T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI FARK DİZİ UZAYLARI ÜZERİNDE MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS

MERVE İLKHAN

ARALIK 2014
DÜZCE

KABUL VE ONAY BELGESİ

Merve İLKHAN tarafından hazırlanan "Bazı Fark Dizi Uzayları Üzerinde Matris Dönüşümleri" isimli lisansüstü tez çalışması, Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 01/12/2014 tarih ve 2014/1117 sayılı kararı ile oluşturulan jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Üye
(Tez Danışmanı)
Yrd. Doç. Dr. E. Evren KARA
Düzce Üniversitesi

Üye
Prof. Dr. Metin BAŞARIR
Abant İzzet Baysal Üniversitesi

Üye
Yrd. Doç. Dr. Arzu ÖZKOÇ
Düzce Üniversitesi

Tezin Savunulduğu Tarih : 29.12.2014

ONAY

Bu tez ile Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Merve İLKHAN'ın Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans derecesini almasını onamıştır.

Prof. Dr. Haldun MÜDERRİSOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

29 Aralık 2014

Merve İLKHAN

Sevgili Aileme

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim ve bu tezin hazırlanması süresince gösterdiği her türlü destek ve yardımlarından dolayı çok değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Emrah Evren KARA'ya en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme ve çalışma arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans öğrenimim boyunca beni 2210-A kodlu bursu ile finansal açıdan destekleyen TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

29 Aralık 2014 **Merve İLKHAN**

İÇİNDEKİLER **Sayfa**

ÇİZELGE LİSTESİ

ÖZET

BAZI FARK DİZİ UZAYLARI ÜZERİNDE MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

Merve İLKHAN
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Emrah Evren KARA
Aralık 2014, 60 sayfa

Bu tez çalışmasında yeni bir fark matrisi olan $T = (t_{nk})$ matrisi, her $n \in \mathbb{N}$ için $t_n > 0$ ve $(t_n) \in c \backslash c_0$ olmak üzere her $n, k \in \mathbb{N}$ için

$$t_{nk} = \begin{cases} t_n & , \quad k = n \\ -\dfrac{1}{t_n} & , \quad k = n-1 \\ 0 & , \quad 0 \leq k < n-1 \text{ yada } k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Daha sonra T matrisi kullanılarak $1 \leq p \leq \infty$ için $\ell_p(T), c_0(T)$ ve $c(T)$ dizi uzayları oluşturulmuştur. Bu uzaylar ile ilgili bazı teoremler ve kapsama bağıntıları verilmiştir. Ayrıca bu uzayların α-,β-,γ- dualleri belirlenmiş ve Schauder bazları bulunmuştur. Son olarak bu uzaylar ile bazı klasik dizi uzayları arasındaki matris dönüşümlerinin sınıfları karakterize edilmiştir.

Anahtar sözcükler: Dizi uzayları, Matris dönüşümleri, Schauder bazı, α-,β-,γ- dualleri

ABSTRACT

MATRIX TRANSFORMATIONS ON SOME DIFFERENCE SEQUENCE SPACES

Merve İLKHAN
Düzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Assist. Prof. Dr. Emrah Evren KARA
December 2014, 60 pages

In this study, a new band matrix $T = (t_{nk})$ was defined as

$$t_{nk} = \begin{cases} t_n & , \quad k = n \\ -\dfrac{1}{t_n} & , \quad k = n-1 \\ 0 & , \quad 0 \leq k < n-1 \text{ or } k > n \end{cases}$$

for all $n, k \in \mathbb{N}$, where $t_n > 0$ for all $n \in \mathbb{N}$ and $(t_n) \in c \backslash c_0$. Later, by using the matrix T, the sequence spaces $\ell_p(T), c_0(T)$ and $c(T)$ were constructed for $1 \leq p \leq \infty$. Some theorems and inclusion relations related to these spaces were given. Also, α-,β-,γ- duals of these spaces were determined and their Schauder basis were found. Finally, classes of matrix mappings between these spaces and some classical sequence spaces were characterized.

Keywords: Matrix transformations, Schauder basis, Sequence spaces, α-,β-,γ- duals

EXTENDED ABSTRACT

MATRIX TRANSFORMATIONS ON SOME DIFFERENCE SEQUENCE SPACES

Merve İLKHAN
Düzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Assist. Prof. Dr. Emrah Evren KARA
December 2014, 60 pages

1. INTRODUCTION:

Since the most general linear transformation between two sequence spaces is given by an infinite matrix, matrix transformations between sequence spaces are important. In the literature, many new sequence spaces were defined by using infinite matrices, especially infinite triangle matrices and some topological and geometrical properties of these spaces were examined.

This study is composed of five chapters. The first chapter is an introductory about the whole thesis. In the second chapter, some basic definitions and theorems are given. The third and the fourth chapters are the original parts of the thesis. In the last chapter, some special cases of sequence spaces defined in the third and the fourth chapters are given. Also, some suggestions are made about subjects which can be studied on these spaces.

2. MATERIAL AND METHODS:

Firstly, we examined some papers in the literature related to new sequence spaces constructed by means of the matrix domain of a special triangle. We investigated what kind of properties concerning these new sequence spaces were studied by authors. After that, we determined which of these properties can be carried to our new sequence spaces constructed by a new band matrix.

3. RESULTS AND DISCUSSIONS:

The following results are obtained:

- New sequence spaces $\ell_p(T)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, $c_0(T)$ and $c(T)$ are constructed.
- Some inclusion relations related to these new spaces are examined.
- α-,β-,γ- duals of these spaces are determined.
- Schauder basis of these spaces are established.
- The classes of matrix mappings from the spaces $\ell_p(T)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, $c_0(T)$ and $c(T)$ to the sequence spaces $\ell_1, c_0, c, \ell_\infty, cs_0, cs, bs$ are characterized.
- Also, the classes of matrix mappings from the spaces $\ell_1, c_0, c, \ell_\infty$ to the sequence spaces $\ell_p(T)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, $c_0(T)$ and $c(T)$ are characterized.
- The norm of bounded and linear operators defined from the spaces $\ell_p(T)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, $c_0(T)$ and $c(T)$ to the spaces ℓ_1, ℓ_∞ is given.

4. CONCLUSION AND OUTLOOK:

The main purpose of this study is to introduce the sequence spaces $\ell_p(T)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, $c_0(T)$ and $c(T)$ which are the matrix domains of the band matrix T in the absolutely p-summable, null and convergent sequence spaces ℓ_p, c_0 and c, respectively. The subject of this thesis is a study of which is considered to make in the branch of Functional Analysis.

1. GİRİŞ

$A = (a_{nk})$ $(n, k = 0,1,2, \dots)$ satır ve sütun sayısı sonsuz olan kompleks terimli bir matris olsun. ω tüm kompleks terimli dizilerin uzayı olmak üzere X, Y ile ω uzayının herhangi iki alt cümlesi olan dizi uzayları gösterilsin. ω uzayının her bir alt cümlesi $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı olduğundan her $x = (x_k) \in X$ dizisi

$$x = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \end{bmatrix}$$

şeklinde vektörel olarak yazılabilir. Böylece klasik matris çarpımı kullanılarak

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0k} & \cdots \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + \cdots + a_{0k}x_k + \cdots \\ a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k + \cdots \\ a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k + \cdots \\ \vdots \\ a_{n0}x_0 + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nk}x_k + \cdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} a_{0k}x_k \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_{1k}x_k \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}x_k \\ \vdots \end{bmatrix}$$

elde edilir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}x_k$ serisinin yakınsak olduğu kabul edilir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}x_k = y_n$ olmak üzere $y = (y_n)$ dizisi Y dizi uzayının bir elemanı ise A matrisine X dizi uzayından Y dizi uzayına bir matris dönüşümü denir. Bu dönüşüm lineer bir dönüşümdür.

Literatürde özel üçgensel matrisler alınarak çeşitli yeni dizi uzayları tanımlanmış ve bu uzaylar üzerindeki matris dönüşümlerinin sınıfları karakterize edilmiştir. Örneğin; Kızmaz [1] Δ fark matrisini kullanarak fark dizi uzayları olan

$$c_0(\Delta) = \{x = (x_k) \in \omega : (x_k - x_{k-1}) \in c_0\},$$

$$c(\Delta) = \{x = (x_k) \in \omega : (x_k - x_{k-1}) \in c\}$$

ve

$$\ell_\infty(\Delta) = \{x = (x_k) \in \omega : (x_k - x_{k-1}) \in \ell_\infty\}$$

uzaylarını tanımlamıştır. Bu uzaylar literatürde bilinen ilk fark dizi uzaylarıdır. Ayrıca Kızmaz [1] bu uzaylar üzerindeki bazı matris dönüşümlerini de incelemiştir. Daha sonra çeşitli fark matrisleri kullanılarak birçok yeni fark dizi uzayları tanımlanmış ve bu uzaylar üzerindeki matris dönüşümlerinin taşıması gereken şartlar belirlenmiştir.

Bu tez çalışmasının amacı yeni bir fark matrisi olan T matrisini tanımlayıp bu matris yardımıyla $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\ell_p(T), \ell_\infty(T), c_0(T)$ ve $c(T)$ uzaylarını oluşturmaktır. İlk olarak bu uzaylar arasındaki bazı kapsama bağıntıları verilecek ve bu uzayların dualleri belirlenecektir. Daha sonra bu uzaylar üzerinde tanımlanan matris dönüşümlerinin bazı sınıfları karakterize edilecektir.

2. KURAMSAL KAVRAMLAR

2.1. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde çalışma için gerekli olan tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1.1 L boş olmayan bir cümle ve $\mathbb{F}$, reel veya kompleks sayılar cismi olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L ye $\mathbb{F}$ üzerinde lineer uzay (veya vektör uzayı) denir:

L, + işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,

G1) Her $x, y \in L$ için $x + y \in L$ dir (kapalılık özelliği).

G2) Her $x, y \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir (birleşme özelliği).

G3) Her $x \in L$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır (özdeş eleman varlığı).

G4) Her $x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır (ters elemanın varlığı).

G5) Her $x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir (değişme özelliği).

$x, y \in L$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:

L1) $\alpha. x \in L$ dir (skalerle çarpmaya göre kapalılık).

L2) $\alpha. (x + y) = \alpha. x + \alpha. y$ dir.

L3) $(\alpha + \beta). x = \alpha. x + \beta. x$ dir.

L4) $(\alpha\beta). x = \alpha. (\beta. x)$ dir.

L5) $1. x = x$ dir. (Burada 1, $\mathbb{F}$ nin birim elemanıdır) [2].

Tanım 2.1.2 Boş olmayan bir X kümesi ve bir

$$d: X \times X \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \quad (x, y) \to d(x, y)$$

dönüşümü verilsin. Eğer bu d dönüşümü $\forall x, y, z \in X$ için

M1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

M2) $d(x,y) = d(y,x)$;

M3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde uzaklık fonksiyonu ya da metrik adını alır ve bu durumda (X,d) ikilisine bir metrik uzay denir [3].

Tanım 2.1.3 Bir (X,d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir limite sahipse, bu (X,d) metrik uzayına tam metrik uzay adı verilir [3].

Tanım 2.1.4 X, bir $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$\|.\|: X \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \quad x \to \|x\|$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{F}$ için

N1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,

N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$,

N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde norm adını alır ve bu durumda $(X, \|.\|)$ ikilisine bir normlu vektör uzayı adı verilir [3].

Tanım 2.1.5 Bir $(X, \|.\|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir noktaya yakınsıyorsa, bu $(X, \|.\|)$ normlu uzayına tam normlu uzay veya Banach uzayı denir [4].

Tanım 2.1.6 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olmak üzere X bir vektör uzayı olsun.

$$\langle .,. \rangle: X \times X \to \mathbb{F}$$

dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahip ise $\langle .,. \rangle$ ye X üzerinde bir iç çarpım, $(X, \langle .,. \rangle)$ ikilisine de iç çarpım uzayı (veya ön Hilbert uzayı) denir.

İ1) Her $x \in X$ için $\langle x, x\rangle \geq 0$ ve $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,

İ2) Her $x, y \in X$ için $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ (kompleks eşlenik),

İ3) Her $x, y \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{F}$ için $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$,

İ4) Her $x, y, z \in X$ için $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ [3].

Tanım 2.1.7 $(X, \langle .,.\rangle)$ bir iç çarpım uzayı ve $x \in X$ olsun. x vektörünün normu

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2} \tag{2.1}$$

olarak tanımlanır [3].

Önerme 2.1.1 (Paralelkenar Kuralı) $(X, \langle .,.\rangle)$ bir iç çarpım uzayı üzerindeki (2.1) normu her $x, y \in X$ için

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \tag{2.2}$$

eşitliğini sağlar [3].

Teorem 2.1.1 $(X, \|.\|)$ normlu uzayının bir iç çarpım uzayı olması için gerek ve yeter şart $\forall x, y \in X$ vektörleri için paralelkenar kuralının sağlanmasıdır [3].

Tanım 2.1.8 Bir $(X, \langle .,.\rangle)$ iç çarpım uzayı (2.1) normuna göre tam ise, yani $(X, \langle .,.\rangle)$ içindeki her Cauchy dizisi yakınsaksa, bu iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir [3].

Örnek 2.1.1 (ℓ_2 Hilbert uzayı) $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$ yakınsak olmak üzere reel veya kompleks $x = (x_i) = (x_1, x_2, \dots)$ dizilerinin ℓ_2 cümlesi lineer uzaydır. $x, y \in \ell_2$ olmak üzere

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i$$

olarak tanımlanırsa bu seri yakınsak ve ℓ_2 bir iç çarpım uzayıdır. İç çarpım normu

$$\|x\|_2 = \langle x, x\rangle^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{1/2}$$

olmak üzere bu normdan elde edilen

$$d(x,y) = \|x-y\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^2\right)^{1/2}$$

norm metriğine göre ℓ_2 tamdır. Dolayısıyla ℓ_2 bir Hilbert uzayıdır.

$1 \leq p < \infty$ olması halinde

$$\ell_p = \{x = (x_1, x_2, \dots) : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty, x_i \in \mathbb{F}\}$$

cümlesinde x in normu

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

olarak tanımlanırsa ℓ_p Banach uzayıdır. Ancak $p \neq 2$ olması halinde ℓ_p Hilbert uzayı değildir [2].

Tanım 2.1.9 $n \in \mathbb{N}$ için u_n ler herhangi sayılar olsun. $u_1.u_2 \dots u_n \dots$ şeklindeki bir çarpıma bir sonsuz çarpım denir ve bu

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n$$

şeklinde gösterilir.

Böyle bir çarpımın anlamlı olabilmesi için hiçbir çarpanın sıfır olmaması gerekir, aksi taktirde, diğer terimler ne olursa olsun, çarpımın değeri sıfır olur. Ayrıca sonsuz bir çarpımda, bir yerden sonraki bütün terimlerin mutlak değer bakımından, birden küçük sabit bir sayıdan küçük kalması yine çarpımın sıfır olmasını gerektirir [5].

Tanım 2.1.10 $\prod_{n=1}^{\infty} u_n = u_1.u_2.u_3 \dots$ sonsuz çarpımında bir yerden itibaren, örneğin $n > k$ için hiçbir çarpan sıfır değilse, ve bu yerden sonraki

$$p_n = u_{k+1}.u_{k+2} \dots u_n, \qquad (n > k)$$

kısmi çarpımları $n \to \infty$ için sıfırdan farklı sonlu bir değere yaklaşıyorlarsa

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n$$

sonsuz çarpımı yakınsaktır denir.

Yakınsak sonsuz bir çarpımda genel terim daima 1 e yaklaşır [5].

Teorem 2.1.2 Pozitif terimli bir $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ sonsuz çarpımının yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin yakınsak olmasıdır [5].

Tanım 2.1.11 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\omega = \{x = (x_k) \in \omega:\ x: \mathbb{N} \to \mathbb{F}, k \to x_k = (x_k)\}$$

kümesine bütün dizilerin kümesi denir. ω kümesi,

$$((x_k), (y_k)) \to (x_k + y_k) \text{ ve } \big(\lambda, (x_k)\big) \to (\lambda x_k)$$

ikili işlemleri ile $\mathbb{F}$ üzerinde bir vektör uzayıdır. ω nın herhangi bir alt vektör uzayına bir dizi uzayı denir [6].

Örnek 2.1.2

$$\ell_\infty = \left\{x = (x_k) \in \omega: \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| < \infty\right\},$$

$$c = \left\{x = (x_k) \in \omega: (x_k) \text{ yakınsak yani } \lim_{k\to\infty} x_k \text{ mevcut}\right\},$$

$$c_0 = \left\{x = (x_k) \in \omega:\ \lim_{k\to\infty} x_k = 0\right\},$$

$$\ell_p = \left\{x = (x_k) \in \omega:\ \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p < \infty\right\}, \qquad (1 \le p < \infty)$$

$$bs = \left\{x = (x_k) \in \omega: \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right) \in \ell_\infty\right\},$$

$$cs = \left\{x = (x_k) \in \omega:\ \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right) \in c\right\},$$

$$cs_0 = \left\{ x = (x_k) \in \omega : \left(\sum_{k=0}^{n} x_k \right) \in c_0 \right\}$$

uzayları birer dizi uzayıdırlar [6].

Tez çalışması boyunca aksi belirtilmedikçe, ℓ_p uzayından söz edildiğinde $1 \leq p < \infty$ olduğu anlaşılacak ve q ile de p nin eşleniği gösterilecektir. Yani $p = 1$ ise $q = \infty$ ve $1 < p < \infty$ ise $q = p/(p-1)$ dir. Ayrıca $\mathcal{F}$ ile $\mathbb{N}$ nin bütün sonlu alt kümelerinin ailesi gösterilecektir.

Tanım 2.1.12 λ bir lineer topolojik uzay olsun. $\forall i \in \mathbb{N}$ için $p_i(x) = x_i$ şeklinde tanımlanan $p_i : \lambda \to \mathbb{C}$ dönüşümü sürekliyse λ ya bir K-uzayı denir. Tam lineer metrik bir K-uzayına bir FK-uzayı, normlu FK-uzayına da bir BK-uzayı denir [7].

Örnek 2.1.3 ω uzayı $d(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x_k - y_k|}{2^k(1+|x_k - y_k|)}$ metriğine göre bir FK-uzayıdır [8].

Örnek 2.1.4 ℓ_∞, c ve c_0 uzayları $\| x \|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|$ normuna göre, $1 \leq p < \infty$ için ℓ_p uzayı da $\| x \|_p = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}$ normuna göre birer BK-uzayıdırlar [9].

Tanım 2.1.13 L ve L' aynı bir $\mathbb{F}$ cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $T : L \to L'$ operatörü her $x, y \in L$ ve her $\alpha \in \mathbb{F}$ için

$$T(x+y) = T(x) + T(y) \text{ ve } T(\alpha x) = \alpha T(x)$$

şartlarını sağlıyorsa T ye lineer operatör denir [10].

Teorem 2.1.3 BK-uzayları arasında tanımlanan lineer dönüşümler süreklidirler [11].

Tanım 2.1.14 X ve Y normlu uzaylar, $T : X \to Y$ lineer bir operatör olsun. Her $x \in X$ için

$$\|T(x)\| \leq c\|x\|$$

olacak şekilde $c > 0$ reel sayısı varsa T ye sınırlı lineer operatör denir [10].

X ve Y iki Banach uzayı ise $\mathfrak{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ ile X den Y ye tanımlı tüm sınırlı lineer operatörlerin kümesi gösterilecektir.

Tanım 2.1.15 X ve Y normlu uzaylar, $T: X \to Y$ lineer bir operatör olsun.

$$\|T\| = \sup\left\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|}: x \in X, x \neq \theta\right\} = \sup\{\|T(x)\|: x \in X, \|x\| \leq 1\}$$

olmak üzere $\|T\|$ ye T operatörünün normu denir [10].

Tanım 2.1.16 $T: X \to Y$ lineer operatörü verilsin.

$$\text{Çek}T = \{x \in X: T(x) = \theta\}$$

kümesine T operatörünün sıfır uzayı veya çekirdeği denir [10].

Lemma 2.1.1 T lineer operatörünün bire-bir olması için gerek ve yeter şart Çek$T = \{\theta\}$ olmasıdır [10].

Tanım 2.1.17 X normlu uzayından Y normlu uzayına lineer bir izometrik izomorfizm, normu koruyan yani her $x \in X$ için

$$\|T(x)\|_Y = \|x\|_X$$

olan bire-bir ve örten $T: X \to Y$ lineer operatörüdür. Bu durumda X ve Y uzaylarına lineer izomorfiktirler denir ve $X \cong Y$ ile gösterilir [10].

Tanım 2.1.18 $A = (a_{nk})$ reel ya da kompleks sayıların sonsuz bir matrisi olsun. $k > n$ olan $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için $a_{nk} = 0$ ise $A = (a_{nk})$ matrisine alt üçgensel matris denir. $k < n$ olan $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için $a_{nk} = 0$ ise $A = (a_{nk})$ matrisine üst üçgensel matris denir [11].

Teorem 2.1.4 $A = (a_{nk})$ alt üçgensel matris olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_{nn} \neq 0$ ise A matrisinin alt üçgensel tek bir sol tersi vardır ve bu durumda köşegen elemanları $1/a_{nn}$ dir [11].

Tanım 2.1.19 λ ve μ iki dizi uzayı ve $A = (a_{nk})$ reel ya da kompleks sayıların sonsuz bir matrisi olsun. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $A_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}x_k$ yakınsak ise $Ax = (A_n(x))$ yazılır. Eğer $x = (x_k) \in \lambda$ iken $Ax = (A_n(x)) \in \mu$ ise o zaman A ya λ dizi uzayından μ dizi uzayına bir matris dönüşümüdür denir ve bu durum $A: \lambda \to \mu$ olarak gösterilir. Ax dizisine de x in A-dönüşümü denir.

(λ, μ) ile $A: \lambda \to \mu$ şeklindeki bütün A matrislerinin kümesi gösterilecektir [12].

Tanım 2.1.20 $A = (a_{nk})$ reel ya da kompleks sayıların sonsuz bir matrisi olsun. $\forall n = 0,1,2,\ldots$ için $A_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}x_k$ mevcut ve $\lim_{n\to\infty} A_n(x) = l \in \mathbb{C}$ ise $x = (x_n)$ dizisine l sayısı için A-toplanabilirdir denir. Bu durum x in A-limiti l dir diye ifade edilir ve $A - \lim_{n\to\infty} x_n = l$ olarak gösterilir [9].

Aşağıda bazı matris sınıflarının karakterize edilmesi için gerekli şartlar verilmiştir.

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}|^q < \infty, \tag{2.3}$$

$$\text{Her bir } k \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{n\to\infty} a_{nk} \text{ mevcut}, \tag{2.4}$$

$$\text{Her bir } k \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0, \tag{2.5}$$

$$\sup_{K\in\mathcal{F}} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{n\in K} a_{nk} \right|^q < \infty, \tag{2.6}$$

$$\sup_{K\in\mathcal{F}} \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k\in K} a_{nk} \right|^p < \infty, \tag{2.7}$$

$$\sup_{n,k\in\mathbb{N}} |a_{nk}| < \infty, \tag{2.8}$$

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n=0}^{\infty} |a_{nk}|^p < \infty, \tag{2.9}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| = \sum_{k=0}^{\infty} \left| \lim_{n\to\infty} a_{nk} \right|, \tag{2.10}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| = 0, \tag{2.11}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \ \text{ mevcut}, \tag{2.12}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = 0\,. \tag{2.13}$$

Lemma 2.1.2 $1 < p < \infty$ olsun.

(i) $A = (a_{nk}) \in \left(\ell_p, \ell_\infty\right) \Leftrightarrow$ (2.3) şartının sağlanmasıdır.

(ii) $A = (a_{nk}) \in \left(\ell_p, c\right) \Leftrightarrow$ (2.3) ve (2.4) şartlarının sağlanmasıdır.

(iii) $A = (a_{nk}) \in \left(\ell_p, c_o\right) \Leftrightarrow$ (2.3) ve (2.5) şartlarının sağlanmasıdır.

(iv) $A = (a_{nk}) \in \left(\ell_p, \ell_1\right) \Leftrightarrow$ (2.6) şartının sağlanmasıdır.

(v) $A = (a_{nk}) \in (\ell_1, \ell_\infty) \Leftrightarrow$ (2.8) şartının sağlanmasıdır.

(vi) $A = (a_{nk}) \in (\ell_1, c) \Leftrightarrow$ (2.4) ve (2.8) şartlarının sağlanmasıdır.

(vii) $A = (a_{nk}) \in (\ell_1, c_0) \Leftrightarrow$ (2.5) ve (2.8) şartlarının sağlanmasıdır.

(viii) $A = (a_{nk}) \in (\ell_1, \ell_1) \Leftrightarrow p = 1$ alınarak (2.9) şartının sağlanmasıdır.

(ix) $A = (a_{nk}) \in (\ell_\infty, \ell_\infty) \Leftrightarrow q = 1$ alınarak (2.3) şartının sağlanmasıdır.

(x) $A = (a_{nk}) \in (\ell_\infty, c) \Leftrightarrow$ (2.4) ve (2.10) şartlarının sağlanmasıdır.

(xi) $A = (a_{nk}) \in (\ell_\infty, c_0) \Leftrightarrow$ (2.5) ve (2.11) şartlarının sağlanmasıdır.

(xii) $A = (a_{nk}) \in (\ell_\infty, \ell_1) \Leftrightarrow q = 1$ alınarak (2.6) şartının sağlanmasıdır.

[13,14].

Lemma 2.1.3 $1 \leq p < \infty$ olsun.

(i) $A = (a_{nk}) \in \left(\ell_\infty, \ell_p\right) = \left(c, \ell_p\right) = \left(c_0, \ell_p\right) \Leftrightarrow$ (2.7) şartının sağlanmasıdır.

(ii) $A = (a_{nk}) \in \left(\ell_1, \ell_p\right) \Leftrightarrow$ (2.9) şartının sağlanmasıdır.

(iii) $A = (a_{nk}) \in (c, \ell_\infty) = (c_0, \ell_\infty) \Leftrightarrow q = 1$ alınarak (2.3) şartının sağlanmasıdır.

[13,14].

Lemma 2.1.4

(i) $A = (a_{nk}) \in (c_0, c_0) \Leftrightarrow q = 1$ alınarak (2.3) ve (2.5) şartlarının sağlanmasıdır.

(ii) $A = (a_{nk}) \in (c_0, c) \Leftrightarrow q = 1$ alınarak (2.3) ve (2.4) şartlarının sağlanmasıdır.

(iii) $A=(a_{nk})\in(c,c_0)\Leftrightarrow q=1$ alınarak (2.3), (2.5) ve (2.13) şartlarının sağlanmasıdır.

(iv) $A=(a_{nk})\in(c,c)\Leftrightarrow q=1$ alınarak (2.3), (2.4) ve (2.12) şartlarının sağlanmasıdır.

[13,14].

Aşağıda bazı üçgensel matrislerin tanımları verilmiştir.

Tanım 2.1.21 $\forall n,k\in\mathbb{N}$ için

$$\Delta_{nk}^{(1)}=\begin{cases}(-1)^{n-k} & , \quad n-1\le k\le n\\ 0 & , \quad 0\le k<n-1 \text{ yada } k>n\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\Delta^{(1)}=(\Delta_{nk}^{(1)})$ matrisine fark matrisi denir [7].

Tanım 2.1.22 $\forall n,k\in\mathbb{N}$ için

$$\Delta_{nk}^{(m)}=\begin{cases}(-1)^{n-k}\binom{m}{n-k} & , \quad \max\{0,n-m\}\le k\le n\\ 0 & , \quad 0\le k<\max\{0,n-m\} \text{ yada } k>n\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\Delta^{(m)}=(\Delta_{nk}^{(m)})$ matrisine m. mertebeden fark matrisi denir [7].

Tanım 2.1.23 $\forall n,k\in\mathbb{N}$ için

$$b_{nk}(r,s)=\begin{cases}r & , \quad k=n\\ s & , \quad k=n-1\\ 0 & , \quad 0\le k<n-1 \text{ yada } k>n\end{cases} \qquad (r,s\in\mathbb{R}\backslash\{0\})$$

şeklinde tanımlanan $B(r,s)=\big(b_{nk}(r,s)\big)$ matrisine genelleştirilmiş fark matrisi denir [7].

Tanım 2.1.24 $\tilde{r}=(r_n)$ ve $\tilde{s}=(s_n)$ pozitif reel sayıların yakınsak birer dizisi olsun. $\forall n,k\in\mathbb{N}$ için

$$b_{nk}(\tilde{r},\tilde{s})=\begin{cases}r_n & , \quad k=n\\ s_n & , \quad k=n-1\\ 0 & , \quad 0\le k<n-1 \text{ yada } k>n\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $B(\tilde{r},\tilde{s}) = \big(b_{nk}(\tilde{r},\tilde{s})\big)$ matrisine dizisel genelleştirilmiş fark matrisi denir [15].

Tanım 2.1.25 $\forall n,k \in \mathbb{N}$ için

$$b_{nk}(r,s,t) = \begin{cases} r & , & k = n \\ s & , & k = n-1 \\ t & , & k = n-2 \\ 0 & , & 0 \leq k < n-2 \text{ yada } k > n \end{cases} \qquad (r,s,t \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$$

şeklinde tanımlanan $B(r,s,t) = \big(b_{nk}(r,s,t)\big)$ matrisine genelleştirilmiş üçlü fark matrisi denir [16].

Tanım 2.1.26 f_n, n. Fibonacci sayısı olmak üzere $\forall n,k \in \mathbb{N}$ için

$$\hat{f}_{nk} = \begin{cases} -\dfrac{f_{n+1}}{f_n} & , & k = n-1 \\ \dfrac{f_n}{f_{n+1}} & , & k = n \\ 0 & , & 0 \leq k < n-1 \text{ yada } k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\hat{F} = (\hat{f}_{nk})$ matrisine Fibonacci fark matrisi denir [17].

Tanım 2.1.27 $\forall n,k \in \mathbb{N}$ *için*

$$c_{nk} = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} & , & 0 \leq k \leq n \\ 0 & , & k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $C_1 = (c_{nk})$ matrisine 1. mertebeden Cesàro ortalaması denir [18].

Tanım 2.1.28 $r \in \mathbb{R}$ olsun. $\forall n,k \in \mathbb{N}$ için

$$e_{nk}^{r} = \begin{cases} \binom{n}{k}(1-r)^{n-k}r^k & , & 0 \leq k \leq n \\ 0 & , & k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $E^r = (e_{nk}^r)$ matrisine r. mertebeden Euler ortalaması denir [19].

Tanım 2.1.29 Her $k \in \mathbb{N}$ için $u_k \neq 0$ olmak üzere tüm $u = (u_k)$ dizilerinin kümesi U olsun. $u = (u_k), v = (v_k) \in U$ olmak üzere $\forall n,k \in \mathbb{N}$ için

$$g_{nk} = \begin{cases} u_n v_k & , \quad 0 \le k \le n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $G(u,v) = (g_{nk})$ matrisine genelleştirilmiş ağırlıklı ortalama denir [7].

Tanım 2.1.30 $A^r = (a_{nk}^r)$ matrisi herhangi bir sabit $r \in \mathbb{R}$ ve $\forall n,k \in \mathbb{N}$ için

$$a_{nk}^r = \begin{cases} \dfrac{1+r^k}{n+1} & , \quad 0 \le k \le n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan matristir [7].

Tanım 2.1.30 $t_0 > 0$ olmak üzere $t = (t_k)$ negatif olmayan reel sayıların bir dizisi ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} t_k$$

olsun. Bu durumda $\forall n,k \in \mathbb{N}$ için

$$r_{nk}^q = \begin{cases} \dfrac{t_k}{T_n} & , \quad 0 \le k \le n, \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $R^q = (r_{nk}^q)$ matrisine $t = (t_k)$ dizisiyle ilişkili Riesz ortalaması denir [7].

Tanım 2.1.31 λ bir dizi uzayı olmak üzere bir A sonsuz matrisinin λ uzayındaki matris etki alanı (domain) olan λ_A kümesi

$$\lambda_A = \{x = (x_k) \in \omega : Ax \in \lambda\}$$

olarak tanımlanır [7].

Literatürde, üçgensel bir A sonsuz matrisinin bilinen λ dizi uzayındaki matris etki alanı olan λ_A uzayı kullanılarak birçok yeni dizi uzayı tanımlanmıştır. Aşağıdaki tabloda bunlardan bazıları gösterilmiştir.

Çizelge 2.1. Çeşitli Üçgensel Matrislerin Matris Etki Alanları.

λ	A	λ_A	Kaynak
$\ell_p, (1 \leq p \leq \infty)$	C_1	X_p, X_∞	[18]
c_0, c, ℓ_∞	R^q	$(\overline{N}, q)_0, (\overline{N}, q), (\overline{N}, q)_\infty$	[20]
c_0, c, ℓ_∞	Δ	$c_0(\Delta), c(\Delta), \ell_\infty(\Delta)$	[1]
c_0, c	$G(u,v)$	$(c_0)_{G(u,v)}, c_{G(u,v)}$	[21]
$\ell_p, c_0, c, \ell_\infty$	$B(r,s)$	$\hat{\ell}_p, \hat{c}_0, \hat{c}, \hat{\ell}_\infty$	[22]
c_0, c, ℓ_p	$G(u,v)$	$Z(u,v;c_0), Z(u,v;c), Z(u,v;\ell_p)$	[23]
c_0, c	C_1	$\tilde{c}_0, \tilde{c}$	[24]
c_0, c	E^r	e_0^r, e_c^r	[25]
$\ell_p, (1 \leq p \leq \infty)$	E^r	e_p^r, e_∞^r	[26,27]
c_0, c	A^r	a_0^r, a_c^r	[28]
$\ell_p, (1 \leq p \leq \infty)$	A^r	a_p^r, a_∞^r	[29]
$\ell_p, (1 \leq p < \infty)$	$\Delta^{(1)}$	bv_p	[30,31]
$\ell_p, (0 < p < 1)$	$\Delta^{(1)}$	bv_p	[32]
c_0, c, ℓ_∞	Δ^m	$c_0(\Delta^m), c(\Delta^m), \ell_\infty(\Delta^m)$	[33,34]
c_0, c, ℓ_∞	$\Delta^{(m)}$	$c_0(\Delta^{(m)}), c(\Delta^{(m)}), \ell_\infty(\Delta^{(m)})$	[35]
$\ell_p, (1 \leq p < \infty)$	$\Delta^{(m)}$	$\ell_p(\Delta^{(m)})$	[36]
c_0, c	Λ	c_0^λ, c^λ	[37]
$\ell_p, (1 \leq p \leq \infty)$	Λ	$\ell_p^\lambda, \ell_\infty^\lambda$	[38]

Tanım 2.1.32 λ dizi uzayının $\lambda^\alpha, \lambda^\beta$ ve λ^γ ile gösterilen α-, β ve γ −dualleri sırasıyla,

$$\lambda^\alpha = \{z = (z_k) \in \omega : \forall x = (x_k) \in \lambda \text{ için } xz = (x_k z_k) \in \ell_1\},$$

$$\lambda^\beta = \{z = (z_k) \in \omega : \forall x = (x_k) \in \lambda \text{ için } xz = (x_k z_k) \in cs\}$$

ve

$$\lambda^{\gamma} = \{z = (z_k) \in \omega : \forall x = (x_k) \in \lambda \text{ için } xz = (x_k z_k) \in bs\}$$

şeklinde tanımlıdır [7].

Örnek 2.1.5 $1 < p < \infty$ olsun.

$$\ell_{\infty}^{\alpha} = c^{\alpha} = c_0^{\alpha} = \ell_1, \ell_1^{\alpha} = \ell_{\infty}, \ell_p^{\alpha} = \ell_q$$

$$\ell_{\infty}^{\beta} = c^{\beta} = c_0^{\beta} = \ell_1, \ell_1^{\beta} = \ell_{\infty}, \ell_p^{\beta} = \ell_q$$

$$\ell_{\infty}^{\gamma} = c^{\gamma} = c_0^{\gamma} = \ell_1, \ell_1^{\gamma} = \ell_{\infty}, \ell_p^{\gamma} = \ell_q$$

dır [7].

Teorem 2.1.5 Her $n, k \in \mathbb{N}$ için $U = (u_{nk})$ üçgensel matrisinin tersi $V = (v_{nk})$ olsun ve $a = (a_k) \in \omega$ olmak üzere $C = (c_{nk})$ matrisi

$$c_{nk} = \begin{cases} \sum_{j=k}^{n} a_j v_{jk} & , \quad 0 \leq k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda, λ bir dizi uzayı olmak üzere

$$(\lambda_U)^{\beta} = \{a = (a_k) \in \omega : C \in (\lambda, c)\},$$

$$(\lambda_U)^{\gamma} = \{a = (a_k) \in \omega : C \in (\lambda, \ell_{\infty})\}$$

dır [39].

Tanım 2.1.33 $(\lambda, \|.\|)$ normlu bir uzay ve (b_n), λ da bir dizi olsun. Eğer her $x \in \lambda$ için $x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n b_n$ yani,

$$\lim_{m \to \infty} \left\| x - \sum_{n=0}^{m} \alpha_n b_n \right\| = 0$$

olacak şekilde (α_n) skalerlerinin tek bir dizisi varsa (b_n) dizisine λ için bir Schauder bazı denir [7].

Tanım 2.1.34 λ bir dizi uzayı olsun. Her $x = (x_n) \in \lambda$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $|y_n| \leq |x_n|$

iken $y = (y_n) \in \lambda$ oluyorsa λ dizi uzayına solid uzay denir [40].

c_0 uzayı solid uzaydır fakat c uzayı solid uzay değildir. Gerçekten, $\left(\frac{n+1}{n}\right) \in c$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $|(-1)^n| \leq \left|\frac{n+1}{n}\right|$ fakat $((-1)^n) \notin c$ dir.

3. $\ell_p(T)$ FARK DİZİ UZAYI

Bu bölümde yeni bir fark matrisi olan T matrisi tanımlanacak ve bu matris yardımıyla yeni fark dizi uzayları olan $\ell_p(T)$ $(1 \leq p < \infty)$ ve $\ell_\infty(T)$ uzayları oluşturulacaktır. Ayrıca bu uzaylar ile ilgili bazı kapsama bağıntıları verilecektir. $1 \leq p \leq \infty$ için $\ell_p(T)$ uzayının α-, β ve γ −dualleri belirlenecek ve ardından $1 \leq p < \infty$ için Schauder bazı oluşturulacaktır. Son olarak bu uzaylarla ilişkili bazı matris dönüşümleri karakterize edilecek ve bu uzaylar üzerinde tanımlı bir sınırlı lineer operatörün normu bulunacaktır. Aksi belirtilmedikçe bölüm boyunca $1 \leq p < \infty$ olarak alınacaktır.

Tanım 3.1 $\forall n \in \mathbb{N}$ için $t_n > 0$ ve $t = (t_n) \in c \backslash c_0$ olsun. $T = (t_{nk})$ fark matrisi $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için

$$t_{nk} = \begin{cases} t_n & , \quad k = n \\ -\dfrac{1}{t_n} & , \quad k = n-1 \\ 0 & , \quad 0 \leq k < n-1 \text{ yada } k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan bir matristir.

T fark matrisinin $T^{-1} = (g_{nk})$ ters matrisi $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için

$$g_{nk} = \begin{cases} \displaystyle\prod_{j=k}^{n} \frac{t_k}{t_j^2} & , \quad 0 \leq k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

şeklindedir.

Tanım 3.2 T fark matrisi kullanılarak $\ell_p(T)$ ve $\ell_\infty(T)$ fark dizi uzayları

$$\ell_p(T) = \left\{ x = (x_n) \in \omega : \sum_{n=0}^{\infty} \left| t_n x_n - \frac{1}{t_n} x_{n-1} \right|^p < \infty \right\}$$

ve

$$\ell_\infty(T)=\left\{x=(x_n)\in\omega:\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|t_nx_n-\frac{1}{t_n}x_{n-1}\right|<\infty\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Ayrıca tanım 2.1.31 kullanılarak $\ell_p(T)$ ve $\ell_\infty(T)$ dizi uzayları

$$\ell_p(T)=\left(\ell_p\right)_T,\ (1\le p<\infty)\text{ ve }\ell_\infty(T)=(\ell_\infty)_T$$

şeklinde tekrar tanımlanabilir.

$\ell_p(T)$ uzayı

$$\ell_p\big(\hat{F}\big)=\left\{x=(x_n)\in\omega:\hat{F}x\in\ell_p\right\}$$

ve

$$bv_p=\left\{x=(x_n)\in\omega:\ \Delta^{(1)}x\in\ell_p\right\}$$

uzaylarından daha genel ve daha kapsamlıdır. Çünkü $\forall n\in\mathbb{N}$ için $(t_n)=\left(\frac{f_n}{f_{n+1}}\right)$ alınırsa $T=\hat{F}$ ve $(t_n)=(1,1,1,\ldots)$ alınırsa $T=\Delta^{(1)}$ elde edilir. Dolayısıyla $\ell_p(T)$ uzayı $\ell_p\big(\hat{F}\big)$ ve bv_p uzaylarını içerir.

Aksi belirtilmedikçe $x=(x_n)$ dizisinin T-dönüşüm dizisi $y=(y_n)$ ile gösterilecektir. Yani $\forall n\in\mathbb{N}$ için

$$y_n=T_n(x)=\begin{cases} t_nx_n-\dfrac{1}{t_n}x_{n-1} & ,\quad n\ge 1\\ t_0x_0 & ,\quad n=0\end{cases}\tag{3.1}$$

olarak alınacaktır.

Teorem 3.1 $1\le p\le\infty$ olsun. $\ell_p(T)$ uzayı

$$\|x\|_{\ell_p(T)}=\|Tx\|_{\ell_p}=\begin{cases}\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}|T_n(x)|^p\right)^{1/p} & ,\quad 1\le p<\infty\\ \displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}}|T_n(x)| & ,\quad p=\infty\end{cases}$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

İspat: Öncelikle norm şartlarının sağlandığı gösterilecektir.

N1) $\|x\|_{\ell_p(T)} = 0$ olsun. O halde $\|Tx\|_{\ell_p} = 0$ ve $\|.\|_{\ell_p}$ bir norm olduğundan $Tx = \theta$ dır. T üçgensel olduğundan Teorem 2.1.4 den tersi vardır. Bu yüzden $x = \theta$ dır. Diğer taraftan $x = \theta$ ise $\|x\|_{\ell_p(T)} = 0$ olduğu açıktır.

N2) $\alpha \in \mathbb{F}$ ve $x \in \ell_p(T)$ olsun. Bu durumda,

$$\|\alpha x\|_{\ell_p(T)} = \|T(\alpha x)\|_{\ell_p} = \|\alpha T(x)\|_{\ell_p} = |\alpha|\|T(x)\|_{\ell_p} = |\alpha|\|x\|_{\ell_p(T)}$$

olur.

N3) $x, y \in \ell_p(T)$ için

$$\begin{aligned} \|x+y\|_{\ell_p(T)} &= \|T(x+y)\|_{\ell_p} = \|Tx+Ty\|_{\ell_p} \\ &\leq \|Tx\|_{\ell_p} + \|Ty\|_{\ell_p} = \|x\|_{\ell_p(T)} + \|y\|_{\ell_p(T)} \end{aligned}$$

olup üçgen eşitsizliği sağlanır.

Dolayısıyla $1 \leq p \leq \infty$ için $(\ell_p(T), \|.\|_{\ell_p(T)})$ ikilisi bir normlu uzaydır.

Bu uzayın bir Banach uzayı olduğunu göstermek için (x_n), $\ell_p(T)$ uzayında bir Cauchy dizisi ve her $n \in \mathbb{N}$ için $y_n = Tx_n$ olsun. O halde (y_n), ℓ_p uzayında bir dizidir. Ayrıca

$$\|x_n - x_m\|_{\ell_p(T)} = \|T(x_n - x_m)\|_{\ell_p} = \|Tx_n - Tx_m\|_{\ell_p} = \|y_n - y_m\|_{\ell_p}$$

olup (y_n), ℓ_p uzayında bir Cauchy dizidir. $(\ell_p, \|.\|_{\ell_p})$ bir Banach uzayı olduğundan $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ olacak şekilde $y \in \ell_p$ vardır. $x = T^{-1}y$ olsun. Böylece

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\|_{\ell_p(T)} = \lim_{n\to\infty}\|T(x_n - x)\|_{\ell_p} = \lim_{n\to\infty}\|Tx_n - Tx\|_{\ell_p} = \lim_{n\to\infty}\|y_n - y\|_{\ell_p} = 0$$

dır. Bu ise $x \in \ell_p(T)$ olmak üzere $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla $\ell_p(T)$ uzayı bir Banach uzayıdır.

Teorem 3.2 $1 \leq p \leq \infty$ için $\ell_p(T)$ uzayı ℓ_p uzayına lineer olarak izomorfiktir, yani $\ell_p(T) \cong \ell_p$ dir.

İspat: $1 \leq p \leq \infty$ için $\ell_p(T)$ ve ℓ_p uzayları arasında bire-bir, örten ve normu koruyan lineer bir dönüşümün mevcut olduğu gösterilmelidir. T dönüşümü $\ell_p(T)$ den ℓ_p ye $x \to y = Tx = \big(T_n(x)\big)$ şeklinde tanımlansın. O halde her $x \in \ell_p(T)$ için $Tx = y \in \ell_p$ dir. Bu şekilde tanımlanan T dönüşümünün lineer olduğu açıktır. Ayrıca, $Tx = \theta$ iken $x = \theta$ olduğundan Lemma 2.1.1 e göre T dönüşümü bire-birdir.

$1 \leq p \leq \infty$ için $y = (y_n) \in \ell_p$ olsun ve $x = (x_n)$ dizisi $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\prod_{j=k}^{n} \frac{1}{t_j^2} \right) t_k y_k \tag{3.2}$$

olarak tanımlansın. (3.1) ve (3.2) kullanılarak $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} T_n(x) &= t_n x_n - \frac{1}{t_n} x_{n-1} = t_n \sum_{k=0}^{n} \left(\prod_{j=k}^{n} \frac{1}{t_j^2} \right) t_k y_k - \frac{1}{t_n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{j=k}^{n-1} \frac{1}{t_j^2} \right) t_k y_k \\ &= t_n \left(\prod_{j=n}^{n} \frac{1}{t_j^2} \right) t_n y_n + t_n \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{j=k}^{n} \frac{1}{t_j^2} \right) t_k y_k - \frac{1}{t_n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{j=k}^{n-1} \frac{1}{t_j^2} \right) t_k y_k \\ &= y_n \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $Tx = y$ demektir. $y \in \ell_p$ olduğundan $Tx \in \ell_p$ olur. Böylece her bir $y \in \ell_p$ için $Tx = y$ olacak şekilde $x \in \ell_p(T)$ vardır. Dolayısıyla T örtendir.

$1 \leq p \leq \infty$ ve her $x \in \ell_p(T)$ için $\|x\|_{\ell_p(T)} = \|Tx\|_{\ell_p}$ olduğundan

$$\|y\|_{\ell_p} = \|Tx\|_{\ell_p} = \|x\|_{\ell_p(T)}$$

dir. O halde T dönüşümü normu korur ve böylece bir izometrik izomorfizmdir. Bu da ispatı tamamlar.

$p \neq 2$ durumunda ℓ_p uzayının bir Hilbert uzayı olmadığı Örnek 2.1.1 de gösterilmiştir. Şimdi, benzer sonuç $\ell_p(T)$ uzayı için de verilecektir.

Teorem 3.3 $p \neq 2$ durumunda $\ell_p(T)$ uzayı bir iç çarpım uzayı değildir. Böylece, $p \neq 2$ için $\ell_p(T)$ bir Hilbert uzayı değildir.

İspat: $\ell_2(T)$ uzayının $\|x\|_{\ell_2(T)} = \|Tx\|_{\ell_2}$ normu ile bir Banach uzayı olduğu Teorem 3.1 den dolayı açıktır. Ayrıca bu norm her $x \in \ell_2(T)$ için

$$\|x\|_{\ell_2(T)} = \langle x, x\rangle_{\ell_2(T)}^{1/2} = \langle Tx, Tx\rangle_{\ell_2}^{1/2} = \|Tx\|_{\ell_2}$$

şeklinde elde edilebilir. Böylece $\ell_2(T)$ bir Hilbert uzayıdır.

Şimdi $u = (u_n)$ ve $v = (v_n)$ dizileri

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{t_0} & , \quad n = 0 \\ \left(t_1 + \dfrac{1}{t_0}\right)\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \dfrac{1}{t_i^2} & , \quad n \geq 1 \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

ve

$$v_n = \begin{cases} \dfrac{1}{t_0} & , \quad n = 0 \\ \left(-t_1 + \dfrac{1}{t_0}\right)\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \dfrac{1}{t_i^2} & , \quad n \geq 1 \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

şeklinde tanımlansın. Bu dizilerin T-dönüşüm dizileri

$$Tu = (1,1,0,0,\dots) \text{ ve } Tv = (1,-1,0,0,\dots)$$

dir. Ayrıca $p \neq 2$ için

$$\|u+v\|_{\ell_p(T)}^2 + \|u-v\|_{\ell_p(T)}^2 = 8 \neq 4\left(2^{2/p}\right) = 2\left(\|u\|_{\ell_p(T)}^2 + \|v\|_{\ell_p(T)}^2\right)$$

olur. Bu ise Paralelkenar kuralının sağlanmadığını gösterir. Dolayısıyla bu norm bir iç çarpım tarafından elde edilemez. Böylece $p \neq 2$ durumunda $\ell_p(T)$ bir Banach uzayıdır fakat bir Hilbert uzayı değildir.

3.1. KAPSAMA BAĞINTILARI

Bu bölümde $\ell_p(T)$ $(1 \leq p \leq \infty$) uzayı ile ilgili bazı kapsama bağıntıları verilecektir.

Teorem 3.1.1 $1 \leq p < q < \infty$ için $\ell_p(T) \subset \ell_q(T)$ kapsaması kesin olarak sağlanır.

İspat: $1 \leq p < q < \infty$ olsun. $x \in \ell_p(T)$ ise $Tx \in \ell_p$ dir. $\ell_p \subset \ell_q$ olduğundan aynı zamanda $Tx \in \ell_q$ dır. Böylece $x \in \ell_q(T)$ dir. Dolayısıyla $\ell_p(T) \subset \ell_q(T)$ elde edilir. Bu kapsamanın kesin olduğunu göstermek için ℓ_q uzayında olup ℓ_p uzayında olmayan bir $y = (y_n)$ dizisi verilsin. Yani $y \in \ell_q \backslash \ell_p$ olsun ($\ell_p \subset \ell_q$ kapsaması kesin olarak sağlandığı için böyle bir $y = (y_n)$ dizisi vardır). $x = (x_n)$ dizisi (3.2) deki gibi tanımlansın. Bu durumda $\forall n \in \mathbb{N}$ için $T_n(x) = y_n$ dir. Dolayısıyla $Tx = y$ dir. Ayrıca $y \in \ell_q \backslash \ell_p$ olduğundan $Tx \in \ell_q \backslash \ell_p$ dir. O halde x dizisi $\ell_q(T)$ uzayındadır fakat $\ell_p(T)$ uzayında değildir. Bu ise $\ell_p(T) \subset \ell_q(T)$ kapsamasının kesin olduğunu gösterir.

Teorem 3.1.2. $1 \leq p < \infty$ için $\ell_p(T) \subset \ell_\infty(T)$ kapsaması kesin olarak sağlanır.

İspat: $x \in \ell_p(T)$ ise $Tx \in \ell_p$ ve $\ell_p \subset \ell_\infty$ olduğundan $Tx \in \ell_\infty$ dır. Böylece $x \in \ell_\infty(T)$ olur. O halde $\ell_p(T) \subset \ell_\infty(T)$ kapsaması sağlanır. Bu kapsamanın kesin olarak sağlandığını görmek için $u = (u_n)$ dizisi $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t_k \prod_{i=k}^{n} \frac{1}{t_i^2}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} T_n(u) &= t_n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t_k \prod_{i=k}^{n} \frac{1}{t_i^2} - \frac{1}{t_n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t_k \prod_{i=k}^{n-1} \frac{1}{t_i^2} \\ &= t_n (-1)^n t_n \prod_{i=n}^{n} \frac{1}{t_i^2} + t_n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t_k \prod_{i=k}^{n} \frac{1}{t_i^2} - \frac{1}{t_n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t_k \prod_{i=k}^{n-1} \frac{1}{t_i^2} \\ &= (-1)^n + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t_k \left(t_n \prod_{i=k}^{n} \frac{1}{t_i^2} - \frac{1}{t_n} \prod_{i=k}^{n-1} \frac{1}{t_i^2} \right) = (-1)^n \end{aligned}$$

olup $((-1)^n) \in \ell_\infty \backslash \ell_p$ dir. Bu ise $Tu \in \ell_\infty \backslash \ell_p$ olması demektir. Dolayısıyla $u \in \ell_\infty(T) \backslash \ell_p(T)$ olup $\ell_p(T) \subset \ell_\infty(T)$ kapsaması kesin olarak sağlanır.

Teorem 3.1.3 $1 \leq p \leq \infty$ için $\ell_p \subset \ell_p(T)$ kapsaması kesin olarak sağlanır.

İspat: $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere $\ell_p \subset \ell_p(T)$ kapsamasının sağlandığını göstermek için her $x \in \ell_p$ için $\|x\|_{\ell_p(T)} \leq M \|x\|_{\ell_p}$ olacak şekilde bir $M > 0$ reel sayısının varolduğunu göstermek yeterlidir.

$x \in \ell_p$ ve $1 \leq p \leq \infty$ olsun. $(t_n) \in c \backslash c_0$ olduğundan $\left(\frac{1}{t_n}\right) \in c \backslash c_0$ dır. Bu durumda, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $t_n \leq K$ ve $\frac{1}{t_n} \leq L$ olacak şekilde $K, L > 0$ sayıları vardır. Böylece

$$\begin{aligned}
\|x\|_{\ell_p(T)} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} |T_n(x)|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left|t_n x_n - \frac{1}{t_n} x_{n-1}\right|^p\right)^{1/p} \\
&\leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |t_n x_n|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{1}{t_n} x_{n-1}\right|^p\right)^{1/p} \\
&\leq \left(K^p \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} + \left(L^p \sum_{n=0}^{\infty} |x_{n-1}|^p\right)^{1/p} = (K+L)\|x\|_{\ell_p}
\end{aligned}$$

ve

$$\|x\|_{\ell_\infty(T)} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |T_n(x)| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|t_n x_n - \frac{1}{t_n} x_{n-1}\right| \leq (K+L)\, \|x\|_{\ell_\infty}$$

elde edilir. $M = K + L$ olarak alınırsa istenilen $M > 0$ reel sayısı bulunmuş olur. Bu kapsamanın kesin olduğunu göstermek için aşağıdaki üç farklı durum incelenecektir.

i) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $0 < t_n < 1$ ise;

$x = \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i^2}\right)_{n=1}^{\infty}$ olsun. $1/t_i > 1$ olduğundan $x \notin \ell_p$ dir. Fakat $Tx = (t_0, 0,0, \dots) \in \ell_p$ olup $x \in \ell_p(T)$ dir. $\forall i \in \mathbb{N}$ için $t_i = \sqrt{\frac{i}{i+1}} < 1$ olsun. Bu durumda $\frac{1}{t_i^2} = 1 + \frac{1}{i}$ olup $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ serisi ıraksak olduğundan Teorem 2.1.2 den $\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{t_i^2}$ sonsuz çarpımı da ıraksaktır. Böylece $x \notin \ell_\infty$ dır. Diğer taraftan $Tx \in \ell_\infty$ olup $x \in \ell_\infty(T)$ dır.

ii) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $t_n = 1$ ise;

Bu durumda herhangi bir $x = (x_n)$ dizisinin T-dönüşüm dizisinin terimleri $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$T_n(x) = x_n - x_{n-1}$$

şeklindedir. $x = (1,1,1, \dots)$ olarak alınırsa $x \notin \ell_p$ fakat $Tx = (1,0,0, \dots) \in \ell_p$ olduğundan $x \in \ell_p(T)$ dir.

$x = (n+1)$ olsun. Bu dizi ℓ_∞ uzayında değildir fakat $Tx = (1,1,1,\dots) \in \ell_\infty$ olduğundan $x \in \ell_\infty(T)$ dir.

iii) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $t_n > 1$ ise;

$\forall n \geq 1$ için $t_n = \frac{n+1}{n} > 1$ ve $p = 1$ olsun. Bu durumda $x = \left(\frac{1}{n+1}\right) \notin \ell_1$ ve $Tx = \left(\frac{1}{n(n+1)}\right) \in \ell_p$ dir. O halde $x \in \ell_1(T)$ dir.

$\forall n \geq 1$ için $t_n = \frac{n+1}{n} > 1$ iken $x = (n)$ seçilsin. Bu durumda $x \notin \ell_\infty$ fakat $Tx = \left(\frac{3n+1}{n}\right) \in \ell_\infty$ olup $x \in \ell_\infty(T)$ dir.

Sonuç olarak, her bir durumda $1 \leq p \leq \infty$ için $x \in \ell_p(T) \backslash \ell_p$ dizisi mevcuttur. Dolayısıyla $1 \leq p \leq \infty$ için $\ell_p \subset \ell_p(T)$ kapsaması kesin olarak sağlanır.

Teorem 3.1.4 ℓ_∞ ve $\ell_p(T)$ uzayları birbirini kapsamaz.

İspat: Bu teoremi ispat etmek için $u \in \ell_p(T) \backslash \ell_\infty$ ve $v \in \ell_\infty \backslash \ell_p(T)$ olacak şekilde u ve v dizilerinin mevcut olduğunu göstermek yeterlidir.

$\forall i \in \mathbb{N}$ için $t_i = \sqrt{\frac{i}{i+1}}$ olmak üzere $u = \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i^2}\right)$ olsun. Bu durumda $u \notin \ell_\infty$ olup $Tu = (t_0, 0, 0, \dots) \in \ell_p$ dir. Dolayısıyla $u \in \ell_p(T)$ dir.

$v = ((-1)^n) \in \ell_\infty$ için $Tv = \big(T_n(v)\big)$ dizisi

$$T_n(v) = \begin{cases} t_0 & , \quad n = 0 \\ (-1)^n \left(t_n + \dfrac{1}{t_n}\right) & , \quad n \geq 1 \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

şeklindedir. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\left|(-1)^n \left(t_n + \frac{1}{t_n}\right)\right| > 1$ olduğundan $\sum_{n=0}^{\infty} |T_n(v)|^p$ serisi ıraksaktır. O halde $v \notin \ell_p(T)$ dir. Bu da ispatı tamamlar.

3.2. $\ell_p(T)$ UZAYININ α-, $\beta-, \gamma-$DUALLERİ VE SCHAUDER BAZI

Öncelikle $1 \leq p \leq \infty$ için $\ell_p(T)$ uzayının α-dualinin belirlenmesinde kullanılacak olan bir lemma ispat edilecektir.

Lemma 3.2.1 $a = (a_n) \in \omega$ olsun ve $B = (b_{nk})$ matrisi $B_n = a_n T_n^{-1}$ olarak yani $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için

$$b_{nk} = \begin{cases} a_n g_{nk} & , \quad 0 \leq k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $1 \leq p \leq \infty$ için $a \in \left(\ell_p(T)\right)^\alpha$ olması için gerek ve yeter şart $B \in \left(\ell_p, \ell_1\right)$ olmasıdır.

İspat: $x = (x_n) \in \omega$ dizisinin T-dönüşüm dizisi y olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$a_n x_n = a_n T_n^{-1}(y) = B_n(y)$$

olur. Bu eşitlikten dolayı $x \in \ell_p(T)$ iken $ax = (a_n x_n) \in \ell_1$ olması ancak ve ancak $y \in \ell_p$ iken $By \in \ell_1$ olması ile sağlanır. Bu ise $a \in \left(\ell_p(T)\right)^\alpha$ olması için gerek ve yeter şartın $B \in \left(\ell_p, \ell_1\right)$ olduğunu gösterir.

Sonuç 3.2.1 $\hat{d}_1, \hat{d}_2, \hat{d}_3, \hat{d}_4, \hat{d}_5$ ve $\hat{d}_6$ kümeleri

$$\hat{d}_1 = \left\{ a = (a_k) \in \omega \colon \sup_{K \in \mathcal{F}} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{n \in K} \left(\prod_{j=k}^{n} \frac{t_k}{t_j^2} \right) a_n \right|^q < \infty \right\},$$

$$\hat{d}_2 = \left\{ a = (a_k) \in \omega \colon \text{ her bir } k \in \mathbb{N} \text{ için } \sum_{j=k}^{\infty} \left(\prod_{i=k}^{j} \frac{t_k}{t_i^2} \right) a_j \text{ mevcut} \right\},$$

$$\hat{d}_3 = \left\{ a = (a_k) \in \omega \colon \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} \left| \sum_{j=k}^{n} \left(\prod_{i=k}^{j} \frac{t_k}{t_i^2} \right) a_j \right|^q < \infty \right\},$$

$$\hat{d}_4 = \left\{ a = (a_k) \in \omega \colon \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \left| \sum_{j=k}^{n} \left(\prod_{i=k}^{j} \frac{t_k}{t_i^2} \right) a_j \right| = \sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{j=k}^{\infty} \left(\prod_{i=k}^{j} \frac{t_k}{t_i^2} \right) a_j \right| < \infty \right\},$$

$$\hat{d}_5 = \left\{ a = (a_k) \in \omega : \sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_{n=0}^{\infty} \left| \left(\prod_{j=k}^{n} \frac{t_k}{t_j^2} \right) a_n \right| < \infty \right\}$$

ve

$$\hat{d}_6 = \left\{ a = (a_k) \in \omega : \sup_{n,k \in \mathbb{N}} \left| \sum_{j=k}^{n} \left(\prod_{i=k}^{j} \frac{t_k}{t_i^2} \right) a_j \right| < \infty \right\}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(a) $1 < p \leq \infty$ için $\left(\ell_p(T)\right)^{\alpha} = \hat{d}_1$ ve $(\ell_1(T))^{\alpha} = \hat{d}_5$ dir.

(b) $1 < p < \infty$ için $\left(\ell_p(T)\right)^{\beta} = \hat{d}_2 \cap \hat{d}_3$, $(\ell_\infty(T))^{\beta} = \hat{d}_2 \cap \hat{d}_4$ ve $(\ell_1(T))^{\beta} = \hat{d}_2 \cap \hat{d}_6$ dır.

(c) $1 < p \leq \infty$ için $\left(\ell_p(T)\right)^{\gamma} = \hat{d}_3$ ve $(\ell_1(T))^{\gamma} = \hat{d}_6$ dır.

İspat: Bu sonucun ispatı Lemma 2.1.2, Teorem 2.1.5 ve Lemma 3.2.1 kullanılarak kolaylıkla görülür.

Aşağıdaki teoremde $\ell_p(T)$ uzayının Schauder bazı verilmektedir.

Teorem 3.2.1 Her sabit $k \in \mathbb{N}$ için $c^{(k)} \in \ell_p(T)$ dizisi

$$\left(c^{(k)}\right)_n = \begin{cases} \displaystyle\prod_{j=k}^{n} \frac{t_k}{t_j^2} & , \quad n \geq k \\ 0 & , \quad n < k \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{3.3}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\left(c^{(k)}\right)$ dizisi $\ell_p(T)$ uzayının bir bazıdır ve her $x \in \ell_p(T)$

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(x) c^{(k)} \tag{3.4}$$

şeklinde tek bir gösterime sahiptir.

İspat $T\left(c^{(k)}\right) \in \ell_p$ ve (3.3) den $T\left(c^{(k)}\right) = e^{(k)}$ olduğundan her bir $k \in \mathbb{N}$ için $c^{(k)} \in \ell_p(T)$ dir.

$x \in \ell_p(T)$ ve $\forall m \in \mathbb{N}$ için

$$x^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} T_k(x)c^{(k)}$$

olsun. Bu durumda

$$T\left(x^{(m)}\right) = \sum_{k=0}^{m} T_k(x)T\left(c^{(k)}\right) = \sum_{k=0}^{m} T_k(x)e^{(k)}$$

ve böylece

$$T_n\left(x - x^{(m)}\right) = \begin{cases} T_n(x) & , \quad n > m \\ 0 & , \quad 0 \le n \le m \end{cases}$$

olur. $\varepsilon > 0$ için bir $m_0 \in \mathbb{N}$ sayısı

$$\sum_{n=m_0+1}^{\infty} |T_n(x)|^p \le \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$$

olacak şekilde vardır. Bu durumda her $m \ge m_0$ için

$$\left\|x - x^{(m)}\right\|_{\ell_p(T)} = \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} |T_n(x)|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{n=m_0+1}^{\infty} |T_n(x)|^p\right)^{1/p} \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

elde edilir. Bu ise $\lim_{m\to\infty}\left\|x - x^{(m)}\right\|_{\ell_p(T)} = 0$ olduğunu gösterir. Böylece $x = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(x)c^{(k)}$ şeklindedir.

Bu gösterimin tek olduğunu göstermek için $x = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k(x)c^{(k)}$ olsun. $\ell_p(T)$ den ℓ_p ye tanımlı T lineer dönüşümü Teorem 2.1.3 den dolayı sürekli olduğundan

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k(x)T_n\left(c^{(k)}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k(x)\delta_{nk} = \mu_n(x) \quad (n \in \mathbb{N})$$

olur. Dolayısıyla x dizisinin (3.4) deki gösterimi tektir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

3.3. $\ell_p(T)$ UZAYI ÜZERİNDE BAZI MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

Bu bölümde, $1 \leq p \leq \infty$ için $\lambda \in \{\ell_1, c_0, c, \ell_\infty\}$ ve $\mu \in \{\ell_1, \ell_\infty\}$ olmak üzere $(\ell_p(T), \lambda)$, $(\lambda, \ell_p(T))$ sınıfları karakterize edilecektir ve $\mathfrak{B}(\ell_p(T), \mu(S))$ sınıfına ait bir matris operatörün normu verilecektir. Burada S matrisi $s = (s_n)$ dizisi ile verilen fark matrisidir.

Bölüm boyunca kısalık olması bakımından verilen bir $A = (a_{nk})$ matrisi için $a(n,k) = \sum_{j=0}^{n} a_{jk}$ gösterimi kullanılacaktır.

İlk olarak $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere $\ell_p(T)$ uzayından $\ell_1, c_0, c, \ell_\infty$ uzaylarına tanımlı matris dönüşümlerini karakterize etmek için kullanılacak olan bir teorem verilecektir.

Teorem 3.3.1 $1 \leq p \leq \infty$ ve λ keyfi bir dizi uzayı olsun. Bu durumda $A = (a_{nk}) \in (\ell_p(T), \lambda)$ olması için gerek ve yeter şart $\forall m, n, k \in \mathbb{N}$ için

$$d_{nk}^{(m)} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=k}^{n} \left(\prod_{i=k}^{j} \frac{t_k}{t_i^2} \right) a_{nj} & , \quad 0 \leq k \leq m \\ 0 & , \quad k > m \end{cases} \quad \text{ve} \quad d_{nk} = \sum_{j=k}^{\infty} \left(\prod_{i=k}^{j} \frac{t_k}{t_i^2} \right) a_{nj}$$

olmak üzere $\forall m \in \mathbb{N}$ için

$$D^{(m)} = \left(d_{nk}^{(m)} \right) \in (\ell_p, c) \tag{3.5}$$

$$D = (d_{nk}) \in (\ell_p, \lambda) \tag{3.6}$$

olmasıdır.

İspat: Teoremin ispatında Kirişçi ve Başar [22] tarafından verilen ispat yöntemi kullanılacaktır. $A = (a_{nk}) \in (\ell_p(T), \lambda)$ ve $x = (x_k) \in \ell_p(T)$ olsun. (3.2) den $\forall n, m \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m} a_{nk} x_k &= \sum_{k=0}^{m} a_{nk} \sum_{j=0}^{k} \left(\prod_{i=j}^{k} \frac{t_j}{t_i^2} \right) y_j = \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=k}^{m} \left(\prod_{i=k}^{j} \frac{t_k}{t_i^2} \right) a_{nj} y_k \\ &= \sum_{k=0}^{m} d_{nk}^{(m)} y_k = D_n^{(m)}(y) \end{aligned} \tag{3.7}$$

elde edilir. Ax mevcut olduğundan her $m \in \mathbb{N}$ için $D^{(m)}$ matrisi $\left(\ell_p, c\right)$ sınıfına aittir.

(3.7) de $m \to \infty$ alındığında $Ax = Dy$ olur. Bu ise $D \in \left(\ell_p, \lambda\right)$ sonucunu verir.

Tersine (3.5) ve (3.6) sağlansın ve herhangi bir $x \in \ell_p(T)$ verilsin. O zaman her bir $n \in \mathbb{N}$ için $(d_{nk})_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_p^{\beta}$ dır. Bu ise (3.5) ile birlikte $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n = (a_{nk})_{k\in\mathbb{N}} \in \left(\ell_p(T)\right)^{\beta}$ olduğunu gösterir. Böylece Ax mevcuttur. (3.7) de $m \to \infty$ alınırsa $Ax = Dy$ olur. Dolayısıyla $A \in \left(\ell_p(T), \lambda\right)$ dır.

Aşağıdaki teoremler Lemma 2.1.2 ve Teorem 3.3.1 kullanılarak elde edilir.

Teorem 3.3.2

(i) $A = (a_{nk}) \in (\ell_1(T), \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{m\to\infty} d_{nk}^{(m)} \text{ mevcut } (\forall n, k \in \mathbb{N}), \tag{3.8}$$

$$\sup_{n,k\in\mathbb{N}} |d_{nk}| < \infty \tag{3.9}$$

ve

$$\sup_{m,k\in\mathbb{N}} \left|d_{nk}{}^{(m)}\right| < \infty \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{3.10}$$

olmasıdır.

(ii) $A = (a_{nk}) \in (\ell_1(T), c)$ olması için gerek ve yeter şart (3.8), (3.9), (3.10) şartlarının sağlanması ve

$$\lim_{n\to\infty} d_{nk} = d_k \quad (\forall k \in \mathbb{N}) \tag{3.11}$$

olmasıdır.

(iii) $A = (a_{nk}) \in (\ell_1(T), c_0)$ olması için gerek ve yeter şart (3.8), (3.9), (3.10) şartlarının sağlanması ve

$$\lim_{n\to\infty} d_{nk} = 0 \quad (\forall k \in \mathbb{N}) \tag{3.12}$$

olmasıdır.

(iv) $A = (a_{nk}) \in (\ell_1(T), \ell_1)$ olması için gerek ve yeter şart (3.8), (3.10) şartlarının sağlanması ve

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n=0}^{\infty} |d_{nk}| < \infty \tag{3.13}$$

olmasıdır.

Teorem 3.3.3 $1 < p < \infty$ olsun.

(i) $A = (a_{nk}) \in (\ell_p(T), \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart (3.8) şartının sağlanması ve

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{\infty} \left|d_{nk}{}^{(m)}\right|^q < \infty, \tag{3.14}$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{\infty} |d_{nk}|^q < \infty \tag{3.15}$$

olmasıdır.

(ii) $A = (a_{nk}) \in (\ell_p(T), c)$ olması için gerek ve yeter şart (3.8), (3.11), (3.14) ve (3.15) şartlarının sağlanmasıdır.

(iii) $A = (a_{nk}) \in (\ell_p(T), c_0)$ olması için gerek ve yeter şart (3.8), (3.12), (3.14) ve (3.15) şartlarının sağlanmasıdır.

(iv) $A = (a_{nk}) \in (\ell_p(T), \ell_1)$ olması için gerek ve yeter şart (3.8), (3.14) şartlarının sağlanması ve

$$\sup_{N\in\mathcal{F}} \sum_{k=0}^{\infty} \left|\sum_{N\in\mathbb{N}} d_{nk}\right|^q < \infty \tag{3.16}$$

olmasıdır.

Teorem 3.3.4

(i) $A = (a_{nk}) \in (\ell_\infty(T), \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart (3.8), $q = 1$ alındığında (3.15) şartlarının sağlanması ve

$$\text{her bir } n \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left|{d_{nk}}^{(m)}\right| = \sum_{k=0}^{\infty} |d_{nk}| \qquad (3.17)$$

olmasıdır.

(ii) $A = (a_{nk}) \in (\ell_\infty(T), c)$ olması için gerek ve yeter şart (3.8), (3.11), (3.17) şartlarının sağlanması ve

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |d_{nk}| = \sum_{k=0}^{\infty} |d_k| \qquad (3.18)$$

olmasıdır.

(iii) $A = (a_{nk}) \in (\ell_\infty(T), c_0)$ olması için gerek ve yeter şart (3.8), (3.12), (3.17) şartlarının sağlanması ve

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |d_{nk}| = 0 \qquad (3.19)$$

olmasıdır.

(iv) $A = (a_{nk}) \in (\ell_\infty(T), \ell_1)$ olması için gerek ve yeter şart (3.8), (3.17) şartlarının sağlanması ve

$$\sup_{N,K\in\mathcal{F}} \left| \sum_{n\in N} \sum_{k\in K} d_{nk} \right| < \infty \qquad (3.20)$$

olmasıdır.

Aşağıdaki sonuçlar Teorem 3.3.2-Teorem 3.3.4 den elde edilir.

Sonuç 3.3.1

(i) $A = (a_{nk}) \in (\ell_1(T), cs_0)$ olması için gerek ve yeter şart (3.8), (3.9), (3.10) ve (3.12) şartlarının a_{nk} yerine $a(n,k)$ alındığında sağlanmasıdır.

(ii) $A = (a_{nk}) \in (\ell_1(T), cs)$ olması için gerek ve yeter şart (3.8), (3.9), (3.10) ve (3.11) şartlarının a_{nk} yerine $a(n,k)$ alındığında sağlanmasıdır.

(iii) $A = (a_{nk}) \in (\ell_1(T), bs)$ olması için gerek ve yeter şart (3.8), (3.9) ve (3.10) şartlarının a_{nk} yerine $a(n,k)$ alındığında sağlanmasıdır.

Sonuç 3.3.2 $1 < p < \infty$ olsun.

(i) $A = (a_{nk}) \in \left(\ell_p(T), cs_0\right)$ olması için gerek ve yeter şart (3.8), (3.12), (3.14) ve (3.15) şartlarının a_{nk} yerine $a(n,k)$ alındığında sağlanmasıdır.

(ii) $A = (a_{nk}) \in \left(\ell_p(T), cs\right)$ olması için gerek ve yeter şart (3.8), (3.11), (3.14) ve (3.15) şartlarının a_{nk} yerine $a(n,k)$ alındığında sağlanmasıdır.

(iii) $A = (a_{nk}) \in \left(\ell_p(T), bs\right)$ olması için gerek ve yeter şart (3.8), (3.14) ve (3.15) şartlarının a_{nk} yerine $a(n,k)$ alındığında sağlanmasıdır.

Sonuç 3.3.3

(i) $A = (a_{nk}) \in (\ell_\infty(T), cs_0)$ olması için gerek ve yeter şart (3.8), (3.12), (3.17) ve (3.19) şartlarının a_{nk} yerine $a(n,k)$ alındığında sağlanmasıdır.

(ii) $A = (a_{nk}) \in (\ell_\infty(T), cs)$ olması için gerek ve yeter şart (3.8), (3.11), (3.17) ve (3.18) şartlarının a_{nk} yerine $a(n,k)$ alındığında sağlanmasıdır.

(iii) $A = (a_{nk}) \in (\ell_\infty(T), bs)$ olması için gerek ve yeter şart (3.8), $q = 1$ için (3.15) ve (3.17) şartlarının a_{nk} yerine $a(n,k)$ alındığında sağlanmasıdır.

Şimdi, $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere $\ell_1, c_0, c, \ell_\infty$ uzaylarından $\ell_p(T)$ uzayına tanımlı matris dönüşümleri karakterize edilecektir.

Teorem 3.3.5 $A = (a_{nk})$ matrisi verilsin ve $B = (b_{nk})$ matrisi $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için

$$b_{nk} = -\frac{1}{t_n} a_{n-1,k} + t_n a_{nk} \tag{3.21}$$

şeklinde tanımlansın. λ herhangi bir dizi uzayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere

$A \in \left(\lambda, \ell_p(T)\right)$ olması için gerek ve yeter şart $B \in \left(\lambda, \ell_p\right)$ olmasıdır.

İspat: $x = (x_k) \in \lambda$ olsun. (3.21) eşitliği kullanılarak $\forall n, m \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=0}^{m} b_{nk} x_k = \sum_{k=0}^{m} \left(-\frac{1}{t_n} a_{n-1,k} + t_n a_{nk}\right) x_k$$

elde edilir. Bu son eşitlikte $m \to \infty$ alındığında $(B_n(x)) = (T_n(Ax))$ olur. Böylece $1 \le p \le \infty$ olmak üzere $x \in \lambda$ için $Ax \in \ell_p(T) \Leftrightarrow Bx \in \ell_p$ dir. Bu ise ispatı tamamlar.

Aşağıdaki teoremler Lemma 2.1.2 (v), Lemma 2.1.3 ve Teorem 3.3.8 kullanılarak elde edilir.

Teorem 3.3.6 $A = (a_{nk})$ ve $B = (b_{nk})$ sonsuz matrisleri Teorem 3.3.8 de verilen ilişkili matrisler olsun. $1 < p < \infty$ için:

(i) $A = (a_{nk}) \in \left(\ell_\infty, \ell_p(T)\right) = \left(c, \ell_p(T)\right) = \left(c_0, \ell_p(T)\right)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{K \in \mathcal{F}} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{n \in K} b_{nk} \right|^p < \infty \tag{3.22}$$

olmasıdır.

(ii) $A = (a_{nk}) \in \left(\ell_1, \ell_p(T)\right)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_{n=0}^{\infty} |b_{nk}|^p < \infty \tag{3.23}$$

olmasıdır.

Teorem 3.3.7 $A = (a_{nk})$ ve $B = (b_{nk})$ matrisleri Teorem 3.3.8 de verilen ilişkili matrisler olsun. Bu durumda:

(i) $A = (a_{nk}) \in (\ell_\infty, \ell_1(T)) = (c, \ell_1(T)) = (c_0, \ell_1(T))$ olması için gerek ve yeter şart $p = 1$ alındığında (3.22) şartının sağlanmasıdır.

(ii) $A = (a_{nk}) \in (\ell_1, \ell_1(T))$ olması için gerek ve yeter şart $p = 1$ alındığında (3.23) şartının sağlanmasıdır.

Teorem 3.3.8 $A=(a_{nk})$ ve $B=(b_{nk})$ matrisleri Teorem 3.3.8 de verilen ilişkili matrisler olsun. Bu durumda:

(i) $A=(a_{nk})\in(\ell_\infty,\ell_\infty(T))=(c,\ell_\infty(T))=(c_0,\ell_\infty(T))$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=0}^{\infty}|b_{nk}|<\infty$$

olmasıdır.

(ii) $A=(a_{nk})\in(\ell_1,\ell_\infty(T))$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{n,k\in\mathbb{N}}|b_{nk}|<\infty$$

olmasıdır.

Şimdi, $1\leq p\leq\infty$ ve $\mu\in\{\ell_1,\ell_\infty\}$ olmak üzere $\mathfrak{B}\big(\ell_p(T),\mu(S)\big)$ sınıfına ait bir matrisin normu verilecektir. Bunun için öncelikle aşağıdaki lemma verilecektir.

Lemma 3.3.1

(i) $A=(a_{nk})\in\mathfrak{B}\big(\ell_p,\ell_\infty\big)$ ise

$$\|A\|=\|A\|_{(\ell_p,\ell_\infty)}=\begin{cases}\sup\limits_{n,k\in\mathbb{N}}|a_{nk}| & , \quad p=1 \text{ ise}\\ \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\sum\limits_{k=0}^{\infty}|a_{nk}|^q & , \quad 1<p\leq\infty \text{ ise}\end{cases}$$

dır.

(ii) $A=(a_{nk})\in\mathfrak{B}\big(\ell_p,\ell_1\big)$ ise

$$\|A\|=\|A\|_{(\ell_p,\ell_1)}=\begin{cases}\sup\limits_{k\in\mathbb{N}}\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_{nk}| & , \quad p=1 \text{ ise}\\ \sup\limits_{K\in\mathcal{F}}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left|\sum\limits_{n\in K}a_{nk}\right|^q & , \quad 1<p\leq\infty \text{ ise}\end{cases}$$

dır [4,8].

Teorem 3.3.9 T ve S, $t=(t_n)$ ve $s=(s_n)$ dizileri ile verilen iki fark matrisi olsun. Bu durumda:

(i) $1\le p\le\infty$ olmak üzere $A=(a_{nk})\in\mathfrak{B}\big(\ell_p(T),\ell_\infty(S)\big)$ ise

$$\|A\|=\|A\|_{(\ell_p(T),\ell_\infty(S))}$$
$$=\begin{cases}\sup\limits_{n,k\in\mathbb{N}}\left|\sum\limits_{j=k}^{\infty}\left(\prod\limits_{i=k}^{j}\frac{t_k}{t_i^2}\right)\left(s_n a_{nj}-\frac{1}{s_n}a_{n-1,j}\right)\right| & , \quad p=1 \text{ ise}\\ \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left|\sum\limits_{j=k}^{\infty}\left(\prod\limits_{i=k}^{j}\frac{t_k}{t_i^2}\right)\left(s_n a_{nj}-\frac{1}{s_n}a_{n-1,j}\right)\right|^q & , \quad 1<p\le\infty \text{ ise}\end{cases}$$

dir.

(ii) $A=(a_{nk})\in\mathfrak{B}\big(\ell_p(T),\ell_1(S)\big)$ ise

$$\|A\|=\|A\|_{(\ell_p(T),\ell_1(S))}$$
$$=\begin{cases}\sup\limits_{k\in\mathbb{N}}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|\sum\limits_{j=k}^{\infty}\left(\prod\limits_{i=k}^{j}\frac{t_k}{t_i^2}\right)\left(s_n a_{nj}-\frac{1}{s_n}a_{n-1,j}\right)\right| & , \quad p=1 \text{ ise}\\ \sup\limits_{K\in\mathcal{F}}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left|\sum\limits_{n\in K}\sum\limits_{j=k}^{\infty}\left(\prod\limits_{i=k}^{j}\frac{t_k}{t_i^2}\right)\left(s_n a_{nj}-\frac{1}{s_n}a_{n-1,j}\right)\right|^q & , \quad 1<p\le\infty \text{ ise}\end{cases}$$

dir.

İspat: $1\le p\le\infty$ için Teorem 3.2 den $T:\ell_p(T)\to\ell_p$ bir izometrik izomorfizmdir. $B=SAT^{-1}$ olsun.

$$\begin{array}{ccc}\ell_p(T) & \xrightarrow{A} & \mu(S)\\ T^{-1}\uparrow & . & \downarrow S\\ \ell_p & \xrightarrow[B=SAT^{-1}]{} & \mu\end{array}$$

Yukarıdaki diyagramdan $1\le p\le\infty$ ve $\mu\in\{\ell_1,\ell_\infty\}$ olmak üzere $\|A\|_{(\ell_p(T),\mu(S))}=\|B\|_{(\ell_p,\mu)}$ olduğu görülür. $1\le p\le\infty$ olmak üzere Lemma 3.3.1 den

$$\|B\|_{(\ell_p,\mu)} = \begin{cases} \|A\|_{(\ell_p(T),\ell_\infty(S))} & , \quad \mu = \ell_\infty \\ \|A\|_{(\ell_p(T),\ell_1(S))} & , \quad \mu = \ell_1 \end{cases}$$

elde edilir.

4. $c_0(T)$ VE $c(T)$ FARK DİZİ UZAYLARI

Bu bölümde T fark matrisi kullanılarak yeni fark dizi uzayları olan $c_0(T)$ ve $c(T)$ uzayları tanımlanacaktır. Ayrıca bu uzaylar ile ilgili bazı kapsama bağıntıları verilecektir. Daha sonra bu uzayların α-, β ve γ $-$dualleri belirlenecek ve Schauder bazı oluşturulacaktır. Son olarak bu uzaylarla ilişkili bazı matris dönüşümleri karakterize edilecek ve bu uzaylar üzerinde tanımlı bir sınırlı lineer operatörün normu hesaplanacaktır.

Tanım 4.1 $c_0(T)$ ve $c(T)$ fark dizi uzayları

$$c_0(T) = \left\{x = (x_n) \in \omega \colon \lim_{n\to\infty} \left(t_n x_n - \frac{1}{t_n} x_{n-1}\right) = 0\right\}$$

ve

$$c(T) = \left\{x = (x_n) \in \omega \colon \lim_{n\to\infty} \left(t_n x_n - \frac{1}{t_n} x_{n-1}\right) \text{ mevcuttur}\right\}$$

şeklinde tanımlıdır.

Ayrıca Tanım 2.1.31 kullanılarak $c_0(T)$ ve $c(T)$ dizi uzayları

$$c_0(T) = (c_0)_T \text{ ve } c(T) = (c)_T$$

şeklinde tekrar tanımlanabilir.

Teorem 4.1 $\lambda \in \{c_0, c\}$ olsun. $\lambda(T)$ uzayı

$$\|x\|_{\lambda(T)} = \|Tx\|_{\ell_\infty} = \sup_{k\in\mathbb{N}} \left|t_k x_k - \frac{1}{t_k} x_{k-1}\right|$$

normlu ile bir Banach uzayıdır.

İspat: Öncelikle norm şartlarının sağlandığı gösterilecektir.

N1) $\|x\|_{\lambda(T)} = 0$ olsun. O halde $\|Tx\|_{\ell_\infty} = 0$ ve $\|.\|_{\ell_\infty}$ bir norm olduğundan $Tx = \theta$ dır. T üçgensel olduğundan Teorem 2.1.4 den tersi vardır. Bu yüzden $x = \theta$ dır. Ayrıca

$x = \theta$ ise $\|x\|_{\lambda(T)} = 0$ olduğu açıktır.

N2) $\alpha \in \mathbb{F}$ ve $x \in \lambda(T)$ olsun. Bu durumda,

$$\|\alpha x\|_{\lambda(T)} = \|T(\alpha x)\|_{\ell_\infty} = \|\alpha T(x)\|_{\ell_\infty} = |\alpha|\|T(x)\|_{\ell_\infty} = |\alpha|\|x\|_{\lambda(T)}$$

olur.

N3) $x, y \in \lambda(T)$ için

$$\|x + y\|_{\lambda(T)} = \|T(x + y)\|_{\ell_\infty} = \|Tx + Ty\|_{\ell_\infty}$$

$$\leq \|Tx\|_{\ell_\infty} + \|Ty\|_{\ell_\infty} = \|x\|_{\lambda(T)} + \|y\|_{\lambda(T)}$$

olup üçgen eşitsizliği sağlanır.

Norm şartları sağlandığından $\lambda \in \{c_0, \mathrm{c}\}$ için $(\lambda(T), \|.\|_{\lambda(T)})$ bir normlu uzaydır.

Bu uzayın bir Banach uzayı olduğunu göstermek için (x_n), $\lambda(T)$ uzayında bir Cauchy dizisi ve her $n \in \mathbb{N}$ için $y_n = Tx_n$ olsun. O halde (y_n), λ uzayında bir dizidir. Ayrıca

$$\|x_n - x_m\|_{\lambda(T)} = \|T(x_n - x_m)\|_{\ell_\infty} = \|Tx_n - Tx_m\|_{\ell_\infty} = \|y_n - y_m\|_{\ell_\infty}$$

olup (y_n), λ uzayında bir Cauchy dizisidir. $(\lambda, \|.\|_{\ell_\infty})$ bir Banach uzayı olduğundan $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ olacak şekilde bir $y \in \lambda$ vardır. $x = T^{-1}y$ olsun. O halde

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_{\lambda(T)} = \lim_{n\to\infty} \|T(x_n - x)\|_{\ell_\infty} = \lim_{n\to\infty} \|Tx_n - Tx\|_{\ell_\infty} = \lim_{n\to\infty} \|y_n - y\|_{\ell_\infty} = 0$$

dır. Bu ise, $x \in \lambda(T)$ olmak üzere $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ olduğunu gösterir.

Teorem 4.2 $\lambda \in \{c_0, \mathrm{c}\}$ olmak üzere $\lambda(T)$ fark dizi uzayı λ uzayına lineer olarak izomorfiktir, yani $\lambda(T) \cong \lambda$ dır.

İspat: $\lambda \in \{c_0, \mathrm{c}\}$ olmak üzere $\lambda(T)$ ve λ uzayları arasında bire-bir, örten ve normu koruyan lineer bir dönüşümün mevcut olduğu gösterilmelidir. T dönüşümü $\lambda(T)$ den λ ya $x \to y = Tx = \big(T_n(x)\big)$ şeklinde tanımlansın. O halde her $x \in \lambda(T)$ için $Tx = y \in \lambda$ dır. Bu şekilde tanımlanan T dönüşümünün lineer olduğu açıktır. Ayrıca $Tx = \theta$ iken $x = \theta$ olduğundan Lemma 2.1.1 e göre T dönüşümü bire-birdir.

$y = (y_n) \in \lambda$ olsun. (3.1) ve (3.2) kullanılarak $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$
\begin{aligned}
T_n(x) &= t_n x_n - \frac{1}{t_n} x_{n-1} = t_n \sum_{k=0}^{n} \left(\prod_{j=k}^{n} \frac{1}{t_j^2} \right) t_k y_k - \frac{1}{t_n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{j=k}^{n-1} \frac{1}{t_j^2} \right) t_k y_k \\
&= t_n \left(\prod_{j=n}^{n} \frac{1}{t_j^2} \right) t_n y_n + t_n \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{j=k}^{n} \frac{1}{t_j^2} \right) t_k y_k - \frac{1}{t_n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{j=k}^{n-1} \frac{1}{t_j^2} \right) t_k y_k \\
&= y_n
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu ise $Tx = y$ demektir. $y \in \lambda$ olduğundan $Tx \in \lambda$ olur. Böylece her bir $y \in \lambda$ için $Tx = y$ olacak şekilde $x \in \lambda(T)$ vardır. Dolayısıyla T örtendir.

Her $x \in \lambda(T)$ için $\|x\|_{\lambda(T)} = \|Tx\|_{\ell_\infty}$ olduğundan

$$\|y\|_{\ell_\infty} = \|Tx\|_{\ell_\infty} = \|x\|_{\lambda(T)}$$

dir. O halde T dönüşümü normu korur ve böylece bir izometrik izomorfizmdir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.3 $c(T)$ uzayı solid değildir.

İspat: $x = (x_n) = \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{i=k}^{n} \frac{1}{t_i^2} \right)\right)$ ve $y = (y_n) = ((-1)^n)$ dizileri verilsin. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|y_n| \le |x_n|$ dir. $Tx = (t_0, t_1, t_2, \dots) \in c$ olduğundan $x \in c(T)$ dir. Fakat $Ty = \left(\left(t_n + \frac{1}{t_n}\right)(-1)^n\right) \notin c$ olduğundan $y \notin c(T)$ dir. Dolayısıyla $c(T)$ uzayı solid değildir.

Teorem 4.4 $\inf_{n\in\mathbb{N}} t_n \le 1$ ise $c_0(T)$ uzayı solid değildir.

İspat: $t_n \le 1$ ve $(z_k) = \left(1, 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{k}, \dots\right)$ olmak üzere $x = \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\prod_{i=k}^{n} \frac{1}{t_i^2} \right) t_k z_k\right)$ olsun. $Tx = \left(\frac{1}{n}\right) \in c_0$ olduğundan $x \in c_0(T)$ dir. Ayrıca $y = (y_n) = ((-1)^n) \notin c_0(T)$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|y_n| \le |x_n|$ dir. Dolayısıyla $c_0(T)$ uzayı solid değildir.

Öte yandan, $\inf_{n\in\mathbb{N}} t_n > 1$ ise $c_0 = c_0(T)$ ve c_0 solid olduğundan $c_0(T)$ uzayı solittir.

4.1. KAPSAMA BAĞINTILARI

Bu bölümde $c_0(T)$ ve $c(T)$ uzayları ile ilgili bazı kapsama bağıntıları verilecektir.

Teorem 4.1.1 $c_0(T) \subset c(T)$ kapsaması kesin olarak sağlanır.

İspat: $x \in c_0(T)$ olsun. O halde $Tx \in c_0$ dır. Ayrıca $c_0 \subset c$ olduğundan $Tx \in c$ yani $x \in c(T)$ dir. Dolayısıyla $c_0(T) \subset c(T)$ dir.

$c_0 \subset c$ kapsaması kesin olduğundan $y \in c\backslash c_0$ olacak şekilde bir $y = (y_n)$ dizisi vardır. $x = (x_n)$ dizisi $\forall n \in \mathbb{N}$ için (3.2) deki gibi tanımlansın. Böylece $T_n(x) = y$ yani $Tx = y$ dir. $y \in c\backslash c_0$ olduğundan $Tx \in c\backslash c_0$ olur. Sonuç olarak $x \in c(T)\backslash c_0(T)$ olup $c_0(T) \subset c(T)$ kapsaması kesindir.

Teorem 4.1.2 λ ∈ $\{c_0, \mathrm{c}\}$ olsun.

(i) $\inf_{n\in\mathbb{N}} t_n > 1$ ise $\lambda = \lambda(T)$ dir.

(ii) $\inf_{n\in\mathbb{N}} t_n \leq 1$ ise $\lambda \subset \lambda(T)$ kapsaması kesindir.

İspat: λ ∈ $\{c_0, \mathrm{c}\}$ olsun. (t_n), $\left(\frac{1}{t_n}\right) \in c\backslash c_0$ olduğundan $T = (t_{nk})$ matrisi

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{\infty} |t_{nk}| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{t_n} + \sup_{n\in\mathbb{N}} t_n < \infty,$$

$$\text{her bir } k \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{n\to\infty} t_{nk} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} t_{nk} = \lim_{n\to\infty} t_n - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n} \text{ mevcuttur}$$

şartlarını sağlar. Böylece $T \in (\lambda, \lambda)$ dır. O halde her $x \in \lambda$ için $Tx \in \lambda$ dır. Dolayısıyla $x \in \lambda(T)$ dir. Bu ise $\lambda \subset \lambda(T)$ olduğunu gösterir.

(i) $\inf_{n\in\mathbb{N}} t_n > 1$ olsun. Bu durumda $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{\infty} |g_{nk}| < \infty$ dır. Gerçekten de $\frac{1}{\inf_{n\in\mathbb{N}} t_n^2} < 1$ olduğundan

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=0}^{\infty}|g_{nk}|$$

$$= \sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\frac{t_0}{t_0^2},\frac{t_0}{t_0^2t_1^2}+\frac{t_1}{t_1^2},\frac{t_0}{t_0^2t_1^2t_2^2}+\frac{t_1}{t_1^2t_2^2}+\frac{t_2}{t_2^2},\dots,\frac{t_0}{t_0^2t_1^2\dots t_n^2}+\frac{t_1}{t_1^2\dots t_n^2}\right.$$
$$\left.+\cdots+\frac{t_n}{t_n^2},\dots\right\}$$
$$\le \sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\frac{1}{\inf t_n},\frac{1}{\inf t_n}\left(\frac{1}{t_1^2}+1\right),\frac{1}{\inf t_n}\left(\frac{1}{t_1^2t_2^2}+\frac{1}{t_2^2}\right.\right.$$
$$\left.\left.+1\right),\dots,\frac{1}{\inf t_n}\left(\frac{1}{t_1^2\dots t_n^2}+\frac{1}{t_2^2\dots t_n^2}+\cdots+1\right),\dots\right\}$$
$$=\frac{1}{\inf t_n}\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{1,\left(\frac{1}{t_1^2}+1\right),\left(\frac{1}{t_1^2t_2^2}+\frac{1}{t_2^2}+1\right),\dots,\left(\frac{1}{t_1^2\dots t_n^2}+\frac{1}{t_2^2\dots t_n^2}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\cdots+1\right),\dots\right\}$$

$$=\frac{1}{\inf t_n}\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{\inf t_n^2}\right)^k\right\}=\frac{1}{\inf t_n}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\inf t_n^2}\right)^k<\infty$$

dır. Ayrıca $T^{-1}=(g_{nk})$ ters matrisi

$$\text{her bir } k\in\mathbb{N} \text{ için } \lim_{n\to\infty} g_{nk}=\lim_{n\to\infty}\prod_{i=k}^{n}\frac{t_k}{t_i^2}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}g_{nk}\le\frac{1}{\inf t_n}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{\inf t_n^2}\right)^k<\infty$$

şartlarını sağlar. Böylece $T^{-1}\in(\lambda,\lambda)$ dır. $x\in\lambda(T)$ ve $y=Tx\in\lambda$ olsun. $T^{-1}\in(\lambda,\lambda)$ olduğundan $x=T^{-1}y\in\lambda$ dır. Bu ise $\lambda(T)\subset\lambda$ olduğunu gösterir. Sonuç olarak $\inf_{n\in\mathbb{N}} t_n>1$ ise $\lambda=\lambda(T)$ dir.

(iii) $\forall n\in\mathbb{N}$ için $t_n\le 1$ olsun. $x=\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i^2}\right)\notin c_0$ dizisi için $Tx=(t_0,0,0,\dots)\in c_0$ dır. O halde $x\in c_0(T)$ dir. Sonuç olarak $\inf_{n\in\mathbb{N}} t_n\le 1$ ise $c_0\subset c_0(T)$ kapsaması kesindir.

Teorem 4.1.3 $\inf_{n\in\mathbb{N}} t_n\le 1$ ise $\lambda\in\{c_0,c\}$ için ℓ_∞ ve $\lambda(T)$ uzayları birbirini kapsamaz.

İspat: $x=(x_n)=((-1)^n)\in \ell_\infty\backslash c$ dizisi için

$$\lim_{n\to\infty}\left(t_n x_n-\frac{1}{t_n}x_{n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\left(t_n+\frac{1}{t_n}\right)(-1)^n\right)$$

mevcut olmadığından Tx yakınsak değil yani $Tx\notin c$ dir. O halde $x\notin c(T)$ dir.

$\forall n\in\mathbb{N}$ için $t_n\leq 1$ olsun. $x=\left(1+\sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{i=k}^{n}\frac{1}{t_i^2}\right)\right)$ dizisi için $Tx=(t_0,t_1,t_2,\dots)\in c$ olduğundan $x\in c(T)$ dir. Kabulden dolayı $\frac{1}{t_i^2}\geq 1$ olduğundan $x\notin \ell_\infty$ dır.

Ayrıca $\inf_{n\in\mathbb{N}} t_n>1$ ise $c=c(T)$ olduğundan $c(T)\subset \ell_\infty$ olur.

4.2. $c_0(T)$, $c(T)$ UZAYLARININ α-, $\beta-,\gamma$ −DUALLERİ VE SCHAUDER BAZI

Öncelikle $\lambda\in\{c_0,c\}$ için $\lambda(T)$ uzayının α-dualinin belirlenmesinde kullanılacak olan bir lemma verilecektir.

Lemma 4.2.1 $a=(a_n)\in\omega$ olsun ve $B=(b_{nk})$ matrisi $B_n=a_nT_n^{-1}$ olarak yani $\forall n,k\in\mathbb{N}$ için

$$b_{nk}=\begin{cases} a_n g_{nk} & , \quad 0\leq k\leq n \\ 0 & , \quad k>n \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\lambda\in\{c_0,c\}$ olmak üzere $a\in(\lambda(T))^\alpha$ olması için gerek ve yeter şart $B\in(\lambda,\ell_1)$ olmasıdır.

İspat: $\lambda\in\{c_0,c\}$ ve $x=(x_n)\in\omega$ dizisinin T-dönüşüm dizisi y olsun. $\forall n\in\mathbb{N}$ için

$$a_nx_n=a_nT_n^{-1}(y)=B_n(y)$$

olur. O halde $x\in\lambda(T)$ iken $ax=(a_nx_n)\in\ell_1$ olması ancak ve ancak $y\in\lambda$ iken $By\in\ell_1$ olması ile sağlanır. Bu ise $a\in(\lambda(T))^\alpha$ olması için gerek ve yeter şartın $B\in(\lambda,\ell_1)$ olduğunu gösterir.

Sonuç 4.2.1 d_1,d_2,d_3 ve d_4 kümeleri

$$d_1 = \left\{ a = (a_k) \in \omega \colon \sup_{K \in \mathcal{F}} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{n \in K} \left(\prod_{j=k}^{n} \frac{t_k}{t_j^2} \right) a_n \right| < \infty \right\},$$

$$d_2 = \left\{ a = (a_k) \in \omega \colon \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} \left| \sum_{j=k}^{n} \left(\prod_{i=k}^{j} \frac{t_k}{t_i^2} \right) a_j \right| < \infty \right\},$$

$$d_3 = \left\{ a = (a_k) \in \omega \colon \text{her bir } k \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{n \to \infty} \sum_{j=k}^{n} \left(\prod_{i=k}^{j} \frac{t_k}{t_i^2} \right) a_j \text{ mevcuttur} \right\}$$

ve

$$d_4 = \left\{ a = (a_k) \in \omega \colon \text{her bir } k \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=k}^{n} \left(\prod_{i=k}^{j} \frac{t_k}{t_i^2} \right) a_j \text{ mevcuttur} \right\}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(a) $(c_0(T))^{\alpha} = c(T)^{\alpha} = d_1$ dir.

(b) $(c_0(T))^{\beta} = d_2 \cap d_3$ ve $(c(T))^{\beta} = d_2 \cap d_3 \cap d_4$ dır.

(c) $(c_0(T))^{\gamma} = c(T)^{\gamma} = d_2$ dir.

İspat: Bu sonucun ispatı $p = 1$ alındığında Lemma 2.1.3 ün (i) ve (iii) kısımları, Lemma 2.1.4 ün (ii) ve (iv) kısımları, Teorem 2.1.5 ve Lemma 4.2.1 kullanılarak kolaylıkla görülür.

Aşağıdaki teoremde $\lambda \in \{c_0, c\}$ için $\lambda(T)$ uzayının Schauder bazı verilmektedir.

Teorem 4.2.1 $\lambda \in \{c_0, c\}$ olsun. Her sabit $k \in \mathbb{N}$ için $c^{(k)} \in \lambda(T)$ dizisi

$$\left(c^{(k)}\right)_n = \begin{cases} \prod_{j=k}^{n} \frac{t_k}{t_j^2} & , \quad n \geq k \\ 0 & , \quad n < k \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\left(c^{(k)}\right)$ dizisi $\lambda(T)$ uzayının bir bazıdır ve her $x \in \lambda(T)$

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(x) c^{(k)}$$

şeklinde tek bir gösterime sahiptir.

İspat: Bu teoremin ispatı Teorem 3.2.1 in ispatına benzer şekilde yapılır.

4.3. $c_0(T)$ ve $c(T)$ UZAYLARI ÜZERİNDE BAZI MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

Bu bölümde, $\lambda \in \{c_0, c\}$ ve $\eta \in \{\ell_1, c_0, c, \ell_\infty\}$ olmak üzere $(\lambda(T), \eta)$ ve $(\eta, \lambda(T))$ sınıfları karakterize edilecektir. Ayrıca $\mathfrak{B}(\lambda(T), \eta(S))$ sınıfına ait bir matris operatörünün normu bulunacaktır. Burada S matrisi $s = (s_n)$ dizisi ile verilen fark matrisidir.

Bölüm boyunca kısalık olması bakımından verilen bir $A = (a_{nk})$ matrisi için $a(n,k) = \sum_{j=0}^{n} a_{jk}$ gösterimi kullanılacaktır.

İlk olarak $\lambda \in \{c_0, c\}$ olmak üzere $\lambda(T)$ uzayından $\ell_1, c_0, c, \ell_\infty$ uzaylarına tanımlı matris dönüşümlerini karakterize etmek için kullanılacak bir teorem verilecektir.

Teorem 4.3.1 $\lambda \in \{c_0, c\}$ ve μ keyfi bir dizi uzayı olsun. Bu durumda $A = (a_{nk}) \in (\lambda(T), \mu)$ olması için gerek ve yeter şart $\forall m, n, k \in \mathbb{N}$ için

$$d_{nk}^{(m)} = \begin{cases} \sum_{j=k}^{n} \left(\prod_{i=k}^{j} \frac{t_k}{t_i^2} \right) a_{nj} & , \quad 0 \leq k \leq m \\ 0 & , \quad k > m \end{cases} \quad \text{ve} \quad d_{nk} = \sum_{j=k}^{\infty} \left(\prod_{i=k}^{j} \frac{t_k}{t_i^2} \right) a_{nj}$$

olmak üzere $\forall m \in \mathbb{N}$ için

$$D^{(m)} = \left(d_{nk}^{(m)} \right) \in (\lambda, c)$$

$$D = (d_{nk}) \in (\lambda, \mu)$$

olmasıdır.

İspat: Bu teoremin ispatı Teorem 3.3.1 in ispatına benzer şekilde yapılır.

Aşağıdaki teoremler $p = 1$ alındığında Lemma 2.1.3 ün (i) ve (iii) kısımları, Lemma 2.1.4 ve Teorem 4.3.1 kullanılarak elde edilir.

Teorem 4.3.2

(i) $A = (a_{nk}) \in (c_0(T), \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart (13) ve $q = 1$ alındığında (3.14), (3.15) şartlarının sağlanmasıdır.

(ii) $A = (a_{nk}) \in (c_0(T), c)$ olması için gerek ve yeter şart (3.8), (3.11) ve $q = 1$ alındığında (3.14), (3.15) şartlarının sağlanmasıdır.

(iii) $A = (a_{nk}) \in (c_0(T), c_0)$ olması için gerek ve yeter şart (3.8), (3.12) ve $q = 1$ alındığında (3.14), (3.15) şartlarının sağlanmasıdır.

(iv) $A = (a_{nk}) \in (c_0(T), \ell_1)$ olması için gerek ve yeter şart (3.8) ve $q = 1$ alındığında (3.14), (3.16) şartlarının sağlanmasıdır.

Teorem 4.3.3

(i) $A = (a_{nk}) \in (c(T), \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart (3.8), $q = 1$ alındığında (3.14), (3.15) şartlarının sağlanması ve

$$\text{her bir } n \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} d_{nk}{}^{(m)} \text{ mevcut} \tag{4.1}$$

olmasıdır.

(ii) $A = (a_{nk}) \in (c(T), c)$ olması için gerek ve yeter şart (3.8), (3.11), $q = 1$ alındığında (3.14), (3.15) ve (4.1) şartlarının sağlanması ve

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} d_{nk} \text{ mevcut} \tag{4.2}$$

olmasıdır.

(iii) $A = (a_{nk}) \in (c(T), c_0)$ olması için gerek ve yeter şart (3.8), (3.11), $q = 1$ alındığında (3.14), (3.15) ve (4.1) şartlarının sağlanması ve

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} d_{nk} = 0 \tag{4.3}$$

olmasıdır.

(iv) $A = (a_{nk}) \in (c(T), \ell_1)$ olması için gerek ve yeter şart (3.8), $q = 1$ alındığında (3.14), (3.16) ve (4.1) şartlarının sağlanmasıdır.

Aşağıdaki sonuçlar Teorem 4.3.2 ve Teorem 4.3.3 den elde edilir.

Sonuç 4.3.1

(i) $A = (a_{nk}) \in (c_0(T), cs_0)$ olması için gerek ve yeter şart (3.8), (3.12) ve $q = 1$ için (3.14), (3.15) şartlarının a_{nk} yerine $a(n,k)$ alındığında sağlanmasıdır.

(ii) $A = (a_{nk}) \in (c_0(T), cs)$ olması için gerek ve yeter şart (3.8), (3.11) ve $q = 1$ için (3.14), (3.15) şartlarının a_{nk} yerine $a(n,k)$ alındığında sağlanmasıdır.

(iii) $A = (a_{nk}) \in (c_0(T), bs)$ olması için gerek ve yeter şart (3.8) ve $q = 1$ için (3.14), (3.15) şartlarının a_{nk} yerine $a(n,k)$ alındığında sağlanmasıdır.

Sonuç 4.3.2

(i) $A = (a_{nk}) \in (c(T), cs_0)$ olması için gerek ve yeter şart (3.8), (3.12), $q = 1$ için (3.14), (3.15) ve (4.1), (4.3) şartlarının a_{nk} yerine $a(n,k)$ alındığında sağlanmasıdır.

(ii) $A = (a_{nk}) \in (c(T), cs)$ olması için gerek ve yeter şart (3.8), (3.11), $q = 1$ için (3.14), (3.15) ve (4.1), (4.2) şartlarının a_{nk} yerine $a(n,k)$ alındığında sağlanmasıdır.

(iii) $A = (a_{nk}) \in (c(T), bs)$ olması için gerek ve yeter şart (3.8) ve $q = 1$ için (3.14), (3.15) ve (4.1) şartlarının a_{nk} yerine $a(n,k)$ alındığında sağlanmasıdır.

Şimdi, $\lambda \in \{c_0, c\}$ olmak üzere $\ell_1, c_0, c, \ell_\infty$ uzaylarından $\lambda(T)$ uzayına tanımlı matris dönüşümleri karakterize edilecektir.

Teorem 4.3.4 $A = (a_{nk})$ matrisi verilsin ve $B = (b_{nk})$ matrisi $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için

$$b_{nk} = -\frac{1}{t_n} a_{n-1,k} + t_n a_{nk}$$

şeklinde tanımlansın. μ herhangi bir dizi uzayı ve $\lambda \in \{c_0, c\}$ olmak üzere $A \in (\mu, \lambda(T))$ olması için gerek ve yeter şart $B \in (\mu, \lambda)$ olmasıdır.

İspat: Bu teoremin ispatı Teorem 3.3.5 in ispatına benzer şekilde yapılır.

Aşağıdaki teoremler Lemma 2.1.2 nin (vi), (vii), (x) ve (xi) kısımları, Lemma 2.1.4 ve Teorem 4.3.4 kullanılarak elde edilir.

Teorem 4.3.5 $A = (a_{nk})$ ve $B = (b_{nk})$ matrisleri Teorem 4.3.4 de verilen ilişkili matrisler olsun. Bu durumda:

(i) $A = (a_{nk}) \in (\ell_\infty, c_0(T))$ olması için gerek ve yeter şart

$$\text{her bir } k \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{n\to\infty} b_{nk} = 0 \tag{4.4}$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |b_{nk}| = 0 \tag{4.5}$$

olmasıdır.

(ii) $A = (a_{nk}) \in (c, c_0(T))$ olması için gerek ve yeter şart (4.4) şartının sağlanması ve

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{\infty} |b_{nk}| < \infty, \tag{4.6}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} = 0 \tag{4.7}$$

olmasıdır.

(iii) $A = (a_{nk}) \in (c_0, c_0(T))$ olması için gerek ve yeter şart (4.4) ve (4.6) şartlarının sağlanmasıdır.

(iv) $A = (a_{nk}) \in (\ell_1, c_0(T))$ olması için gerek ve yeter şart (4.4) şartının sağlanması ve

$$\sup_{n,k\in\mathbb{N}} |b_{nk}| < \infty \tag{4.8}$$

olmasıdır.

Teorem 4.3.6 $A = (a_{nk})$ ve $B = (b_{nk})$ matrisleri Teorem 4.3.4 de verilen ilişkili matrisler olsun. Bu durumda:

(i) $A = (a_{nk}) \in (\ell_\infty, c(T))$ olması için gerek ve yeter şart

$$\text{her bir } k \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{n\to\infty} b_{nk} \text{ mevcut} \tag{4.9}$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |b_{nk}| = \sum_{k=0}^{\infty} \left| \lim_{n\to\infty} b_{nk} \right| \tag{4.10}$$

olmasıdır.

(ii) $A = (a_{nk}) \in (c, c(T))$ olması için gerek ve yeter şart (4.4) ve (4.9) şartlarının sağlanması ve

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} \text{ mevcut} \tag{4.11}$$

olmasıdır.

(iii) $A = (a_{nk}) \in (c_0, c(T))$ olması için gerek ve yeter şart (4.4) ve (4.9) şartlarının sağlanmasıdır.

(iv) $A = (a_{nk}) \in (\ell_1, c(T))$ olması için gerek ve yeter şart (4.8) ve (4.9) şartlarının sağlanmasıdır.

Şimdi, $\lambda \in \{c_0, c\}$ ve $\eta \in \{\ell_1, c_0, c, \ell_\infty\}$ olmak üzere $\mathfrak{B}(\lambda(T), \eta(S))$ sınıfına ait bir matrisin normu verilecektir. Bunun için öncelikle aşağıdaki lemma verilecektir.

Lemma 4.3.1 $\lambda \in \{c_0, c\}$ olsun. Bu durumda:

(i) $A = (a_{nk}) \in \mathfrak{B}(\lambda, \ell_\infty) = \mathfrak{B}(\lambda, c) = \mathfrak{B}(\lambda, c_0)$ ise

$$\|A\|_{(\lambda,\ell_\infty)} = \|A\|_{(\lambda,c)} = \|A\|_{(\lambda,c_0)} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}|$$

dır.

(ii) $A = (a_{nk}) \in \mathfrak{B}(\lambda, \ell_1)$ ise

$$\|A\|_{(\lambda,\ell_1)} = \sup_{K\in\mathcal{F}} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{n\in K} a_{nk} \right|$$

dır [4,8].

Teorem 4.3.7 T ve S, $t = (t_n)$ ve $s = (s_n)$ dizileri ile verilen iki fark matrisi ve $\lambda \in \{c_0, c\}$ olsun. Bu durumda:

(i) $A = (a_{nk}) \in \mathfrak{B}(\lambda(T), \ell_\infty(S)) = \mathfrak{B}(\lambda(T), c(S)) = \mathfrak{B}(\lambda(T), c_0(S))$ ise

$$\|A\|_{(\lambda(T),\ell_\infty(S))} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{j=k}^{\infty} \left(\prod_{i=k}^{j} \frac{t_k}{t_i^2} \right) \left(s_n a_{nj} - \frac{1}{s_n} a_{n-1,j} \right) \right|$$

dır.

(ii) $A = (a_{nk}) \in \mathfrak{B}(\lambda(T), \ell_1(S))$ ise

$$\|A\|_{(\lambda(T),\ell_1(S))} = \sup_{K\in\mathcal{F}} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{n\in K} \sum_{j=k}^{\infty} \left(\prod_{i=k}^{j} \frac{t_k}{t_i^2} \right) \left(s_n a_{nj} - \frac{1}{s_n} a_{n-1,j} \right) \right|$$

dır.

İspat: $\lambda \in \{c_0, c\}$ için Teorem 4.2 den $T: \lambda(T) \to \lambda$ bir izometrik izomorfizmdir. $B = SAT^{-1}$ olsun.

$$\begin{array}{ccc} \lambda(T) & \xrightarrow{A} & \eta(S) \\ T^{-1}\uparrow & . & \downarrow S \\ \lambda & \xrightarrow[B=SAT^{-1}]{} & \eta \end{array}$$

Yukarıdaki diyagramdan $\lambda \in \{c_0, c\}$ ve $\eta \in \{\ell_1, c_0, c, \ell_\infty\}$ olmak üzere $\|A\|_{(\lambda(T),\eta(S))} = \|B\|_{(\lambda,\eta)}$ olduğu görülür. $\lambda \in \{c_0, c\}$ olmak üzere Lemma 4.3.1 den

$$\|B\|_{(\lambda,\ell_\infty)} = \|B\|_{(\lambda,c)} = \|B\|_{(\lambda,c_0)} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{\infty} |b_{nk}|$$

$$= \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{j=k}^{\infty} \left(\prod_{i=k}^{j} \frac{t_k}{t_i^2} \right) \left(s_n a_{nj} - \frac{1}{s_n} a_{n-1,j} \right) \right|$$

ve

$$\|B\|_{(\lambda,\ell_1)} = \sup_{K\in\mathcal{F}} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{n\in K} b_{nk} \right| = \sup_{K\in\mathcal{F}} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{n\in K} \sum_{j=k}^{\infty} \left(\prod_{i=k}^{j} \frac{t_k}{t_i^2} \right) \left(s_n a_{nj} - \frac{1}{s_n} a_{n-1,j} \right) \right|$$

elde edilir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu bölümde, tez çalışmasının orijinal kısmı olan üçüncü ve dördüncü bölümde tanımlanan dizi uzaylarının özel durumları verilecek ve bazı önerilerde bulunulacaktır.

Sonuç 5.1 $\ell_p(T)$ uzayında $p = 1$ ve $(t_n) = (1,1,1,\dots)$ alınırsa bv uzayı elde edilir.

Sonuç 5.2 $1 < p < \infty$ olmak üzere $\ell_p(T)$ uzayında $(t_n) = (1,1,1,\dots)$ alınırsa [30,31] nolu çalışmalarda tanımlanan bv_p uzayı elde edilir.

Sonuç 5.3 $c_0(T),\ c(T), \ell_\infty(T)$ uzaylarında $(t_n) = (1,1,1,\dots)$ alınırsa sırasıyla [1] nolu çalışmada tanımlanan $c_0(\Delta),\ c(\Delta), \ell_\infty(\Delta)$ uzayları elde edilir.

Sonuç 5.4 $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere $\ell_p(T)$ uzayında her $n \in \mathbb{N}$ için $t_n = \frac{f_n}{f_{n+1}}$ alınırsa [17] nolu çalışmada tanımlanan $\ell_p(\hat{F})$ uzayı elde edilir.

Sonuç 5.5 $c_0(T)$ ve $c(T)$ uzaylarında her $n \in \mathbb{N}$ için $t_n = \frac{f_n}{f_{n+1}}$ alınırsa sırasıyla [41] nolu çalışmada tanımlanan $c_0(\hat{F})$ ve $c(\hat{F})$ uzayları elde edilir.

Öneri 5.1 $\ell_p(T), c_0(T),\ c(T)$ uzaylarında tanımlanan matris dönüşümlerinin non-kompaktlık Hausdorff ölçüsünün çalışılması açık bir problemdir.

Öneri 5.2 $\ell_p(T)$ uzayı üzerinde rotund özelliği, Kadec-Klee özelliği, (β)-özelliği gibi Banach uzaylarına ait geometrik özelliklerinin çalışılması açık bir problemdir.

6. KAYNAKLAR

[1] Kızmaz H., On certain sequence spaces, *Canadian Mathematical Bulletin,* 24 (2) (**1981**) 169-176.

[2] Bayraktar M., *Fonksiyonel Analiz,* Gazi Kitapevi, (**2006**).

[3] Musayev B., Alp M., *Fonksiyonel Analiz,* Balcı Yayınları, (**2000**).

[4] Maddox I.J., *Elements of Functional Analysis,* Cambridge University Press, (**1970**).

[5] Knopp K., *Infinite Sequences and Series,* New York Dover Publications, (**1956**).

[6] Boss J., Peter, C., *Classical and Modern Methods in Summability,* Oxford University Press, (**2000**).

[7] Başar F., *Summability Theory and Its Applications,* Bentham Science Publishers, İstanbul, (**2011**).

[8] Malkowsky E., Rakočević V., An introduction into the theory of sequence spaces and measures of noncompactnes, Zbornik radova, *Matematički institut SANU,* 9 (17) (**2000**) 143-243.

[9] Malkowsky E., FK spaces, matrix transformations and the Hausdorff measure of noncompactness, *Seminar,*Van, (**2001**).

[10] Kreyszig E., *Introductory Functional Analysis with Applications,* Editörler: John Wiley & Sons, (**1978**).

[11] Cooke R.G., *Infinite Matrices and Sequence Spaces,* Macmillan and Co. Limited, (**1950**).

[12] Nanda S., Matrix Transformations and Sequence Spaces, *International Centre for Theoretical Physics,* (**1983**).

[13] Stieglitz M., Tietz H., Matrixtransformationen von folgenräumen eine ergebnisübersicht, *Mathematische Zeitschrift,* 154 (**1977**) 1-16.

[14] Maddox I.J., *Infinite Matrices of Operators,* Springer, (**1980**).

[15] Candan M., Domain of the double sequential band matrix in the classical sequence spaces, *Journal of Inequalities and Applications,* 2012 (**2012**).

[16] Sönmez A., Almost convergence and triple band matrix, *Mathematical and Computer Modelling,* 57 (9-10) (**2013**) 2393-2402.

[17] Kara E.E., Some topological and geometrical properties of new Banach sequence spaces, *Journal of Inequalities and Applications,* 2013 (**2013**).

[18] Ng P.N., Lee P.Y., Cesaro sequence spaces of non-absolute type, *Commentationes Mathematicae Prace Matematyczne*, 20 (2) (**1978**) 429-433.

[19] Polat H., Başar F., Some Euler spaces of difference sequences of order m, *Acta Mathematica Scientia,* 27 (2) (**2007)** 254-266.

[20] Malkowsky E., Recent results in the theory of matrix transformations in sequence spaces, *Matematički Vesnik,* 49 (**1997**) 187-196.

[21] Rhoades B.E., Some sequence spaces which include c_0 and c, *Hokkaido Mathematical Journal,* 35 (**2006**) 587-599.

[22] Kirişçi M., Başar F., Some new sequence spaces derived by the domain of generalized difference matrix, *Computers & Mathematics Applications,* 60 (5) (**2010**) 1299-1309.

[23] Malkowsky E., Savaş E., Matrix transformations between sequence spaces of generalized weighted means, *Applied Mathematics and Computation,* 147 (**2004**) 333-345.

[24] Şengönül M., Başar F., Some new Cesàro sequence spaces of non-absolute type which include the spaces c_0 and c, *Soochow Journal of Mathematics,* 31 (1) (**2005**) 107-119.

[25] Altay B., Başar F., Some Euler sequence spaces of non-absolute type*, Ukrainian Mathematical Journal,* 57 (1) (**2005)** 1-17.

[26] Altay B., Başar F., Mursaleen M., On the Euler sequence spaces which include the spaces ℓ_p and ℓ_∞ I, *Information Sciences,* 176 (10) (**2006**) 1450-1462.

[27] Mursaleen M., Başar F., Altay B., On the Euler sequence spaces which include the spaces ℓ_p and ℓ_∞ II, *Nonlinear Analysis,* 65 (3) (**2006**) 707-717.

[28] Aydın C., Başar F., On the new sequence spaces which include the spaces c_0 and c, *Hokkaido Mathematical Journal,* 33 (2) (**2004**) 383-398.

[29] Aydın C., Başar F., Some new sequence spaces which include the spaces ℓ_p and ℓ_∞, *Demonstratio Mathematica,* 38 (3) (**2005**) 641-656.

[30] Başar F., Altay B., On the space of sequences of p-bounded variation and related matrix mappings, *Ukrainian Mathematical Journal,* 55 (1) (**2003)** 136-147.

[31] Çolak R., Et M., Malkowsky E., Some topics of sequence spaces, *Lecture Notes in Mathematics,* Elâzığ, (**2004**).

[32] Altay B., Başar F., The matrix domain and the fine spectrum of the difference operator Δ on the sequence space ℓ_p, $(0 < p < 1)$, *Communications in Mathematical Analysis,* 2 (2) (**2007**) 1-11.

[33] Çolak R., Et M., On some generalized difference sequence spaces and related matrix transformations, *Hokkaido Mathematical Journal,* 26 (3) (**1997**) 483-492.

[34] Et M., Çolak R., On some generalized difference sequence spaces, *Soochow Journal of Mathematics,* 21 (4) (**1995**) 377-386.

[35] Malkowsky E., Parashar S.D., Matrix transformations in space of bounded and convergent difference sequences of order m, *Analysis,* 17 (**1997**) 87-97.

[36] Altay B., On the space of p-summable difference sequences of order m, $(1 \leq p < \infty)$, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica,* 43 (4) (**2006**) 387-402.

[37] Mursaleen M., Noman A.K., On the spaces of λ-convergent and bounded sequences, *Thai Journal of Mathematics,* 8 (2) (**2010**) 311-329.

[38] Mursaleen M., Noman A.K., On some new sequence spaces of non-absolute type related to the spaces ℓ_p and ℓ_∞ I, *Filomat,* 25 (2) (**2011**) 33-51.

[39] Altay B., Başar F., Certain topological properties and duals of the matrix domain of a triangle matrix in a sequence space, *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 336 (1) (**2007**) 632-645.

[40] Maddox I.J., Solidity in sequence spaces, *Revista Matematica de la Universidad Complutense de Madrid,* 4(2) (**1991**).

[41] Başarır M., Başar F., Kara E.E., On the spaces of Fibonacci difference null and convergent sequences, arXiv:1309.0150 **[math.FA].**

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: İLKHAN, Merve
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 04.08.1989/ İSTANBUL
Telefon	: 0 (544) 212 86 44
E-posta	: merveilkhan@duzce.edu.tr

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Lisans	İstanbul Ticaret Üniversitesi	2012
Lise	Küçükçekmece Y.D.A. Lisesi	2007

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2014-	Düzce Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce (KPDS : 77,5)