T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

s-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN AĞIRLIKLI İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS

FATMA YILDIRIM

TEMMUZ 2015

DÜZCE

KABUL VE ONAY BELGESİ

Fatma YILDIRIM tarafından hazırlanan *s*-Konveks Fonksiyonlar İçin Ağırlıklı İntegral Eşitsizlikleri isimli lisansüstü tez çalışması, Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 22.06.2015 tarih ve 2015/569 sayılı kararı ile oluşturulan jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Üye
(Tez Danışmanı)
Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Düzce Üniversitesi

Üye
Doç. Dr. Nesip AKTAN
Düzce Üniversitesi

Üye
Yrd. Doç. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Tezin Savunulduğu Tarih : 21.07.2015

ONAY

Bu tez ile Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Fatma YILDIRIM' ın Matematik Anabilim Dalı' nda Yüksek Lisans derecesini almasını onamıştır.

Prof. Dr. Haldun MÜDERRİSOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

21.07.2015

Fatma YILDIRIM

Sevgili Aileme ve arkadaşlarıma

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim ve bu tezin hazırlanmasında süresince gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA' ya en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme ve çalışma arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

21 Temmuz 2015 **Fatma YILDIRIM**

İÇİNDEKİLER **Sayfa**

SİMGELER VE KISALTMALAR

f'	f in birinci türevi
f''	f in ikinci türevi
$\|f\|$	f in mutlak değeri
H.-H.	Hermite-Hadamard
I	R nin içinde bir aralık
I^o	I nin içi
K_s^1	Birinci anlamda s-konveks fonksiyon
K_s^2	İkinci anlamda s-konveks fonksiyon
$L[a,b]$	$[a,b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonların kümesi
R	Reel Sayılar Kümesi
R^n	n boyutlu Öklid Uzayı

ÖZET

s-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN AĞIRLIKLI İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Fatma YILDIRIM
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Temmuz 2015, 77 sayfa

Konvekslik kavramı ve genelleştirilmiş konvekslik kavramları matematiksel programlamada, mühendislikte, denge problemlerinde, varyasyonel problemlerde ve özellikle optimizasyon teorisinde çok önemli bir yer tutmaktadır. Genelleştirilmiş konvekslik kavramlarından biri de s-konvekslik kavramıdır. Son zamanlarda Hermite-Hadamard tipli eşitsizliklerin sağ tarafıyla ilgili bazı çalışmalar yapılmıştır. Bu tezde amacımız türevlerinin mutlak değeri s-konveks olan fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejer tipli eşitsizliklerin sağ tarafıyla ilgili bazı yeni eşitsizlikler elde etmektir.

Anahtar sözcükler: Hermite-Hadamard eşitsizliği, Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliği, s-konvekslik, Hölder eşitsizliği

ABSTRACT

ON THE WEIGHTED INTEGRAL INEQUALITIES FOR

s-CONVEX FUNCTION

Fatma YILDIRIM
Duzce University
Graduate School of Natural and Applied Science, Department of Mathematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Assoc.Prof.Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
July 2015, 77 pages

In this paper, we extend some estimates of the right hand side of a Hermite- Hadamard-Fejer type inequality for functions whose first derivatives absolute values are s-convex. The results presented here would provide extensions of those given in earlier works.

Keywords: Hermite- Hadamard type inequality, Hermite-Hadamard-Fejer type inequality s-convex function, Hölder's inequality

EXTENDED ABSTRACT

ON THE WEIGHTED INTEGRAL INEQUALITIES FOR

S-CONVEX FUNCTION

Fatma YILDIRIM
Duzce University
Graduate School of Natural and Applied Science, Department of Mathematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Assoc.Prof.Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
July 2015, 77 pages

1. INTRODUCTION:

Inequalities have proven to be one of the most important and far-reaching tools for the development of many branches of mathematics. There are many types of inequalities of importance. Integral and finite difference inequalities with explicit estimates are powerful mathematical appartus which aid the study of the qualitative behavior of solutions of various types of differential, integral and finite difference equations. Because of its usefulness and importance, such inequalities have attracted much attention and a great number of papers, surveys and monographs have appeared in the literature.

2. MATERIAL AND METHODS:

s- convex functions have been introduced by Breckner in (Breckner 1978) and they play an important role in optimization theory and mathematical economics. Various properties and applicatins of them can be found in (Dragomir and Fitzpatrik 1999).

3. RESULTS AND DISCUSSIONS:

Over the past two decades or so, the field of inequalities has undergone explosive growth. Concerning numerous analytic inequalities, in particular a great many research papers have been written related to the inequalities associated to the names of Cebysev, Grüss, Ostrowski, Hermite-Hadamard and Jensen. A number of surveys and monographs published during the past few years described much of the progress.

4. CONCLUSION AND OUTLOOK:

In this thesis, using functions whose derivatives absolute values are s- convex functions, we obtained new inequalities related to the left side of Hermite- Hadamard inequality by using new integral identities.

1. GİRİŞ

1.1. AMAÇ VE KAPSAM

Konvekslik, M.Ö. 250 yılında Archimedes'in ünlü değerini hesaplamasına kadar uzanan basit ve bilinen bir kavramdır. Konveks fonksiyonların sistematik araştırmasına ilk olarak 19. yüzyılın sonlarında rastlanmasına rağmen, 20. yüzyılın ortalarında matematiğin önemli bir alanı olarak görülmeye başlanmıştır. Konveks kümeler ve ilgili geometrik konular matematikçiler tarafından kullanılan 95 ana konudan biridir. Konvekslik, geometri, analiz, lineer cebir ve topolojide kullanılır ve sayı teorisi, klasik ekstremum problemleri, lineer programlama, oyun teorisi ve eşitsizlikler teorisi(lineer, klasik ve matris) gibi çeşitli konularda önemli rol oynar. Son yüzyılda gelişen disiplini ve artan uygulamalarıyla matematiksel analizin merkezi alanlarından biri olarak yerini almıştır.

Konveks terimine ilk olarak, 1881 de Ch. Hermite (1822-1901) in Mathesis 3 (1883, s.82) dergisine gönderdiği mektupta rastlanmıştır.
Eşitsizlikler alanında daha fazla dikkate alınan, daha az önemli sonuçlar vardır ama maalesef Hermite' in temel çalışmaları sık sık onun orjinal yazar kimliği verilmeden belirtilmiştir. Bu bağlamda temel matematikte ilgi çeken/çekmekte olan Hermite-Hadamard Eşitsizliğinin geometrik yorumu ve çoğu uygulamasıyla konveks fonksiyonun ilk temel sonucu olduğunu söyleyebiliriz. Çoğu matematikçi farklı konveks fonksiyon sınıfları (quasi-convex fonksiyonlar, fonksiyonların Godunova-Levin sınıfı, log-convex ve p-convex fonksiyonlar, r -convex fonksiyonlar, vb.) ve özel ortalamalar (p -logarithmic ortalamalar, identric ortalama, Stolarsky ortalamalar, vb.) için onu uygulamaya, genişletmeye, sadeleştirmeye ve genelleştirmeye çalışmaktadır.
Analitik eşitsizlikler yaygın olarak matematik ve birçok uygulamalı matematiğin çeşitli dallarında gelişiminin arkasındaki temel itici güçlerinden biri olarak kabul edilmektedir. Eşitsizlikler ile ilgili çalışmalar son on yıldan fazladır matematiğin birçok farklı alanlardaki uygulamalara nasıl büyük bir katkı sağlandığı açıkça ortadadır. Örneğin, Cebysev, Grüss, Yamuk, Ostrowski, Hadamard ve Jensen eşitsizlikler ile ilgili birçok

uygulama literatürde çok önemli bir yere sahiptir.

Hardy, Littlewood ve Polya tarafından yazılan "Inequalities" adlı eser eşitsizlikler teorisi için temel başvuru kaynağıdır. Okuyucu bu eserde konveks fonksiyonlarla ilgili klasik ve yeni eşitsizlikleri, problemleri, ispat yöntemlerini veya sonuçları bulabilir. Buna ek olarak (Beckenbach ve Bellman 1965) "Inequalities" adlı eser ve (Mitrinovic 1970) "Analytic Inequalities" adlı eseri de söyleyebiliriz. Bu kaynaklar eşitsizlikler teorisini araştırmak isteyen okuyucu için el altında bulunması gereken önemli kaynaklardır.

Daha sonra konveks fonksiyonların daha kapsamlı bir şekilde araştırmasını A. W. Roberts ve D. E. Varberg tarafından "Convex Functions" adlı eserde kaleme alındı. Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler hakkında (Pearić 1987) yılında "Convex Functions: Inequalities" adlı eseri yayınlamıştır. Ayrıca okuyucu çeşitli konveks fonksiyon sınıfları için, Hermite-Hadamard eşitsizliğinin detaylı anlatımını S.S. Dragomir ve C.E.M Pearce tarafından "Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications" adlı eserde bulabilir.

Son yıllarda klasik konvekslik tanımından daha genel konveks fonksiyon çeşitleri oluşturulmaktadır. Bunlardan birisi de (Breckner 1978) “Stetigkeitsaussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer funktionen in topologischen linearen Raumen” adlı çalışmada tanıtılan s -konveks fonksiyonlardır. s-konvekslik ile ilgili bazı özelliklere Hudzik ve Maligranda tarafından yazılan “Some remarks on s-convex functions” adlı çalışmada yer verilmiştir.

Bu makalede s-konveks fonksiyonların türevinin mutlak değerini kullanarak kesirli integraller içeren Hermite-Hadamard tipi ve Hermite-Hadamard-Fejer tipi yeni eşitsizlikler verilecektir.Bu sonuçlar burada yayınlanmıştır ve daha geniş çalışmalar yapılabilir.

1.2 GENEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezimizde kullanacağımız bazı tanım, teoremler ve gerekli görülen bazı önemli teoremlerin ispatları verilmiştir.

Tanım 1.2.1. (Mutlak Süreklilik) $[a,b]$ aralığının ayrık açık alt aralıklarının birikimi

$\{(a_i, b_i)\}_1^n$ için

$$\sum_1^n (b_i - a_i) < \delta$$

olduğunda,

$$\sum_1^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$$

olacak şekilde herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, bir $\delta > 0$ bulunabiliyorsa, f fonksiyonuna $[a,b]$ aralığında mutlak süreklidir denir. (Dönmez 2001)

Tanım 1.2.2 (Lipschitz Şartı) $[a,b]$ kapalı aralığında her x ve y noktaları için,

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

şartını sağlayan bir K sabiti varsa f, $[a,b]$ aralığında Lipschitz şartını sağlıyor denir.

Tanım 1.2.3. (Kuvvet Ortalama Eşitsizliği) $q \geq 1$ olsun. f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel değerli fonksiyonlar, $|f|$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise ,

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir. (Bayraktar 2006)

Tanım 1.2.4 (Konveks Fonksiyon) Her $u, v \in I$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$f(tu + (1-t)v) \leq tf(u) + (1-t)f(v)$$

eşitsizliğini sağlayan $f : I \subset \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.

Geometrik olarak bu eşitsizlik, f fonksiyonunun grafiği kirişlerinin altından geçer anlamındadır.

Aşağıdaki kriterler konveks fonksiyon tanımına eşdeğerdir.

a) I aralığı üzerinde f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart herhangi bir $c \in I$ noktası için, $f(x) - f(c)/(x-c)$ fonksiyonunun I aralığında artan olmasıdır.

b) $f : (a,b) \to \mathrm{R}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart her $c, x \in (a,b)$ için,

$$f(x) - f(c) = \int_c^x g(t)\,dt$$

olacak şekilde $g : (a,b) \to \mathrm{R}$ artan fonksiyonun olmasıdır.

c) f diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere, f in konveks olması için gerek ve yeter şart f' fonksiyonunun artan olmasıdır.

d) f'', (a,b) de mevcut olsun. Bu durumda f in konveks olması için gerek ve yeter şart $f''(x) \geq 0$ olmasıdır.

e) $f : (a,b) \to \mathrm{R}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart her $x_0 \in (a,b)$ için f fonksiyonun en az bir destek doğrusuna sahip olmasıdır. Yani

$$f(x) \geq f(x_0) + \lambda(x - x_0) \qquad \forall x \in (a,b)$$

eşitsizliğini sağlamasıdır. Burada λ, x_0 a bağlıdır ve eğer f' varsa o zaman $\lambda = f'(x_0)$ ya da $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$ ise $\lambda \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$ dır.

f) $f : (a,b) \to \mathrm{R}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart P, Q ve R noktaları f fonksiyonun grafiği üzerinde herhangi üç nokta olmak üzere,

$$eğimPQ \leq eğimPR \leq eğimQR$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Şimdi konveks fonksiyonların bazı özelliklerini verelim :

i. Kapalı aralıkta tanımlı konveks fonksiyon sınırlıdır.

ii. $f : I \to \mathrm{R}$ konveks fonksiyon ise, I° (I nın içi) inde herhangi bir $[a,b]$ kapalı aralığında Lipschitz şartını sağlar. Bu nedenle f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında da mutlak sürekli ve I° de süreklidir.

iii. $f : I \to \mathrm{R}$ konveks fonksiyon ise, I° de $f'_{-}(x)$ ve $f'_{+}(x)$ vardır ve artandır.

iv. $f : I \to \mathrm{R}$ fonksiyonu I açık aralığında konveks ise, sayılabilir bir E kümesi haricinde f' mevcuttur ve süreklidir.

v. k tane fonksiyon $\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ de konveks fonksiyonlar olsun. Bu takdirde;

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} a_j f_j(k),\ a_j > 0,\ (j = 1,2,3,...,k)$$

fonksiyonu da konvekstir.

vi. $g : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ azalmayan ve konveks fonksiyon ayrıca $h : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ konveks fonksiyon olsun. Bu takdirde; $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$, $f(x) = (g \circ h)(x)$ olarak tanımlanan f bileşke fonksiyonu da konvekstir.

vii. $g : \mathrm{R}^m \to \mathrm{R}$ konveks ve $h : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ fonksiyonu $h(x) = Ax + B$ formunda konveks olmak üzere (Burada A uygun matristir.)

$$f(x) = g(h(x))$$

fonksiyonu konveks fonksiyondur. (Pečarić ve diğ. 1992)

Tanım 1.2.5. (Birinci Anlamda s-Konveks Fonksiyon) $0 < s \leq 1$ olsun. $R_+ := [0, \infty)$ olmak üzere $f : R_+ \to R$ fonksiyonuna, her $u, v \in R_+$ ve $\alpha, \beta \geq 0$ için $\alpha^s + \beta^s = 1$ ise,

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v) \tag{2.1}$$

şartını sağlıyorsa birinci anlamda s-konveks fonksiyon denir. Reel fonksiyonların bu sınıfı K_s^1 ile gösterilir. (Dragomir ve Pearce)

Tanım 1.2.6. (İkinci Anlamda s-Konveks Fonksiyon) Her $u, v \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$ olacak şekilde $\alpha, \beta \geq 0$ ve $s \in (0,1]$ için,

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v) \tag{2.2}$$

sağlanıyorsa $f : R_+ \to R$ fonksiyonuna ikinci anlamda s-konveks fonksiyon denir. Reel fonksiyonların bu sınıfı K_s^2 ile gösterilir. (Breckner 1978)

Teorem 1.2.7. (Hermite-Hadamard Eşitsizliği) $f : [a,b] \to \mathrm{R}$ konveks fonksiyon olmak üzere,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.3}$$

eşitsizliğine Hermite- Hadamard Eşitsizliği denir. Burada f fonksiyonunun konkav olması eşitsizliği tersine çevirir. Klasik Hermite- Hadamard (H.-H.) eşitsizliği bir

$f:[a,b]\to R$ konveks fonksiyonunun ortalama değerinin hesabını sağlar. (Dragomir ve Pearce 2002)

Teorem 1.2.8. f : $[0,\infty)\to[0,\infty)$ ikinci anlamda s - konveks bir fonksiyon, $s\in(0,1]$, $a,b\in[0,\infty)$ ve $a,b\in R_+$ için $a<b$ olsun. $f\in L^1([a,b])$ ise

$$2^{s-1}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le\frac{f(a)+f(b)}{s+1}. \tag{2.4}$$

eşitsizliği verilir.

İspat. f fonksiyonu ikinci anlamda s -konveks olduğundan, her $t\in[0,1]$ için

$$f(ta+(1-t)b)\le t^s f(a)+(1-t)^s f(b)$$

vardır. Bu eşitsizliği $[0,1]$ aralığı üzerinde integrallenirse,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt &\le f(a)\int_0^1 t^s dt+f(b)\int_0^1(1-t)^s dt\\ &=\frac{f(a)+f(b)}{s+1}\end{aligned}$$

elde edilir. $x=ta+(1-t)b$ değişken değiştirmesi ile,

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

olur, (2.4) deki ikinci eşitsizlik ispatlanır.

(2.4) de birinci eşitsizliği ispatlamak için her $x,y\in I$ için geçerli olan

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\frac{f(x)+f(y)}{2^s}$$

eşitsizliğini göz önüne alalım. $x=ta+(1-t)b$ ve $y=(1-t)a+tb$ ile $t\in[0,1]$ olsun. O halde her $t\in[0,1]$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)}{2^s}$$

eşitsizliği elde edilir. ■

Yardımcı Teorem 1.2.9. $f: I^\circ \subseteq R \to R$ fonksiyonu (a,b) üzerinde diferansiyellenebilir ve $a<b$ olsun. Şayet $f' \in L[a,b]$ ise aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\frac{f(a)-f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_0^1 (1-2t)f'(ta+(1-t)b)dt \qquad (2.5)$$

İspat. Kısmi integrasyon yardımıyla

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (1-2t)f'(ta+(t-1)b)dt \\ &= \frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}(1-2t)\Big|_0^1 + 2\int_0^1 \frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}dt \\ &= \frac{f(a)+f(b)}{b-a} - \frac{2}{b-a}\times\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 1.2.10. $f: I^\circ \subseteq R \to R$ fonksiyonu (a,b) üzerinde diferansiyellenebilir ve $a<b$ olsun. Şayet $|f'| \in L[a,b]$ ise aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{(b-a)(|f'(a)|+|f'(b)|)}{8} \qquad (2.6)$$

eşitsizliği vardır.

İspat: Yardımcı Teorem 1.2.9 u kullanarak;

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|=\left|\frac{b-a}{2}\int_0^1 (1-2t)f'(ta+(1-t)b)dt\right|$$
$$\leq \frac{b-a}{2}\int_0^1 (1-2t)f'(ta+(1-t)b)dt$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\int_0^1 (1-2t)\left[t\left|f'(a)\right|+(1-t)\left|f'(b)\right|\right]dt$$
$$=\frac{(b-a)\left(\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right)}{2}\int_0^1 \left|1-2t\right|tdt$$
$$=\frac{(b-a)\left(\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right)}{8}$$

bulunur ve ispat tamamlanır. ■

Teorem 1.2.11. (Hermite-Hadamard-Fejer Eşitsizliği) $f:[a,b]\to R$, bir konveks fonksiyon olsun. $w:[a,b]\to R$ negatif olmayan, integrallenebilir ve $x=\frac{a+b}{2}$ 'de simetrik ise

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b w(x)dx \leq \int_a^b f(x)w(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b w(x)dx$$

eşitsizliği sağlanır. (Fejer 1906)

Yardımcı Teorem 1.2.12. $f:I^0\subset R\to R$ be diferansiyellenebilir bir bağıntı olsun. $w:[a,b]\to(0,\infty)$ diferansiyellenebilir bir bağıntı ve $a,b\in I^0$ için a < b olmak üzere olsun. Eğer $f'\in L[a,b]$ ve $t\in[0,1]$ için

$$p(t)=\int_t^1 w(as+(1-s)b)ds-\int_0^t w(as+(1-s)b)ds$$

ise

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b w(x)dx-\int_a^b f(x)w(x)dx=\frac{(b-a)^2}{2}\int_0^1 p(t)f'(ta+(1-t)b)dt$$

eşitliği sağlanır. (Sarıkaya 2012)

Teorem 1.2.13. $f : I^0 \subset R \to R$ diferansiyellenebilir bir bağıntı olsun. $w : [a,b] \to [0,\infty)$ diferansiyellenebilir bir bağıntı ve $\frac{a+b}{2}$ için simetrik olmak üzere $a,b \in I^0$ için $a<b$ olsun. Eğer $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde konveks ise $t \in [0,1]$ ve

$g(t) = \left| \int_{a+(b-a)t}^{b-(b-a)t} w(x)dx \right|$ için

$$\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b w(x)dx - \int_a^b f(x)w(x)dx \right|$$
$$\leq \frac{b-a}{2} [\int_0^1 (g(t))^p dt]^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği sağlanır. (Sarıkaya 2012)

Tanım 1.2.14. (Riemann-Liouville integrali) $f \in L_1[a,b]$ için Riemann-Liouville integralleri $a>0$ ve $a \geq 0$ için sırasıyla $J_{a^+}^{\alpha} f$ ve $J_{b^-}^{\alpha} f$

$$J_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, x>a$$

ve

$$J_{b^-}^{a} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt, x<b$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $\Gamma(\alpha)$ Gamma fonksiyonudur ve $J_{a^+}^{0} f(x) = J_{b^-}^{0} f(x) = f(x)$ dır.

Yardımcı Teorem 1.2.15. $a<b$ olmak üzere $f : [a,b] \to R$ (a,b) üzerinde diferansiyellenebilir bir bağıntı olsun.Eğer $f' \in L[a,b]$ ise,

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}[J_{a}^{\alpha}+f(b)+J_{b}^{a}-f(a)]=\frac{b-a}{2}\int_{0}^{1}[(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}]f'(ta+(1-t)b)dt.$$

eşitliği sağlanır. (Sarıkaya 2013)

Teorem 1.2.16. (Hölder Eşitsizliği) $x_1,...,x_n$, $y_1,...,y_n>0$, $p,q>1$ öyle ki $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\leq\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.7}$$

eşitsizliğine Hölder Eşitsizliği denir. Özel olarak $p=q=2$ seçilirse yukarıdaki eşitsizlik Cauchy- Buniakowsky- Schwartz eşitsizliği elde edilir. (Bayraktar 2006)

Tanım 1.2.17. (İntegraller İçin Hölder Eşitsizliği) $p>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olsun. f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel değerli fonksiyonlar, $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b|f(x)g(x)|dx\leq\left(\int_a^b|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b|g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.8}$$

eşitsizliği geçerlidir. (Bayraktar 2006)

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1 KONVEKS FONKSİYONLARI İÇEREN BAZI GENEL EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde iyi bilinen Jensen- Steffensen eşitsizliği ile ilgili son yıllarda çeşitli araştırmacılar tarafından oluşturulan konveks fonksiyonlar içeren bazı eşitsizlikleri vereceğiz.

Teorem 2.1.1. (Jensen-Steffensen eşitsizliği) $x_i \in I, 1 \le i \le n$ olacak şekilde *x* ve *p* reel sayıların sıralı *n*- lisi, *I, R* de bir aralık $P_n = \sum_{i=1}^{n} p_i > 0,\ f : I \to R$ konveks ve her monotonik n-sıralı olması için

$$0 \le P_k \le P_n, k = 1, 2, ..., n-1 \tag{M}$$

olmasıdır. Bu durumda Jensen - Steffensen eşitsizliği

$$f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} P_i X_i\right) \le \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} P_i f(x_i) \tag{2.9}$$

dır. 1981 de Pecaric (2.9) eşitsizliğin ters olmasının sağlaması için gerek ve yeter koşulu vererek

$$f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} P_i X_i\right) \ge \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} P_i f(x_i) \tag{2.10}$$

ispatını vermiştir.

Fuch' un bir genellemesi olan aşağıdaki eşitsizliği verelim.

Yardımcı Teorem 2.1.2. $a_1 \ge ... \ge a_s, b_1 \ge ... \ge b_s$ ve $q_1, ..., q_s$ reel sayılar olmak üzere; $1 \le k \le s-1$ için

$$\sum_{i=1}^{k} q_i a_i \le \sum_{i=1}^{n} q_i b_i ,$$

ve

$$\sum_{i=1}^{s} q_i a_i = \sum_{i=1}^{s} q_i b_i$$

olsun. Bu durumda her f konveks fonksiyonu için,

$$\sum_{i=1}^{s} q_i f\left(a_i\right) \le \sum_{i=1}^{s} q_i f\left(b_i\right) \tag{2.11}$$

dır.

Teorem 2.1.3. x reel sayılarda artmayan bir sıralı n- li dizi, $x_i \in I,\ 1 \le i \le n$ ve p reel sıralı n- li olsun. Öyle ki;

$$x_k \ge \bar{x} = \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^{n} P_i X_i \quad \text{olacak şekilde her } k \text{ değeri için} \quad \sum_{i=1}^{k} p_i \left(x_i - x_j\right) \le 0$$

$$\tag{2.12}$$

$$x_k \le \bar{x} \quad \text{olacak şekilde} \quad \text{her } k \text{ değer için} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - x_j\right) \ge 0$$

olacak şekilde $x_{j,}\ j \in \left(1,...,n\right)$ olsun. Bu durumda eğer $\bar{x} \in I$ ise her $f : I \to R$ konveks fonksiyonu için

$$f\left(\frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^{n} P_i X_i\right) \ge \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^{n} P_i f\left(x_i\right)$$

dır. Eğer (2.12) sağlanıyorsa bu durumda

$$f\left(\frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^{n} P_i X_i\right) \le \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^{n} P_i f\left(x_i\right)$$

dır.

İspat. $\bar{x} \in [x_r+1, x_r]$ olsun. Bu durumda

$(\mathbf{i})\, s = n+1; q_i = p_i, a_i = x_i, 1 \le i \le r; q_{r+1} = -P_n, a_{r+1} = \bar{x}; q_i = p_{i-1},$
$a_i = x_{i-1}, r+2 \le i \le n+1; b_i = x_j, 1 \le i \le n+1$

ve

$(\mathbf{ii})\;\; s = n+1;\;\; a_i = x_j,\; 1 \le i \le n+1;\;\; q_i = p_i, b_i = x_i, 1 \le i \le r;$
$q_{r+1} = -P_n, b_{r+1} = \bar{x}; q_i = p_{i-1}, b_i = x_{i-1}, r+2 \le i \le n+1.$

yardımı ve Yardımcı Teorem 2.1.2 ve Teorem 2.1.3 kullanarak, (2.10) eşitsizliğinin sadece $x_1 \le \bar{x}$ ve $x_n \ge \bar{x}$ için var olduğu açıkça görülür.

Teorem 2.1.4. x ve p reel sayılarda *n*-li sıralı iki terim olsun. Öyle ki $x_i \in I,\ 1 \le i \le n,\ \bar{x} \in I$ ve $P_n > 0$ dır. (2.10) eşitsizliğinde $f : I \to R$ fonksiyonu konveks fonksiyon ve her monoton sıralı *n*- li için sağlanması için gerek ve yeter şart $\overline{P_k} = P_n - P_{k-1}$ olmak üzere

$$P_k \le 0, \quad k < m, \quad \text{ve} \quad \overline{P_k} \le 0 \quad \text{k>m} \tag{2.13}$$

olacak şekilde $m \in (1, ..., n)$ var olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki (2.13) sağlansın. O halde

$$\sum_{i=1}^{k} P_i (x_i - x_m) = (x_k - x_m) P_k + \sum_{i=1}^{k-1} P_i (x_i - x_{i+1})$$

ve (2.14)

$$\sum_{i=k}^{n} P_i (x_i - x_m) = (x_k - x_m) \overline{P_k} + \sum_{i=k+1}^{n} \overline{P_i} (x_i - x_{i-1})$$

özdeşliklerini kullanırsak, $x_1 \ge ... \ge x_n$ durumunda

$$\sum_{i=1}^{k} P_i\left(x_i - x_m\right) \le 0, \qquad 1 \le k \le m,$$

$$\sum_{i=k}^{n} P_i\left(x_i - x_m\right) \ge 0, \qquad m \le k \le n \tag{2.15}$$

elde edilir. Diğer yandan $\bar{x} \in \left[x_{r+1}, x_r\right]$ ve $m \le r$ olsun. Eğer $1 \le k \le m$ ve $r \le k \le n$ ise $j = m$ için (2.12) deki şartlar sağlanır . Kabul edelim ki $m < k_1 < r$ olsun . Buradan (2.12) koşulu geçerlidir, yani $\sum_{i=1}^{k_1} P_i\left(x_i - x_m\right) \ge 0$ yazılır. (2.15) 'den yararlanılarak, $\sum_{i=k_1+1}^{k_1} P_i\left(x_i - x_m\right) \ge 0$ olduğundan $\sum_{i=1}^{n} P_i\left(x_i - x_m\right) \ge 0$ elde edilebilir. Yani, $\bar{x} \ge x_m$ çelişki olduğu açıktır. Benzer şekilde, $m > r$ ya da $x_1 < \bar{x}$, $\bar{x} < x_n$ alınırsa (2.10) elde edilir.

Şimdi, kabul edelim ki (2.10) sağlansın. $f\left(x\right) = x^2$, $x_i = x_i = 0$, $i = 1,...,k-1$, ve $x_i = 1$, $i = k,...,n$ olsun. Buradan (2.10), $\left(\overline{P_k} / P_n\right)^2 \ge \overline{P_k} / P_n$ haline gelir. Bunun sonucu olarak, $\overline{P_k} \le 0$ ya da $P_{k-1} \le 0$, $k = 2,...,n$ olur. Son olarak, $k < m$ ve $\overline{P_k} \le 0$ olsun. $x_i = 0,\ 1 \le i \le k-1,\ x_i = 1,\quad k \le i \le m-1$ ve $x_i = 1 + \varepsilon, \quad m \le i \le$ olsun. Buradan $\bar{x} = \left(\overline{P_k} + \overline{P_m}\right) / P_n$ olur. Bunun sonucu olarak, $\overline{P_k} \ge 0$ olur. ε yeterince küçük bir sayı olmak üzere ve $\bar{x} < 1$ olsun. $z \ge 1$ için $f\left(z\right) = z - 1$ ve $z < 1$ *için* $f\left(z\right) = 0$ olsun. (2.10) deki eşitsizlik $\left(1 / P_n\right) \sum_{i=m}^{n} \varepsilon p_i \le 0$ halini alır. Bunun sonucu olarak $\overline{P_m} \le 0$ olur. Benzer şekilde $P_m \le 0$ olduğunu bulunabilir. Bu $P_k \le 0$ olduğu anlamına gelir. Bu yüzden bazı $m \in \left(1,...,n\right)$ aralığı için bu eşitsizliği sağlamış olur. ■

Hatırlatma 2.1.5. Benzer şekilde (2.9) da ispatlanabilir. Farz edelim (M) şartı sağlansın. (2.14) deki belirtileri kullanarak her $m = 1,...,n,$ değeri için $x_1 \ge ... \ge x_n$ sonucu elde edilebilir. $\bar{x} \in \left[x_{r+1}, x_r\right]$ olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda $j = r$ ve $j = r + 1$ için (1.12) ters eşitsizliği sağlanır. Yani (2.9) geçerlidir. Şimdi kabul edelim ki (2.9) sağlansın.

Buradan, $1 \le i \le k$ olmak üzere $f\left(x\right) = x^2$, $x_i = 1$ ve $x_i = 0$ için $k + 1 \le i \le n$ olsun.

Buradan (2.9) eşitsizliği $\left(P_k / P_n\right)^2 \leq P_k / P_n$ halini alır. Yani $0 \leq P_k \leq P_n,\ 1 \leq k \leq n$ elde edilir.

Sonuç 2.1.6. $x_1 \leq ... \leq x_m \leq 0 \leq x_{m+1} \leq ... \leq x_n,\ \ m \in (0,1,...,n), x_i \in I,\ 1 \leq i \leq n,\ 0 \in I$, x ve p de reel bir sıralı n- li olsun.

(i) $f : I \to R$ tanımlı her konveks fonksiyon için

$$\sum_{i=1}^{n} p_i f\left(x_i\right) \geq f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(p_i - 1\right)\ f\left(0\right) \tag{2.16}$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $0 \leq P_k \leq 1,\ 1 \leq k \leq m$ ve $0 \leq \overline{P_k} \leq 1,\ m+1 \leq k \leq n$ olmasıdır.

(ii) $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \in I$ olsun. (2.16) eşitsizliğinin tersinin sağlanması için gerek ve yeter şart

$$P_i \leq 0, \quad i < j \qquad P_i \geq 1, \quad j \leq i \leq m, \qquad \overline{P_i \leq 0} \quad i \leq m+1,$$

olacak şekilde $j \leq m$ ya da

$$P_i \leq 0, \quad i \leq m, \qquad \overline{P_i} \geq 1, \quad m+1 \leq i \leq j, \quad \text{ve } \ \overline{P_i} \leq 0, \quad i > j$$

olacak şekilde $j \geq m$ var olmasıdır.

İspat. $n+1$ için $x_i = x_i$ ve $p_i = p_i,\ 1 \leq i \leq n+1$ için Teorem 2.1.3 ve Teorem 2.1.4 sağlansın. O halde $x_i = x_i,\ p_i = p_i,\ 1 \leq i \leq m,\ \ x_{m+1} = 0,\ \ p_{m+1} = 1 - P_n,\ \ x_i = x_i,$ $p_i = p_{i-1},\ m+2 \leq i \leq n+1$ yazılırsa Sonuç 2.1.6 elde edilir. ■

Teorem 2.1.4 ün basit bir sonucu olarak sıradaki sonuca bakalım.

Sonuç 2.1.7. $x_i \in I,\ 1 \leq i \leq n,\ \bar{x} \in I$ ve $P_m > 0,\ \ P_i \leq 0,\ \ i \neq m,\ \ P_n > 0$ olacak

şekilde x ve p reel sayılarda iki tane sıralı n- li dizisi olsun ve $f : I \to R$ her konveks fonksiyonu (2.10) eşitsizliği sağlanır.
Sınırlı konveks fonksiyonlar için bazı eşitsizlikleri aşağıdaki şekilde verelim. (Dragomir ve Ionescu 1990)

Tanım 2.1.8. $g : I \to R$ tanımlı bir konveks fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$\left|\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda) y)\right|$$

$$\leq \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y) - g(\lambda x + (1-\lambda) y) \qquad (2.17)$$

ise $f : I \to R$ reel tanımlı fonksiyonu I aralığında sınırlı g-konveks olarak tanımlanır. Şimdi aşağıdaki önemli bir sonucu verelim.

Yardımcı Teorem 2.1.9. g, I aralığında konveks bir fonksiyon ve $f : I \to R$ tanımlı bir fonksiyon olsun. Buna göre aşağıdaki durumlar birbirine denktir.

(i) f , I aralığı üzerinde g-konveks

(ii) $g - f$ ve $g + f$ I aralığında konveks ve

(iii) $f = (h - l)/2$ ve $g = (h + l)/2$ olacak şekilde I üzerinde h ve l gibi iki konveks dönüşüm vardır.

İspat. (i)$\Leftrightarrow$(ii). (2.1.9) koşulu her $x, y \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$\lambda\left(g(x) - f(x)\right) + (1-\lambda)\left(g(y) - f(y)\right) \geq g(\lambda x + (1-\lambda) y) - f(\lambda x + (1-\lambda) y),$$

$$\lambda\left(g(x) + f(x)\right) + (1-\lambda)\left(g(y) + f(y)\right) \geq g(\lambda x + (1-\lambda) y) + f(\lambda x + (1-\lambda) y)$$

denkliğini sağlar. Yani (2.17) sağlanması için gerek ve yeter şart $g - f$ ve $g + f$, I aralığında konveks fonksiyon olmasıdır.

(ii)$\Leftrightarrow$(iii) İspatı açıktır. ■

$F(I)$, I aralığında tanımlanmış reel değerli fonksiyonların bir lineer uzayı ve $J : F(I) \to R$ olsun. Bu durumda J fonksiyoneli aşağıdaki özellikleri sağlar.

(J_1) Her $a, \beta \in R$ ve $f, g \in F(I)$ için $J(af + \beta g) = aJ(f) + \beta j(g)$ ve

(J_2) I aralığındaki tüm f konveks *f*onsiyonlar için $J(f) \geq 0$ sağlanır.

Aşağıda vereceğimiz sonuçlarımız için aşağıdaki yardımcı teorem çok önemli rol oynamaktadır.

Yardımcı Teorem 2.1.10. J fonksiyoneli $(J_1),(J_2)$ şartlarını sağlıyor olsun. Bu durumda her g konveks fonksiyonu ve f fonksiyonu I üzerinde g-konveks fonksiyon için

$$|g(f)| \leq J(g) \tag{2.18}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. g bir konveks fonksiyon ve f, I aralığı üzerinde g-konveks fonksiyon olsun. Yardımcı Teorem 2.1.10 den yararlanarak, $g - f$ ve $g + f$ I aralığında konveks olduğunu biliyoruz. Buradan $-J(g) \leq J(f) \leq J(g)$ olduğundan

$$0 \leq J(g - f) = J(g) - J(f) \quad \text{ve} \quad 0 \leq J(g + f) = J(g) + J(f)$$

yazılır. Böylece,

$J(g) \geq 0$ olduğundan (2.18) eşitsizliği ispat edilmiş olur. ■

Aşağıda vereceğimiz teorem Jensen eşitsizliğinin bir genelleştirmesidir. (Dragomir ve Ionescu 1990)

Teorem 2.1.11. g fonksiyonu I aralığında konveks bir fonksiyon olsun ve $f : J \to R$ tanımlı konveks fonksiyon olsun.Bu durumda her $x_i \in I$, $p_i \geq 0$, $1 \leq i \leq n$, için $P_n = \sum_{i=1}^{n} p_i > 0$ olacak şekilde

$$\left|\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) - f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)\right|$$

$$\leq \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i g(x_i) - g\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \tag{2.19}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Burada,

$$J(f) = \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) - f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right), \qquad f \in F(I)$$

fonksiyonelini göz önüne alalım.Bu durumda , J ; $(J_1) ve (J_2)$ koşullarını sağlar.O halde Yardımcı Teorem 2.1.10 uygulanarak (2.19) eşitsizliği elde edilir. İspat tamamlanmış olur. ■

Teorem 2.1.12

$$\sum_{i=1}^{k} q_i a_i \leq \sum_{i=1}^{k} q_i b_i, \quad 1 \leq k \leq s-1 \quad \sum_{i=1}^{s} q_i a_i = \sum_{i=1}^{s} q_i b_{i.}$$

olacak şekilde $a_1 \geq ... \geq a_s$, $b_1 \geq ... \geq b_s$ ve $q_1, ..., q_s$ reel sayıları olsun. Eğer g , I aralığında konveks fonksiyon ve f , I aralığında g-konveks fonksiyon ise

$$\left|\sum_{i=1}^{s} q_i \left(f(b_i) - f(a_i) \right)\right| \leq \sum_{i=1}^{s} \left(g(b_i) - g(a_i) \right) \tag{2.20}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat . Aşağıdaki fonksiyoneli göz önünde bulunduralım.

$$J(f) = \sum_{i=1}^{s} q_i \left(f(b_i) - f(a_i) \right), \quad f \in F(I)$$

O halde J , Fuch eşitsizliği yardımmıyla $\left(J_1\right),\left(J_2\right)$ koşullarını sağlar. O halde Yardımcı Teorem 2.1.10 u kullanarak, (2.20) eşitsizliğinin sonucunu çıkarmış oluruz.

Teorem 2.1.13. $x_i \in I,\quad 1 \le i \le n,$ ve I , R de bir aralık olmak üzere, $P_n > 0$ olacak şekilde x ve p reel sayılar kümesinin iki tane sıralı n- li terimi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) $g : I \to R$ tanımlı her konveks fonksiyon için veya her g-konveks f fonksiyonu için ve her x monoton sıralı n- lisi için (2.19) eşitsizliği sağlanır.

(ii) Her $k = 1, 2, ..., n-1$ için $0 \le P_k \le P_n$ dır.

İspat. (i) $\Rightarrow$(ii) Koşulunun ispatı Jensen–Steffensen eşitsizliğidir.

(ii) $\Rightarrow$(i) Aşağıdaki fonksiyoneli göz önüne alalım.

$$J\left(f\right) = \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i f\left(x_i\right) - f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right), \qquad f \in F\left(I\right)$$

Buradan $J,\ \left(J_1\right),\left(J_2\right)$ şartlarını sağladığında, Jensen–Steffensen eşitsizliği yardımıyla Yardımcı Teorem 2.1.10 uygulanarak (2.19) elde edilir. ■

Teorem 2.1.14. x reel sayılarda artmayan bir sıralı n- lisi, $x_i \in I,\quad 1 \le i \le n$, p reel sıralı n- li ve

$$x_k \ge \overline{x} = \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \quad \text{olacak şekilde her } k \text{ değeri için} \qquad \sum_{i=1}^{k} p_i\left(x_i - x_j\right) \le 0$$

$$\tag{2.21}$$

$$x_k \le \overline{x} \qquad \text{olacak şekilde her } k \text{ değeri için} \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i\left(x_i - x_j\right) \ge 0$$

olmak üzere $x_j,\ j \in (1, 2, ..., n)$ var olsun. (Eğer ($x_1 < \overline{x}$) alınırsa (2.21) ün birinci şartı anlamsız hale gelir. Eğer $x_n \ge \overline{x}$ alınırsa (2.21) ün ikinci şartı anlamsız hale gelir.)

Eğer $\overline{x} \in I$ ise bu durumda her $f: I \to R$ tanımlı g-konveks fonksiyon ve $g: I \to R$ tanımlı konveks fonksiyonlar için

$$g\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) - \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i g(x_i) \geq \left| f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) - \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)\right| \qquad (2.22)$$

eşitsizliği vardır. Eğer (2.21) deki bu eşitsizliğin tersi sağlanırsa, (2.19) eşitsizliği sağlanmış olur.

2.2 HADAMARD EŞİTSİZLİKLERİ

1893 yılında J. Hadamard analizdeki ana eşitsizliklerin bir tanesini incelemiştir.Bu eşitsizlik bizim de çok iyi bildiğimiz gibi literatüre Hadamard eşitsizliği olarak geçen eşitsizliktir. Yıllar boyunca bazı yazarlar bu eşitsizliklerin değişik versiyonlarını kullanarak Hadamard eşitsizliklerinin farklı tanımlarını bulmaya yönelmişlerdir. Bu bölümde, Hadamard eşitsizliğiyle birlikte bu eşitsizliğe bağlı bir kaç yıl içinde yayınlanmış eşitsizlikleride inceleyeceğiz.

Teorem 2.2.1. (Hadamard Eşitsizliği) R reel sayılar kümesi ve $I = [a,b]$ aralığında olmak üzere $f: I \to R$ tanımlı konveks bir fonksiyon ise

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \qquad (2.23)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. f in I aralığında konveks olduğundan düşünürsek, her $t \in [0,1]$ için

$$f\left(ta+(1-t)b\right) \leq tf(a)+(1-t)f(b) \qquad (2.24)$$

dır. (2.24) eşitsizliğinin, her iki tarafı $[0,1]$ üzerinde t 'ye göre integral alınırsa,

$$\int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right)\,dt \le \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.25}$$

yazılır. Diğer taraftan f fonksiyonu I aralığında konveks olduğundan için her $t\in[0,1]$ için

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f\left(\frac{ta+(1-t)b}{2}+\frac{(1-t)a+tb}{2}\right) \\ &\le \frac{1}{2}\left[f\left(ta+(1-t)b\right)+f\left((1-t)a+tb\right)\right] \end{aligned} \tag{2.26}$$

yazılır. (2.26) eşitsizliğini $t\in[0,1]$ için integrallersek,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right)dt+\int_0^1 f\left((1-t)a+tb\right)dt\right] \tag{2.27}$$

yazılır. $1-t=s$ dönüşümü yardımıyla (2.27) eşitsizliğindeki ikinci integralin sağ tarafı için

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\le \frac{1}{2}\left[\int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right)\,dt+\int_0^1 f\left(sa+(1-s)b\right)ds\right] \\ &= \int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right)dt \end{aligned} \tag{2.28}$$

olur. O halde (2.25) ve (2.28) eşitsizliklerinden

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right)\,dt \le \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.29}$$

yazılır. $ta+(1-t)b=x$ değişken değişimi yapılırsa

$$\int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right)\, dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx \tag{2.30}$$

olur. (2.29) ve (2.30) kullanarak (2.23) eşitsizliği ispatlanmış olur.■

$p,q>0,\ I\supset[a,b]$ aralığında f fonksiyonu konveks ve $v=(pa+qb)/(p+q)$ için

$$f\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right)\le \frac{1}{2y}\int_{v-y}^{v+y} f(t)\, dt \le \frac{pf(a)+qf(b)}{p+q} \tag{2.31}$$

eşitsizliğini $0<y\le\left[(b-a)/(p+q)\right]\min(p,q)$ kullanarak (2.31) eşitsizliğini aşağıdaki teorem ile verebiliriz. (A. Lupas 1976)

Burada $p=q=1,\ y=(b-a)/2$ alınırsa Hadamard eşitsizliği elde edilmiş olur.

Teorem 2.2.2. Eğer $p,q>0,\ I\supset[a,b]$ aralığında f konveks bir fonksiyon ise ve $v=(pa+qb)/(p+q)$ ise

$$\begin{aligned} f\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right) &\le \frac{1}{2y}\int_{v-y}^{v+y} f(t)\, dt \\ &\le \frac{1}{2}\left[f(v-y)+f(v+y)\right] \\ &\le \frac{pf(a)+qf(b)}{p+q} \end{aligned} \tag{2.32}$$

dır.

İspat. min (p,q) değeri için $0<y\le\left[(b-a)/(p+q)\right]$ olsun. Buradan, $(0<p\le q,\ 0<q<p)$ gözönüne alalım. $a\le v-y<v+y\le b$ olduğunu görmek kolay bir durumdur. Böylece f fonksiyonu $[v-y,v+y]$ aralığında tanımlanmış olur. (2.23) deki Hadamard eşitsizliğini kullanarak ve a,b yerine sırasıyla $v-y,v+y$ yazılırsa,

$$f(v)\le \frac{1}{2y}\int_{v-y}^{v+y} f(t)\, dt \le \frac{1}{2}\left[f(v-y)+f(v+y)\right] \tag{2.33}$$

eşitsizliği yazılır.

Konveksliğin tanımından; $a \le x_1 < x_2 < x_3 \le b$ olduğundan,

$$f(x_2) \le \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3)$$

elde edilir. Buradan da $x_1 = a,\ x_3 = b$ alınırsa,

$$f(v-y) \le \frac{b-(v-y)}{b-a} f(a) + \frac{v-y-a}{b-a} f(b), \tag{2.34}$$

$$f(v+y) \le \frac{b-(v+y)}{b-a} f(a) + \frac{v+y-a}{b-a} f(b), \tag{2.35}$$

eşitsizliği yazılır. Böylece (2.33)–(2.35) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} f(v) &\le \frac{1}{2y}\int_{v-y}^{v+y} f(t)\,dt \\ &\le \frac{1}{2}\left[f(v-y)+f(v+y)\right] \\ &\le \frac{1}{2}\left[\frac{b-v}{b-a} f(a) + \frac{v-a}{b-a} f(b)\right] \\ &= \frac{pf(a)+qf(b)}{p+q} \end{aligned}$$

şeklinde (2.32) eşitsizliğini ispatlanmış olur. ■

Hadamard eşitsizlikleri için yeni teoremler aşağıdaki gibi yeni sonuçlar verilmiştir. (Dragomir, S.S. ve Ionescu 1990)

Teorem 2.2.3 $f:[a,b] \to R$ bir konveks dönüşüm olsun. Her $t \in [a,b]$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f\left(tx+(1-t)y\right)\,dx\,dy$$

$$\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \qquad (2.36)$$

$$\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $x, y \in [a,b]$ ve her $t \in [0,1]$ için f , $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon olduğundan

$$f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y)$$

eşitsizliği yazılır. Bu eşitsizliği $[a,b]\times[a,b]$ aralığında x ve y 'e göre integrallersek,

$$\int_a^b\int_a^b f(tx+(1-t)y)\,dx\,dy \leq \int_a^b\int_a^b [tf(x)+(1-t)f(y)]\,dx\,dy$$
$$=(b-a)\int_a^b f(x)\,dx$$

iki katlı integralini elde ederiz. Bu da (2.36) eşitsizliğinin ikinci kısmını olup, Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafını kullanarak ispatın bir kısmı tamamlanmış olur.
Diğer yandan, çift katlı integraller için Jensen eşitsizliğini kullanarak,

$$f\left(\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b (tx+(1-t)y)\,dx\,dy\right) \leq \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f(tx+(1-t)y)\,dx\,dy$$

elde etmiş oluruz. Böylelikle

$$\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b (tx+(1-t)y)\,dx\,dy = \frac{a+b}{2}$$

olduğundan ispat tamamlanır. ■

Sonuç 2.2.4. Teorem 2.2.3 deki gibi bir *f* fonksiyonu ele alalım. Bu durumda

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f\left(\frac{x+y}{2}\right)dx\,dy$$
$$\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$
$$\le\frac{f(a)+f(b)}{2} \qquad (2.37)$$

elde edilir.

Teorem 2.2.5. $f:[a,b]\to R$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde konveks bir dönüşüm olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f\left(\frac{x+y}{2}\right)dx\,dy\le\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b\int_0^1 f\left(tx+(1-t)y\right)dx\,dy\,dt$$
$$\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \qquad (2.38)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $g:[a,b]\to R$ olmak üzere

$$g(t)=\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f\left(tx+(1-t)y\right)dx\,dy$$

dönüşümünü tanımlayalım. Her $t_1,t_2\in[0,1]$ ve $\alpha,\beta\ge 0$ için $\alpha+\beta=1$ olmak üzere

$$g(\alpha t_1+\beta t_2)=\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f\left((\alpha t_1+\beta t_2)x+(1-\alpha t_1-\beta t_2)y\right)dx\,dy$$
$$\le\frac{\alpha}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f\left(t_1x+(1-t_1)y\right)dx\,dy$$
$$+\frac{\beta}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f\left(t_2x+(1-t_2)y\right)dx\,dy$$

$$=\alpha g(t_1)+\beta g(t_2)$$

elde edilir. Böylelikle g fonksiyonunun $[0,1]$ aralığı üzerinde konveks olduğu görülür. g konveks dönüşümleri için Hadamard eşitsizliğinin anlamı ve çok katlı integraller için kullanılan Fubbin teoreminin yardımıyla

$$\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f\left(\frac{x+y}{2}\right)dx\,dy$$

$$=g\left(\frac{1}{2}\right)\le\int_0^1 g(t)\,dt$$

$$=\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b\int_0^1 f\left(tx+(1-t)y\right)dx\,dy\,dt$$

$$\le\frac{g(0)+g(1)}{2}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

elde edilir. İspat tamamlanmış olur. ■

Teorem 2.2.6. $f:[a,b]\to R$ diferansiyellenebilir konveks fonksiyon olsun. Bu durumda her $t\in[0,1]$ için

$$0\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx-\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f\left(tx+(1-t)y\right)dx\,dy$$

$$\le t\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right)\tag{2.39}$$

eşitsizliği geçerlidir. (Dragomir 1992)

İspat. f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks olduğundan

$$f\left(tx+(1-t)y\right)\le tf(x)+(1-t)f(y)$$

sağlanır. Bu eşitsizliği $[a,b]^2$ üzerinde x ve y ' ye göre integrallersek,

$$\int_a^b\int_a^b f\left(tx+(1-t)y\right)\,dx\,dy \le \int_a^b\int_a^b\left[tf(x)+(1-t)f(y)\right]\,dx\,dy$$

$$=(b-a)\int_a^b f(x)\,dx$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece (2.39) eşitsizliğinin birinci kısmının ispatını elde edilir. Diğer yandan, f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks ve türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Her $x,y \in [a,b]$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f\left(tx+(1-t)y\right)-f(y)\ge t(x-y)f'(y)$$

eşitsizliği elde edilir.

Eşitsizliğin her iki tarafı $[a,b]^2$ üzerinde x ve y ' ye göre integrallenirsek,

$$\int_a^b\int_a^b f\left(tx+(1-t)y\right)\,dx\,dy-(b-a)\int_a^b f(x)\,dx \ge t\int_a^b\int_a^b (x-y)f'(y)\,dx\,dy \qquad (2.40)$$

eşitsizliği elde edilmiş olur. Buradan da basit bir hesaplamayla,

$$\int_a^b\int_a^b (x-y)f'(y)\,dx\,dy=(b-a)\int_a^b f(x)\,dx-(b-a)^2\,\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

elde edilir. (2.40) de, $t \in [0,1]$ için

$$(b-a)\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b\int_a^b f\left(tx+(1-t)y\right)\,dx\,dy$$

$$\le t\left[(b-a)^2\,\frac{f(a)+f(b)}{2}-(b-a)\int_a^b f(x)\,dx\right]$$

eşitsizliği sağlanır. İspat tamamlanmış olur. ■

Sonuç 2.2.7. f fonksiyonunu Teorem 2.2.6 ya göre uyarlanırsa,

$$0 \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f\left(\frac{x+y}{2}\right) dx\, dy$$
$$\le \frac{1}{2}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx\right]$$

eşitsizliği yazılır.

Teorem 2.2.8. f, Teorem 2.2.6 daki gibi bir fonksiyon olsun. Her $t \in [0,1]$ için ,

$$0 \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - \frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(tx+(1-t)\frac{a+b}{2}\right) dx$$

$$\le (1-t)\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right] \tag{2.41}$$

eşitsizliği sağlanır. (Dragomir 1992)

İspat. Öncelikle, her $x \in [a,b]$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$f\left(tx+(1-t)\frac{a+b}{2}\right) \le tf(x)+(1-t)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte x değişkenine göre $[a,b]$ aralığı üzerinde integrallenir ve (2.23) eşitsizliğinin sağ tarafı kullanılırsa,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(tx+(1-t)\frac{a+b}{2}\right) dx$$

$$\le \frac{t}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx + (1-t)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\leq \frac{t}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx + \frac{1-t}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

elde edilir. Diğer bir yandan, f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında diferansiyellenebilir konveks fonksiyon olsun. Her $x \in [a,b]$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f\left(tx + (1-t)\frac{a+b}{2}\right) - f(x) \geq (1-t)\left(\frac{a+b}{2} - x\right) f'(x)$$

eşitsizliği sağlanır. İntegral alarak,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(tx + (1-t)\frac{a+b}{2}\right) dx - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$
$$\geq (1-t)\int_a^b \left(\frac{a+b}{2} - x\right) f'(x)\,dx \tag{2.42}$$

eşitsizliği sağlanır. Basit bir hesaplamayla,

$$\int_a^b \left(\frac{a+b}{2} - x\right) f'(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

(2.42) eşitsizliğini kullanarak (2.41) eşitsizliğin gerek şartını göstermiş oluruz. ■

Sonuç 2.2.9 f fonksiyonu, Teorem 2.2.8 deki gibi bir fonksiyon olsun.

$$0 \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx - \frac{2}{b-a}\int_{(3a+b)/4}^{(a+3b)/4} f(x)\,dx \leq \frac{1}{2}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right]$$

eşitsizliği sağlanır.

Yardımcı Teorem 2.2.10. X bir lineer uzay ve C de bu uzayın konveks bir alt kümesi olsun. $f: X \to R$ dönüşümü için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

(i) f fonksiyonu C de konvekstir.

(ii) Her $x, y \in C$ için $g_{x,y}: [0,1] \to R$ olmak üzere, $g_{x,y} = f\left(tx + (1-t)y\right)$ dönüşümü; $[0,1]$ aralığında konvekstir.

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$ $x, y \in C$ olsun. $t_1, t_2 \in [0,1], \lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ olsun. $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ olması durumunda

$$\begin{aligned} g_{x,y}\left(\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2\right) &= f\left(\left(\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2\right)x + \left(1 - \lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2\right)y\right) \\ &= f\left(\left(\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2\right)x + \left(\lambda_1\left(1-t_1\right) + \lambda_2\left(1-t_2\right)\right)y\right) \\ &\leq \lambda_1 f\left(t_1 x + \left(1-t_1\right)y\right) + \lambda_2 f\left(t_2 x + \left(1-t_2\right)y\right) \\ &= \lambda_1 g_{x,y}\left(t_1\right) + \lambda_2 g_{x,y}\left(t_2\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da $g_{x,y}$ dönüşümünün $[0,1]$ aralığında konveks olduğunu ispatlar.

$(ii) \Rightarrow (i)$ $x, y \in C$ olsun. $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ olsun. $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ olması durumunda

$$\begin{aligned} f\left(\lambda_1 x + \lambda_2 y\right) &= f\left(\lambda_1 x + \left(1-\lambda_1\right)y\right) \\ &= g_{x,y}\left(\lambda_2 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0\right) \\ &\leq \lambda_1 g_{x,y}(1) + \lambda_2 g_{x,y}(0) \\ &= \lambda_1 f(x) + \lambda_2 f(y) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla şartlar birbirine denktir. ■

Yardımcı Teorem 2.2.11. X reel lineer bir uzay ve C de bu uzayın konveks bir alt kümesi olsun. Eğer $f: C \to R$ konveks fonksiyon ise her $x, y \in C$ için

$$g_{x,y}(t)=\frac{1}{2}\left[f\left(tx+(1-t)y\right)+f\left((1-t)x+ty\right)\right]$$

şeklinde verilen $g_{x,y}:[0,1]\to R$ dönüşümü $[0,1]$ aralığında konvekstir.

Buna ek olarak, her $x,y\in C$ ve $t\in[0,1]$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq g_{x,y}(t)\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $x,y\in C$ ve $t_1,t_2\in[0,1]$ olsun. $\alpha,\beta\geq 0$ olmak üzere $\alpha+\beta=1$ olsun.

$$\begin{aligned}
g_{x,y}(\alpha t_1+\beta t_2)&=\frac{1}{2}\Big[f\left((\alpha t_1+\beta t_2)x+(1-\alpha t_1-\beta t_2)y\right)\\
&\quad+f\left((1-\alpha t_1-\beta t_2)x+(\alpha t_1+\beta t_2)y\right)\Big]\\
&=\frac{1}{2}\Big[f\left(\alpha\left(t_1x+(1-t_1)y\right)+\beta\left(t_2x+(1-t_2)y\right)\right)\\
&\quad+f\left(a\left((1-t_1)x+t_1y\right)+\beta\left((1-t_2)x+t_2y\right)\right)\Big]\\
&\leq\frac{1}{2}\Big[\alpha f\left(t_1x+(1-t_2)y\right)+\beta f\left(t_2x+(1-t_2)y\right)\\
&\quad+\alpha f\left((1-t_1)x+t_1y\right)+\beta f\left((1-t_2)x+t_2y\right)\Big]\\
&=\alpha g_{x,y}(t_1)+\beta g_{x,y}(t_2)
\end{aligned}$$

yazılır. Bu da $g_{x,y}$ nin $[0,1]$ aralığında konveks olduğunu gösterir. f fonksiyonun konveksliğini kullanarak,

$$g_{x,y}(t)\geq f\left(\frac{1}{2}\left(tx+(1-t)y+(1-t)x+ty\right)\right)=f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

yazılır ve her $t\in[0,1]$ için

$$g_{x,y}(t) \le \frac{1}{2}\left[tf(x)+(1-t)f(y)+(1-t)f(x)+tf(y)\right] = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 2.2.12 E nin boştan farklı olduğu bir küme üzerinde her x,y için sağlanıyor $g_{x,y} \circ h \in L, h \in L$, $0 \le h(t) \le 1$, $h: E \to R$ tanımlı olsun. C kümesi üzerinde $f: C \subseteq X \to R$ bir konveks fonksiyon bu durumda L ve A ise $(L_1),(L_2)$ ve $(A_1),(A_2)$ şartlarını sağlıyor olsun. Eğer $A(1)=1$ ise

$$\begin{aligned} f\left(A(h)x+\left(1-A(h)\right)y\right) &\le A\left[f\left(hx+(1-h)y\right)\right] \\ &\le A(h)f(x)+\left(1-A(h)\right)f(y) \qquad (2.43) \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. (Pecaric ve Dragomir 1991)

İspat. $g_{x,y}:[0,1] \to R$ dönüşümünü ve $g_{x,y}(s) = f\left(sx+(1-s)y\right)$ göz önüne alalım. O halde Yardımcı Teorem 2.2.10 yardımıyla, $g_{x,y}$'in $[0,1]$ aralığında konveks olduğunu biliyoruz. Buradan da her $t \in E$ için,

$$g_{x,y}\left(h(t)\cdot 1+\left(1-h(t)\right)\cdot 0\right) \le h(t)g_{x,y}(1)+\left(1-h(t)\right)g_{x,y}(0)$$

elde edilir ki, bu da

$$A\left(g_{x,y}(h)\right) \le A(h)g_{x,y}(1)+\left(1-A(h)\right)g_{x,y}(0)$$

olur. Yani,

$$A\left[f\left(hx+(1-h)y\right)\right] \le A(h)f(x)+\left(1-A(h)\right)f(y)$$

eşitsizliğini sağlar. Diğer taraftan, Teorem 2.2.1 deki Jessen eşitsizliğini $g_{x,y}$ üzerinde kullanarak ,

$$g_{x,y}\left(A(h)\right)\leq A\left(g_{x,y}(h)\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik

$$f\left(A(h)x+\left(1-A(h)\right)y\right)\leq A\left[f\left(hx+(1-h)y\right)\right]$$

verir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 2.2.13. $f:C\subseteq X\to R$ fonksiyonu C kümesi üzerinde konveks bir fonksiyon, L ve A $(L_1),(L_2)$ ve $(A_1),(A_2)$ şartlarını sağlıyor olsun. Ayrıca $h:E\to R,\ 0\leq h(t)\leq 1,\ t\in E,\ h\in L$ sağlamak üzere, C deki sabit x,y için $f\left(hx+(1-h)y\right)$ ve $f\left((1-h)x+hy\right)$ L ye ait olsun. Bu durumda eğer $A(1)=1$ ise

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x+y}{2}\right) &\leq \frac{1}{2}\left[f\left(A(h)x+\left(1-A(h)\right)y\right)+f\left(\left(1-A(h)\right)x+A(h)y\right)\right] \\ &\leq \frac{1}{2}\left(A\left[f\left(hx+(1-h)y\right)\right]+A\left[f\left((1-h)x+hy\right)\right]\right) \qquad (2.44) \\ &\leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Yardımcı Teorem 2.2.11 de verilen $g_{x,y}:[0,1]\to R$ dönüşümünü göz önünde bulunduralım. $[0,1]$ aralığında $g_{x,y}$ konveks olduğunu biliyoruz. O halde Teorem 2.2.1 deki Jessen eşitsizliğine yardımıyla, $g_{x,y}$ dönüşümü için ,

$$g_{x,y}\left(A(h)\right)\leq A\left(g_{x,y}(h)\right)$$

elde edilir. Ancak,

$$g_{x,y}\left(A(h)\right)=\frac{1}{2}\left[f\left(A(h)x+\left(1-A(h)\right)y\right)+f\left(\left(1-A(h)\right)x+A(h)y\right)\right]$$

ve

$$A\left(g_{x,y}(h)\right)=\frac{1}{2}\left(A\left[f\left(hx+(1-h)y\right)\right]+A\left[f\left((1-h)x+hy\right)\right]\right),$$

olduğundan (2.44) eşitsizliğinin ikinci kısmını ispatlanmış olur.

(2.44) deki birinci eşitsizliğin ispatını yapmak için, Yardımcı Teorem 2.2.11 den

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq g_{x,y}\left(A(h)\right)$$

eşitsizliği elde edilir.

Son olarak, f fonksiyonun konveksliğini kullanarak E üzerinde ,

$$\frac{1}{2}\left[f\left(hx+(1-h)y\right)+f\left((1-h)x+hy\right)\right]\leq\frac{f(x)+f(y)}{2}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte $A(1)=1$ için A fonksiyonuna başvurarak (2.44) ün son kısmını açıklığa kavuşturulmuş olunur. ■

2.3 HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER I

Fonksiyonların çeşitli sınıflarını için Hadamard tipli eşitsizlikler son bir kaç yıl boyunca bir çok yazarın ilgisini çekmiştir. Bu bölümde yakın zamanda yayınlanmış Hadamard tipli ana eşitsizliklerini içeren bazı sonuçları inceleyeceğiz. (Godunova ve Levin 1985)

R de I bir aralık olsun. $f: I\to R$ dönüşümü $Q(I)$ sınıfına ait bir dönüşüm olsun. Eğer bu dönüşüm her $x,y\in I$ ve $\lambda\in(0,1)$ için negatif olmayan bir dönüşüm ise,

$$f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)\leq\frac{f(x)}{\lambda}+\frac{f(y)}{1-\lambda} \tag{2.45}$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer $f\in Q(I)$ ve $x,y,z\in I$,

$$f(x)(x-y)(x-z)+f(y)(y-x)(y-z)+f(z)(z-x)(z-y)\geq 0 \qquad (2.45')$$

eşitsizliği elde edilir. (Godunova ve diğ. 1985)

Gerçekte $(2.45')$ deki ifadeler ile (2.45) deki ifadeler denktir. Bu yüzden $Q(I)$ sınıfının tanımında bunlar birbirinin alternatifi olarak kullanılabilir. $f(x)=x^r,\ r\in R,$ için $(2.45')$ eşitsizliği iyi bilindiği gibi Schur eşitsizliğidir.

Aşağıdaki sonuç $Q(I)$ sınıfına ait Hadamard tipli eşitsizlikler için yayınlanmış önemli bir sonuçtur.

Teorem 2.3.1. $f\in Q(I), a,b\in I,\ a<b$ *ve* $f\in L_1[a,b]$ olsun. Bu durumda

$x\in I$ için $p(x)=\dfrac{(b-x)(x-a)}{(b-a)^2}$ olmak üzere,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{4}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \qquad (2.46)$$

ve

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x)f(x)\,dx\leq\frac{f(a)+f(b)}{2} \qquad (2.47)$$

eşitsizliği elde edilir. (2.46) daki 4 sabiti en iyi sabittir.

İspat. $f\in Q(I)$ olduğundan her $x,y\in I$ ve ((2.45) deki $\lambda=1/2$) için

$$2\left(f(x)+f(y)\right)\geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

elde edilir. Buradan da $t\in[0,1]$ için, $x=ta+(1-t)b,\ y=(1-t)a+tb$ olarak yazarsak

$$2\Big(f\left(ta+(1-t)b\right)+ f\left((1-t)a+tb\right)\Big)\geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

olur. Dolayısıyla bu son eşitsizliği $[0,1]$ üzerinde t ' ye göre integral alınırsa,

$$2\left(\int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right)dt+\int_0^1 f\left((1-t)a+tb\right)dt\right)\geq f\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{2.48}$$

elde ederiz. Buradan,

$$\int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right)dt+\int_0^1 f\left((1-t)a+tb\right)dt=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

olur. (2.48) eşitsizliğinden (2.46) eşitsizliğini elde edebiliriz.

(2.47) eşitsizliğinin ispatı için, $f\in Q(I)$ olsun, her $a,b\in I$ ve $\lambda\in[0,1]$,

$$\lambda(1-\lambda)\, f\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right)\leq(1-\lambda)\, f(a)+\lambda f(b)$$

ve

$$\lambda(1-\lambda)\, f\left((1-\lambda)a+\lambda b\right)\leq\lambda f(a)+(1-\lambda)\, f(b)$$

elde edilir. Bu iki eşitsizlik taraf tarafa toplar ve $(0,1)$ üzerinde t ' ye göre integrallersek,

$$\int_0^1\lambda(1-\lambda)\Big(f\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right)+ f\left((1-\lambda)a+\lambda b\right)\Big)d\lambda\leq f(a)+ f(b) \tag{2.49}$$

elde ederiz. Ek olarak,

$$\int_0^1\lambda(1-\lambda)\, f\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right)d\lambda$$
$$=\int_0^1\lambda(1-\lambda)\, f\left((1-\lambda)a+\lambda b\right)d\lambda$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{(b-x)(x-a)}{(b-a)^2} f(x)\,dx \tag{2.50}$$

elde edilir. (2.49) ile (2.50) birleştirirsek (2.47) elde edilir.

(2.46) eşitsizliğindeki en iyi sabit için

$$f(x) = \begin{cases} 1, & a \le x \le \frac{a+b}{2}, \\ 4, & x = \frac{a+b}{2}, \\ 1, & \frac{a+b}{2} < x \le b. \end{cases}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Bununla birlikte, bu fonksiyon $Q(I)$ ya aittir. Çünkü

$$\frac{f(x)}{\lambda} + \frac{f(y)}{1-\lambda} \ge \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{1-\lambda} = g(\lambda) \ge \min_{0<\lambda<1} g(\lambda) = g\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \ge f\left(\lambda x + (1-\lambda)y\right)$$

yazılır. İspat tamamlanmış olur. ■

Her $x, y \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için $P(I)$ sınıfına ait $f : I \to R$ dönüşümünü alıyoruz. f negatif olmayan bir dönüşüm olmak üzere,

$$f\left(\lambda x + (1-\lambda)y\right) \le f(x) + f(y) \tag{2.51}$$

eşitsizliği sağlanır.

Açıktır ki, $Q(I) \supset P(I)$ dır. $P(I)$ bütün monoton konveks ve quasi-konveks fonksiyonları içerir. Böylelikle fonksiyonlar $f\left(\lambda x + (1-\lambda)y\right) \le \max\left(f(x), f(y)\right)$ eşitsizliğini sağlar.

Teorem 2.3.2 $f \in P(I),\ a,b \in I,$ için $a < b$ ve $f \in L_1[a,b]$ olsun. Bu durumda

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le 2\left(f(a) + f(b)\right) \tag{2.52}$$

eşitsizliği sağlanır. (Dragomir ve diğ. 1994) Buradaki iki eşitsizlikte en iyi ihtimallerdir.

İspat. (2.52) ye göre $x = ta + (1-t)b,\ y = (1-t)a + tb,\ t \in [0,1]$ ve $\lambda = 1/2$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq f\left(ta + (1-t)b\right) + f\left((1-t)a + tb\right)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada t ' ye göre $[0,1]$ üzerinde integral alınırsa,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_0^1 \left(f\left(ta + (1-t)b\right) + f\left((1-t)a + tb\right)\right) dt = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx$$

integral eşitsizliği elde edilir. Böylelikle ilk eşitsizlik ispat edilmiş olur. Diğer yandan (2.51) eşitsizliğini kullanarak ve bunun yanında $x = a,\ y = b$ alınırsa ikinci eşitsizlik ispat edilmiş olur. Burada λ nın aralığı $[0,1]$ olarak integrallenir. İlk olarak (2.52) nin ilk eşitsizlikteki fonksiyon artmayan bir fonksiyon olsun.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & a \leq x \leq \dfrac{a+b}{2}, \\ 1, & \dfrac{a+b}{2} \leq x \leq b, \end{cases}$$

ve ikinci eşitsizlik için *f* fonksiyon artmayan bir fonksiyon olsun.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = a, \\ 1, & a < x \leq b. \end{cases}$$

İspat tamamlanmış olur. ■

Tanım 2.3.3. (Log-Konkav Fonksiyon) Pozitif f fonksiyonları $[a,b]$ aralığında ve her $x, y \in [a,b]$ ve her $\lambda \in [0,1]$ için,

$$f\left(\lambda x + (1-\lambda)y\right) \leq f(x)^{\lambda}\ f(y)^{1-\lambda} \tag{2.53}$$

sağlanıyorsa *f*' ye göre log-konveks denir. Bu eşitsizliğin tersi de *log*-konkav olarak adlandırılır.

Bu tanımın en güçlü anlamı, $M_r\left(x,y;\lambda\right)$ ve *r* pozitif bir sayı olmak üzere

$$M_r\left(x,y;\lambda\right)=\begin{cases}\left(\lambda x^r+\left(1-\lambda\right)y^r\right)^{1/r} & ,\ r\neq 0\\ x^{\lambda}y^{1-\lambda} & ,\ r=0\end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Burada özellikle; $\lambda=1/2$ seçilerek $M_r\left(x,y\right)$ gibi yeni bir notasyon elde edilebilir.

Burada görüldüğü gibi *r*-konveksliğin genelleştirilmiş konseptini görmüş oluyoruz. Burada $\left[a,b\right]$ aralığında *f* pozitif *r*-konveks bir fonksiyon ve her $x,y\in\left[a,b\right]$ ve $\lambda\in\left[0,1\right]$ için

$$f\left(\lambda x+\left(1-\lambda\right)y\right)\leq M_r\left(f\left(x\right),f\left(y\right);\lambda\right) \tag{2.54}$$

sağlanmış olur.

Doğal olarak *r*-konkavlık ve *r*-konvekslik birbirini tanımlayan ifadelerdir. Bilinmelidir ki eşitsizlikte birbirlerinin tersidir. Buradan kolay bir şekilde *0*-konveks fonksiyonları elde edilebilir. *log*-konveks fonksiyonlar ve *1*-konveks fonksiyonlar genel olarak sıralı konveks fonksiyonlardır. Burada *r*-konveks fonksiyonun rahat bir açıklıkla pozitif olduğunu biliyoruz.

Yine, sayı doğrusunda X reel lineer bir uzay olarak alınırsa eğer $x,y\in\left[a,b\right]$ olma şartı $x,y\in U$ olma şartına dönüşür ki burada U , X içinde konveks bir fonksiyondur. *Log*-konveks ve *r*-konveks fonksiyonlar için Hadamard tipli eşitsizlikler de geliştirilmiştir.

Teorem 2.3.4. *f* fonksiyonu $\left[a,b\right]$ aralığında pozitif ve *log*-konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(t\right)dt\leq L\left(f\left(a\right),f\left(b\right)\right)$$

dır. *f* pozitif *log*-konkav fonksiyon ise eşitsizlik tersine döner. (Gill ve diğ.1997)

İspat. İlk olarak $f\left(a\right)\neq f\left(b\right)$ olsun. (2.52) yardımıyla

$$\begin{aligned}
\int_a^b f\left(t\right)dt &= \left(b-a\right)\int_0^1 f\left(sb+\left(1-s\right)a\right)ds \\
&\leq \left(b-a\right)\int_0^1 f\left(b\right)^s f\left(a\right)^{1-s}\,ds \\
&= \left(b-a\right) f\left(a\right)\int_0^1 \left\{\frac{f\left(b\right)}{f\left(a\right)}\right\}^s ds \\
&= \left(b-a\right) f\left(a\right)\left[\left(\frac{f\left(b\right)}{f\left(a\right)}\right)^s \Big/ \ln\left(\frac{f\left(b\right)}{f\left(a\right)}\right)\right]_0^1 \\
&= \left(b-a\right)L\left(f\left(a\right), f\left(b\right)\right)
\end{aligned}$$

sağlanır. $f\left(a\right)= f\left(b\right)$ için benzer olarak,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f\left(t\right)dt &= \left(b-a\right)\int_0^1 f\left(sb+\left(1-s\right)a\right)ds \\
&\leq \left(b-a\right)\int_0^1 f\left(b\right)^s f\left(a\right)^{1-s}ds \\
&= \left(b-a\right)\int_0^1 f\left(a\right) ds \\
&= \left(b-a\right) f\left(a\right) \\
&= \left(b-a\right)L\left(f\left(a\right), f\left(b\right)\right)
\end{aligned}$$

sağlanır. Böylelikle ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 2.3.5 X lineer vektör uzayı olsun. f fonksiyonu, U kümesi üzerinde pozitif ve *log*-konveks fonksiyon olsun. $U\subset X$ ve $a,b\in U$ olmak üzere

$$\int_0^1 f\left(sa+\left(1-s\right)b\right)ds \leq L\left(f\left(a\right), f\left(b\right)\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.3.3 ve Teorem 2.3.4 deki yöntemler kullanılarak bu eşitsizlikler elde edilebilir.

Sonuç 2.3.6. f fonksiyonu $[a,b]$ aralığı üzerinde pozitif *log*-konveks bir fonksiyon olsun. O halde

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \le \min_{x\in[a,b]} \frac{(x-a)L\big(f(a),f(x)\big)+(b-x)L\big(f(x),f(b)\big)}{b-a} \tag{2.55}$$

dır. Eğer f pozitif *log*-konkav ise,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \ge \min_{x\in[a,b]} \frac{(x-a)L\big(f(a),f(x)\big)+(b-x)L\big(f(x),f(b)\big)}{b-a} \tag{2.56}$$

dır.

İspat. f fonksiyonu pozitif *log*-konveks bir fonksiyon olsun. O halde Teorem 2.3.4 yardımıyla, her $x\in[a,b]$ için

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)dt &= \int_a^x f(t)dt+\int_x^b f(t)dt\\ &\le (x-a)L\big(f(a),f(x)\big)+(b-x)L\big(f(x),f(b)\big)\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. ■

Sonuç 2.3.7. f fonksiyonu $[a,b]$ aralığı üzerinde pozitif *log*- konveks fonksiyon olsun. O halde

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} L\left(f\left(a+\frac{i-1}{n}(b-a)\right), f\left(a+\frac{i}{n}(b-a)\right)\right)$$

dır. Eğer f fonksiyonu pozitif *log*-konkav fonksiyon ise eşitsizliğin tersi elde edilir.

İspat. Teorem 2.3.4 yardımıyla

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n}\int_{a+(i-1)(b-a)/n}^{a+i(b-a)/n} f(t)dt$$

yazılarak ispat tamamlanmış olur. ■

Sonuç 2.3.8.

(a) f fonksiyonu $[a,b]$ aralığı üzerinde pozitif *log*-konveks bir fonksiyon olsun. O halde

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \le M_{1/3}\big(f(a), f(b)\big)$$

dır. Eğer f *log*-konkav ise,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \ge \sqrt{f(a)\,f(b)} \tag{2.57}$$

dır.

(b) X lineer vektör uzayı ve U, X ' in konveks bir alt kümesi olsun. f bu kümede konveks ve *log*-konveks bir fonksiyon olmak üzere $a,b\in U$ için,

$$\int_0^1 f\big(sa+(1-s)b\big)\,ds \le M_{1/3}\big(f(a), f(b)\big)$$

dır.
Eğer f *log*-konkav ise,

$$\int_0^1 f\big(sa+(1-s)b\big)\,ds \le \sqrt{f(a)\,f(b)}$$

dır.

İspat. Teorem 2.3.4 den (a);

$$G(a,b)\le L(a,b)\le M_{1/3}(a,b)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $L(a,b)$, $M_r(a,b)$, $G(a,b)$ yukarıda tanımlanmıştır. Bunun geometrik olarak anlamı Teorem 2.4.5 ile benzerdir. (Lin 1979)

Teorem 2.3.9. f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında pozitif ve r-konveks fonksiyon olsun. O halde

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \le F_r\left(f(a), f(b)\right)$$

dır. (Gill ve diğ. 1997)

Eğer f fonksiyonu pozitif r-konkav fonksiyon ise eşitsizliğin tersi elde edilir.

İspat. Teorem 2.3.4 de $r=0$ olarak alınmıştı. Eğer $r \neq 0,-1$ ve $f(a) \neq f(b)$ ise

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,dt &= (b-a)\int_0^1 f\left(sb+(1-s)a\right)ds \\ &\le (b-a)\int_0^1 \left\{sf^r(b)+(1-s)f^r(a)\right\}^{1/r} ds \\ &= (b-a)\int_{f^r(a)}^{f^r(b)} \frac{t^{1/r}dt}{f^r(b)-f^r(a)} \\ &= (b-a)\frac{r}{r+1}\frac{f^{r+1}(b)-f^{r+1}(a)}{f^r(b)-f^r(a)} \\ &= (b-a)F_r\left(f(a), f(b)\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde, $f(a)=f(b)$ ise

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,dt &\le (b-a)\int_0^1 \left\{sf^r(a)+(1-s)f^r(a)\right\}^{1/r} ds \\ &= (b-a)f(a) \\ &= (b-a)F_r\left(f(a), f(a)\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak $r=-1$ ve $f(a) \neq f(b)$ için

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\,dt &\le (b-a)\int_0^1 \left\{ sf^{-1}(b)+(1-s)\,f^{-1}(a)\right\}^{-1} ds \\
&= \frac{b-a}{1/f(b)-1/f(a)}\int_{1/f(a)}^{1/f(b)} t^{-1}dt \\
&= \frac{b-a}{1/f(b)-1/f(a)}\left(\ln\frac{1}{f(b)}-\ln\frac{1}{f(a)}\right) \\
&= (b-a)\,f(a)\,f(b)\frac{\ln f(a)-\ln f(b)}{f(a)-f(b)} \\
&= (b-a)F_{-1}\left(f(a),f(b)\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. ■

2.4 HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER II

1992 yılında Dragomir, Hadamard eşitsizlikleri ile ilgili yeni sonuçlar elde etmiştir. Bu yeni eşitsizlikler için aşağıdaki iki önemli dönüşümü kullanmıştır.

$f:[a,b]\to R$ tanımlı konveks fonksiyon olsun. H ve F de $[a,b]$ aralığı üzerinde reel değişkenler olmak üzere

$$
H(t)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(tx+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)dx \tag{2.58}
$$

ve

$$
F(t)=\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f\left(tx+(1-t)\,y\right)dx\,dy \tag{2.59}
$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.4.1. $f:[a,b]\to R$ konveks fonksiyon olsun.

(i) H, $[0,1]$ aralığı üzerinde konvekstir.

(ii) $\inf_{t\in[0,1]} H(t)=H(0)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ ve $\sup_{t\in[0,1]} H(t)=H(1)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx$ dır.

(iii) H, $[0,1]$ aralığında monoton artandır.

İspat. (i) $\alpha,\beta\geq 0$ için $\alpha+\beta=1$ ve $t_1,t_2\in[0,1]$ olsun. O halde

$$\begin{aligned}
H(\alpha t_1+\beta t_2) &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(\alpha\left(t_1x+(1-t_1)\frac{a+b}{2}\right)+\beta\left(t_2x+(1-t_2)\frac{a+b}{2}\right)\right) dx \\
&\leq \alpha\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(t_1x+(1-t_1)\frac{a+b}{2}\right) dx \\
&\quad +\beta\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(t_2x+(1-t_2)\frac{a+b}{2}\right) dx \\
&= \alpha H(t_1)+\beta H(t_2)
\end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır.

(ii) Her $t_1\in[0,1]$ için

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq H(t) \\
&\leq t\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx+(1-t)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right) \qquad (2.60) \\
&\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. Jensen eşitsizliğini kullanarak,

$$\begin{aligned}
H(t) &\geq f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b\left[tx+(1-t)\frac{a+b}{2}\right]dx\right) \\
&= f\left(\frac{a+b}{2}\right)
\end{aligned}$$

yazılır. Buradan f fonksiyonun konveksliğini kullanarak,

$$H(t) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \left[tf(x) + (1-t) f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] dx$$

$$= t\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx + (1-t) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

yazılır. Böylece (2.60) eşitsizliğinin ikinci kısmı ispat edilmiş olur.
Diğer eşitsizlik açıktır. Çünkü

$$g(t) = t\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx + (1-t) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

dönüşüm $[0,1]$ aralığı üzerinde monoton artandır.

(iii) $t_1, t_2 \in (0,1)$ için $t_2 > t_1$ olsun. H, $(0,1)$ aralığı üzerinde konveks ise,

$$\frac{H(t_2) - H(t_1)}{t_2 - t_1} \geq H'_+(t_1)$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b f'_+\left(t_1 x + (1-t_1)\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx$$

yazılır. f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde konveks olduğundan her $x \in [a,b]$ için,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f\left(t_1 x + (1-t_1)\frac{a+b}{2}\right) \geq t_1 f'_+\left(t_1 x + (1-t_1)\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2} - x\right)$$

yazılır. Buradan da

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f'_+\left(t_1 x + (1-t_1)\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx$$

$$\geq \frac{1}{t_1}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(t_1x+(1-t_1)\frac{a+b}{2}\right)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{t_1}\left[H(t_1)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\geq 0$$

yazılır.

Sonuç olarak, $1\geq t_2>t_1\geq 0$ *için* $H(t_2)-H(t_1)\geq 0$ olduğundan *H*, $[0,1]$ aralığında monoton artandır. İspat tamamlanmış olur. ■

Teorem 2.4.2 $f:[a,b]\to R$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda

(i) Her $\sigma\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ için $F\left(\sigma+\frac{1}{2}\right)=F\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)$

(ii) *F*, $[0,1]$ aralığında konvekstir.

(iii)

$$\sup_{t\in[0,1]} F(t)=F(0)=F(1)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

ve

$$\inf_{t\in[0,1]} F(t)=F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f\left(\frac{x+y}{2}\right)dx\,dy$$

dır.

(iv)

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq F\left(\frac{1}{2}\right)$$

dır.

(v) *F* , $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ aralığı üzerinde monoton azalan ve $\left[\frac{1}{2},1\right]$ aralığında monoton artandır.

(vi) $t \in [0,1]$ için

$$H(t) \le F(t)$$

dır.

İspat. (i) $\sigma \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ olsun. O halde

$$\begin{aligned}
f\left(\sigma + \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b f\left(\left(\sigma + \frac{1}{2}\right)x + \left(\frac{1}{2} - \sigma\right)y\right) dx\, dy \\
&= \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b f\left(\left(\frac{1}{2} - \sigma\right)x + \left(\sigma + \frac{1}{2}\right)y\right) dx\, dy \\
&= F\left(\frac{1}{2} - \sigma\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) Teorem 2.4.1 'in (i) kısmının ispatı ile aynıdır.

(iii) Her $x, y \in [a,b]$ ve $t \in (0,1]$ için,

$$f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t) f(y)$$

yazılır. Burada eşitsizliği $[a,b] \times [a,b]$ için x ve y ' ye göre integrallenirse,

$$\int_a^b \int_a^b f(tx + (1-t)y)\, dx\, dy \le \int_a^b \int_a^b [tf(x) + (1-t) f(y)]\, dx\, dy$$

$$= (b-a) \int_a^b f(x)\, dx$$

elde edilir. O halde her $t \in [0,1]$ için $F(t) \le F(0) = F(1)$ dır. f, $t \in [0,1]$ için $[a,b]$ üzerinde konveks ve $x, y \in [a,b]$ ise,

$$\frac{1}{2}\left[f(tx + (1-t)y) + f(ty + (1-t)x)\right] \ge f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

yazılır. Burada yeniden $[a,b]\times[a,b]$ üzerinde x ve y' ye göre integrallenirse,

$$\int_a^b\int_a^b f\left(\frac{x+y}{2}\right)dx\,\mathrm{dy} \le \frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b\left[f\left(tx+(1-t)y\right)+f\left(ty+(1-t)x\right)\right]dx\,dy$$

$$=\int_a^b\int_a^b f\left(tx+(1-t)y\right)dx\,dy$$

elde edilir. Buradan da her $t\in[0,1]$ için $F(1/2)\le F(t)$ olduğundan ispatlanmış olur.

(iv) Jensen eşitsizliğini kullanarak,

$$\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f\left(\frac{x+y}{2}\right)dx\,dy \ge f\left(\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b\left(\frac{x+y}{2}\right)dx\,dy\right)$$

yazılır. Basit integral hesaplamalarıyla

$$\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b\left(\frac{x+y}{2}\right)dx\,dy=\frac{a+b}{2}$$

bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

(v) f, $(0,1)$ aralığı üzerinde konveks olduğundan, $t_2>t_1, t_1,t_2\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ için,

$$\frac{F(t_2)-F(t_1)}{t_2-t_1}\ge F'_+(t_1)=\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f'_+\left(t_1x+(1-t_1)y\right)(x-y)\,dx\,dy$$

yazılır. f nin $[a,b]$ üzerinde konveksliğini kullanarak, her $x,y\in[a,b]$ ve $t_1\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ için,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)-f\left(t_1x+(1-t_1)y\right)\ge f'_+\left(t_1x+(1-t_1)y\right)\frac{(x-y)(1-2t_1)}{2}$$

yazılır. Buradan,

$$(x-y)\, f'_+\big(t_1x+(1-t_1)y\big) \geq \frac{2}{2t_1-1}\left[f\big(t_1x+(1-t_1)y\big) - f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]$$

yazılır. $[a,b]\times[a,b]$ üzerinde *x* ve *y*' ye göre integrallenirse,

$$F'_+(t_1) \geq \frac{2}{2t_1-1}\left(F(t_1) - F\left(\frac{1}{2}\right)\right) \geq 0, \qquad t_1 \in \left(\frac{1}{2},1\right)$$

yazılır. Dolayısıyla, F , $\left[\frac{1}{2},1\right]$ üzerinde monoton artan olduğu görülür.

(vi) Basit hesaplamalarla,

$$H(t) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \big[tx+(1-t)y\big]\,dy\right)dx$$

yazılır. Jensen eşitsizliğini kullanarak $t \in [0,1]$ için,

$$H(t) \leq \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f\left(\int_a^b \big[tx+(1-t)y\big]\,dy\right)dx$$

yazılır. İspat tamamlanmış olur. ■

Teorem 2.4.3. *X* lineer uzay, *C* de *X* lineer uzayının konveks bir alt kümesi ve $f: C \subseteq X \to R$ dönüşümü *C* üzerinde konveks bir dönüşüm olsun. Ayrıca, a ve b ,*C* kümesinin iki elemanı ve $F(a,b):[0,1]\to R$ fonksiyonu her $t\in$ $[0,1]$ için,

$$F(a,b)(t) = \frac{1}{2}\Big[f\big(ta+(1-t)b\big) + f\big((1-t)a+tb\big)\Big]$$

şeklinde tanımlansın. O halde

(i) *Her* $\sigma \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$ *için* $F(a,b)\left(\sigma+\frac{1}{2}\right) = F(a,b)\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)$

(ii) $\sup_{t\in[0,1]} F(a,b)(t) = F(a,b)(0) = F(a,b)(1) = \big(f(a)+f(b)\big)/2$

(iii) $\inf_{t\in[0,1]} F(a,b)(t) = F(a,b)\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

(iv) $F(a,b)$, $[0,1]$ üzerinde konvekstir

(v) Genelleştirilmiş Hadamard eşitsizlikleri

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right) dt \le \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.61}$$

dır.

(vi) $p_i \ge 0$ için $p_n = \sum_{i=1}^{n} p_i > 0$ ve her $i = 1,...,n$, $t_i \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\le F(a,b)\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i t_i\right) \\ &\le \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i F(a,b)(t_i) \\ &\le \frac{f(a)+f(b)}{2} \end{aligned} \tag{2.62}$$

(vii) $F(a,b)$, $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ aralığında monoton azalan ve $\left[\frac{1}{2},1\right]$ aralığında monoton artandır.

(viii) Benzer olarak,

$$\int_a^b F(a,b)(t)\, dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx$$

yazılır.

(ix)

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

dır.

(x) f , $[a,b]$ üzerinde diferansiyellenebilir ise,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\geq\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{b-a}{2}\left(f'(b)-f'(a)\right)$$

dır. (Dragomir ve Ionescu 1992)

İspat. (i) Basit bir hesaplamayla $\sigma\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ için

$$\begin{aligned}F(a,b)\left(\sigma+\frac{1}{2}\right)&=\frac{1}{2}\left[f\left(\left(\sigma+\frac{1}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}+\sigma\right)b\right)+f\left(\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)a+\left(\sigma+\frac{1}{2}\right)b\right)\right]\\&=F(a,b)\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)\end{aligned}$$

yazılır.

(ii) f nin konveksliğini kullanarak $t\in[0,1]$ için,

$$F(a,b)(t)\leq\frac{1}{2}\left[tf(a)+(1-t)f(b)+(1-t)f(a)+tf(b)\right]=\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

ve

$$F(a,b)(0)=F(a,b)(1)=\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

olup ispat tamamlanmış olur.

(iii) f nin konveksliğini kullanarak, $t\in[0,1]$ için

$$F(a,b)(t)\geq f\left[\frac{ta+(1-t)b+(1-t)a+tb}{2}\right]=f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

yazılır ve

$$F(a,b)\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

ispat tamamlanmış olur.

(iv) $\alpha,\beta\geq 0$ için $\alpha+\beta=1$ ve $t_1,t_2\in[0,1]$ için,

$$\begin{aligned}F(a,b)(\alpha t_1+\beta t_2)&=\frac{1}{2}\Big[f\left(\alpha\left[t_1a+(1-t_1)b\right]+\beta\left[t_2a+(1-t_2)b\right]\right)\\&\quad+f\left(a\left[(1-t_1)a+t_1b\right]+\beta\left[(1-t_2)a+t_2b\right]\right)\Big]\\&\leq\frac{1}{2}\Big[\alpha f\left(t_1a+(1-t_1)b\right)+\beta f\left(t_2a+(1-t_2)b\right)\\&\quad+\alpha f\left((1-t_1)a+t_1b\right)+\beta f\left((1-t_2)a+t_2b\right)\Big]\\&=\alpha F(a,b)(t_1)+\beta F(a,b)(t_2)\end{aligned}$$

yazılır. Buradan $F(a,b)$ nin $[0,1]$ aralığı üzerinde konveks olduğu görülür.

(v) $F(a,b)$, $[0,1]$ aralığında konveks olsun. (ii) ve (iii) ü kullanarak,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\int_0^1 F(a,b)(t)\,dt\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

yazılır. Kolay bir hesaplamayla,

$$\int_0^1 F(a,b)(t)\,dt=\int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right)dt$$

olup ispat tamamlanmış olur.

(vi) (2.62) in birinci eşitsizliği (iii) de verilmiştir. Her $i=1,\ldots,n$ için

$$F(a,b)(t_i)\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

yazılır.

(vii) $F(a,b)$, $(0,1)$ aralığında konveks olsun. Her $t_2>t_1$ için $t_1,t_2\in\left[\frac{1}{2},1\right)$ ise,

$$\frac{F(a,b)(t_2)-F(a,b)(t_1)}{t_2-t_1} \geq F'(a,b)(t_1)$$

$$=\frac{b-a}{2}\left[f'_+((1-t_1)a+t_1b)-f'_+(t_1a+(1-t_1)b)\right]$$

yazılır.

$t_1 \in \left[\frac{1}{2},1\right)$ ise $(1-t_1)a+t_1b \geq t_1a+(1-t_1)b$ olur. Çünkü $f'_+,(a,b)$ üzerinde monoton artan olacağından,

$$f'_+((1-t_1)a+t_1b) \geq f'_+(t_1a+(1-t_1)b)$$

yazılır. $F(a,b)$, $\left[\frac{1}{2},1\right)$ aralığında monoton artandır.

Gerçekte aynı şekilde , $F(a,b)$, $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ aralığında monoton azalandır.

(viii) Kolaylıkla,

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)\,dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

elde edilir.

(ix) (v) ve (viii) de açıktır.

(x) f, $[a,b]$ üzerinde diferansiyellenebilir olduğundan $t \in [0,1]$ için

$$f(ta+(1-t)b) \geq f(a)+(1-t)(b-a)f'(a)$$
$$f((1-t)a+tb) \geq f(a)+t(b-a)f'(a)$$

eşitsizliği yazılır. Özetle

$$F(a,b)(t) \geq f(a) + \frac{b-a}{2} f'(a)$$

yazılır. Gerçekte $t \in [0,1]$ için

$$F(a,b)(t) \geq f(b) - \frac{b-a}{2} f'(b)$$

dır. ■

Teorem 2.4.4. $f : I \subseteq R \to R$ I üzerinde M-Lipschitzian dönüşümü olsun. Her $a,b \in I$ için $a < b$ olsun. Lipschitz sabiti $M > 0$ için,

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \frac{M}{4}(b-a) \tag{2.63}$$

ve

$$\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \frac{M}{3}(b-a) \tag{2.64}$$

dır.

İspat. $t \in [0,1]$ olsun. Her $a,b \in I$ için,

$$\begin{aligned}
&\left| tf(a) + (1-t) f(b) - f(ta+(1-t)b) \right| \\
&= \left| t\big(f(a) - f(ta+(1-t)b)\big) + (1-t)\big(f(b) - f(ta+(1-t)b)\big) \right| \\
&\leq t\left| f(a) - f(ta+(1-t)b) \right| + (1-t)\left| f(b) - f(ta+(1-t)b) \right| \\
&\leq tM\left| a - (ta+(1-t)b) \right| + (1-t)M\left| b - (ta+(1-t)b) \right| \\
&= 2t(1-t)M\left| b-a \right| \qquad (2.65)
\end{aligned}$$

olur. Eğer $t = 1/2$ alınırsa,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\le\frac{M}{2}|b-a| \tag{2.66}$$

olur. Eğer bu eşitsizlikte her $t\in[0,1]$ için a yerine $ta+(1-t)b$ ve b yerine $(1-t)a+tb$ alınırsa

$$\left|\frac{f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)}{2}-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\le\frac{M|2t-1|}{2}|b-a| \tag{2.67}$$

yazılır. (2.67) eşitsizliğinde [0,1] aralığı üzerinde t' ye göre integral alınırsa,

$$\left|\frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(ta+(1-t)b)\,dt+\int_0^1 f((1-t)a+tb)\,dt\right]-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\le\frac{M|b-a|}{2}\int_0^1|2t-1|\,dt$$

olur. Buradan,

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)\,dt=\int_0^1 f((1-t)a+tb)\,dt=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

ve

$$\int_0^1|2t-1|\,dt=\frac{1}{2}$$

olur. Ek olarak (2.65) eşitsizliğinden her $t\in[0,1]$ ve $a,b\in I$ için $a<b$ ise,

$$\left|tf(a)+(1-t)f(b)-f(ta+(1-t)b)\right|\le 2t(1-t)M(b-a)$$

yazılır. $[0,1]$ aralığında t 'ye göre integral alınırsa,

$$\left|f(a)\int_0^1 t\,dt+f(b)\int_0^1(1-t)\,dt-\int_0^1 f(ta+(1-t)b)\,dt\right|\le 2M(b-a)\int_0^1 t(1-t)\,dt$$

bulunur. Buradan da

$$\int_0^1 t\, dt = \int_0^1 (1-t)\, dt = \frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad \int_0^1 t(1-t)\, dt = \frac{1}{6}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \right| \le \frac{M}{3}(b-a)$$

olup ispat tamamlanmış olur. ■

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

3.1 *s*-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN AĞIRLIKLI İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Bu bölümde s-konveks fonksiyonlarının türevlerinin mutlak değerini kullanarak Hermite- Hadamard- Fejer tipli ve Hermite- Hadamard tipli bazı ağırlıklı integral eşitsizlikleri içeren sonuçlar elde edeceğiz.

Sonuçlarımızı kanıtlamak için ilk olarak aşağıdaki yardımcı teoremi verelim.(Sarıkaya ve Erden 2014)

Yardımcı Teorem 3.1.1. $f : I^0 \subseteq R \to R$, I^0 üzerinde diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $a,b \in I^0$ için $a < \text{b}$ ve $\text{w} : [a,\text{b}] \to R$ olsun. Eğer f' fonksiyonu , her $x \in [a,b]$, $w \in L[a,b]$ ve $\alpha \geq 1$ ise,

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \left(\int_a^t w(u)du \right)^{\alpha} f'(t)dt - \int_a^b \left(\int_t^b w(u)du \right)^{\alpha} f'(t)dt \\
&= \left(\int_a^b w(u)du \right)^{\alpha} \left[f(a) + f(b) \right] \qquad (3.1) \\
&-\alpha \int_a^b \left(\int_a^t w(u)du \right)^{\alpha-1} w(t) f(t)dt - \alpha \int_a^b \left(\int_t^b w(u)du \right)^{\alpha-1} w(t) f(t)dt
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat.

$$\int_a^b \left(\int_a^t w(u)du \right)^{\alpha} f'(t)dt$$

$$= \left(\int_a^t w(u)du \right)^{\alpha} f(t) \Big|_a^b - \alpha \int_a^b \left(\int_a^t w(u)du \right)^{\alpha-1} w(t) f(t)dt \qquad (i)$$

$$= \left(\int_a^b w(u)du \right)^{\alpha} f(b) - \alpha \int_a^b \left(\int_a^t w(u)du \right)^{\alpha-1} w(t) f(t)dt$$

ve

$$\int_a^b \left(\int_a^t w(u)du \right)^{\alpha} f'(t)dt$$

$$= \left(\int_t^b w(u)du \right)^{\alpha} f(t) \Big|_a^b - \alpha \int_a^b \left(\int_t^b w(u)du \right)^{\alpha-1} w(t) f(t)dt \qquad (ii)$$

$$= -\left(\int_a^b w(u)du \right)^{\alpha} f(a) - \alpha \int_a^b \left(\int_t^b w(u)du \right)^{\alpha-1} w(t) f(t)dt$$

(i) ve (ii) eşitliklerinden (3.1) elde edilir.

Teorem 3.1.2. $f: I \subset [0,\infty) \to R$ fonksiyonu I° üzerinde diferansiyellenebilir bir dönüşüm ve $a,b \in I$ için $a<b$ olsun. $\mathrm{w}:[a,\mathrm{b}] \to R$ $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli olsun. $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde s–konveks ise

$$\Bigg| \left(\int_a^b w(u)du \right)^{\alpha} \left[f(a) + f(b) \right]$$

$$-\alpha \int_a^b \left(\int_a^t w(u)du \right)^{\alpha-1} w(t) f(t)dt - \alpha \int_a^b \left(\int_t^b w(u)du \right)^{\alpha-1} w(t) f(t)dt \Bigg| \qquad (3.2)$$

$$\le \|w\|_{[a,b],\infty}^{\alpha} (b-a)^{\alpha+1} A(\alpha,s) \left(|f'(a)| + |f'(b)| \right)$$

eşitsizliği yazılır. Burada B_{χ} fonksiyonu $B_x(m,n) = \int_0^x t^{m-1}(1-t)^{n-1} dt$ şeklinde tanımlı tam olmayan beta fonksiyonu, $0<x\leq 1$, $\alpha \geq 1$, $\|w\|_{[a,b],\infty}=\sup_{t\in[a,b]}|w(t)|$ ve

$$A(a,s)=\left[\frac{1}{a+s+1}\left(1-\frac{1}{2^{a+s}}\right)+B_{\frac{1}{2}}(s+1,a+1)-B_{\frac{1}{2}}(a+1,s+1)]\right]$$ dır.

İspat. Yardımcı Teorem 3.1.1 in mutlak değerini alınırsa

$$\left|\left(\int_a^b w(u)du\right)^{\alpha}[f(a)+f(b)] -\alpha\int_a^b\left(\int_a^t w(u)du\right)^{\alpha-1}w(t)f(t)dt-a\int_a^b\left(\int_t^b w(u)du\right)^{\alpha-1}w(t)f(t)dt\right| \tag{3.3}$$

$$\leq\int_a^b\left|\left(\int_a^t w(u)du\right)^{\alpha}-\left(\int_t^b w(u)du\right)^{\alpha}\right||f'(t)|dt$$

$$\leq\|w\|^{\alpha}_{[a,b],\infty}\int_a^b\left|(t-a)^{\alpha}-(b-t)^{\alpha}\right||f'(t)|dt$$

$$=\|w\|^{\alpha}_{[a,b],\infty}\left\{\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left[(b-t)^{\alpha}-(t-a)^{\alpha}\right]\left|f'\left(\frac{b-t}{b-a}a+\frac{t-a}{b-a}b\right)\right|dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left[(t-a)^{\alpha}-(b-t)^{\alpha}\right]\left|f'\left(\frac{b-t}{b-a}a+\frac{t-a}{b-a}b\right)\right|dt\right\}$$

yazılır. Burada $|f'|$, [a,b] üzerinde *s*-konveks fonksiyon olduğu kullanılırsa,

$$\left|\left(\int_a^b w(u)du\right)^{\alpha}[f(a)+f(b)] -\alpha\int_a^b\left(\int_a^t w(u)du\right)^{\alpha-1}w(t)f(t)dt-\alpha\int_a^b\left(\int_t^b w(u)du\right)^{\alpha-1}w(t)f(t)dt\right|$$

$$\le \|w\|^{a}_{[a,b],\infty}\left\{\int_{a}^{\frac{a+b}{2}}\left[(b-t)^{\alpha}-(t-a)^{\alpha}\right]\left[\left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{s}|f'(a)|+\left(\frac{t-a}{b-a}\right)^{s}|f'(b)|\right]dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left[(t-a)^{\alpha}-(b-t)^{\alpha}\right]\left[\left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{s}|f'(a)|+\left(\frac{t-a}{b-a}\right)^{s}|f'(b)|\right]dt\right\}$$

$$=\|w\|^{a}_{[a,b],\infty}\left[\frac{|f'(a)|}{(b-a)^{s}}\int_{b}^{\frac{a+b}{2}}\left[(b-t)^{\alpha+s}-(t-a)^{\alpha}(b-t)^{s}\right]dt\right.$$

$$+\frac{|f'(b)|}{(b-a)^{s}}\int_{a}^{\frac{a+b}{2}}\left[(b-t)^{\alpha}(t-a)^{s}-(t-a)^{\alpha+s}\right]dt$$

$$+\frac{|f'(a)|}{(b-a)^{s}}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left[(t-a)^{\alpha}(b-t)^{s}-(b-t)^{\alpha+s}\right]dt$$

$$\left.+\frac{|f'(b)|}{(b-a)^{s}}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left[(t-a)^{\alpha+s}-(b-t)^{\alpha}(t-a)^{s}\right]dt\right]$$

yazılır. Yukarıdaki son integralleri aşağıdaki gibi hesaplayalım.

$$\int_{b}^{\frac{a+b}{2}}\left[(b-t)^{\alpha+s}-(t-a)^{\alpha}(b-t)^{s}\right]dt$$
$$=\frac{(b-a)^{\alpha+s+1}}{\alpha+s+1}-\frac{(b-a)^{\alpha+s+1}}{2^{\alpha+s+1}(\alpha+s+1)}-(b-a)^{\alpha+s+1}B_{\frac{1}{2}}(\alpha+1,s+1), \tag{3.4}$$

$$\int_{a}^{\frac{a+b}{2}}\left[(b-t)^{\alpha}(t-a)^{s}-(t-a)^{\alpha+s}\right]dt$$
$$=(b-a)^{\alpha+s+1}B_{\frac{1}{2}}(s+1,\alpha+1)-\frac{(b-a)^{\alpha+s+1}}{2^{\alpha+s+1}(\alpha+s+1)}, \tag{3.5}$$

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left[(t-a)^{\alpha}(b-t)^{s}-(b-t)^{\alpha+s}\right]dt$$
$$=(b-a)^{\alpha+s+1}B_{\frac{1}{2}}(s+1,\alpha+1)-\frac{(b-a)^{\alpha+s+1}}{2^{\alpha+s+1}(a+s+1)}, \tag{3.6}$$

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left[\left(t-a\right)^{\alpha+s}-\left(b-t\right)^{\alpha}\left(t-a\right)^{s}\right]dt$$
$$=\frac{\left(b-a\right)^{\alpha+s+1}}{\alpha+s+1}-\frac{\left(b-a\right)^{\alpha+s+1}}{2^{\alpha+s+1}\alpha+s+1}-\left(b-a\right)^{\alpha+s+1}B_{\frac{1}{2}}\left(\alpha+1,s+1\right). \tag{3.7}$$

Dolayısıyla, (3.4) - (3.7) eşitlikleri (3.3) de yazılırsa (3.2) ispat edilmiş olur. ■

Sonuç 3.1.3 (3.2) eşitsizliğinde w(u) = 1 alınırsa,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma\left(\alpha+1\right)}{2\left(b-a\right)^{\alpha}}\left[J_{a^{+}}^{\alpha}f(b)+J_{b^{-}}^{\alpha}f(x)\right]\right|$$
$$\leq\frac{b-a}{2}A(\alpha,s)\left(\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right) \tag{3.8}$$

elde edilir.

Uyarı 3.1.4. (3.8) eşitsizliğinde s = 1 alınırsa,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma\left(\alpha+1\right)}{2\left(b-a\right)^{\alpha}}\left[J_{a^{+}}^{\alpha}f(b)+J_{b^{-}}^{\alpha}f(x)\right]\right|$$
$$\leq\frac{\left(b-a\right)}{2\left(\alpha+2\right)}\left[\left(1-\frac{1}{2^{\alpha+1}}\right)+\frac{1}{(\alpha+1)}\left(1-\frac{\alpha+3}{2^{\alpha+1}}\right)\right]\left(\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right) \tag{3.9}$$

elde edilir.

Uyarı 3.1.5. (3.9) eşitsizliğinde α = 1 alınırsa,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}f(x)dx\right|\leq\frac{(b-a)\left(\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right)}{8}$$

elde edilir.

Sonuç 3.1.6. Teorem 3.1.2 de s = 1 alınırsa,

$$\left|\left(\int_a^b w(u)du\right)^a [f(a)+f(b)]\right.$$

$$\left.-a\int_a^b\left(\int_a^t w(u)du\right)^{a-1} w(t)f(t)dt - a\int_a^b\left(\int_t^b w(u)du\right)^{a-1} w(t)f(t)dt\right|$$

$$\leq \|w\|_{[a,b],\infty}^a \frac{(b-a)^{a+1}}{(a+2)}\left[\left(1-\frac{1}{2^{a+1}}\right)+\frac{1}{(a+1)}\left(1-\frac{a+3}{2^{a+1}}\right)\right](|f'(a)||f'(b)|)$$

elde edilir.

Teorem 3.1.7. $f : I^0 \subseteq R \to R$ fonksiyonu I^0 üzerinde diferansiyellenebilir, $a,b \in I^0$ olmak üzere $a<b$ olsun. $w:[a,b] \to R$, [a, b] üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $|f'|^q$ fonksiyonu , $[a,b]$ aralığı üzerinde ikinci anlamda s -konveks ise $s \in (0,1]$ ve $q>1$ için, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere,

$$\left|\left(\int_a^b w(u)du\right)^\alpha [f(a)+f(b)]\right.$$

$$\left.-\alpha\int_a^b\left(\int_a^t w(u)du)\right)^{a-1} w(t)f(t)dt - \alpha\int_a^b\left(\int_t^b w(u)du\right)^{\alpha-1} w(t)f(t)dt\right|$$

$$\leq \|w\|_{[a,b],\infty}^\alpha \frac{2^{\frac{1}{p}}(b-a)^{\alpha+1}}{(\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(1-\frac{1}{2^{\alpha p}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.10}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Yardımcı Teorem 3.1.1. den, Hölder eşitsizliği ve $|f'|^q$ ’ in ikinci anlamda s -konveksliğini kullanarak,

$$\left|\left(\int_a^b w(u)du\right)^{\alpha}\left[f(a)+f(b)\right]\right.$$

$$\left.-\alpha\int_a^b\left(\int_a^t w(u)du\right)^{\alpha-1} w(t)f(t)dt-\alpha\int_a^b\left(\int_t^b w(u)du\right)^{\alpha-1} w(t)f(t)dt\right|$$

$$\leq\left(\int_a^b\left|\left(\int_a^t w(u)du\right)^{\alpha}-\left(\int_t^b w(u)du\right)^{\alpha}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b\left|f'(t)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq\left\|w\right\|_{[a,b],\infty}^{\alpha}\left(\int_a^b\left|(t-a)^{\alpha}-(b-t)^{\alpha}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b\left|f'(t)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

bulunur. Basit işlemlerle, $(M-N)^q\leq M^q-N^q$ için $M\geq N\geq 0$ ve $q\geq 1$ olmak üzere

$$\left|\left(t-a\right)^{\alpha}-\left(b-t\right)^{\alpha}\right|^p\leq\begin{cases}\left(b-t\right)^{p\alpha}-\left(t-a\right)^{p\alpha},\ t\in\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]\\[2ex] \left(t-a\right)^{p\alpha}-\left(b-t\right)^{p\alpha},\ t\in\left[\dfrac{a+b}{2},b\right]\end{cases}$$

eşitsizlikleri yazılır. Buradan da,

$$\int_a^b\left|\left(t-a\right)^{\alpha}-\left(b-t\right)^{\alpha}\right|^p dt$$

$$\leq\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left[\left(b-t\right)^{p\alpha}-\left(t-a\right)^{p\alpha}\right]dt+\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left[\left(t-a\right)^{p\alpha}-\left(b-t\right)^{p\alpha}\right]dt$$

$$=\frac{2(b-a)^{\alpha p+1}}{(\alpha p+1)}\left(1-\frac{1}{2^{\alpha p}}\right)$$

bulunur. Diğer yandan, $\left|f'(t)\right|^q$, $\left[a,b\right]$ üzerinde s-konveks olduğu için,

$$\left|f'\left(\frac{b-t}{b-a}a+\frac{t-a}{b-a}b\right)\right|^q\leq\left(\frac{b-t}{b-a}\right)^s\left|f'(a)\right|^q+\left(\frac{t-a}{b-a}\right)^s\left|f'(b)\right|^q \qquad (3.11)$$

olup buradan da,

$$\left|\left(\int_a^b w(u)du\right)^{a}\left[f(a)+f(b)\right]-\alpha\int_a^b\left(\int_a^t w(u)du\right)^{\alpha-1}w(t)f(t)dt-\alpha\int_a^b\left(\int_t^b w(u)du\right)^{\alpha-1}w(t)f(t)dt\right|$$

$$\leq\|w\|_{[a,b],\infty}^{a}\frac{2^{\frac{1}{p}}(b-a)^{\alpha+\frac{1}{p}}}{(\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(1-\frac{1}{2^{\alpha p}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b\left[\left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{s}|f'(a)|^{q}+\left(\frac{t-a}{b-a}\right)^{s}|f'(b)|^{q}\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\|w\|_{[a,b],\infty}^{\alpha}\frac{(b-a)^{\alpha+\frac{1}{p}}}{(\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(2-\frac{1}{2^{\alpha p-1}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{|f'(a)|^{q}}{(b-a)^{s}}\right)\int_a^b(b-t)^{s}dt+\left(\frac{|f'(b)|^{q}}{(b-a)^{s}}\right)\int_a^b(t-a)^{s}dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq\|w\|_{[a,b],\infty}^{\alpha}\frac{(b-a)^{\alpha+1}}{(\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(2-\frac{1}{2^{\alpha p-1}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f'(a)|^{q}+|f'(b)|^{q}}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde ederiz. Böylece ispat tamamlanır. ■

Sonuç 3.1.8. Teorem 3.1.7. de $w(u)=1$ alınırsa,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}f(b)+J_{b^-}^{\alpha}f(x)\right]\right|$$
$$\leq\frac{(b-a)}{2(\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(2-\frac{1}{2^{\alpha p-1}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f'(a)|^{q}+|f'(b)|^{q}}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.12}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.1.9. Teorem 3.1.7 de $\alpha=1$ alınırsa,

$$\left|\left(\int_a^b w(u)du\right)\frac{f(a)+f(b)}{2}-\int_a^b w(t)f(t)dt\right|$$
$$\leq\|w\|_{[a,b],\infty}\frac{(b-a)^{2}}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(2-\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f'(a)|^{q}+|f'(b)|^{q}}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.13}$$

eşitsizliği elde edilir.

Uyarı 3.1.10 Eğer 3.12 de α = s = 1 alınırsa ya da (3.13) de $w(u)$ = s = 1 alınırsa,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| \le \frac{(b-a)}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(2-\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmamızda s-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard ve Hermite-Hadamard-Fejer tipli ağırlıklı integral eşitsizlikleri ile ilişkili yeni teoremler ve sonuçlar elde ettik. Yardımcı Teorem 3.1.1. deki özdeşliği kullanılarak elde etmiş olduğumuz eşitsizlikler gibi h-konveks, m-konveks, log-konveks, (α, m)- konveks fonksiyonlar içinde birçok yeni sonuçlar elde edilebilir. Bu problemleri de açık problem olarak ilgili okuyuculara bırakıyoruz.

5. KAYNAKLAR

Bayraktar M., Fonksiyonel Analiz, Ankara, Gazi Kitapevi, **(2006)**

Breckner W, Stetigkeitsaussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer funktionen in topologischen linearen Raumen, Pupl. Inst. Math. 23 **(1978)**

Dahmani Z, On Minkowski and Hermite-Hadamard integral inequalities via fractional integration, *Ann. Funct. Anal.* 1(1) **(2010)**

Deng J. and Wang J., Fractional Hermite-Hadamard inequalities for (α,m)-logarithmically convex functions.

Dönmez A., Reel Analiz, Ankara, Seçkin Yayıncılık, **(2001)**

Dragomir S. S. and S. Fitzpatrik, The Hadamard's inequality for s-convex functions in the second sense, *Demonstration Math*. 32(4) **(1999)**

Dragomir S. S. and R.P. Agarwal, Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula, *Appl. Math. lett*., 11(5) **(1998)**

Dragomir S. S. and C. E. M. Pearce, Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications, *RGMIA Monographs,* Victoria University, **(2000)**

Dragomir S. S. and Pearce C. E. M., Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications, **(2002)**

Dragomir S.S., Some integral inequalities for differentiable convex functions, *Contrib. Sec. Math. Tech. Sci.* 13 **(1992),** 13–17.

Dragomir S.S., Refinements of Hadamard’s inequality for isotonic linear functionals, *Tamkang J. Math*. 24 **(1993),** 101–106.

Dragomir, S.S. ve N.M. Ionescu, On some inequalities for convexdominated functions, *Anal. Numer. Theor. Approx*. 19 **(1990)**, 21–27.

Dragomir S.S. ve N.M. Ionescu, Some remarks on convex functions, *Anal. Numer*.

Theor. Approx. 21 **(1992)** , 31–36.

Dragomir S.S., J.E. Peˇcari´c ve L. Persson, Some inequalities of Hadamard type, Research Report No. 13, *Dept. Appl. Math.,* Lulea Univ. of Technology, **(1994)**

Dragomir S.S., Two mappings in connection to Hadamard's inequalities, *J. Math. Anal. Appl.* 167 **(1992)**, 49–56

Dragomir S.S., Y.J. Cho ve S.S. Kim, Inequalities of Hadamard's type for Lipschitzian mappings and their applicaitions, *J. Math. Anal. Appl.* 245 **(2000)**, 489–501.

Dragomir S.S., Two refinements of Hadamard's inequalities, *Coll. Sci. Pap. Fac. Sci. Kragujevac* 11 **(1990)**, 23–26.

Fejer, Über die Fourierreihen, *II. Math. Naturwiss. Anz Ungar. Akad. Wiss.,* 24 (Hungarian). **(1906)** , 369--390.

Fuchs, L., A new proof of an inequality of Hardy–Littlewood–Pólya, *Math. Tidsskr*. 13 **(1947)**, 53–54.

Gill, P.M., C.E.M. Pearce and J.E. Peˇcari´c, Hadamard's inequalities for r-convex functions, *J. Math. Anal. Appl.* 215 **(1997)**, 461–470.

Godunova, E.K. and V.I. Levin, Neravenstva dlja funkcii shirokogo klassa soderzhashchego vypuklye, monotonnye i nekotorye drugie vidy funkcii, *Vychisl. Mat. i Mat. Fiz., Mežvuzov. Sb. Nauˇc. Trudov*, MGPL, Moscow, **(1985)** pp. 138–142.

Hadamard, J., Etude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann, *J. Math. Pures Appl*. 9 **(1893)**, 171–215.

Hudzik H., Maligranda L., Some remarks on s-convex functions, Aequationes Math., 48**(1994)**, 100-111.

Iscan, Hermite-Hadamard-Fejer type inequalities for convex functions via fractional integrals, *arXiv preprint arXiv*: 1404. 7722 **(2014)**

Kırmacı U.S., Inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to midpoint formula, *Appl. Math. Comp.,* 147 **(2004)**, 137-146.

Liao Y-M., Deng J-H ve Wang J-R, Riemann-Liouville fractional Hermite-Hadamard inequalities. Part I: for once differentiable geometric-arithmetically s-convex functions, *Journal of Inequalities and Applications* **(2013):**443.

Lin, T.P., The power mean and the logarithmic mean, *Amer. Math. Monthly* 81 **(1979)**, 879–883.

Lupas¸, A., A generalization of Hadamard's inequality for convex functions, Univ. Beograd Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. Nos 544–576 **(1976)** , 115–121.

Pečarić J.E., Inverse of Jensen–Steffensen's inequality, *Glas. Math. 16* **(1981)**, 229–233.

Pečarić J.E. and S.S. Dragomir, A generalization of Hadamard's inequality for isotonic linear functionals, *Radovi Math.* 7 **(1991),** 103–107

Pečarić J., Proschan F.ve Tong Y.L., Convex functions, partial ordering and statistical applications, *Academic Press*, New York, **(1991)**

Sarikaya M. Z., E. Set, Yaldiz H. ve Basak N., Hermite -Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities, *Mathematical and Computer Modelling*, DOI:10.1016/j.mcm.2011.12.048, 57 **(2013)** 2403-2407.

Sarikaya M. Z. ve Erden S., On the weigted integral inequalities for convex functions, *Acta Universitatis Sapientiae Mathematica*, , 6, 2 **(2014)** 194–208.

Sarikaya M. Z. ve Erden S., On The Hermite- Hadamard-Fejer Type Integral Inequality for Convex Function, *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, Vol. 2, No. 3, **(2014),** 85-89.

Sarikaya M. Z., On new Hermite Hadamard Fejer Type integral inequalities, *Studia Universitatis Babes-Bolyai Mathematica*, 57 No. 3 **(2012),** 377-386.

Tseng K-L., Yang G-S. ve Hsu K-C., Some inequalities for differentiable mappings and applications to Fejer inequality and weighted trapozidal formula, *Taiwanese J. Math*. 5(4), **(2011),** 1737-1747

Tunc M., On new inequalities for h-convex functions via Riemann-Liouville fractional integration, *Filomat* 27:4 **(2013),** 559--565.

Wang J., X. Li, M. Feckan ve Y. Zhou, Hermite-Hadamard-type inequalities for Riemann-Liouville fractional integrals via two kinds of convexity, *Appl. Anal*. (2012). doi:10.1080/00036811**.(2012)**727986.

Wang C.-L., Wang X.-H, On an extension of Hadamard inequality for convex functions, *Chin. Ann. Math. 3* **(1982)** 567--570.

Wu S.-H., On the weighted generalization of the Hermite-Hadamard inequality and its applications, *The Rocky Mountain J. of Math*., vol. 39, no. 5, pp. 1741--1749, **(2009)**

Xi, B-Y, ve F. Qi, Some Hermite-Hadamard type inequalities for differentiable convex functions and applications, *Hacet. J. Math. Stat.*. 42(3), 243--257 **(2013).**

Xi, B-Y, ve F. Qi, Hermite-Hadamard type inequalities for functions whose derivatives are of convexities, *Nonlinear Funct. Anal. Appl.*. 18(2), 163--176 **(2013)**

Zhang Y. ve Wang J-R., On some new Hermite-Hadamard inequalities involving Riemann-Liouville fractional integrals, *Journal of Inequalities and Applications* **(2013):**220.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: Yıldırım, Fatma
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 20.06.1991 / LADİK
Telefon	:0541 456 18 84
Faks	: -
E-posta	: fatmayildirim555811@ gmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim**	**Mezuniyet Tarihi**
Yüksek Lisans	Düzce Üniversitesi/ Matematik Bölümü	2015
Lisans	Düzce Üniversitesi/ Matematik Bölümü	2013
Lise	Özdemir Sabancı Emirgan Lisesi	2009

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2013-2014	23 Nisan Ortaokulu	Matematik Öğretmeni

Yayınlar

1. Sarikaya M. Z. ve Yıldırım F., *s*-konveks fonksiyonlar için ağırlıklı integral eşitsizlikleri **,** 9. Ankara Matematik Günleri Sempozyumu, **(2014)**