3.2.2 deki $[x_i, x_{i+1}]$ aralığında (3.2.52) eşitsizliğini uygulayalım:
$i = 0,1,\dots,n-1$ için

$$\left|\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}h_i - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt\right| \leq \frac{1}{2}(S_i - \gamma)h_i^2 \tag{19}$$

elde edilir. Dahası

$$\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}h_i - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \hat{k}_i(t)[f'(t)-\gamma]dt \tag{20}$$

ifadesi

$$\hat{k}_i(t) = t - \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \tag{21}$$

$i = 0,1,\dots,n-1$ olduğu yerde elde edilir. Eğer özetlersek (20) üstünde i yi 0 dan $n-1$ e kadar alıp ve üçgen eşitsizliği ve (19) uygulayalım, o zaman (14), (15) ve (16) elde ederiz. Basit bir şekilde, (17) ve (18) i de kanıtlarız.

Teorem 3.7.3 Teorem 3.7.1 deki varsayımlar kabul olsun. O zaman

$$\int_a^b f(t)dt = A_C(I_n,\xi,f) + R_{C\gamma}(I_n,\xi,f) \tag{22}$$

ifadesi

$$A_C(I_n,\xi,f) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}h_i$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)h_i - C\sum_{i=0}^{n-1}\left(\xi_i - \frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)h_i \tag{23}$$

ve

$$\left|R_{C\gamma}(I_n,\xi,f)\right| \leq \sum_{i=0}^{n-1}(S_i-\gamma)\left[\frac{h_i}{4} + \left|\xi_i - \frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right|\right]h_i \tag{24}$$

$C = \frac{\gamma}{2}$ olduğu yerde geçerlidir. Teorem 3.7.1. de S_i verilmiştir. Dahası,

$$\int_a^b f(t)dt = A_C(I_n,\xi,f) + R_{C\Gamma}(I_n,\xi,f) \tag{25}$$

ifadesi

$$|R_{C\Gamma}(I_n,\xi,f)| \leq \sum_{i=0}^{n-1}(\Gamma - S_i)\left[\frac{h_i}{4} + \left|\xi_i - \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right|\right] h_i \tag{26}$$

$C = \frac{\Gamma}{2}$ olduğu yerde geçerlidir.

İspat. Sonuç 3.2.3 deki $[x_i, x_{i+1}]$ aralığında (3.2.54) eşitsizliğini uygularsak

$$\left|\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{4} h_i + \frac{1}{2} f(\xi_i) h_i - \frac{\gamma}{2}\left(\xi_i - \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) h_i - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt\right|$$

$$\leq (S_i - \gamma)\left[\frac{h_i}{4} + \left|\xi_i - \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right|\right] h_i \tag{27}$$

$i = 0,1,\dots,n-1$ için elde edilir. Dahası

$$\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{4} h_i + \frac{1}{2} f(\xi_i) h_i - \frac{\gamma}{2}\left(\xi_i - \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) h_i - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt$$

$$= \int_{x_i}^{x_{i+1}} k(\xi_i, t)[f'(t) - \gamma]dt \tag{28}$$

ifadesi

$$k(\xi_i, t) = \begin{cases} t - \dfrac{3x_i + x_{i+1}}{4}, & t \in [x_i, \xi_i] \\ t - \dfrac{x_i + 3x_{i+1}}{4}, & t \in (\xi_i, x_{i+1}] \end{cases} \tag{29}$$

$i = 0,1,\dots,n-1$ için olduğu yerde geçerlidir. Eğer özetlersek (28) üstünde i yi 0 dan $n-1$ e kadar alıp ve üçgen eşitsizliğini ve (27) uygularsak, (22), (23) ve (24) elde edilir. Benzer bir şekilde (25) ve (26) da kanıtlanır.

Hatırlatma 3.7.2 Eğer (3) de $\xi_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ seçersek, o zaman ξ ya bağlı olmayan birleşim kuralı elde edilir.

Teorem 3.7.4 Teorem 3.7.1 deki varsayımlar kabul olsun. O zaman

$$\int_a^b f(t)dt = A_S(I_n,\xi,f) + R_{S\gamma}(I_n,\xi,f) \tag{30}$$

olmak üzere

$$A_S(I_n,\xi,f) = \frac{1}{6}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i) + 4f(\xi_i) + f(x_{i+1})]\, h_i - S\sum_{i=0}^{n-1}\left(\xi_i - \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) h_i \tag{31}$$

ve

$$|R_{S\gamma}(I_n,\xi,f)| \leq \sum_{i=0}^{n-1}(S_i - \gamma)\left[\frac{h_i}{3} + \left|\xi_i - \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right|\right] h_i \tag{32}$$

$S = \frac{2\gamma}{3}$ için olduğu yerde geçerlidir. Teorem 3.7.1. de S_i verilmiştir. Dahası,

$$\int_a^b f(t)dt = A_S(I_n, \xi, f) + R_{S\Gamma}(I_n, \xi, f) \tag{33}$$

İfadesinden

$$|R_{S\Gamma}(I_n, \xi, f)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} (\Gamma - S_i)\left[\frac{h_i}{3} + \left|\xi_i - \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right|\right] h_i \tag{34}$$

elde edilir ve $S = \frac{2\Gamma}{3}$ dır.

İspat. Sonuç 3.2.4 deki $[x_i, x_{i+1}]$ aralığında (3.2.56) eşitsizliğini uygularsak

$$\left|\frac{1}{6}[f(x_i) + 4f(\xi_i) + f(x_{i+1})]h_i - \frac{2\gamma}{3}\left(\xi_i - \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)h_i - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt\right|$$
$$\leq (S_i - \gamma)\left[\frac{h_i}{3} + \left|\xi_i - \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right|\right] h_i \tag{35}$$

$i = 0,1, \dots, n-1$ için elde edilir. Dahası

$$\frac{1}{6}[f(x_i) + 4f(\xi_i) + f(x_{i+1})]h_i - \frac{2\gamma}{3}\left(\xi_i - \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)h_i - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt$$
$$= \int_{x_i}^{x_{i+1}} k(\xi_i, t)[f'(t) - \gamma]dt \tag{36}$$

ifadesi

$$k(\xi_i, t) = \begin{cases} t - \dfrac{5x_i + x_{i+1}}{6}, & t \in [x_i, \xi_i] \\ t - \dfrac{x_i + 5x_{i+1}}{6}, & t \in (\xi_i, x_{i+1}] \end{cases} \tag{37}$$

$i = 0,1, \dots, n-1$ için olduğu yerde geçerlidir. Eğer özetlersek (36) de i yi 0 dan $n-1$ e kadar alır ve üçgen eşitsizliği ve (35) uygularsak, (30), (31) ve (32) elde edilir. Benzer bir şekilde (33) ve (34) kanıtlanır.

Hatırlatma 3.7.2 Eğer Teorem 3.7.4 de $\xi_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ seçersek o zaman birleşik Simpson kuralı elde edilir.

3.7.3 Sayısal İntegrasyonda Daha Fazla Uygulamalar

$I_m: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ ifadesini $[a, b]$ aralığında bir bölüntüsü olduğunu düşünelim. Orta noktalar $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_{m-1})$, $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}], j = 0,1, \dots, m-1$ olsun. Formüldeki tanımdan

$$F_{m,k}(f, I_m, \xi) = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left[(x_{j+1} - \xi_j)^{k+1} + (-1)^k (\xi_j - x_j)^{k+1}\right]}{(k+1)!} f^{(k)}(\xi_i),$$

olur. Özetle Riemann integral toplamından $h_j = x_{j+1} - x_j,\ j = 0,1,\dots,m-1$ olmak üzere

$$\Gamma(f, I_m, \xi) = \sum_{j=0}^{m-1} f(\xi_j) h_j$$

dır.

Dolayısıyla aşağıdaki Teoremi elde ederiz.

Teorem 3.7.5 $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ bir dönüşüm, öyleki $f^{(n-1)}$ $[a,b]$ üzerinde mutlak sürekli ve I_m yukarıda $[a,b]$ üzerinde bölümlenmiş şekilde verilsin. Sonra alan formülünden

$$\int_a^b f(x)dx = F_{m,k}(f, I_m, \xi) + R_{m,k}(f, I_m, \xi) \tag{38}$$

$F_{m,k}$ yukarıda tanımlandı ve $R_{m,k}$ kalanı her ξ için

$$\begin{aligned}\left|R_{m,k}(f, I_m, \xi)\right| &\le \frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{m-1} \left[(\xi_j - x_j)^{n+1} + (x_{j+1} - \xi_j)^{n+1}\right] \\ &\le \frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{m-1} h_j^{n+1} \end{aligned} \tag{39}$$

dır.

İspat. $[x_j, x_{j+1}]$ aralığı üzerinde Teorem 3.5.1 i uygulayalım

$$\left|\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(t)dt - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\left[(x_{j+1} - \xi_j)^{k+1} + (-1)^k (\xi_j - x_j)^{k+1}\right]}{(k+1)!} f^{(k)}(\xi_i)\right|$$

$$\le \frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{(n+1)!}\left[(\xi_j - x_j)^{n+1} + (x_{j+1} - \xi_j)^{n+1}\right] \le \frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{(n+1)!} h_j^{n+1}$$

ifadesi her $j = 0,1,\dots,m-1$ için elde edilir.

Özetle j yi 0 dan $m-1$ e kadar alıp ve genelleştirilmiş üçgen eşitsizliği kullanırsak, (39) da istenen tahmini anlamış oluruz. İlginç bir durum olarak biz şu karışık orta nokta formülünü düşünebiliriz.

$$M_{m,k}(f, I_m) = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{1 + (-1)^k}{(k+1)!}\right] \frac{h_j^{k+1}}{2^{k+1}} f^{(k)}\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right)$$

ifadesi sadece k dahil olacak şekilde geçerlidir. Aşağıdaki sonuçta kalan terimlerin tahminine ilişkin durum belirtilmiştir.

Hatırlatma 3.7.1 f ve I_m Teorem 3.7.5. de olduğu gibi olsun. O zaman

$$\int_a^b f(x)dx = M_{m,k}(f, I_m) + R_{m,k}(f, I_m) \tag{40}$$

elde ederiz.

$M_{m,k}$ yukarıdaki tanımlamada verilmiştir kalan terim $R_{m,k}$ tahmini olarak karşılanır.

$$\left|R_{m,k}(f, I_m)\right| \leq \frac{\left\|f^{(n)}\right\|_\infty}{2^n(n+1)!} \sum_{j=0}^{m-1} h_j^{n+1} \tag{41}$$

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Varsayalım ki $w:[a,b]\to[0,\infty)$ herhangi bir olasılık yoğunluk fonksiyonu, yani $\int_a^b w(t)dt=1$ bir pozitif integral fonksiyonu ve $t\in[a,b]$ için $W(t)=\int_a^t w(x)dx$, $t<a$ için $W(t)=0$ ve $t>b$ için $W(t)=1$ olsun. Aşağıdaki özdeşlik Montgomery özdeşliğinin bir genellemesidir.

$$f(x)=\frac{1}{b-a}\int_a^b w(t)f(t)dt+\int_a^b P_w(x,t)f'(t)dt \tag{1}$$

$P_w(x,t)$ ağırlıklı Peano çekirdeğinin tanımı

$$P_w(x,t):=\begin{cases} w(t) & a\le t<x \\ w(t)-1 & x\le t\le b \end{cases}$$

dır.

Diğer yandan, $f:[a,b]\times[c,d]\to R$ fonksiyonun kısmi türev $\frac{\partial f(t,s)}{\partial t},\frac{\partial f(t,s)}{\partial s},\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t\partial s}$ tümü mevcut ve $[a,b]\times[c,d]$ üzerinde sürekli ise her $(x,y)\in[a,b]\times[c,d]$ için,

$$\begin{aligned}(d-c)&(b-a)f(x,y)\\ =&-\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt+(d-c)\int_a^b f(t,y)dt+(b-a)\int_c^d f(x,s)ds\\ &+\int_a^b\int_c^d p(x,t)p(y,s)\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t\partial s}dsdt\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}(d-c)&(b-a)f(x,y)\\ =&\int_a^b\int_c^d f(t,s)ds+\int_a^b\int_c^d p(x,t)\frac{\partial f(t,s)}{\partial t}dsdt+\int_a^b\int_c^d q(y,s)\frac{\partial f(t,s)}{\partial s}dsdt\\ &+\int_a^b\int_c^d p(x,t)q(y,s)\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t\partial s}dsdt\end{aligned} \tag{3}$$

dır. Burada ki Peano çekirdeği ise

$$p(x,t)=\begin{cases} t-a, & a\le t<x \\ t-b, & x\le t\le b \end{cases}$$

ve

$$q(y,s)=\begin{cases} s-c, & c\le s<y \\ s-d, & y\le s\le d \end{cases}$$

dır. Ayrıca da, ağırlık fonksiyonunu kullanarak, yani $w:[a,b]\to[0,\infty)$ fonksiyonu ve

$$m(a,b) = \int_a^b w(t)dt < \infty$$

için Sarikaya ve Ogunmez Montgomery nin tanımını kullanarak aşağıdaki çift katlı integraller için yeni bir genelleşme vermişler.

Yardımcı Teorem 1. $f : [a,b] \times [c,d] \to R$ kesin sürekli fonksiyon ve öyle ki ikinci dereceden kısmi türeve sahip olsun. Her $(t,s)\epsilon[a,b]x[c,d]$ için

$$\begin{aligned} f(x,y) = {} & \frac{1}{m(a,b)}\int_a^b w(t)f(t,y)dt + \frac{1}{m(c,d)}\int_c^d w(s)f(x,s)ds \\ & - \frac{1}{m(a,b)}\frac{1}{m(c,d)}\left[\int_a^b\int_c^d w(t)\,w(s)f(t,s)dsdt \right. \\ & \left. - \int_a^b\int_c^d p_w(x,t)q_w(y,s)\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t\partial s}dsdt\right] \end{aligned} \tag{4}$$

dır. Burada Peano çekirdeği

$$P_w(x,t) = \begin{cases} p_1(a,t) = \displaystyle\int_a^t w(u)du, & a \le t < x \\ p_2(b,t) = \displaystyle\int_b^t w(u)du, & x \le t \le b \end{cases} \tag{5}$$

$$q_w(y,s) = \begin{cases} q_1(c,s) = \displaystyle\int_c^s w(u)du, & c \le s < y \\ q_2(d,s) = \displaystyle\int_d^s w(u)du, & y \le s \le d \end{cases} \tag{6}$$

dır.

Bu bölümde ana amacımız, temel analiz bilgisiyle iki değişkenli fonksiyonlar ve ağırlıklı Montgomery özdeşliğini elde edip bu özdeşliği kullanarak iki bağımsız değişkenli fonksiyonlar içeren iki katlı integraller için ağırlıklı integral eşitsizlikleri elde etmektir.

4.1 ANA SONUÇLAR

İlk olarak çalışmamız için büyük bir öneme sahip olan ağırlıklı Montromery özdeşliğini aşağıdaki şekilde elde edelim:

Yardımcı Teorem 2. $f:[a,b]x[a,b]\to R$ sürekli kısmi türevleri $\frac{\partial f(t,s)}{\partial t}$, $\frac{\partial f(t,s)}{\partial s}$ ve $\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t\partial s}$ var olsun. Bu durumda her $x\in[a,b]$ için

$$\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b P(x,t)P(t,s)\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t\partial s}dsdt$$

$$=f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x,s)ds+\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f(t,s)dsdt \qquad (7)$$

dır. Burada, Peano çekirdeğinin

$$P(x,t)=\begin{cases} t-a, & a\le t<x' \\ t-b, & x\le t\le b\end{cases}$$

dır.

İspat. Kısmi integrasyon formülünü kullanarak,

$$\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b P(x,t)P(t,s)\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t\partial s}dsdt$$

$$=\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b P(x,t)\left[\int_a^t (s-a)\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t\partial s}ds+\int_t^b (s-b)\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t\partial s}ds\right]dt$$

$$=\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b P(x,t)\left[(b-a)\frac{df(t)}{dt}-\int_a^b\frac{\partial f(t,s)}{\partial t}\mathrm{ds}\right]dt$$

$$=\frac{1}{b-a}\int_a^b P(x,t)\frac{df(t)}{dt}dt-\frac{1}{(b-a)^2}$$

$$\int_a^b\int_a^b P(x,t)\frac{\partial f(t,s)}{\partial t}\mathrm{dtds}$$

$$=\frac{1}{b-a}\left[\int_a^x (t-a)\frac{df(t)}{dt}dt+\int_x^b (t-b)\frac{df(t)}{dt}dt\right]$$

$$-\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\left[\int_a^x (t-a)\frac{\partial f(t,s)}{\partial t}\mathrm{dt}\int_x^b (t-b)\frac{\partial f(t,s)}{\partial t}\mathrm{dt}\right]ds$$

$$=\frac{1}{b-a}\left[(x-a)f(x)-\int_a^b f(t)dt-(x-b)f(x)\right]$$

$$-\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\left[(x-a)f(x,s)-\int_a^b f(t,s)dt-(x-b)f(x,s)\right]$$

$$= f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt - \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x,s)\,ds$$
$$+ \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f(t,s)dsdt$$

ispat tamamlanmıştır.

Teorem 2. $f: [a,b] \times [a,b] \to R$ mutlak sürekli kısmi sürekli fonksiyon ve Her $(t,s) \in [a,b] \times [a,b]$ için

$$\left\|\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t \partial s}\right\|_\infty = \sup_{(t,s)\in(a,b)x(a,b)}\left|\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t \partial s}\right| < \infty$$

olsun. O zaman $x \in [a,b]$ için

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt - \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x,s)\,ds + \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f(t,s)dsdt\right|$$
$$\leq \frac{M}{(b-a)^2}\left\{\frac{(x-a)^4}{4} + \frac{(x-b)^4}{4} + \frac{(b-a)^4}{12} - \frac{(b-a)}{6}[(x-a)^3 + (b-x)^3]\right\} \quad (8)$$

dır.

İspat. Yardımcı Teorem 2 de (7) deki özdeşliği alarak mutlak değer ve özelliklerini kullanırsak,

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt - \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x,s)\,ds + \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f(t,s)dsdt\right|$$
$$\leq \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b |P(x,t)||P(t,s)|\left|\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t \partial s}\right| dsdt$$
$$\leq \frac{M}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b |P(x,t)||P(t,s)|dsdt$$
$$= \frac{M}{(b-a)^2}\int_a^b |P(x,t)|\left[\int_a^t (s-a)ds + \int_t^b (b-s)ds\right]dt$$
$$= \frac{M}{(b-a)^2}\int_a^b |P(x,t)|\left[\frac{(t-a)^2}{2} + \frac{(b-t)^2}{2}\right]$$
$$= \frac{M}{(b-a)^2}\left\{\int_a^x (t-a)\left[\frac{(t-a)^2}{2} + \frac{(b-t)^2}{2}\right] + \int_x^b (b-t)\left[\frac{(t-a)^2}{2} + \frac{(b-t)^2}{2}\right]\right\}dt$$
$$= \frac{M}{(b-a)^2}\left\{\frac{(x-a)^4}{4} + \frac{(x-b)^4}{4} + \frac{(b-a)^4}{12} - \frac{(b-a)}{6}[(x-a)^3 + (b-x)^3]\right\}$$

elde ederiz ve ispat tamamlanır.

Hatırlatma 1. Eğer Teorem 2 de $x = \frac{a+b}{2}$ alırsak

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt-\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(\frac{a+b}{2},s\right)ds\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f(t,s)dsdt\right|$$
$$\leq\frac{5M(b-a)^2}{48}$$

$x=a$ için aşağıda ki ifade

$$\left|f(a)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(a,s)ds+\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f(t,s)dsdt\right|$$
$$\leq\frac{M(b-a)^2}{6}$$

ve $x=b$ için aşağıda ki ifade

$$\left|f(b)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(b,s)ds+\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f(t,s)dsdt\right|$$
$$\leq\frac{M(b-a)^2}{6}$$

elde edilir.

Teorem 3. $f:[a,b]\times[a,b]\to\mathbb{R}$ mutlak sürekli fonksiyon öyle ki kısmi türevden ikinci mertebeden kısmi türevleri var ve sınırlı, yani

$$\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\right\|_p=\left(\int_a^b\int_a^b\left|\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial f\partial t}\right|^p dsdt\right)^{1/p}<\infty$$

ve $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olsun. Bu durum da her $x\in[a,b]$ için

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x,s)ds+\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f(t,s)dsdt\right|$$
$$\leq\frac{1}{(b-a)^2}\left\{\frac{(x-a)^{2q+2}}{2(q+1)^2}+\frac{(b-x)^{2q+2}}{2(q+1)^2}+\frac{(b-a)^{2q+2}}{q+1}B_{\frac{x-a}{b-a}}(q+1,q+2)\right.$$
$$\left.+\frac{(b-a)^{2q+2}}{q+1}B_{\frac{b-x}{b-a}}(q+1,q+2)\right\}\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\right\|_p$$

dır. Tam olmayan $B_x(\alpha,\beta)$ Beta fonksiyonu

$$B_x(\alpha,\beta)=\int_0^x u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}du.$$

İspat. Yardımcı Teorem 2 den mutlak değer ve Hölder Eşitsizliğinin özelliklerini kullanarak $p>1$,$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x,s)ds+\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f(t,s)dsdt\right|$$

$$\leq\frac{1}{(b-a)^2}\left(\int_a^b\int_a^b [|P(x,t)||P(t,s)|]^q\,dsdt\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^b\int_a^b\left|\frac{\partial^2 f)}{\partial f\partial t}\right|^p dsdt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq\frac{1}{(b-a)^2}\left\|\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t\partial s}\right\|_p\left(\int_a^b |P(x,t)|^q dt\int_a^b |P(t,s)|^q ds\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\frac{1}{(b-a)^2}\left\|\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t\partial s}\right\|_p\left\{\int_a^b |P(x,t)|^q\left(\int_a^t (s-a)^q ds+\int_t^b (b-s)^q ds\right)\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$=\frac{1}{(b-a)^2}\left\|\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t\partial s}\right\|_p\left\{\int_a^b |P(x,t)|^q\left(\frac{(t-a)^{q+1}}{q+1}+\frac{(b-t)^{q+1}}{q+1}\right)dt\right\}^{1/q}$$

$$=\frac{1}{(b-a)^2}\left\|\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t\partial s}\right\|_p\left\{\int_a^x (t-a)^q\left(\frac{(t-a)^{q+1}}{q+1}+\frac{(b-t)^{q+1}}{q+1}\right)dt\right.$$

$$\left.+\int_a^x (b-t)^q\left(\frac{(t-a)^{q+1}}{q+1}+\frac{(b-t)^{q+1}}{q+1}\right)dt\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$=\frac{1}{(b-a)^2}\left\|\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t\partial s}\right\|_p\left\{\int_a^x\left[\frac{(t-a)^{2q+1}}{q+1}+\frac{(t-a)^q(b-t)^{q+1}}{q+1}\right]dt\right.$$

$$\left.+\int_x^b\left[\frac{(b-t)^q(t-a)^{q+1}}{q+1}+\frac{(b-t)^{2q+1}}{q+1}\right]dt\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$=\frac{1}{(b-a)^2}\left\{\frac{(x-a)^{2q+2}}{2(q+1)^2}+\frac{(b-x)^{2q+2}}{2(q+1)^2}\right.$$

$$\left.+\left(\int_a^x\frac{(t-a)^q(b-t)^{q+1}}{q+1}dt+\int_x^b\frac{(b-t)^q(t-a)^{q+1}}{q+1}dt\right)\right\}^{\frac{1}{q}}\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\right\|_p$$

olur. Bu son integraller de değişken değişimi kullanarak

$$\int_a^x\frac{(t-a)^q(b-t)^{q+1}}{q+1}dt=\frac{(b-a)^{2q+2}}{q+1}B_{\frac{x-a}{b-a}}(q+1,q+2)$$

ve

$$\int_x^b\frac{(b-t)^q(t-a)^{q+1}}{q+1}dt=\frac{(b-a)^{2q+2}}{q+1}B_{\frac{b-x}{b-a}}(q+1,q+2)$$

yazılır. Böylece, aşağıdaki sonuç

$$\left|f(x)-\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(t)dt-\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x,s)ds+\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f(t,s)dsdt\right|$$

$$\leq \frac{M}{(b-a)^2}\left\{\frac{(x-a)^{2q+2}}{2(q+1)^2}+\frac{(b-x)^{2q+2}}{2(q+1)^2}+\frac{(b-a)^{2q+2}}{(q+1)}B_{\frac{x-a}{b-a}}(q+1,q+2)\right.$$
$$\left.+\frac{(b-a)^{2q+2}}{(q+1)}B_{\frac{b-x}{b-a}}(q+1,q+2)\right\}\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\right\|_p$$

bulunur ve bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4. $f,g:[a,b]\times[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli kısmı türevlere sahip fonksiyonlar olsun. Bu durumda,

$$\left|f(x)g(x)-\frac{1}{2(b-a)}\left[g(x)\int_a^b f(t)dt+f(x)\int_a^b g(t)dt\right]\right.$$
$$-\frac{1}{2(b-a)}\left[g(x)\int_a^b f(x,s)ds+f(x)\int_a^b g(x,s)ds\right]$$
$$\left.+\frac{1}{2(b-a)^2}\left[g(x)\int_a^b\int_a^b f(t,s)dsdt+f(x)\int_a^b\int_a^b g(t,s)dsdt\right]\right|$$
$$\leq \frac{1}{2(b-a)^2}\left[\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\right\|_\infty |g(x)|+\left\|\frac{\partial^2 g}{\partial t\partial s}\right\|_\infty |f(x)|\right]$$
$$\times\left[\frac{(x-a)^4}{4}+\frac{(x-b)^4}{4}+\frac{(b-a)^4}{12}-\frac{(b-a)}{6}[(x-a)^3+(b-x)^3]\right]$$

İspat. Yardımcı Teorem 2 den

$$f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$
$$-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x,s)ds+\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f(t,s)dsdt$$
$$=\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b P(x,t)P(t,s)\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t\partial s}dsdt \tag{9}$$

ve

$$g(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt-\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x,s)ds+\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b g(t,s)dsdt$$
$$=\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b P(x,t)P(t,s)\frac{\partial^2 g(t,s)}{\partial t\partial s}dsdt \tag{10}$$

yazabiliriz. (9) daki ifadeyi $g(x)$ ve (10) daki ifadeyi de $f(x)$ ile taraf tarafa çarpar ve toplarsak elde edilen yeni sonuç

$$f(x)g(x)-\frac{1}{2(b-a)}\left[g(x)\int_a^b f(t)dt+f(x)\int_a^b g(t)dt\right]$$

$$-\frac{1}{2(b-a)}\left[g(x)\int_a^b f(x,s)ds+f(x)\int_a^b g(x,s)ds\right]$$

$$+\frac{1}{2(b-a)^2}\left[g(x)\int_a^b\int_a^b f(t,s)dsdt+f(x)\int_a^b\int_a^b g(t,s)dsdt\right]$$

$$=\frac{1}{2(b-a)^2}\left[g(x)\int_a^b\int_a^b P(x,t)P(t,s)\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t\partial s}dsdt\right.$$

$$\left.+f(x)\int_a^b\int_a^b P(x,t)P(t,s)\frac{\partial^2 g(t,s)}{\partial t\partial s}dsdt\right] \qquad (11)$$

olur. (11) ifadesini ve mutlak değer özelliklerini kullanırsak

$$\left|f(x)g(x)-\frac{1}{2(b-a)}\left[g(x)\int_a^b f(t)dt+f(x)\int_a^b g(t)dt\right]\right.$$

$$-\frac{1}{2(b-a)}\left[g(x)\int_a^b f(x,s)ds+f(x)\int_a^b g(x,s)ds\right]$$

$$\left.+\frac{1}{2(b-a)^2}\left[g(x)\int_a^b\int_a^b f(t,s)dsdt+f(x)\int_a^b\int_a^b g(t,s)dsdt\right]\right|$$

$$\leq\frac{1}{2(b-a)^2}\left[|g(x)|\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\right\|_\infty+|f(x)|\left\|\frac{\partial^2 g}{\partial t\partial s}\right\|_\infty\right]\times\left[\int_a^b\int_a^b P(x,t)P(t,s)dsdt\right]$$

$$=\frac{1}{2(b-a)^2}\left[|g(x)|\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\right\|_\infty+|f(x)|\left\|\frac{\partial^2 g}{\partial t\partial s}\right\|_\infty\right]$$

$$\times\left[\frac{(x-a)^4}{4}+\frac{(x-b)^4}{4}+\frac{(b-a)^4}{12}-\frac{(b-a)}{6}[(x-a)^3+(b-x)^3]\right]$$

ispat tamamlanır.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmamız da, temel analiz bilgisiyle iki değişkenli fonksiyonlar ve ağırlıklı Montgomery özdeşliğini elde ederek bu özdeşlik yardımıyla yeni iki katlı integraller için Ostrowski tipli eşitsizlikler elde edildi. Özellikle Peano çekirdeğinin seçimine bağlı olarak yeni özdeşlikler ve bu özdeşlikler yardımıyla yeni birçok integral eşitsizlikleri elde edilebilir. Ayrıca son bölümde elde ettiğimiz sonuçlar uluslararası indeksli dergide kabul edilmiş ve bu sonuçlarımızın n-li değişkenler içinde benzer yöntem ile elde edilebileceğini açık problem olarak bırakıyoruz.

6.KAYNAKLAR

Cebysev P.L., Sur les expressions approximatives des integrales definies par les aures prises entre les memes limites, *Proc. Math. Soc.,* Charkov 2 **(1882)** 93–98.

Cerone P., Dragomir S.S. and Roumelotis J., Some Ostrowski-type inequalities for n-time differentiable mappings and applications, *Demonstratio Math*., 32 (4) **(1999)** 697–712.

Cerone P., Dragomir S.S. and Roumelotis J., An inequality of Ostrowski-Grüss type for twice differentiable mappings and applications in numerical integration, *Kyungpook Math. J*., 39 **(1999)** 333–341.

Cerone P., Dragomir S.S. and Roumelotis J., An inequality of Ostrowski type for mappings whose second derivatives are bounded and applications, *East Asian J. Math*., 15 (1) **(1999)** 1–9.

Dragomir S.S. and Agarwal R.P., Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and trapezoidal formula, *Appl. Math. Lett*., 11 (5) **(1998)** 91-95.

Dragomir S.S. and Barnett N.S., An Ostrowski type inequality for mappings whose second derivatives are bounded and applications, *RGMIA Res. Rep. Coll*., 1 (2) **(1998)** 69–77.

Dragomir S.S. and Pearce C.E.M., Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications, *RGMIA Monographs*, Victoria University, **(2000).**

Dragomir S.S. and Wang S, An inequality of Ostrowski-Grüss type and its applications to the estimation of error bounds for some special means and for some numerical quadrature rules, *Computers Math. Applic*., 33 (11) **(1997)** 15–20.

Dragomir S.S. and Wang S., A new inequality of Ostrowski's type in Lp norm, *Indian Jour. Math*., 40 (3) **(1998)** 299–304.

Dragomir S.S., Cerone P. and Roumeliotis J., A new generalization of Ostrowski integral inequality for mappings whose derivatives are bounded and applications in numerical integration and for special means, *Appl. Math. Lett*., 13 (1) **(2000)** 19–25.

Dragomir S.S., On the Ostrowski integral inequality for Lipschitzian mappings and applications, *Comput. and Math. Appl*., 38 (11-12) **(1999)** 33–37.

Grüss G., Über das Maximum des absoluten Betrages von, *Math. Z*., 39 **(1935)** 215–226.

Matic M., Pecaric J.E. and Ujevic N., Improvement and further generalization of inequalities of Ostrowski-Grüss type, *Computers Math. Appl*., 39 **(2000)** 161–175.

Milovanovic G.V. and Pecaric J.E., On generalization of the inequality of A. Ostrowski and some related applications, *Univ. Beograd Publ. Elek. Fak. Ser. Mat. Fiz*., (544-576) **(1976)** 155–158.

Mitrinovic D.S., Pecaric J.E. and Fink A.M., Classical and New Inequalities in Analysis, *Kluwer Academic Publishers Dordrecht*, **(1993).**

Pachpatte B.G., A note on integral inequalities involving product of two functions, *J. Inequal. Pure and Appl. Math*., 7 (2) **(2006).**

Pachpatte B.G., A note on Ostrowski like inequalities, *J. Inequal. Pure and Appl. Math*., 6 (4) **(2005).**

Pachpatte B.G., A note on Ostrowski type inequalities, *Demonstratio Math*., 35 **(2002)** 27–30.

Pachpatte B.G., Mathematical Inequalities, *North-Holland Mathematical Library*, 67 **(2005).**

Pachpatte B.G., New inequalities of Ostrowski type for twice differentiable mappings, *Tamkang J. Math*., 35 (3) **(2004)** 219–226.

Pachpatte B.G., New inequalities of Ostrowski-Grüss type, *Face. Math*., No. 38 **(2007)** 97– 104.

Pachpatte B.G., New integral inequalities for differentiable functions, *Tamkang J. Math*., 34 (3) **(2003)** 249–253.

Pachpatte B.G., New Ostrowski type inequalities involving the product of two functions, J. Inequal. *Pure and Appl. Math*., 7 (3) **(2006)**.

Pachpatte B.G., On a new generalization of Ostrowski type inequality, *Tamkang J. Math*., 38 (4) **(2007)** 335–339.

Pachpatte B.G., On a new generalization of Ostrowski's inequality, *J. Inequal. Pure and Appl. Math.*, 5 (2) 36, **(2004)**.

Pearce C.E.M. and Pečarić J., Inequalities for differentiable mappings with application to special means and quadrature formulae, *Appl. Math. Lett.*, 13 (2) **(2000)** 51-55.

Saglam A., Sarikaya M.Z. and Yildirim H., Some new inequalities of Hermite-Hadamard's type, *Kyungpook Mathematical Journal*, 50 **(2010)** 399-410.

Sarikaya M.Z. and Aktan N., On the generalization some integral inequalities and their applications, *Mathematical and Computer Modelling*, 54 (9-10) **(2011)** 2175-2182.

Sarikaya M.Z., Avci M. and Kavurmaci H., On some inequalities of Hermite-Hadamard type for convex functions, *ICMS Iternational Conference on Mathematical Science, AIP Conference Proceedings* 1309, 852 **(2010).**

Sarikaya M.Z., Saglam A. and Yildirim H., New inequalities of Hermite-Hadamard type for functions whose second derivatives absolute values are convex and quasi-convex, *International J. of Open Problems in Comp. Sci. and Math. IJOPCM*, 5 (3) **(2012).**

Sarikaya M.Z., Saglam A. and Yildirim H., On some Hadamard-type inequalities for h-convex functions, *Journal of Mathematical Inequalities*, 2 (3) **(2008)** 335-341.

Sarikaya M.Z., Set E. and Ozdemir M.E., On some new inequalities of Hadamard type involving h-convex functions, *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, LXXIX (2) **(2010)** 265-272.

Ujevic N., New bounds for the first inequality of Ostrowski-Grüss type and applications, *Computers and Math. Appl.*, 46 **(2003)** 421–427.

Ujevic N., Perturbations of an Ostrowski type inequality and applications, *Inter. J. Math. Math. Sci.*, 32 (8) **(2002)** 491–500.

Ujevic N., Sharp inequalities of Simpson type and Ostrowski type, *Computers and Math. Appl.*, 48 **(2004)** 145–151.

7.EKLER

EK-1. YAYIN BİLGİSİ

Tezin son bölümünü oluşturan iki katlı integraller için Ostrowski tipli integral eşitsizliği ile ilgili çalışmamız aşağıdaki uluslararası indekslerde taranan dergide yayınlanmıştır:

1) Sarikaya M. Z., Ogulmus H. and **Demircan T.**, On the generalized weighted integral inequality for double integrals, *International Journal of Modern Mathematical Sciences***,** 2014, 10(1): 1-12.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	: DEMİRCAN, Türker
Uyruğu	: T.C
Doğum tarihi ve Yeri	: 10.07.1981/ Erzincan
Telefon	: (0507) 082 01 20
e-mail	: turkerdemircan@hotmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Tezli Y. Lisans	Düzce Ü. /Matematik B.	2014
Tezsiz Y. Lisans	Sakarya Ü. /OFMA	2007
Lisans	Sakarya Ü. /Matematik B.	2005
Lise	Adapazarı Atatürk Lisesi	1998

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2005-2007	Özel Mefkûre Dershanesi	Matematik Öğrt.
2008-2010	Özel İlkiz Dershanesi	Matematik Öğrt.
2010-	PTT A.Ş	Memur

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1) Sarikaya M. Z., Ogulmus H. and **Demircan T.**, On the generalized weighted integral inequality for double integrals, *International Journal of Modern Mathematical Sciences*, 2014, 10(1): 1-12.