T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TÜREVLERİ s-KONVEKS OLAN DÖNÜŞÜMLER İÇİN BAZI YENİ HERMİTE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HATİCE ÖGÜLMÜŞ

KASIM 2014

DÜZCE

KABUL VE ONAY BELGESİ

Hatice ÖGÜLMÜŞ tarafından hazırlanan Türevleri s-Konveks Olan Dönüşümler İçin Bazı Yeni Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler isimli lisansüstü tez çalışması, Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 24.11.2014 tarih ve 1095 sayılı kararı ile oluşturulan jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Üye
(Tez Danışmanı)
Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Düzce Üniversitesi

Üye
Doç Dr. Nesip AKTAN
Düzce Üniversitesi

Üye
Yrd. Doç. Dr. Uğur ULUSU
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Tezin Savunulduğu Tarih : 26.11.2014

ONAY

Bu tez ile Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Hatice ÖGÜLMÜŞ'ün Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans derecesini almasını onamıştır.

Prof. Dr. Haldun MÜDERRİSOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

26 Kasım 2014

Hatice Ögülmüş

Sevgili Aileme

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim ve bu tezin hazırlanmasında süresince gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA'ya en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme ve çalışma arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

26 Kasım 2014 **Hatice Ögülmüş**

İÇİNDEKİLER **Sayfa**

SİMGELER VE KISALTMALAR

f'	f in birinci türevi
f''	f in ikinci türevi
$\lvert f \rvert$	f in mutlak değeri
H.-H.	Hermite-Hadamard
I	R nin içinde bir aralık
I^o	I nin içi
K_s^1	Birinci anlamda s-konveks fonksiyon
K_s^2	İkinci anlamda s-konveks fonksiyon
$L[a,b]$	$[a,b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonların kümesi
R	Reel Sayılar Kümesi
R^n	n boyutlu Öklid Uzayı

ÖZET

TÜREVLERİ s -KONVEKS OLAN DÖNÜŞÜMLER İÇİN BAZI YENİ HERMİTE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Hatice ÖGÜLMÜŞ
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Kasım 2014, 60 sayfa

Konvekslik kavramı ve genelleştirilmiş konvekslik kavramları matematiksel programlamada, mühendislikte, denge problemlerinde, varyasyonel problemlerde ve özellikle optimizasyon teorisinde çok önemli bir yer tutmaktadır. Genelleştirilmiş konvekslik kavramlarından biri de s -konvekslik kavramıdır. Son zamanlarda Hermite-Hadamard tipli eşitsizliklerin sağ tarafıyla ilgili bazı çalışmalar yapılmıştır. Bu tezde, türevlerinin mutlak değeri s -konveks olan fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizliklerin sol tarafıyla ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Anahtar sözcükler: Hermite-Hadamard eşitsizliği, s -konvekslik, Hölder eşitsizliği

ABSTRACT

SOME NEW INEQUALITIES OF HERMITE-HADAMARD TYPE FOR MAPPINGS WHOSE DERIVATIVES ARE s-CONVEX

Hatice ÖGÜLMÜŞ
Duzce University
Graduate School of Natural and Applied Science, Department of Mathematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Assoc.Prof.Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
November 2014, 60 pages

Convexity and the generalization of convexity are one of the most important aspects in mathematical programming, optimization theory, equilibrum problems and variational problems. One of generalization convexity is s-convexity. Recently, it has been establihed some results of the right hand side of a Hermite-Hadamard type inequality. In this thesis, some results of the left hand side of a Hermite- Hadamard type inequality were obtained for the class of mappings whose derivatives at certain powers are s-convex.

Keywords: Hermite-Hadamard type inequality, s-convex function, Hölder's inequality.

EXTENDED ABSTRACT

SOME NEW INEQUALITIES OF HERMITE-HADAMARD TYPE FOR MAPPINGS WHOSE DERIVATIVES ARE s-CONVEX

Hatice ÖGÜLMÜŞ
Duzce University
Graduate School of Natural and Applied Science, Department of Mathematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Assoc.Prof.Dr. M.Zeki SARIKAYA
November 2014, 60 pages

1. INTRODUCTION:

Inequalities have proven to be one of the most important and far-reaching tools for the development of many branches of mathematics. There are many types of inequalities of importance. Integral and finite difference inequalities with explicit estimates are powerful mathematical appartus which aid the study of the qualitative behavior of solutions of various types of differential, integral and finite difference equations. Because of its usefulness and importance, such inequalities have attracted much attention and a great number of papers, surveys and monographs have appeared in the literature.

2. MATERIAL AND METHODS:

s-convex functions have been introduced by Breckner in (Breckner 1978) and they play an important role in optimization theory and mathematical economics. Various properties and applicatins of them can be found in (Dragomir and Fitzpatrik 1999).

3. RESULTS AND DISCUSSIONS:

Over the past two decades or so, the field of inequalities has undergone explosive growth. Concerning numerous analytic inequalities, in particular a great many research papers have been written related to the inequalities associated to the names of Cebysev, Grüss, Ostrowski, Hermite-Hadamard and Jensen. A number of surveys and monographs published during the past few years described much of the progress.

4. CONCLUSION AND OUTLOOK:

In this thesis, using functions whose derivatives absolute values are s-convex functions, we obtained new inequalities related to the left side of Hermite-Hadamard inequality by using new integral identities.

1. GİRİŞ

Konvekslik, M.Ö. 250 yılında Archimedes'in ünlü π değerini hesaplamasına kadar uzanan basit ve bilinen bir kavramdır. Konveks fonksiyonların sistematik araştırmasına ilk olarak 19. yüzyılın sonlarında rastlanmasına rağmen, 20. yüzyılın ortalarında matematiğin önemli bir alanı olarak görülmeye başlanmıştır. Konveks kümeler ve ilgili geometrik konular matematikçiler tarafından kullanılan 95 ana konudan biridir. Konvekslik, geometri, analiz, lineer cebir ve topolojide kullanılır ve sayı teorisi, klasik ekstremum problemleri, lineer programlama, oyun teorisi ve eşitsizlikler teorisi (lineer, klasik ve matris) gibi çeşitli konularda önemli rol oynar. Son yüzyılda gelişen disiplini ve artan uygulamalarıyla matematiksel analizin merkezi alanlarından biri olarak yerini almıştır.

Konveks terimine ilk olarak, 1881 de Ch. Hermite'in (1822-1901) Mathesis 3 (1883, s.82) dergisine gönderdiği mektupta rastlanmıştır. Mektupta,

"Sur deux limites d'une intégrale définie. Soit $f(x)$ *une fonction qui varie toujours dans le même sens de* $x = a$ *, á* $x = b$ *. On aura les relations*

$$(b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \int_a^b f(x)dx < (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

ou bien

$$(b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \int_a^b f(x)dx > (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

suivant que la courbe y = f (x) tourne sa convexit´e ou sa concavit´e vers l'axe desabcisses. En faisant dans ces formules $f(x) = 1/(1+x), a = 0, b = x$ *il vient*

$$x - \frac{x^2}{2+x} < \log(1+x) < x - \frac{x^2}{2(1+x)}."$$

yazılıydı. Eşitsizlikler alanında daha fazla dikkate alınan, daha az önemli sonuçlar vardır ama maalesef Hermite'in temel çalışmaları sık sık onun orjinal yazar kimliği verilmeden belirtilmiştir. Bu bağlamda temel matematikte ilgi çeken/çekmekte olan

Hermite-Hadamard Eşitsizliğinin geometrik yorumu ve çoğu uygulamasıyla konveks fonksiyonun ilk temel sonucu olduğunu söyleyebiliriz. Çoğu matematikçi farklı konveks fonksiyon sınıfları (quasi-convex fonksiyonlar, fonksiyonların Godunova-Levin sınıfı, log-convex ve r-convex fonksiyonlar, p-convex fonksiyonlar vb.) ve özel ortalamalar (p-logarithmic ortalamalar, identric ortalama, Stolarsky ortalamalar vb.) için onu uygulamaya, genişletmeye, sadeleştirmeye ve genelleştirmeye çalışmaktadır.

Analitik eşitsizlikler yaygın olarak matematik ve birçok uygulamalı matematiğin çeşitli dallarında gelişiminin arkasındaki temel itici güçlerinden biri olarak kabul edilmektedir. Eşitsizlikler ile ilgili çalışmaların son on yıldan fazladır matematiğin birçok farklı alanlardaki uygulamalarına nasıl büyük bir katkı sağladığı açıkça ortadadır. Örneğin, Cebysev, Grüss, Yamuk, Ostrowski, Hadamard ve Jensen eşitsizlikler ile ilgili birçok uygulama literatürde çok önemli bir yere sahiptir.

Hardy, Littlewood ve Polya tarafından 1934 yılında yazılan "Inequalities" adlı eser eşitsizlikler teorisi için temel başvuru kaynağıdır. Okuyucu bu eserde konveks fonksiyonlarla ilgili klasik ve yeni eşitsizlikleri, problemleri, ispat yöntemlerini veya sonuçları bulabilir. Buna ek olarak Beckenbach ve Bellman'ın 1965 de yazdığı "Inequalities" adlı eser ve Mitrinovic'in 1970 de yazdığı "Analytic Inequalities" adlı eseri de söyleyebiliriz. Bu kaynaklar eşitsizlikler teorisini araştırmak isteyen okuyucu için el altında bulunması gereken önemli kaynaklardır.

Daha sonra konveks fonksiyonların daha kapsamlı bir şekilde araştırması A. W. Roberts ve D. E. Varberg tarafından "Convex Functions" adlı eserde kaleme alındı. Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler hakkında Pearić 1987 yılında "Convex Functions: Inequalities" adlı eseri yayınlamıştır. Ayrıca okuyucu çeşitli konveks fonksiyon sınıfları için, Hermite-Hadamard eşitsizliğinin detaylı anlatımını S.S. Dragomir ve C.E.M Pearce tarafından "Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications" adlı eserde bulabilir.

Son yıllarda klasik konvekslik tanımından daha genel konveks fonksiyon çeşitleri oluşturulmaktadır. Bunlardan birisi de 1978 yılında Breckner tarafından “Stetigkeitsaussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer funktionen in topologischen linearen Raumen” adlı çalışmasında tanıtılan s-konveks fonksiyonlardır.

s-konvekslik ile ilgili bazı özelliklere Hudzik ve Maligranda tarafından yazılan “Some remarks on s-convex functions” adlı çalışmada yer verilmiştir.

Bu çalışmada türevlerinin mutlak değeri ve kuvvetleri ikinci anlamda s-konveks olan fonksiyonlar sınıfı için Hermite-Hadamard tipli eşitsizliklerin sol tarafıyla ilişkili yeni sonuçlar verilecektir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. GENEL KAVRAMLAR

Şimdi tezimizde kullanacağımız bazı tanım ve teoremler verilerek gerekli görülen bazı önemli teoremlerin ispatları da verilmiştir.

Teorem 2.1.1. (Young Eşitsizliği) $a,b \geq 0$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olacak şekilde $1<p,q<\infty$ olsun. O halde,

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

eşitsizliğine Young Eşitsizliği denir (Young 1912).

Teorem 2.1.2. (Hölder Eşitsizliği) $x_1,...,x_n$, $y_1,...,y_n > 0$, $p,q>1$ öyle ki $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} . \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğine Hölder Eşitsizliği denir (Mitrinović 1970).

İspat. Yukardaki eşitsizlikte x_i ve y_i lerden en az birinin sıfırdan farklı olduğunu düşünebiliriz. O halde $u=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$ ve $v=\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$ her ikisi de pozitiftir, Young eşitsizliğinde $x=x_i/u$ ve $y=y_i/v$ seçersek,

$$\frac{x_i}{u}.\frac{y_i}{v} \leq \frac{1}{p}\left(\frac{x_i}{u}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{y_i}{v}\right)^q$$

elde edilip bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{uv} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

olur. Bu da Hölder Eşitsizliğini verir.

Tanım 2.1.3. (İntegraller İçin Hölder Eşitsizliği) $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel değerli fonksiyonlar, $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović 1970).

Tanım 2.1.4. (Kuvvet Ortalama Eşitsizliği) $q \geq 1$ olsun. f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel değerli fonksiyonlar, $|f|$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)| dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)| |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Tanım 2.1.5. (Lipschitz Şartı) $[a,b]$ kapalı aralığında her x ve y noktaları için,

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

şartını sağlayan bir K sabiti varsa, f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında Lipschitz şartını sağlıyor denir (Bayraktar 2010).

Tanım 2.1.6. (Mutlak Süreklilik) $[a,b]$ aralığının ayrık açık alt aralıklarının birikimi $\{(a_i, b_i)\}_1^n$ için

$$\sum_{1}^{n}(b_i - a_i) < \delta$$

olduğunda,

$$\sum_{1}^{n}|f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$$

olacak şekilde herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, bir $\delta > 0$ bulunabiliyorsa, f fonksiyonuna $[a,b]$ aralığında mutlak süreklidir denir (Carter ve Brunt 2000).

Tanım 2.1.7. (Konveks Fonksiyon) Her $u,v \in I$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$f(tu + (1-t)v) \le tf(u) + (1-t)f(v)$$

eşitsizliğini sağlayan $f : I \subset \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir (eşdeğer olarak t, $(0,1)$ aralığında da seçilebilir). Geometrik olarak bu eşitsizlik, f fonksiyonunun grafiği kirişlerinin altından geçer anlamındadır (Pećarić ve diğ. 1992).

Aşağıdaki kriterler konveks fonksiyon tanımına eşdeğerdir.

a) I aralığı üzerinde f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart herhangi bir $c \in I$ noktası için, $f(x) - f(c)/(x-c)$ fonksiyonunun I aralığında artan olmasıdır (Pećarić ve diğ. 1992).

b) $f : (a,b) \to \mathrm{R}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart her $c, x \in (a,b)$ için,

$$f(x) - f(c) = \int_c^x g(t)dt$$

olacak şekilde $g : (a,b) \to \mathrm{R}$ artan fonksiyonun olmasıdır.

c) f diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere, f nin konveks olması için gerek ve yeter şart f' fonksiyonunun artan olmasıdır (Pećarić ve diğ. 1992).

d) f'', (a,b) de mevcut olsun. Bu durumda f nin konveks olması için gerek ve yeter şart $f''(x) \geq 0$ olmasıdır (Mitrinović 1970).

e) $f : (a,b) \to \mathrm{R}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart her $x_0 \in (a,b)$ için f fonksiyonun en az bir support doğrusuna sahip olmasıdır. Yani

$$f(x) \geq f(x_0) + \lambda(x - x_0) \qquad \forall x \in (a,b)$$

eşitsizliğini sağlamasıdır. Burada λ, x_0 a bağlıdır ve eğer f' varsa o zaman $\lambda = f'(x_0)$ ya da $f'_{-}(x_0) \neq f'_{+}(x_0)$ ise $\lambda \in [f'_{-}(x_0), f'_{+}(x_0)]$ dir.

f) $f : (a,b) \to \mathrm{R}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart P, Q ve R noktaları f fonksiyonun grafiği üzerinde herhangi üç nokta olmak üzere,

$$eğimPQ \leq eğimPR \leq eğimQR$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Şimdi konveks fonksiyonların bazı özelliklerini verelim:

i. Kapalı aralıkta tanımlı konveks fonksiyon sınırlıdır.

ii. $f : I \to \mathrm{R}$ konveks fonksiyon ise, I° nde herhangi bir $[a,b]$ kapalı aralığında Lipschitz şartını sağlar. Bu nedenle $\boldsymbol{f}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında da mutlak sürekli ve I° nde süreklidir (Pećarić ve diğ. 1992).

iii. $f : I \to \mathrm{R}$ konveks fonksiyon ise, I° nde $f'_{-}(x)$ ve $f'_{+}(x)$ vardır ve artandır (Pećarić ve diğ. 1992).

iv. $f : I \to \mathrm{R}$ fonksiyonu I açık aralığında konveks ise, sayılabilir bir E kümesi haricinde f' mevcuttur ve süreklidir.

v. k tane fonksiyon $\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ de konveks fonksiyonlar olsun. Bu takdirde;

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} a_j f_j(k),\ a_j > 0,\ (j = 1,2,3,...,k)$$

fonksiyonu da konvekstir.

vi. $g\ :\mathrm{R} \to \mathrm{R}$ azalmayan ve konveks fonksiyon ayrıca $h\ :\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ konveks fonksiyon olsun. Bu takdirde; $f\ :\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$, $f(x) = (g \circ h)(x)$ olarak tanımlanan f bileşke fonksiyonu da konvekstir (Roberts ve Varberg 1973).

vii. $g\ :\mathrm{R}^m \to \mathrm{R}$ konveks ve $h\ :\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ fonksiyonu $h(x) = Ax + B$ formunda konveks olmak üzere (Burada A uygun matristir.)

$$f(x) = g(h(x))$$

fonksiyonu konveks fonksiyondur.

Teorem 2.1.8. (Hermite-Hadamard Eşitsizliği) $f\ :\ [a,b] \to \mathrm{R}$ konveks fonksiyon olmak üzere,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.1}$$

eşitsizliğine Hermite-Hadamard Eşitsizliği denir. Burada f fonksiyonunun konkav olması eşitsizliği tersine çevirir. Klasik Hermite-Hadamard (H.-H.) eşitsizliği bir $f:[a,b] \to R$ konveks fonksiyonunun ortalama değerinin hesabını sağlar (Pachpatte 2005).

İspat. f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde konveks olduğundan, $t \in [0,1]$ için,

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğin her iki tarafının $[0,1]$ aralığında t ye göre integralini alırsak,

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt \leq \int_0^1 tf(a)dt + \int_0^1 (1-t)f(b)dt = \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

elde ederiz. Diğer yandan, f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde konveks olduğundan, $t\in[0,1]$ için,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f\left(\frac{ta+(1-t)b}{2}+\frac{(1-t)a+tb}{2}\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\left[f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)\right] \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğin her iki tarafının $[0,1]$ aralığında t ye göre integralini alırsak,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{1}{2}\int_0^1 \left[f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)\right]dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt + \int_0^1 f((1-t)a+tb)dt\right] \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu eşitsizliğin sağ tarafında ikinci integralde $1-t=s$ yazarsak soldaki eşitsizlikte

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt + \int_0^1 f(sa+(1-s)b)ds\right] \\ &= \int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt \end{aligned}$$

buluruz ve buradan

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right)dt\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

elde ederiz. $\int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right)dt$ integralinde $ta+(1-t)b=x$ yazarsak,

$$\int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right)dt=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

olduğunu kolaylıkla görürüz ve böylece ispat tamamlanır. ■

Şimdi bu tezde genelleştirilmiş halini elde edeceğimiz diferansiyellenebilir fonksiyonlar için Hadamard eşitsizliğiyle ilgili Kırmacı'nın eşitsizliklerini (Kirmaci 2004) verelim.

Teorem 2.1.9. $f:I^{\circ}\subseteq R\to R$ fonksiyonu I° üzerinde diferansiyellenebilir, $a,b\in I^{\circ}$ ve $a<b$ olsun. Eğer $|f'|$ fonksiyonu, $[a,b]$ üzerinde konveks ise,

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\leq\frac{b-a}{8}\left(|f'(a)|+|f'(b)|\right) \tag{2.2}$$

elde edilir.

Teorem 2.1.10. $f:I^{\circ}\subseteq R\to R$ fonksiyonu I° üzerinde diferansiyellenebilir, $a,b\in I^{\circ}$, $a<b$ ve $p>1$ olsun. Eğer $|f'|^{\frac{p}{p-1}}$ fonksiyonu, $[a,b]$ aralığı üzerinde konveks ise,

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\\ &\leq\frac{b-a}{16}\left(\frac{4}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(|f'(a)|^{\frac{p}{p-1}}+3|f'(b)|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}+\left(3|f'(a)|^{\frac{p}{p-1}}+|f'(b)|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right] \qquad (2.3)\\ &\leq\frac{b-a}{4}\left(\frac{4}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(|f'(a)|+|f'(b)|\right)\end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 2.1.11. (Birinci Anlamda s-Konveks Fonksiyon) $0 < s \le 1$ olsun. $R_+ := [0,\infty)$ olmak üzere $f : R_+ \to R$ fonksiyonuna, her $u,v \in R_+$ ve $\alpha,\beta \ge 0$ ile $\alpha^s + \beta^s = 1$ için,

$$f(\alpha u + \beta v) \le \alpha^s f(u) + \beta^s f(v) \tag{2.4}$$

şartını sağlıyorsa birinci anlamda s-konveks fonksiyon denir. Reel fonksiyonların bu sınıfı K_s^1 ile gösterilir (Breckner 1978).

Tanım 2.1.12. (İkinci Anlamda s-Konveks Fonksiyon) Her $u,v \in R_+$, $\alpha + \beta = 1$ olacak şekilde $\alpha,\beta \ge 0$ ve $s \in (0,1]$ için

$$f(\alpha u + \beta v) \le \alpha^s f(u) + \beta^s f(v) \tag{2.5}$$

sağlanıyorsa $f : R_+ \to R$ fonksiyonuna ikinci anlamda s-konveks fonksiyon denir ve $f \in K_s^2$ olarak gösterilir (Hudzik ve Maligranda 1994).

Şimdi Dragomir ve Pearce'in (2000) "Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications" adlı kitabında yer verilen birinci anlamda s-konveks ve ikinci anlamda s-konveks fonksiyonlar için bazı örnek ve teoremleri verelim.

2.2. BİRİNCİ ANLAMDA s-KONVEKS FONKSİYONLARIN HERMİTE-HADAMARD EŞİTSİZLİĞİ

Birinci anlamda s-konveks fonksiyonlara dayanarak Hudzik ve Maligranda'nın (1994) çalışmasından bazı sonuçlar sunacağız.

Teorem 2.2.1. $0 < s < 1$ olsun. $f \in K_s^1$ şartı sağlanıyorsa f fonksiyonu $(0,\infty)$ üzerinde azalmayandır ve $\lim_{u \to 0^+} f(u) \le f(0)$ dır.

İspat. $u > 0$ ve $\alpha \in [0,1]$ için,

$$f\left[\left(\alpha^{\frac{1}{s}}+(1-\alpha)^{\frac{1}{s}}\right)u\right]\le \alpha f(u)+(1-\alpha)f(u)=f(u)$$

vardır.

$$h(\alpha)=\alpha^{\frac{1}{s}}+(1-\alpha)^{\frac{1}{s}}$$

fonksiyonu $[0,1]$ aralığı üzerinde sürekli, $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ aralığı üzerinde azalan, $\left[\frac{1}{2},1\right]$ aralığı üzerinde artan ve $h([0,1])=\left[h\left(\frac{1}{2}\right),h(1)\right]=\left[2^{1-\frac{1}{s}},1\right]$ dır. Buradan her $u>0, t\in\left[2^{1-\frac{1}{s}},1\right]$ için,

$$f(tu)\le f(u) \tag{2.6}$$

olur. $t\in\left[2^{1-\frac{1}{s}},1\right]$ ise o halde $t^{\frac{1}{2}}\in\left[2^{1-\frac{1}{s}},1\right]$ dır. Bu durumda her $u>0$ için (2.6) sağlanır ve böylece her $u>0$ için

$$f(tu)=f\left(t^{\frac{1}{2}}\left(t^{\frac{1}{2}}u\right)\right)\le f\left(t^{\frac{1}{2}}u\right)\le f(u)$$

elde ederiz. Tümevarımla, her $u>0,\ t\in(0,1]$ için

$$f(tu)\le f(u) \tag{2.7}$$

buluruz. Bu nedenle, $0<u\le v$ alarak ve (2.7) uygulayarak

$$f(u)=f\left(\frac{u}{v}.v\right)\le f(v)$$

elde ederiz. Bu da f fonksiyonu $(0,\infty)$ üzerinde azalmayan demektir.

İkinci kısım şu şekilde ispatlanabilir. Her $u>0$ için

$$f(\alpha u)=f(\alpha u+\beta 0)\leq \alpha^s f(u)+\beta^s f(0)$$

geçerlidir ve $u\to 0^+$ alarak

$$\lim_{u\to 0^+} f(u)\leq \lim_{u\to 0^+} f(\alpha u)\leq \alpha^s \lim_{u\to 0^+} f(u)+\beta^s f(0)$$

ve bunun sonucunda

$$\lim_{u\to 0^+} f(u)\leq f(0)$$

buluruz. ■

Hatırlatma 2.2.1. Yukarıdaki sonuçlar genellikle fonksiyonların konveksliği durumunda, yani $s=1$ olduğunda, sağlanmaz. Çünkü $f:R_+\to R$ konveks fonksiyonu $(0,\infty)$ üzerinde azalmayan olmak zorunda değildir.

Hatırlatma 2.2.2. Eğer $0<s<1$ ise $f\in K_s^1$ fonksiyonu $(0,\infty)$ üzerinde azalmayandır, fakat $[0,\infty)$ aralığı üzerinde olmak zorunda değildir.

Örnek 2.2.1. $0<s<1$ ve $a,b,c\in R$ olsun. $u\in R_+$ için

$$f(u)=\begin{cases} a & ,u=0 \\ bu^s+c & ,\mathrm{u}>0 \end{cases}$$

olarak tanımlanan f fonksiyonu aşağıdaki durumları sağlar:

i) $b\geq 0$ ve $c\leq a$ ise $f\in K_s^1$

ii) $b\geq 0$ ve $c<a$ ise f, $(0,\infty)$ aralığı üzerinde azalmayandır, fakat $[0,\infty)$ aralığı üzerinde değildir (Hudzik ve Maligranda 1994).

Bileşke özelliğini kullanarak başka s-konveks fonksiyonlar elde edebiliriz (Hudzik ve Maligranda 1994).

Teorem 2.2.2. $0 < s \leq 1$ olsun. Şayet $f, g \in K_s^1$ ve $F : R^2 \to R$ azalmayan konveks fonksiyon ise $h(u) := F(f(u), g(u))$ olarak tanımlanan $h : R_+ \to R$ fonksiyonu s-konvekstir.

İspat. $u, v \in R_+$ ise $\alpha^s + \beta^s = 1$ olacak şekildeki her $\alpha, \beta \geq 0$ için

$$\begin{aligned} h(\alpha u + \beta v) &= F(f(\alpha u + \beta v), g(\alpha u + \beta v)) \\ &\leq F(\alpha^s f(u) + \beta^s f(v), \alpha^s g(u) + \beta^s g(v)) \\ &\leq \alpha^s F(f(u), g(u)) + \beta^s F(f(v), g(v)) \\ &= \alpha^s h(u) + \beta^s h(v). \end{aligned}$$

bulunur. ■

K_s^1'in tanımında olan $\alpha^s + \beta^s = 1$ şartının eşdeğer bir şekilde $\alpha^s + \beta^s \leq 1$ şartı ile değiştirilebileceğini bilmek önemlidir (Hudzik ve Maligranda 1994).

Teorem 2.2.3. $f \in K_s^1$ olsun. (2.4) eşitsizliğinin her $u, v \in R_+$ ve $\alpha, \beta \geq 0$ ile $\alpha^s + \beta^s \leq 1$ durumlarında sağlanması için gerek ve yeter şart $f(0) \leq 0$ olmasıdır.

İspat. Gereklilik $u = v = 0$ ve $\alpha = \beta = 0$ alınarak kolaylıkla bulunur. Bu nedenle $u, v \in R_+$, $\alpha, \beta \geq 0$ ve $0 < \gamma = \alpha^s + \beta^s < 1$ olduğunu varsayalım. $a = \alpha\gamma^{-\frac{1}{s}}$ ve $b = \beta\gamma^{-\frac{1}{s}}$ olarak alırsak, $a^s + b^s = \dfrac{\alpha^s}{\gamma} + \dfrac{\beta^s}{\gamma} = 1$ olur ve buradan

$$\begin{aligned} f(\alpha u + \beta v) &= f\left(a\gamma^{\frac{1}{s}}u + b\gamma^{\frac{1}{s}}v\right) \\ &\leq a^s f\left(\gamma^{\frac{1}{s}}u\right) + b^s f\left(\gamma^{\frac{1}{s}}v\right) \\ &= a^s f\left(\gamma^{\frac{1}{s}}u + (1-\gamma)^{\frac{1}{s}}0\right) + b^s f\left(\gamma^{\frac{1}{s}}v + (1-\gamma)^{\frac{1}{s}}0\right) \end{aligned}$$

$$\le a^s[\gamma f(u)+(1-\gamma)f(0)]+b^s[\gamma f(v)+(1-\gamma)f(0)]$$
$$=a^s\gamma f(u)+b^s\gamma f(v)+(1-\gamma)f(0)$$
$$\le \alpha^s f(u)+\beta^s f(v)$$

bulunur. ■

Yukarıdaki teoremi kullanarak s–konveksliğin iki tanımını kıyaslayabiliriz (Hudzik ve Maligranda 1994).

Teorem 2.2.4. $0<s_1\le s_2\le 1$ olsun. $f\in K_{s_2}^1$ ve $f(0)\le 0$ ise $f\in K_{s_1}^1$ 'dir.

İspat. $f\in K_{s_2}^1$, $u,v\ge 0,\alpha,\beta\ge 0$ ve $\alpha^{s_1}+\beta^{s_1}=1$ olduğunu varsayalım. O halde $\alpha^{s_2}+\beta^{s_2}\le\alpha^{s_1}+\beta^{s_1}=1$ olur ve Teorem 2.2.3. e göre

$$f(\alpha u+\beta v)\le\alpha^{s_2}f(u)+\beta^{s_2}f(v)\le\alpha^{s_1}f(u)+\beta^{s_1}f(v)$$

bulunur. Bu da $f\in K_{s_1}^1$ demektir. ■

Öncelikle “ f K_s^1 ’in negatif olmayan bir fonksiyonu ve $f(0)=0$ ise f ’nin 0’da sağdan sürekli yani $f(0_+)=f(0)=0$” olduğuna dikkat edelim.

Şimdi s-konveks fonksiyonun bazı ilginç örneklerini içeren aşağıdaki teoremi kanıtlayalım (Hudzik ve Maligranda 1994):

Teorem 2.2.5. $0<s<1$ ve $p:R_+\to R_+$ azalmayan bir fonksiyon olsun. Öyleyse, $u\in R_+$ için

$$f(u)=u^{\frac{s}{(1-s)}}p(u) \tag{2.8}$$

olarak tanımlanan f fonksiyonu K_s^1 ’e aittir.

İspat. $v\ge u\ge 0$, $\alpha,\beta\ge 0$ ve $\alpha^s+\beta^s=1$ alalım. İki durumu göz önüne alacağız.

1. $\alpha u+\beta v\le u$ olsun. O halde

$$f(\alpha u+\beta v)\leq f(u)=(\alpha^s+\beta^s)f(u)\leq \alpha^s f(u)+\beta^s f(v)$$

bulunur.

2. $\alpha u+\beta v>u$ olsun. Buradan $\beta v>(1-\alpha)u$ ve böylece $\beta>0$ çıkar. $\alpha\in[0,1]$ için $\alpha\leq\alpha^s$ olduğundan, $\alpha-\alpha^{s+1}\leq\alpha^s-\alpha^{s+1}$ sağlanır ve

$$\frac{\alpha}{(1-\alpha)}\leq\frac{\alpha^s}{(1-\alpha^s)}=\frac{(1-\beta^s)}{\beta^s}$$

olur. Bu

$$\frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)}\leq\beta^{1-s}-\beta \tag{2.9}$$

demektir. Aynı zamanda,

$$\alpha u+\beta v\leq(\alpha+\beta)v\leq(\alpha^s+\beta^s)v=v$$

ve (2.9) den dolayı

$$\alpha u+\beta v\leq\frac{\alpha\beta v}{(1-\alpha)}+\beta v\leq(\beta^{1-s}-\beta)v+\beta v=\beta^{1-s}v$$

bulunup buradan

$$(\alpha u+\beta v)^{\frac{s}{(1-s)}}\leq\beta^s v^{\frac{s}{(1-s)}} \tag{2.10}$$

olur. (2.10) un ve p ’nin monotonluğu uygulanarak,

$$
\begin{aligned}
f(\alpha u+\beta v) &= (\alpha u+\beta v)^{\frac{s}{(1-s)}}\, p(\alpha u+\beta v) \\
&\leq \beta^s v^{\frac{s}{(1-s)}}\, p(\alpha u+\beta v) \leq \beta^s v^{\frac{s}{(1-s)}}\, p(v) \\
&= \beta^s f(v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)
\end{aligned}
$$

ulaşılır. Böylece kanıt tamamlanır. ■

Sıradaki teorem birinci anlamda s-konveks fonksiyonların diğer bazı örneklerini içermektedir (Hudzik ve Maligranda 1994).

Teorem 2.2.6. $0 < s_1, s_2 \leq 1$ olacak şekilde $f \in K_{s_1}^1$ ve $g \in K_{s_2}^1$ olsun.

a) f azalmayan, g negatif olmayan fonksiyonlar ve $f(0) \leq 0 = g(0)$ ise f ve g nin $f \circ g$ bileşkesi K_s^1 e aittir öyle ki $s = s_1.s_2$ dir.

b) $0 < s_1, s_2 < 1$ olduğunu varsayalım. Eğer f ve g negatif olmayan fonksiyonlar, $f(0) = 0$ ya da $g(0) = 0$ ise f ve g nin $f.g$ çarpımı K_s^1 e aittir öyle ki $s = \min(s_1, s_2)$ dir.

İspat.

a) $u, v \in R_+$, $\alpha, \beta \geq 0$ ve $s = s_1.s_2$ olmak üzere $\alpha^s + \beta^s = 1$ olsun. $i = 1,2$ için $\alpha^{s_i} + \beta^{s_i} \leq \alpha^{s_1.s_2} + \beta^{s_1.s_2} = 1$ olduğundan, Teorem 2.2.3. den ve yukarıdaki kabullerden,

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(\alpha u+\beta v) &= f(g(\alpha u+\beta v)) \leq f\left(\alpha^{s_2} g(u) + \beta^{s_2} g(v)\right) \\
&\leq \alpha^{s_1.s_2} f(g(u)) + \beta^{s_1.s_2} f(g(v)) \\
&\leq \alpha^s (f \circ g)(u) + \beta^s (f \circ g)(v)
\end{aligned}
$$

elde edilir ki bu $f \circ g \in K_s^1$ demektir.

b) Teorem 2.2.1. e göre, f ve g fonksiyonlarının ikisi de $(0,\infty)$ aralığı üzerinde azalmayandır. Dolayısıyla her $v \geq u > 0$ için

$$
(f(u) - f(v))(g(u) - g(v)) \geq 0
$$

ya da diğer bir ifadeyle

$$f(u)g(v)+f(v)g(u)\le f(u)g(u)+f(v)g(v) \tag{2.11}$$

olur. $v>u=0$ ise o halde (2.11) eşitsizliği f ve g negatif olmayan fonksiyonlar ve $f(0)=g(0)=0$ iken de geçerlidir.

Şimdi $u,v\in R_+$, $\alpha,\beta\ge 0$ ve $s=\min(s_1,s_2)$ olacak şekilde $\alpha^s+\beta^s=1$ olsun. $i=1,2$ için $\alpha^{s_i}+\beta^{s_i}\le\alpha^s+\beta^s=1$ olduğundan ve Teorem 2.2.3 ile (2.11) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}
&f(\alpha u+\beta v)g(\alpha u+\beta v)\\
&\le\left(\alpha^{s_1}f(u)+\beta^{s_1}f(v)\right)\left(\alpha^{s_2}g(u)+\beta^{s_2}g(v)\right)\\
&=\alpha^{s_1+s_2}f(u)g(u)+\alpha^{s_1}\beta^{s_2}f(u)g(v)+\alpha^{s_2}\beta^{s_1}f(v)g(u)+\beta^{s_1+s_2}f(v)g(v)\\
&\le\alpha^{2s}f(u)g(u)+\alpha^s\beta^s\left(f(u)g(v)+f(v)g(u)\right)+\beta^{2s}f(v)g(v)\\
&\le\alpha^s f(u)g(u)+\beta^s f(v)g(v)
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu $f.g\in K_s^1$ demektir. ■

Sonuç 2.2.1. ϕ bir konveks ψ -fonksiyon, yani $\phi(0)=0$ ve ϕ fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığı üzerinde azalmayan ve sürekli, ve g K_s^1 den bir ψ -fonksiyon ise o halde $\phi\circ g$ bileşkesi K_s^1 e aittir. Özel olarak, $h(u)=\phi(u^s)$ ψ -fonksiyonu K_s^1 e aittir.

Son olarak şuna da ulaşılır (Hudzik ve Maligranda 1994):

Teorem 2.2.7. f bir ψ -fonksiyon ve $f\in K_s^1$ $(0<s<1)$ olsun. Bu durumda bir konveks ψ -fonksiyon Φ vardır öyle ki $u\ge 0$ için $\Psi(u)=\Phi(u^s)$ olarak tanımlanan ψ -fonksiyon Ψ, f ye eşdeğerdir.

İspat. f fonksiyonunun s- konveksliği ve $f(0)=0$ kullanılarak, her $u\ge 0$ ve $\alpha\in[0,1]$ için $f(\alpha u)\le\alpha^s f(u)$ elde ederiz.

Şimdi $v>u>0$ olduğunu varsayalım. O halde $f\left(u^{\frac{1}{s}}\right)=f\left(\left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{1}{s}}v^{\frac{1}{s}}\right)\le\left(\frac{u}{v}\right)f\left(v^{\frac{1}{s}}\right)$ olur.

Buradan

$$\frac{f\left(u^{\frac{1}{s}}\right)}{u} \leq \frac{f\left(v^{\frac{1}{s}}\right)}{v} \tag{2.12}$$

çıkar. (2.12) eşitsizliği, $(0,\infty)$ aralığı üzerinde $\dfrac{f\left(u^{\frac{1}{s}}\right)}{u}$ fonksiyonunun azalmayan olduğu anlamına gelmektedir.

$$\Phi(u) := \begin{cases} 0 & ,u = 0 \\ \displaystyle\int_0^u \frac{f\left(t^{\frac{1}{s}}\right)}{t}\,dt & ,u > 0 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda Φ bir konveks ψ -fonksiyondur ve

$$\Phi(u^s) = \int_0^{u^s} \frac{f\left(t^{\frac{1}{s}}\right)}{t}\,dt \leq \left[\frac{f\left[(u^s)^{\frac{1}{s}}\right]}{u^s}\right] u^s = f(u)$$

$$\Phi(u^s) \geq \int_{\frac{u^s}{2}}^{u^s} \frac{f\left(t^{\frac{1}{s}}\right)}{t}\,dt \geq \left[\frac{f\left[\left(\frac{u^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}}\right]}{\left(\frac{u^s}{2}\right)}\right] \frac{u^s}{2} = f\left(2^{-\frac{1}{s}}u\right)$$

çıkar. Bu yüzden her $u \geq 0$ için,

$$f\left(2^{-\frac{1}{s}}u\right) \leq \Phi(u^s) \leq f(u)$$

olur ki bu ψ , f ye eşdeğer demektir (eşdeğerliğin bu anlamı Ozlicz uzaylar teorisinden alınır (Musielak 1983) ve kanıt tamamlanır. ■

Şimdi, birinci anlamda s-konveks fonksiyonlar için bazı H.-H. tipli eşitsizlikler üzerinde durabiliriz (Dragomir ve Fitzpatrick 1998).

Teorem 2.2.8. $f : R_+ \to R$ birinci anlamda s-konveks fonksiyon ve $s \in (0,1)$ olsun. $a,b \in R_+$ ve $a < b$ ise

$$f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{s}}}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \tag{2.13}$$

eşitsizliği vardır.

İspat. Şayet s-konveks fonksiyonların tanımında $\alpha = \frac{1}{2^{\frac{1}{s}}}, \beta = \frac{1}{2^{\frac{1}{s}}}$ olarak seçersek $\alpha^s + \beta^s = 1$ olur ve böylece her $x, y \in [0,\infty)$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2^{\frac{1}{s}}}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

bulunur. Eğer $x = ta + (1-t)b,\ y = (1-t)a + tb,\ t \in [0,1]$ olarak seçersek her $t \in [0,1]$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{s}}}\right) \leq \frac{1}{2}\left[f(ta+(1-t)b) + f((1-t)a+tb)\right]$$

elde ederiz. f fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığı üzerinde monoton azalmayan olduğundan $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir. Böylece yukarıdaki eşitsizlikte t ye göre integral alırsak,

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt = \int_0^1 f((1-t)a+tb)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

bulunur ve (2.13) eşitsizliği ispatlanır. ■

Bir bakıma genel konveks fonksiyonlar için H.-H. eşitsizliğinin ikinci kısmı ile benzer olan ikinci sonucu, sıradaki teoremde verelim (Dragomir ve Fitzpatrick 1998).

Teorem 2.2.9. f ve s için yukarıdaki varsayımlar ile şu eşitsizlik vardır:

$$\int_0^1 f\left(ta+\left(1-t^s\right)^{\frac{1}{s}}b\right)\psi(t)dt \le \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.14}$$

Burada ψ fonksiyonu $\psi(t):=\frac{1}{2}\left[1+\left(1-t^s\right)^{\frac{1}{s}-1}t^{s-1}\right]$, $t\in(0,1]$ olarak tanımlanmıştır.

İspat. Birinci anlamda s-konveks fonksiyonların tanımında $\alpha=t$, $\beta=\left(1-t^s\right)^{\frac{1}{s}}$, $t\in[0,1]$ olarak seçersek her $t\in[0,1]$ için $\alpha^s+\beta^s=1$ olur ve $t\in[0,1]$ için

$$f\left(ta+\left(1-t^s\right)^{\frac{1}{s}}b\right)\le t^s f(a)+\left(1-t^s\right)f(b)$$

ve benzer şekilde $t\in[0,1]$ için

$$f\left(\left(1-t^s\right)^{\frac{1}{s}}a+tb\right)\le \left(1-t^s\right)f(a)+t^s f(b)$$

buluruz. Yukarıdaki iki eşitsizliği birleştirirsek, $t\in[0,1]$ için

$$\frac{1}{2}\left[f\left(ta+\left(1-t^s\right)^{\frac{1}{s}}b\right)+f\left(\left(1-t^s\right)^{\frac{1}{s}}a+tb\right)\right]\le \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizliği t'ye göre $[0,1]$ aralığı üzerinde integrallersek o halde

$$\frac{1}{2}\left[\int_0^1 f\left(ta+\left(1-t^s\right)^{\frac{1}{s}}b\right)dt+\int_0^1 f\left(\left(1-t^s\right)^{\frac{1}{s}}a+tb\right)dt\right]$$
$$\leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.15}$$

buluruz. $u:=\left(1-t^s\right)^{\frac{1}{s}}$, $t\in[0,1]$ olarak değişken değiştirme yapalım. O halde $t=\left(1-u^s\right)^{\frac{1}{s}}$ ve $dt=-\left(1-u^s\right)^{\frac{1}{s}-1}u^{s-1}$, $u\in(0,1]$ olur ve

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 f\left(\left(1-t^s\right)^{\frac{1}{s}}a+tb\right)dt\\
&=-\int_1^0 f\left(ua+\left(1-u^s\right)^{\frac{1}{s}}b\right)\left(1-u^s\right)^{\frac{1}{s}-1}u^{s-1}du\\
&=\int_0^1 f\left(ta+\left(1-t^s\right)^{\frac{1}{s}}b\right)\left(1-t^s\right)^{\frac{1}{s}-1}t^{s-1}dt
\end{aligned}$$

elde ederiz. (2.15) eşitsizliğini kullanarak,

$$\int_0^1 f\left(ta+\left(1-t^s\right)^{\frac{1}{s}}b\right)\left[\frac{1+\left(1-t^s\right)^{\frac{1}{s}-1}t^{s-1}}{2}\right]dt\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

sonucuna varırız ve böylece (2.14) eşitsizliği ispatlanır. ■

Bir diğer H.-H. tipli eşitsizlik ile ilgili aşağıdaki sonucu verelim (Dragomir ve Fitzpatrick 1998):

Teorem 2.2.10. Yukarıdaki varsayımlar altında,

$$f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{2}{s}-1}}\right)\leq\int_0^1 f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{s}}}\left[t+\left(1-t^s\right)^{\frac{1}{s}}\right]\right)dt$$
$$\leq\int_0^1 f\left(ta+\left(1-t^s\right)^{\frac{1}{s}}b\right)\psi(t)dt \tag{2.16}$$

eşitsizliği vardır. Burada ψ fonksiyonu Teorem 2.2.9. daki gibi tanımlanmıştır.

İspat. $\frac{1}{s}>1$ olduğu için $g(x)=x^{\frac{1}{s}}$ olarak tanımlanan $g:[0,\infty)\to R$ fonksiyonunun konveksliği yardımıyla

$$\frac{\left(t^s\right)^{\frac{1}{s}}+\left(1-t^s\right)^{\frac{1}{s}}}{2}\geq\left(\frac{t^s+1-t^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}}=\frac{1}{2^{\frac{1}{s}}}$$

vardır. O halde

$$\frac{a+b}{2^{\frac{1}{s}}}\cdot\frac{t+\left(1-t^s\right)^{\frac{1}{s}}}{2}\geq\frac{a+b}{2^{\frac{1}{s}}}\cdot\frac{1}{2^{\frac{1}{s}}}$$

ve buradan

$$\frac{a+b}{2^{\frac{1}{s}}}.\left[t+\left(1-t^s\right)^{\frac{1}{s}}\right]\geq\frac{a+b}{2^{\frac{2}{s}-1}}$$

eşitsizliklerini elde ederiz. f fonksiyonu $(0,\infty)$ aralığı üzerinde monoton azalmayan olduğundan her $t\in[0,1]$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{s}}}.\left[t+\left(1-t^s\right)^{\frac{1}{s}}\right]\right)\geq f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{2}{s}-1}}\right)$$

eşitsizliğini buluruz ve $[0,1]$ aralığı üzerinde integral alırsak bu da bize (2.16) eşitsizliğinin birinci kısmını verir.

f birinci anlamda s-konveks fonksiyon olduğundan her $x,y\in[0,\infty)$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2^{\frac{1}{s}}}\right)\leq\frac{f(x)+f(y)}{2}$$

eşitsizliği vardır. $x = ta + (1-t^s)^{\frac{1}{s}} b,\ y = (1-t^s)^{\frac{1}{s}} a + tb,\ t \in [0,1]$ olarak alalım. O halde her $t \in [0,1]$ için,

$$\frac{1}{2}\left[f\left(ta + (1-t^s)^{\frac{1}{s}} b \right) + f\left((1-t^s)^{\frac{1}{s}} a + tb \right) \right]$$
$$\geq f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{s}}} \left[t + (1-t^s)^{\frac{1}{s}} \right] \right)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizliği $[0,1]$ aralığı üzerinde t 'ye göre integral alırsak ve bir önceki teorem ispatında kullanılan değişken değiştirmeyi uygularsak istenen (2.16) eşitsizliğini elde ederiz. ■

Birinci anlamda s-konveks fonksiyonlar için H.-H. tipli bazı başka eşitsizlikleri aşağıdaki teoremde verelim (Dragomir ve Fitzpatrick 1998).

Teorem 2.2.11. $f : [0,\infty) \to R$ fonksiyonu birinci anlamda s-konveks fonksiyon ve $s \in (0,1)$ olsun. $a, b \in R_+$ ve $a < b$ olduğunda aşağıdaki eşitsizlikler vardır:

$$f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{2}{s}-1}} \right) \leq \int_0^1 f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{s}}} \left[t^{\frac{1}{s}} + (1-t)^{\frac{1}{s}} \right] \right) dt$$
$$\leq \int_0^1 f\left(t^{\frac{1}{s}} a + (1-t)^{\frac{1}{s}} b \right) dt \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}. \tag{2.17}$$

İspat. $g(x) = x^{\frac{1}{s}}$, $s \in (0,1)$ fonksiyonunun konveksliği yardımıyla her $t \in [0,1]$ için

$$\frac{(t)^{\frac{1}{s}} + (1-t)^{\frac{1}{s}}}{2} \geq \left(\frac{t+1-t}{2} \right)^{\frac{1}{s}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{s}}}$$

bulunur. f nin monotonluğunu kullanarak her $t \in [0,1]$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{s}}}.\left[t^{\frac{1}{s}}+(1-t)^{\frac{1}{s}}\right]\right)\geq f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{s}}}.\frac{2}{2^{\frac{1}{s}}}\right)=f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{2}{s}-1}}\right)$$

sağlanır. Böylece (2.17) deki birinci eşitsizliği elde ederiz.

f birinci anlamda s-konveks fonksiyon olduğundan $t\in[0,1]$ için

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left[f\left(t^{\frac{1}{s}}a+(1-t)^{\frac{1}{s}}b\right)+f\left((1-t)^{\frac{1}{s}}a+t^{\frac{1}{s}}b\right)\right]\\&\geq f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{s}}}\left[t^{s}+(1-t)^{\frac{1}{s}}\right]\right)\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliği $[0,1]$ aralığı üzerinde t ye göre integral alırsak

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left[\int_0^1 f\left(t^{\frac{1}{s}}a+(1-t)^{\frac{1}{s}}b\right)dt+\int_0^1 f\left((1-t)^{\frac{1}{s}}a+t^{\frac{1}{s}}b\right)dt\right]\\&\geq\int_0^1 f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{s}}}\left[t^{s}+(1-t)^{\frac{1}{s}}\right]\right)dt\end{aligned}$$

elde ederiz. $u=1-t$, $t\in[0,1]$ değişken değiştirmesini uygulayarak

$$\int_0^1 f\left((1-t)^{\frac{1}{s}}a+t^{\frac{1}{s}}b\right)dt=-\int_1^0 f\left(au^{\frac{1}{s}}+b(1-u)^{\frac{1}{s}}\right)du=\int_0^1 f\left(at^{\frac{1}{s}}+b(1-t)^{\frac{1}{s}}\right)dt$$

buluruz ve böylece (2.17) deki ikinci eşitsizlik de gösterilmiş olur.

f fonksiyonunun $[0,\infty)$ üzerinde s-konveksliği vasıtasıyla her $t\in[0,1]$ için

$$f\left(t^{\frac{1}{s}}a+(1-t)^{\frac{1}{s}}b\right)\leq tf(a)+(1-t)f(b)$$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizliği $[0,1]$ aralığı üzerinde t ye göre integral alırsak,

$$\int_0^1 f\left(t^{\frac{1}{s}}a+(1-t)^{\frac{1}{s}}b\right)dt$$
$$\leq f(a)\int_0^1 tdt+f(b)\int_0^1(1-t)dt=\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

olduğu sonucuna varırız ve ispat tamamlanır. ■

Son olarak, genel konveks fonksiyonlar için elde edilen H.-H. eşitsizliğinde belirtilenden farklı olarak $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ integral ortalaması için bir üst sınır veren aşağıdaki sonucu verelim (Dragomir ve Fitzpatrick 1998).

Teorem 2.2.12. $f:[0,\infty)\to R_+$ birinci anlamda s-konveks fonksiyon ve $s\in(0,1)$ olsun. $0<a<b$ ve

$$\int_a^\infty x^{\frac{s+1}{s-1}}f(x)dx$$

integrali sonluysa o halde

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{s}{1-s}\left[a^{\frac{2s}{1-s}}\int_a^\infty x^{\frac{s+1}{s-1}}f(x)dx+b^{\frac{2s}{1-s}}\int_b^\infty x^{\frac{s+1}{s-1}}f(x)dx\right] \tag{2.18}$$

eşitsizliği vardır.

İspat. f fonksiyonunun $[0,\infty)$ aralığı üzerinde s-konveksliğini kullanarak her $u\in[0,1]$ ve $z,y\geq 0$ için

$$f\left(u^{\frac{1}{s}}z+(1-u)^{\frac{1}{s}}y\right)\leq uf(z)+(1-u)f(y)$$

eşitsizliğine ulaşırız. $z=u^{1-\frac{1}{s}}a$, $u\in(0,1]$ ve $y=(1-u)^{1-\frac{1}{s}}$, $u\in[0,1)$ olsun. O halde her $u\in(0,1)$ için aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$f(ua+(1-u)b)\leq uf\left(u^{1-\frac{1}{s}}a\right)+(1-u)f\left((1-u)^{1-\frac{1}{s}}b\right) \qquad (2.19).$$

Şimdi,

$$\int_0^1 (1-u)f\left((1-u)^{1-\frac{1}{s}}b\right)du$$

integralinde $t=1-u$, $u\in[0,1)$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\int_0^1 tf\left(t^{1-\frac{1}{s}}b\right)dt$$

intelgraline dönüştüğünü görürüz.

Şimdi $\int_0^1 uf\left(u^{1-\frac{1}{s}}a\right)du$ integralinin de sonlu olduğunu gösterelim.

$x=u^{1-\frac{1}{s}}a$, $u\in(0,1]$ değişken değiştirmesi yaparsak,

$$u=\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{1-\frac{1}{s}}}=\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{s}{s-1}}=\frac{x^{\frac{s}{s-1}}}{a^{\frac{s}{s-1}}}$$

ve

$$du=\frac{s}{s-1}.\frac{1}{a^{\frac{s}{s-1}}}x^{\frac{s}{s-1}-1}dx=\frac{s}{s-1}.\frac{1}{a^{\frac{s}{s-1}}}x^{\frac{1}{s-1}}dx$$

olarak buluruz. Buradan

$$\int_0^1 uf\left(u^{1-\frac{1}{s}}a\right)du=\int_{\infty}^{a}\left[\frac{x^{\frac{s}{s-1}}}{a^{\frac{s}{s-1}}}\cdot\frac{s}{s-1}\cdot\frac{x^{\frac{1}{s-1}}}{a^{\frac{s}{s-1}}}f(x)\right]dx$$

$$=\frac{s}{1-s}.a^{\frac{2s}{1-s}}\int_a^{\infty}x^{\frac{s+1}{s-1}}f(x)dx<\infty$$

eşitliğini ve benzer şekilde

$$\int_0^1 tf\left(t^{1-\frac{1}{s}}b\right)dt=\frac{s}{1-s}.b^{\frac{2s}{1-s}}\int_b^{\infty}x^{\frac{s+1}{s-1}}f(x)dx<\infty$$

eşitliğini buluruz. Şimdi, (2.19) eşitsizliğini $(0,1)$ aralığı üzerinde integralleyerek sırasıyla

$$\int_0^1 f(ua+(1-u)b)dt\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

ve

$$\int_0^1 uf\left(u^{1-\frac{1}{s}}a\right)du=\frac{s}{1-s}.a^{\frac{2s}{1-s}}\int_a^{\infty}x^{\frac{s+1}{s-1}}f(x)dx$$

$$\int_0^1 (1-u)f\left((1-u)^{1-\frac{1}{s}}b\right)du=\frac{s}{1-s}.b^{\frac{2s}{1-s}}\int_b^{\infty}x^{\frac{s+1}{s-1}}f(x)dx$$

ifadelerini hesaplarsak, (2.18) e ulaşırız. ■

2.3. İKİNCİ ANLAMDA s-KONVEKS FONKSİYONLAR

Şimdi ikinci anlamda s-konveks fonksiyonlarla ilgili aşağıdaki bazı sonuçları verelim (Hudzik ve Maligranda 1994).

Önerme 2.3.1. $f\in K_s^2$ ise f, $[0,\infty)$ üzerinde negatif olmayan bir fonksiyondur.

İspat. $u \in R_+$ için,

$$f(u) = f\left(\frac{u}{2} + \frac{u}{2}\right) \le \frac{f(u)}{2^s} + \frac{f(u)}{2^s} = 2^{1-s} f(u)$$

alalım. Buradan $(2^{1-s} - 1) f(u) \ge 0$ olur ve böylece $f(u) \ge 0$ elde edilir.■

Örnek 2.3.1. $0 < s < 1$ ve $a, b, c \in R$ olsun. $u \in R_+$ için

$$f(u) := \begin{cases} a & , u = 0 \\ bu^s + c & , u > 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanan f fonksiyonunda,

(i) $b \ge 0$ ve $0 \le c \le a$ için $f \in K_s^2$

(ii) $b > 0$ ve $c < 0$ için $f \notin K_s^2$

durumları vardır.

İspat.

(i) nin ispatında açık olmayan iki durum vardır:

1. $u, v > 0$ olsun. O halde $\alpha u + \beta v > 0$ olur ve

$$\begin{aligned} f(\alpha u + \beta v) &= b(\alpha u + \beta v)^s + c \le b(\alpha^s u^s + \beta^s v^s) + c \\ &= b(\alpha^s u^s + \beta^s v^s) + c(\alpha + \beta) \\ &\le b(\alpha^s u^s + \beta^s v^s) + c(\alpha^s + \beta^s) \\ &= \alpha^s (bu^s + c) + \beta^s (bv^s + c) \\ &= \alpha^s f(u) + \beta^s f(v) \end{aligned}$$

elde edilir.

2. $v > u = 0$ ve $\beta > 0$ olsun. O halde $\alpha u + \beta v > 0$ olur ve

$$
\begin{aligned}
f(\alpha 0+\beta v) = f(\beta v) &= b(\beta v)^s + c = b(\beta^s v^s) + c(\alpha+\beta) \\
&\le b(\beta^s v^s) + c(\alpha^s + \beta^s) = \alpha^s c + \beta^s (b v^s + c) \\
&\le \alpha^s a + \beta^s (b v^s + c) = \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

(ii) nin ispatı yeterince küçük u değerleri için f negatif olacağından Önerme 2.3.1. den hemen görülür.

K_s^2 nin tanımında $\alpha+\beta=1$ durumunun eşdeğer bir şekilde $\alpha+\beta\le 1$ durumu ile yer değiştirebileceğini bilmek önemlidir.

Aşağıdaki teorem geçerlidir (Hudzik ve Maligranda 1994).

Teorem 2.3.1. $f\in K_s^2$ olsun. Her $u,v\in R_+$, $\alpha,\beta\ge 0$ ile $\alpha+\beta\le 1$ durumlarında (2.5) eşitsizliğinin olması için gerek ve yeter şart $f(0)=0$ olmasıdır.

İspat.

<u>Gereklilik</u> $u=v=\alpha=\beta=0$ alarak, $f(0)\le 0$ buluruz ve $f(0)\ge 0$ olduğundan (Önerme 2.3.1.), $f(0)=0$ elde ederiz.

<u>Yeterlilik</u> $u,v\in R_+$ ve $\alpha,\beta\ge 0$ ile $0<\gamma=\alpha+\beta\le 1$ olsun. $a=\dfrac{\alpha}{\gamma}$ ve $b=\dfrac{\beta}{\gamma}$ alalım. O halde $a+b=\dfrac{\alpha}{\gamma}+\dfrac{\beta}{\gamma}=1$ olur ve buradan

$$
\begin{aligned}
f(\alpha u+\beta v) = f(a\gamma u + b\gamma v) &\le a^s f(\gamma u) + b^s f(\gamma v) \\
&= a^s f(\gamma u + (1-\gamma)0) + b^s f(\gamma v + (1-\gamma)0) \\
&\le a^s\left[\gamma^s f(u) + (1-\gamma)^s f(0)\right] + b^s\left[\gamma^s f(v) + (1-\gamma)^s f(0)\right] \\
&= a^s\gamma^s f(u) + b^s\gamma^s f(v) + (a^s+b^s)(1-\gamma)^s f(0) \\
&= \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)
\end{aligned}
$$

elde edilir.■

Yukarıdaki teorem ve K_s^1 için benzer türdeki Teorem 2.2.3. ü kullanarak, s-

konveksliğin her iki tanımını aşağıdaki teoremde karşılaştırabiliriz (Hudzik ve Maligranda 1994).

Teorem 2.3.2.

a) $0 < s \leq 1$ olsun. Şayet $f \in K_s^2$ ve $f(0) = 0$ ise $f \in K_s^1$ dir.

b) $0 < s_1 \leq s_2 \leq 1$ olsun. Şayet $f \in K_{s_2}^2$ ve $f(0) = 0$ ise $f \in K_{s_1}^2$ dir.

İspat.

a) $f \in K_s^2$ ve $f(0) = 0$ olduğunu varsayalım. $u, v \in R_+$ ve $\alpha, \beta \geq 0$ ile $\alpha^s + \beta^s = 1$ için $\alpha + \beta \leq \alpha^s + \beta^s = 1$ olur ve Teorem 2.3.1. den

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

b) $f \in K_{s_2}^2$ ve $u, v \in R_+$, $\alpha, \beta \geq 0$ ile $\alpha + \beta = 1$ olduğunu varsayalım. O halde

$$\begin{aligned} f(\alpha u + \beta v) &\leq \alpha^{s_2} f(u) + \beta^{s_2} f(v) \\ &\leq \alpha^{s_1} f(u) + \beta^{s_1} f(v) \end{aligned}$$

olur ki bu $f \in K_{s_1}^2$ demektir.■

Teorem 2.2.6. kanıtındaki gibi benzer bir ispat kullanılarak aşağıdaki teorem de gösterilebilir (Hudzik ve Maligranda 1994).

Teorem 2.3.3. f fonksiyonu K_s^2 de azalmayan ve g fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığı üzerinde negatif olmayan fonksiyonlar olsun. Öyleyse f ve g nin $f \circ g$ bileşkesi K_s^2 e aittir.

ψ -fonksiyonlar için, $f : R_+ \to R_+$ fonksiyonu azalmayan ve sürekli, $f(0) = 0$ ise f fonksiyonuna ψ -fonksiyon denildiğinden, aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.3.1. ϕ fonksiyonu bir ψ -fonksiyon ve f , K_s^2 de bir ψ -fonksiyon ise $f \circ \phi$ bileşkesi K_s^2 ye aittir.

Aşağıda ikinci anlamda s –konveks fonksiyonlar için H.-H. sonucunun farklı bir gösterimini verelim (Dragomir ve Fitzpatrik 1999).

Teorem 2.2.4. $f : R_+ \to R_+$ ikinci anlamda s -konveks bir fonksiyon, $s \in (0,1)$ ve $a,b \in R_+$ ile $a < b$ olsun. $f \in L_1[a,b]$ ise aşağıdaki eşitsizlik vardır:

$$2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le \frac{f(a)+f(b)}{s+1}. \qquad (2.20)$$

İspat. f fonksiyonu ikinci anlamda s -konveks olduğundan, her $t \in [0,1]$ için

$$f(ta+(1-t)b) \le t^s f(a) + (1-t)^s f(b)$$

vardır. Bu eşitsizliği $[0,1]$ aralığı üzerinde integrallersek,

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt \le f(a)\int_0^1 t^s dt + f(b)\int_0^1 (1-t)^s dt$$
$$= \frac{f(a)+f(b)}{s+1}$$

elde ederiz. $x = ta + (1-t)b$ değişken değiştirmesi ile

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

olur, böylece (2.20) de ikinci eşitsizlik ispatlanır.

(2.20) de birinci eşitsizliği ispatlamak için her $x, y \in I$ için geçerli olan

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2^s} \tag{2.21}$$

eşitsizliğini göz önüne alalım. $x = ta + (1-t)b$ ve $y = (1-t)a + tb$ ile $t \in [0,1]$ olsun. O halde (2.21) eşitsizliğinden, her $t \in [0,1]$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(ta+(1-t)b) + f((1-t)a+tb)}{2^s}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizliği $[0,1]$ aralığı üzerinde integrallersek (2.20) nin ikinci kısmını göstermiş oluruz. ■

Hatırlatma 2.3.1. (2.20) deki ikinci eşitsizlikte $s \in (0,1]$ için $k = \dfrac{1}{s+1}$ sabiti mümkün olan en iyi sabittir.

Şimdi f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığı üzerinde Lebesgue anlamında integrallenebilir olduğunu varsayalım ve

$$H(t) := \frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(tx + (1-t)\frac{a+b}{2}\right)dx$$

olarak verilen $H:[0,1] \to R$ fonksiyonunu göz önüne alalım.

Aşağıdaki teorem geçerlidir (Dragomir ve Fitzpatrik 1999).

Teorem 2.3.5. $f: I \subseteq R_+ \to R$ fonksiyonu I üzerinde ikinci anlamda s-konveks, $s \in (0,1]$ ve $a < b$ olacak şekilde $[a,b] \subset I$ üzerinde Lebesgue anlamında integrallenebilir olsun. O halde:

i. H fonksiyonu $[0,1]$ aralığı üzerinde ikinci anlamda s-konvekstir.

ii. Her $t \in [0,1]$ için

$$H(t) \geq 2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{2.22}$$

eşitsizliği vardır.

iii. $t \in (0,1]$ olmak üzere,

$$H(t) \leq \min\{H_1(t), H_2(t)\},\ t \in [0,1] \tag{2.23}$$

eşitsizliği vardır öyle ki

$$H_1(t) = t^s \cdot \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx + (1-t)^s f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

ve

$$H_2(t) = \frac{f\left(ta + (1-t)\frac{a+b}{2}\right) + f\left(tb + (1-t)\frac{a+b}{2}\right)}{s+1}$$

olarak tanımlanmıştır.

iv. $\tilde{H}(t) := \max\{H_1(t), H_2(t)\},\ t \in [0,1]$ ise

$$\tilde{H}(t) \leq t^s \cdot \frac{f(a) + f(b)}{s+1} + (1-t)^s \cdot \frac{2}{s+1} f\left(\frac{a+b}{2}\right),\ t \in [0,1] \tag{2.24}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat.

i. $t_1, t_2 \in [0,1]$ ve $\alpha, \beta \geq 0$ ile $\alpha + \beta = 1$ olsun. Sıra ile

$$
\begin{aligned}
&H(\alpha t_1+\beta t_2)\\
&=\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left((\alpha t_1+\beta t_2)x+[1-(\alpha t_1+\beta t_2)]\frac{a+b}{2}\right)dx\\
&=\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(\alpha\left[t_1x+(1-t_1)\frac{a+b}{2}\right]+\beta\left[t_2x+(1-t_2)\frac{a+b}{2}\right]\right)dx\\
&\le\frac{1}{b-a}\int_a^b\left[\alpha^s f\left(t_1x+(1-t_1)\frac{a+b}{2}\right)+\beta^s f\left(t_2x+(1-t_2)\frac{a+b}{2}\right)\right]dx\\
&=\alpha^s H(t_1)+\beta^s H(t_2)
\end{aligned}
$$

sağlanır ki bu bize H fonksiyonunun $[0,1]$ aralığı üzerinde ikinci anlamda s-konveks olduğunu gösterir.

ii. $t\in(0,1]$ olduğunu varsayalım. $u=tx+(1-t)\frac{a+b}{2}$ değişken değiştirmesi bize

$$
H(t):=\frac{1}{t(b-a)}\int_{ta+(1-t)\frac{a+b}{2}}^{tb+(1-t)\frac{a+b}{2}} f(u)du=\frac{1}{p-q}\int_q^p f(u)du
$$

verir. Burada $p=tb+(1-t)\frac{a+b}{2}$ ve $q=ta+(1-t)\frac{a+b}{2}$ dır.

Birinci H.-H. eşitsizliğini uygulayarak,

$$
\frac{1}{p-q}\int_q^p f(u)du\ge 2^{s-1}f\left(\frac{p+q}{2}\right)=2^{s-1}f\left(\frac{a+b}{2}\right)
$$

elde ederiz ve (2.22) eşitsizliği bulunur.

iii. İkinci H.-H. eşitsizliğini uygulayarak, her $t\in[0,1]$ için

$$\frac{1}{p-q}\int_q^p f(u)du \leq \frac{f(p)+f(q)}{r+1}$$

$$= \frac{f\left(tb+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)+f\left(ta+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)}{r+1}$$

$$= H_2(t)$$

buluruz.

Diğer yandan, her $t \in [0,1]$ ve $x \in [a,b]$ için

$$f\left(tx+(1-t)\frac{a+b}{2}\right) \leq t^s f(x)+(1-t)^s f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

olduğu açıktır. Bu eşitsizlik $[a,b]$ aralığı üzerinde integrallenirse, $H_1(t)$ için (2.23) elde edilir ve istenen ispatlanır.

iv. Her $t \in [0,1]$ için

$$H_2(t) \leq \frac{t^s f(a)+(1-t)^s f\left(\frac{a+b}{2}\right)+t^s f(b)+(1-t)^s f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{s+1}$$

$$= t^s \cdot \frac{f(a)+f(b)}{s+1}+(1-t)^s \cdot \frac{2}{s+1} \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

geçerlidir.

Diğer yandan,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{s+1}$$

ve $t \in [0,1]$ olmak üzere

$$(1-t)^s f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq (1-t)^s \cdot \frac{2}{s+1} \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

olduğunu biliyoruz. Bu da bize

$$H_1(t)\le t^s\cdot\frac{f(a)+f(b)}{s+1}+(1-t)^s\cdot\frac{2}{s+1}\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

eşitsizliğini verir ve teorem ispatlanır. ■

Şimdi, $f:[a,b]\to R$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığı üzerinde Lebesgue anlamında integrallenebilir olduğunu varsayalım.

$$F(t):=\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f(tx+(1-t)y)dxdy, t\in[0,1]$$

fonksiyonunu göz önüne alalım.

Aşağıdaki teorem bu fonksiyonun temel özelliklerini içerir (Dragomir ve Fitzpatrik 1999).

Teorem 2.2.6. $f:\mathrm{I}\subseteq R_+\to R_+$ ikinci anlamda s-konveks bir fonksiyon, $s\in(0,1]$, $a,b\in\mathrm{I}$ ile $a<b$ ve f fonksiyonu $[a,b]$ aralığı üzerinde Lebesgue anlamında integrallenebilir olsun. O halde:

i. Her $s\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ için

$$F\left(s+\frac{1}{2}\right)=F\left(\frac{1}{2}-s\right)$$

ve her $t\in[0,1]$ için

$$F(t)=F(1-t)$$

olur.

ii. F , $[0,1]$ aralığı üzerinde ikinci anlamda s-konveks bir fonksiyondur.

iii. $t\in[0,1]$ için

$$2^{1-s}F(t)\geq F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{(b-a)^2}\cdot\int_a^b\int_a^b f\left(\frac{x+y}{2}\right)dxdy \qquad (2.25)$$

eşitsizliği vardır.

iv. $t\in[0,1]$ için

$$F(t)\geq 2^{s-1}H(t)\geq 4^{s-1}f\left(\frac{a+b}{2}\right) \qquad (2.26)$$

eşitsizliği vardır.

v. $t\in[0,1]$ için

$$\begin{aligned}F(t)\leq \min\Bigg\{&\left[t^s+(1-t)^s\right]\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx,\\ &\frac{f(a)+f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)+f(b)}{(s+1)^2}\Bigg\}\end{aligned} \qquad (2.27)$$

eşitsizliği vardır.

İspat.

i. İspat açıktır.

ii. Teorem 2.3.5'in ispatına benzer şekilde yapılır.

iii. f, I üzerinde ikinci anlamda s - konveks bir fonksiyon olduğundan, her $t\in[0,1]$ ve $x,y\in[a,b]$ için

$$\frac{f(tx+(1-t)y)+f((1-t)x+ty)}{2^s}\geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

vardır. Bu eşitsizliği $[a,b]^2$ üzerinde integral alırsak,

$$\frac{1}{2^s}\left[\int_a^b\int_a^b f(tx+(1-t)y)dxdy+\int_a^b\int_a^b f((1-t)x+ty)dxdy\right]$$
$$\geq\int_a^b\int_a^b f\left(\frac{x+y}{2}\right)dxdy$$

buluruz. Buradan da

$$\int_a^b\int_a^b f(tx+(1-t)y)dxdy=\int_a^b\int_a^b f((1-t)x+ty)dxdy$$

olduğundan dolayı yukarıdaki eşitsizlik bize istenen sonuç (2.25) i verir.

iv. Öncelikle

$$F(t)=\frac{1}{b-a}\int_a^b\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(tx+(1-t)y)dx\right]dy$$

olarak yazalım. Şimdi $[a,b]$ aralığı içindeki y sabiti için,

$$H_y(t):=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(tx+(1-t)y)dx$$

olarak tanımlanan $H_y:[0,1]\to R$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Teorem 2.3.5. in ispatında gösterildiği gibi, $t\in[0,1]$ için $p=tb+(1-t)y$, $q=ta+(1-t)y$ olmak üzere

$$H_y(t)=\frac{1}{p-q}\int_q^p f(u)du$$

eşitliği vardır. H.-H. eşitsizliğini uygulayarak, her $t\in(0,1)$ ve $y\in[a,b]$ için

$$\frac{1}{p-q}\int_q^p f(u)du \geq 2^{s-1} f\left(\frac{p+q}{2}\right) = 2^{s-1} f\left(t \cdot \frac{a+b}{2} + (1-t)y\right)$$

elde ederiz. y 'ye göre $[a,b]$ aralığı üzerinde integrallersek, kolayca her $t \in (0,1)$ için

$$F(t) \geq 2^{s-1} H(1-t)$$

olduğu sonucuna varırız. $F(t) = F(1-t)$ olduğundan, $t \in (0,1)$ için (2.26) eşitsizliği ispatlanır.

v. İkinci anlamda s-konveks bir fonksiyonların tanımından, her $x, y \in [a,b]$ ve $t \in (0,1)$ için

$$f(tx + (1-t)y) \leq t^s f(x) + (1-t)^s f(y)$$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizliği $[a,b]^2$ üzerinde integrallersek, (2.27) eşitsizliğinin ilk kısmını elde ederiz.

Şimdi, H.-H. eşitsizliğinin ikinci kısmından $t \in [0,1]$, $p = tb + (1-t)y$ ve $q = ta + (1-t)y$ olmak üzere

$$H_y(t) = \frac{1}{p-q}\int_q^p f(u)du \leq \frac{f(tb + (1-t)y) + f(ta + (1-t)y)}{s+1}$$

gelen eşitsizliği ele alalım. Bu eşitsizliği y ye göre $[a,b]$ aralığı üzerinde integrallersek

$$F(t) \leq \frac{1}{s+1}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(tb + (1-t)y)dy + \frac{1}{b-a}\int_a^b f(ta + (1-t)y)dy\right]$$

sonucuna varırız. Basit bir hesaplamayla, $r = b$, $l = tb + (1-t)a$ ve $t \in (0,1)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{b-a}\int_a^b f(tb+(1-t)y)dy \\
&=\frac{1}{r-l}\int_l^r f(u)du \le \frac{f(r)+f(l)}{s+1} \\
&=\frac{f(b)+f(tb+(1-t)a)}{s+1}
\end{aligned}$$

olduğunu ve benzer şekilde

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(ta+(1-t)y)dy \le \frac{f(a)+f(ta+(1-t)b)}{s+1},\ t\in(0,1)$$

olduğunu görürüz. Bu da bize (2.27) deki ikinci eşitsizliği verir. ■

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

3. 1 . TÜREVLERİ İKİNCİ ANLAMDA S-KONVEKS OLAN FONKSİYONLAR İÇİN BAZI HERMİTE-HADAMARD EŞİTSİZLİKLERİ

Bu bölümdeki amacımız, türevinin mutlak değeri ikinci anlamda s-konveks olan fonksiyonların sınıfı için H.-H. tipli yeni eşitsizlikler elde etmektir. Elde edilen sonuçlar Kırmacı'nın eşitsizliklerinin (Kirmaci 2004) bir genelleştirilmesidir.
Sonuçlarımızı kanıtlamak için ilk olarak Sarıkaya'nın vermiş olduğu aşağıdaki lemmayı verelim (Sarikaya ve Yıldırım):

Lemma 3.1.1. $f : I^{\circ} \subseteq R \to R$ fonksiyonu (a,b) üzerinde diferansiyellenebilir ve $a<b$ olsun. Şayet $f' \in L[a,b]$ ise aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\\ &= \frac{b-a}{4}\left\{\int_0^1 tf'\left(\frac{t}{2}a+\frac{2-t}{2}b\right)dt - \int_0^1 tf'\left(\frac{2-t}{2}a+\frac{t}{2}b\right)dt\right\}.\end{aligned}$$

Teorem 3.1.1. $f : I \subset [0,\infty) \to R$ fonksiyonu I° üzerinde diferansiyellenebilir, $a,b \in \mathrm{I}$ ve $a<b$ olsun. $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde ikinci anlamda s–konveks ise, bazı sabit $s \in (0,1]$ için, aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \le \frac{(b-a)(|f'(a)|+|f'(b)|)}{2^{s+2}} \cdot \left[\frac{-2+2^{s+2}}{(s+1)(s+2)}\right]. \qquad (3.1)$$

İspat. Lemma 3.1.1. ve $|f'|$ fonksiyonunun ikinci anlamda s-konveksliğini kullanarak,

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\\ &\le \frac{b-a}{4}\left\{\int_0^1 t\left|f'\left(\frac{t}{2}a+\frac{2-t}{2}b\right)\right|dt + \int_0^1 t\left|f'\left(\frac{2-t}{2}a+\frac{t}{2}b\right)\right|dt\right\}\end{aligned}$$

$$=\frac{b-a}{4}\int_0^1 t\left[\left|f'\left(\frac{t}{2}a+\frac{2-t}{2}b\right)\right|+\left|f'\left(\frac{2-t}{2}a+\frac{t}{2}b\right)\right|\right]dt$$

$$\leq\frac{b-a}{4}\int_0^1 t\left[\left(\frac{t}{2}\right)^s|f'(a)|+\left(\frac{2-t}{2}\right)^s|f'(b)|+\left(\frac{2-t}{2}\right)^s|f'(a)|+\left(\frac{t}{2}\right)^s|f'(b)|\right]dt$$

$$=\frac{b-a}{4}\int_0^1 t\left[\left(\frac{t}{2}\right)^s+\left(\frac{2-t}{2}\right)^s\right][|f'(a)|+|f'(b)|]dt$$

$$=\frac{(b-a)(|f'(a)|+|f'(b)|)}{2^{s+2}}\left[\int_0^1\left[t^{s+1}+t(2-t)^s\right]dt\right]$$

$$=\frac{(b-a)(|f'(a)|+|f'(b)|)}{2^{s+2}}\left[\int_0^1 t^{s+1}dt+\int_0^1 t(2-t)^s\,dt\right]$$

buluruz. Burada $\int_0^1 t(2-t)^s\,dt$ integrali için $u=(2-t)$ değişken değiştirmesi yaparsak

$$=\frac{(b-a)(|f'(a)|+|f'(b)|)}{2^{s+2}}\left[\int_0^1 t^{s+1}dt+\int_1^2(2-u)u^s\,du\right]$$

$$=\frac{(b-a)(|f'(a)|+|f'(b)|)}{2^{s+2}}\left[\left.\frac{t^{s+2}}{s+2}\right|_0^1+2\left.\frac{u^{s+1}}{s+1}\right|_1^2-\left.\frac{u^{s+2}}{s+2}\right|_1^2\right]$$

$$=\frac{(b-a)(|f'(a)|+|f'(b)|)}{2^{s+2}}\cdot\left[\frac{2}{s+2}-\frac{2}{s+1}+\frac{2^{s+2}}{s+1}-\frac{2^{s+2}}{s+2}\right]$$

$$=\frac{(b-a)(|f'(a)|+|f'(b)|)}{2^{s+2}}\cdot\left[\frac{-2+2^{s+2}}{(s+1)(s+2)}\right]$$

elde ederiz. Böylece ispat tamamlanır. ■

Hatırlatma 3.1.1. Teorem 3.1.1 de $s=1$ alınırsa (3.1) eşitsizliği Teorem 2.1.9. un (2.2) eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 3.1.2. $f:I\subset[0,\infty)\to R$ fonksiyonu I° üzerinde diferansiyellenebilir, $a,b\in I$ ve $a<b$ olsun. $|f'|^q$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığı üzerinde ikinci anlamda s-konveks ise bazı sabit $s\in(0,1]$ ve $q>1$ için, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olacak şekilde aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{2^{s+2}}\left(\frac{2^s}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(\frac{|f'(a)|^q+\left(2^{s+1}-1\right)|f'(b)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\left(2^{s+1}-1\right)|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right] \quad (3.2)$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\left(\frac{2^s}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\frac{1}{(s+1)^{\frac{1}{q}}}\left[|f'(a)|+|f'(b)|\right].$$

İspat. Lemma 3.1.1. den, Hölder eşitsizliği ve $|f'|^q$ ’in ikinci anlamda s-konveksliğini kullanarak,

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{4}\left\{\int_0^1 t\left|f'\left(\frac{t}{2}a+\frac{2-t}{2}b\right)\right|dt+\int_0^1 t\left|f'\left(\frac{2-t}{2}a+\frac{t}{2}b\right)\right|dt\right\}$$

$$\leq \frac{b-a}{4}\cdot\left\{\left[\left(\int_0^1 |t|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_0^1\left|f'\left(\frac{t}{2}a+\frac{2-t}{2}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]+\left[\left(\int_0^1 |t|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f'\left(\frac{2-t}{2}a+\frac{t}{2}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]\right\}$$

$$=\frac{b-a}{4}\left(\int_0^1 |t|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left\{\left(\int_0^1\left|f'\left(\frac{t}{2}a+\frac{2-t}{2}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_0^1\left|f'\left(\frac{2-t}{2}a+\frac{t}{2}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$\leq \frac{b-a}{4}\left(\left.\frac{t^{p+1}}{p+1}\right|_0^1\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\left(\int_0^1\left[\left(\frac{t}{2}\right)^s|f'(a)|^q+\left(\frac{2-t}{2}\right)^s|f'(b)|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_0^1\left[\left(\frac{2-t}{2}\right)^s|f'(a)|^q+\left(\frac{t}{2}\right)^s|f'(b)|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$=\frac{b-a}{4}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\left(\frac{|f'(a)|^q}{2^s}\int_0^1 t^s dt+\frac{|f'(b)|^q}{2^s}\int_0^1(2-t)^s dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{|f'(a)|^q}{2^s}\int_0^1(2-t)^s dt+\frac{|f'(b)|^q}{2^s}\int_0^1 t^s dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$=\frac{b-a}{4}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\left(\frac{|f'(a)|^q}{2^s}\cdot\frac{t^{s+1}}{s+1}\Bigg|_0^1+\frac{|f'(b)|^q}{2^s}\cdot\left(-\frac{(2-t)^{s+1}}{s+1}\right)\Bigg|_0^1\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{|f'(a)|^q}{2^s}\cdot\left(-\frac{(2-t)^{s+1}}{s+1}\right)\Bigg|_0^1+\frac{|f'(b)|^q}{2^s}\cdot\frac{t^{s+1}}{s+1}\Bigg|_0^1\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$=\frac{b-a}{4}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{2^s}\right)^{\frac{1}{q}}\left\{\left(|f'(a)|^q\cdot\frac{1}{s+1}+|f'(b)|^q\cdot\left(-\frac{1}{s+1}+\frac{2^{s+1}}{s+1}\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(|f'(a)|^q\cdot\left(-\frac{1}{s+1}+\frac{2^{s+1}}{s+1}\right)+|f'(b)|^q\cdot\frac{1}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$=\frac{b-a}{2^{s+2}}\left(\frac{2^s}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left\{\left(\frac{|f'(a)|^q+\left(2^{s+1}-1\right)\left|f'(b)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\left(2^{s+1}-1\right)\left|f'(a)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

buluruz. Burada

$a_1=|f'(a)|^q$, $b_1=\left(2^{s+1}-1\right)|f'(b)|^q$, $a_2=\left(2^{s+1}-1\right)|f'(a)|^q$, $b_2=|f'(b)|^q$ olsun. Ayrıca $q>1$ için $0<\frac{1}{q}<1$ olur. Dolayısıyla,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_k+b_k\right)^s\leq\sum_{k=1}^{n}a_k^s+\sum_{k=1}^{n}b_k^s$$

eşitsizliğini kullanarak, $(0\leq s<1)$, $a_1,a_2,...,a_n\geq 0$, $b_1,b_2,...,b_n\geq 0$ için

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq\frac{b-a}{2^{s+2}}\left(\frac{2^s}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\times\left[\left(|f'(a)|^q+\left(2^{s+1}-1\right)|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\left(2^{s+1}-1\right)|f'(a)|^q+|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$\leq \frac{b-a}{2^{s+2}}\left(\frac{2^s}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\times\left[\left(|f'(a)|+\left(2^{s+1}-1\right)^{\frac{1}{q}}|f'(b)|\right)+\left(\left(2^{s+1}-1\right)^{\frac{1}{q}}|f'(a)|+|f'(b)|\right)\right]$$

$$=\frac{b-a}{2^{s+2}}\left(\frac{2^s}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\left(1+\left(2^{s+1}-1\right)^{\frac{1}{q}}\right)\left(|f'(a)|+|f'(b)|\right)\right]$$

$$\leq \frac{b-a}{2^{s+2}}\left(\frac{2^s}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\left(2^{s+1}\right)\left(|f'(a)|+|f'(b)|\right)$$

$$=\frac{b-a}{2}\left(\frac{2^s}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\left(|f'(a)|+|f'(b)|\right)$$

elde ederiz. Böylece ispat tamamlanır. ∎

Hatırlatma 3.1.2. Teorem 3.1.2. de $s=1$ alırsak (3.2) eşitsizliği Teorem 2.1.10. un (2.3) eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 3.1.3. $f: I\subset[0,\infty)\to R$ fonksiyonu I° üzerinde diferansiyellenebilir, $a,b\in I$ ve $a<b$ olsun. $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığı üzerinde ikinci anlamda s-konveks bir fonksiyon ise bazı sabit $s\in(0,1]$ ve $q\geq 1$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\left(\frac{|f'(a)|^q}{\left(2^s(s+2)\right)}+\frac{|f'(b)|^q\left(2^{s+2}-(s+3)\right)}{2^s(s+1)(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \tag{3.3}$$

$$\left.+\left(\frac{|f'(a)|^q\left(2^{s+2}-(s+3)\right)}{2^s(s+1)(s+2)}+\frac{|f'(b)|^q}{2^s(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

İspat. $q\geq 1$ için iyi bilinen kuvvet ortalama eşitsizliğini ve $|f'(a)|^q$ fonksiyonunun ikinci anlamda s-konveksliğini kullanarak Lemma 3.1.1. den,

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq\frac{b-a}{4}\left\{\int_0^1 t\left|f'\left(\frac{t}{2}a+\frac{2-t}{2}b\right)\right|dt+\int_0^1 t\left|f'\left(\frac{2-t}{2}a+\frac{t}{2}b\right)\right|dt\right\}$$

$$\leq\frac{b-a}{4}\left\{\left(\int_0^1 tdt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 t\left|f'\left(\frac{t}{2}a+\frac{2-t}{2}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_0^1 tdt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 t\left|f'\left(\frac{2-t}{2}a+\frac{t}{2}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$=\frac{b-a}{4}\left\{\left(\int_0^1 tdt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\left(\int_0^1 t\left|f'\left(\frac{t}{2}a+\frac{2-t}{2}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_0^1 t\left|f'\left(\frac{2-t}{2}a+\frac{t}{2}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]\right\}$$

$$\leq\frac{b-a}{4}\left(\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\left(\int_0^1 t\left[\left(\frac{t}{2}\right)^s|f'(a)|^q+\left(\frac{2-t}{2}\right)^s|f'(b)|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_0^1 t\left[\left(\frac{2-t}{2}\right)^s|f'(a)|^q+\left(\frac{t}{2}\right)^s|f'(b)|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$=\frac{b-a}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\left(\int_0^1 t\left[\left(\frac{t}{2}\right)^s|f'(a)|^q+\left(\frac{2-t}{2}\right)^s|f'(b)|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_0^1 t\left[\left(\frac{2-t}{2}\right)^s+\left(\frac{t}{2}\right)^s|f'(b)|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$=\frac{b-a}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\left(\frac{|f'(a)|^q}{2^s}\int_0^1 t^{s+1}dt+\frac{|f'(b)|^q}{2^s}\int_0^1 t(2-t)^s dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{|f'(a)|^q}{2^s}\int_0^1 t(2-t)^s dt+\frac{|f'(b)|^q}{2^s}\int_0^1 t^{s+1}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

buluruz. Burada $\int_0^1 t(2-t)^s dt$ integrali için Teorem 3.1.1. de yaptığımız gibi $u=(2-t)$ değişken değiştirmesi yaparsak

$$=\frac{b-a}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\left(\frac{|f'(a)|^q}{2^s}\cdot\frac{1}{s+2}+\frac{|f'(b)|^q}{2^s}\cdot\left(\frac{2^{s+2}}{s+1}-\frac{2}{s+1}-\frac{2^{s+2}}{s+2}+\frac{1}{s+2}\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{|f'(a)|^q}{2^s}\cdot\left(\frac{2^{s+2}}{s+1}-\frac{2}{s+1}-\frac{2^{s+2}}{s+2}+\frac{1}{s+2}\right)+\frac{|f'(b)|^q}{2^s}\cdot\frac{1}{s+2}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$=\frac{b-a}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\left(\frac{|f'(a)|^q}{2^s(s+2)}+\frac{|f'(b)|^q\left(2^{s+2}-(s+3)\right)}{2^s(s+1)(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{|f'(a)|^q\left(2^{s+2}-(s+3)\right)}{2^s(s+1)(s+2)}+\frac{|f'(b)|^q}{2^s(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

buluruz ve ispat tamamlanır. ■

Sonuç 3.1.1. Teorem 3.1.3. de $s=1$ alırsak (3.3) eşitsizliği aşağıdaki eşitsizliğe dönüşür:

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\leq\frac{b-a}{8}\left[\left(\frac{|f'(a)|^q+2|f'(b)|^q}{3}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{2|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{3}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmamızda s-konveks fonksiyonlar için H.-H. Eşitsizliğinin sol tarafıyla alakalı teoremler ve sonuçlar elde ettik. Lemma 3.1.1. deki özdeşlik kullanılarak elde etmiş olduğumuz eşitsizlikler gibi h-konveks, m-konveks, log-konveks, (α, m)-konveks fonksiyonlar içinde birçok yeni sonuçlar elde edilebilir. Bu problemleri de açık problem olarak okuyuculara bırakıyoruz.

5. KAYNAKLAR

Bayraktar M., Analiz, *Nobel Akademik Yayıncılık*, (**2010)**

Breckner W. W., Stetigkeitsaussagen für eine klasse verallgemeinerter konvexer funktionen in topologischen linearen raumen, *Pupl. Inst. Math*., 23 **(1978)** 13–20.

Carter M. and van Brunt B., The Lebesgue-Stieltjes integral: a practical introduction, *Springer-Verlag*, **(2000)**

Dragomir S.S. and Agarwal R.P., Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and trapezoidal formula, *Appl. Math. Lett*., 11 (5) **(1998)** 91-95.

Dragomir S.S. and Fitzpatrick S., The Hadamard's inequality for s-convex functions in the first sense, *Demonstratio Math*., 31 (3) **(1998)** 633-642.

Dragomir S.S. and Fitzpatrick S., The Hadamard's inequality for s-convex functions in the second sense, *Demonstratio Math.*, 32 (4) **(1999)** 687-696.

Dragomir S. S. and Pearce C. E. M., Selected topics on Hermite-Hadamard inequalities and applications, *RGMIA Monographs*, Victoria University, **(2000)**.

Hudzik H., Maligranda L., Some remarks on s-convex functions, *Aequationes Math*., 48 (**1994**) 100-111.

Kırmacı U.S., Inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to midpoint formula, *Appl. Math. Comp*., 147 **(2004)** 137-146.

Mitrinović D. S., Analytic inequalities, *Springer-Verlag*, **(1970)**

Musielak J., Orlicz spaces and modular spaces, lecture notes in mathematics, 1034, *Springer-Verlag*, **(1983).**

Pachpatte B.G., Mathematical inequalities, *North-Holland Mathematical Library*, 67 **(2005).**

Pećarić J., Proschan F. and Tong T. L., Convex functions, partial orderings, and statistical applications, *Academic Press*, Inc., **(1992)**

Roberts A. W. and Varberg D. E., Convex functions, *Academic Press*, **(1973)** Sarikaya M.Z., Yıldırım H., Hermite-Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities II, The Bulletin of The Iranian Math. Society, *Basımda.*

Young W. H., On classes of summable functions and their Fourier series, *Proc. Roy. Soc.*, A 87 **(1912)** 225-229

6. EKLER

EK-1. YAYIN BİLGİSİ

Tezin oluşumunda önemli bir rol oynayan s-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sol tarafıyla ilgili elde ettiğimiz eşitsizlikler aşağıdaki dergide belirtildiği gibi yayınlamıştır:

1) Sarikaya M. Z., Set E. and Ogulmus H., Some new inequalities of Hermite-Hadamard type for mappings whose derivatives are s-convex in the second sense, *International Journal of Modern Mathematical Sciences*, 8(3) **(2013)** 212-218.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: Ögülmüş, Hatice
Uyruğu	: TC
Doğum tarihi ve yeri	: 14.07.1988 Darende
Telefon	: 05423353244
Faks	:
E-posta	: haticeogulmus@hotmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Yüksek Lisans	Düzce Ü. /Matematik B.	2014
Lisans	Hacettepe Ü /Matematik Öğr.	2012
Lise	Sakarya Arifiye A. Ö. L.	2006

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2014	Camili Selçukbey Ortaokulu	Matematik Öğretmenliği

Yabancı Dil

İngilizce (YDS : 53.75)

Yayınlar

1. Sarikaya M. Z., Set E. and Ogulmus H., Some new inequalities of Hermite-Hadamard type for mappings whose derivatives are s-convex in the second sense, *International Journal of Modern Mathematical Sciences*, 8(3) **(2013)** 212-218.

2. Set E., Sarikaya M.Z. and Ogulmus H., Some new inequalities of Hermite Hadamard type for h-convex functions on the co-ordinates via fractional integrals, *Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics,* in press.

3. Sarikaya M. Z**.,** Ogulmus H. and Demircan T., On the generalized weighted integral inequality for double integrals, *International Journal of Modern Mathematical Sciences,* 10(1) **(2014)** 1-12.