T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

SCHRÖDINGER-PARABOLİK DENKLEMLERİ İÇİN LOKAL OLMAYAN SINIR-DEĞER PROBLEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YASEMİN KARABACAK

ŞUBAT 2015

DÜZCE

KABUL VE ONAY BELGESİ

Yasemin KARABACAK tarafından hazırlanan SCHRÖDINGER–PARABOLİK DENKLEMLERİ İÇİN LOKAL OLMAYAN SINIR–DEĞER PROBLEMLERİ isimli lisansüstü tez çalışması, Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun /01/2015 tarih ve 2015/ sayılı kararı ile oluşturulan jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Üye
(Tez Danışmanı)
Yrd. Doç. Dr. Yıldırım ÖZDEMİR
Düzce Üniversitesi

Üye
Yrd.Doç.Dr.Abdulah Said ERDOĞAN
Düzce Üniversitesi

Üye
Yrd.Doç.Dr.İlhame AMİRALİ

Tezin Savunulduğu Tarih : 06.02.2015

ONAY

Bu tez ile Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yasemin KARABACAK'ın Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans derecesini almasını onaylamıştır.

Prof. Dr. Haldun MÜDERRİSOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

06/02/2015

Yasemin KARABACAK

Sevgili Aileme…

TEŞEKKÜR

Başlamış olduğum bu yolda, en başından sonuna dek tüm görüşlerini paylaşan, engin bilgi ve tecrübelerini hiçbir zaman esirgemeyen, bilim tutkusunu içinde barındıran, tüm sorularıma sabır ile yanıt veren ve her türlü konuda desteğini eksik etmeyerek, yanımda olduğunu hissettiğim abi niteliğindeki saygıdeğer hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Yıldırım ÖZDEMİR'e teşekkürü bir borç bilirim.

Tüm görüşlerini ve bilgisini herkes ile paylaşmaktan sakınmayan, bilgi ve deneyimleriyle sonuca ulaşmamda yol gösteren, herkese eşit tavrı ve işine tutku ile bağlı olan, hayatın her karesinde bana bir baba gibi sahip çıkan, kişiliği, tavırları ve edindiğim tecrübelerinden dolayı kendisine minnettar olduğum sayın Prof. Dr. Allaberen ASHYRALYEV'e çok teşekkür ederim.

Son olarak, diğer jüri üyeleri sayın Yrd. Doç. Dr. İlhame AMİRALİ'ye ve sayın Yrd. Doç. Dr. Abdullah Said ERDOĞAN'a göstermiş oldukları ilgi ve yol gösterici yardımlarından ötürü çok teşekkür ederim.

Tez dönemim boyunca moralimi en üst düzeyde tutan ve kendilerinden her fırsatta güç aldığım aileme ve kardeşlerime müteşekkirim.

6 Şubat 2015 **Yasemin Karabacak**

İÇİNDEKİLER **<u>Sayfa</u>**

ŞEKİL LİSTESİ

ÖZET

SCHRÖDINGER-PARABOLİK DENKLEMLERİ İÇİN LOKAL OLMAYAN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Yasemin KARABACAK
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Yıldırım ÖZDEMİR
Şubat 2015, 38 sayfa

H Hilbert uzayında öz-eşlenik pozitif tanımlı *A* operatörlü diferansiyel denklemleri için lokal olmayan sınır-değer problemi

$$\begin{cases} i\dfrac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t) \ (0 \leq t \leq 1), \\ \dfrac{du(t)}{dt} + Au(t) = g(t) \ (-1 \leq t \leq 0), \\ u(-1) = \alpha u(\mu) + \varphi, \ \ 0 < \mu \leq 1, \end{cases}$$

ele alınmıştır. Bu problemin yaklaşık çözümü için birinci basamaktan doğruluklu fark şeması sunulmuştur. Schrödinger–parabolik denklemler için fark şemalarının MATLAB programı kullanılarak yaklaşık çözümleri elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Schrödinger–Parabolik Denklem, Fark Şemaları.

ABSTRACT

NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR SCHRÖDINGER-PARABOLIC EQUATIONS

Yasemin Karabacak
Duzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Assit. Prof. Yildirim OZDEMIR
February 2015, 38 pages

The abstract nonlocal boundary value problem

$$\begin{cases} i\dfrac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t)\ (0 \leq t \leq 1), \\ \dfrac{du(t)}{dt} + Au(t) = g(t)\ (-1 \leq t \leq 0), \\ u(-1) = \alpha u(\mu) + \varphi,\ \ 0 < \mu \leq 1, \end{cases}$$

for differential equation in a Hilbert space H with the self-adjoint positive definite operator A is considered. The first order accuracy difference scheme for the approximate solutions of this nonlocal boundary value problem are presented. The MATLAB implementation of these difference schemes for Schrödinger-parabolic equation is presented.

Keywords: Schrödinger- parabolic, Equation, Difference Schemes.

EXTENDED ABSTRACT

NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR SCHRÖDINGER – PARABOLIC EQUATIONS

Yasemin Karabacak
Düzce University
Graduade School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Assist. Prof. Yildirim OZDEMIR
February 2015, 38 pages

1. INTRODUCTION:

The abstract nonlocal boundary value problem

$$\begin{cases} i\dfrac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t)\ (0 \le t \le 1), \\ \dfrac{du(t)}{dt} + Au(t) = g(t)\ (-1 \le t \le 0), \\ u(-1) = \alpha u(\mu) + \varphi,\ \ 0 < \mu \le 1, \end{cases}$$

for differential equation in a Hilbert space H with the self-adjoint positive definite operator A is considered. The first order accuracy difference schemes for the approximate solutions of this nonlocal boundary value problem are presented. The MATLAB implementation of these difference schemes for Schrödinger–parabolic equation is presented.

Methods of solutions of nonlocal boundary value problems for partial differential equations and partial differential equations of mixed type have been studied extensively by many researches (see [Salakhitdinov, M. S., 1974], [Djuraev, T. D., 1979], [Bazarov, D. and Soltanov, H., 1995], [Glazatov, S. N., 1998], [Ashyralyev, A. and Aggez, N., 2004], [Ashyralyev, A. and Ozdemir, Y., 2005], [Ashyralyev, A. and Gercek, O., 2008], [Ashyralyev, A. and Sirma, A., 2008], [Ashyralyev, A. and Yildirim, O., 2010], [Ashyralyev, A. and Hicdurmaz, B., 2011], [Ashyralyev, A. and Ozger, F., 2011], [Ozdemir, Y. and Kucukunal, M., 2012] and the references given therein).

2. MATERIAL AND METHODS:

It is known that certain problems of modern physics and technology can be effectively described in terms of nonlocal problems for partial differential equations. These nonlocal conditions arise mainly when the data on the boundary cannot be measured directly.

3. RESULTS AND DISCUSSIONS:

This work is devoted to the study of the numerical solutions of the nonlocal boundary value problem for Schrödinger–parabolic differential and difference equations. The following results are obtained:

- Nonlocal boundary value problem for Schrödinger–parabolic equation in a Hilbert space is established.
- The first order of accuracy difference schemes for the approximate solutions of the nonlocal boundary problem for Schrödinger–parabolic differential equations are presented.

4. CONCLUSION AND OUTLOOK:

Our goal in this work is to investigate the approximate solutions of the nonlocal boundary value problems for equations of Schrödinger–parabolic type.

1 GİRİŞ

Akışkanlar mekaniğindeki bir çok problemde, ısı akışı, füzyon süreci, matematiksel biyoloji, modern fiziğin ve teknolojinin bazı problemlerinin etkili bir biçimde kısmi diferansiyel denklemler için lokal olmayan sınır-değer problemleri üzerinden ifade edilebilir olduğu bilinmektedir. Kısmi diferansiyel denklemler ve karma tipli kısmi diferansiyel denklemler için lokal olmayan sınır-değer problemlerinin çözüm yöntemleri üzerine, kapsamlı olarak bir çok araştırmacı tarafından çeşitli çalışmalar yapılmıştır. (bkz. [1-14]).

Bu çalışmadaki amacımız Schrödinger-parabolik tipindeki denklemler için lokal olmayan sınır-değer problemlerinin yaklaşık çözümlerini incelemektir.

Bilindiği gibi bazı Schrödinger-parabolik denklemler için lokal olmayan sınır-değer problemleri analitik yöntemler ile çözülebilmektedir. Bunlardan bazıları, Fourier serileri yöntemi, Fourier dönüşümü yöntemi ve Laplace dönüşümü yöntemidir. Şimdi, bunlara birer örnekler verelim.

İlk olarak Schrödinger-parabolik denklemi için

$$\begin{cases} iu_t - u_{xx} + u = (2\cos t - i\sin t)\sin x, 0 \le t \le 1, 0 \le x \le \pi, \\ u_t - u_{xx} + u = (2\cos t - \sin t)\sin x, -1 \le t \le 0, 0 \le x \le \pi, \\ u(1,x) = \dfrac{1}{2}u(-1,x) + \dfrac{1}{2}\cos 1 \sin x, 0 \le x \le \pi, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, -1 \le t \le 1 \end{cases} \tag{1.1}$$

lokal olmayan sınır-değer problemini ele alalım.

(1.1) probleminin çözümü için, değişkenlerine ayırma yöntemini, ya da bilinen diğer adıyla, Fourier serileri yöntemini kullanalım. İlk olarak

$$u(t,x) = v(t,x) + w(t,x)$$

yazılır. Burada $v(t,x)$,

$$\begin{cases} iv_t - v_{xx} + v = 0, 0 \le t \le 1, 0 \le x \le \pi, \\ v_t - v_{xx} + v = 0, -1 \le t \le 0, 0 \le x \le \pi, \\ v(1,x) = \dfrac{1}{2}v(-1,x), 0 \le x \le \pi, \\ v(t,0) = v(t,\pi) = 0, -1 \le t \le 1 \end{cases} \tag{1.2}$$

probleminin çözümü ve $w(t,x)$ ise,

$$\begin{cases} iw_t - w_{xx} + w = (2\cos t - i\sin t)\sin x, 0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq \pi, \\ w_t - w_{xx} + w = (2\cos t - \sin t)\sin x, -1 \leq t \leq 0, 0 \leq x \leq \pi, \\ w(1,x) = \frac{1}{2}w(-1,x) + \frac{1}{2}\cos 1 \sin x, 0 \leq x \leq \pi, \\ w(t,0) = w(t,\pi) = 0, -1 \leq t \leq 1 \end{cases} \tag{1.3}$$

probleminin çözümüdür.

Öncelikle, (1.2) probleminin çözümünü bulalım. $0 \leq t \leq 1$ için

$$v(t,x) = T(t)X(x) \neq 0$$

olsun. Bu durumda,

$$i\frac{T'(t) + T(t)}{T(t)} - \frac{X''(x)}{X(x)} = 0$$

elde ederiz. Buradan,

$$i\frac{T'(t) + T(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -k^2 = \lambda$$

yazılır. Öyleyse,

$$X''(x) + k^2X(x) = 0$$

olur. Ayrıca $v(t,0) = v(t,\pi) = 0$ koşullarından $X(0) = X(\pi) = 0$ elde edilir. O halde,

$$X_k(x) = \sin kx$$

bulunur. $T(t)$ fonksiyonunu elde etmek için ise,

$$iT'(t) + (k^2+1)T(t) = 0$$

ya da

$$T'(t) - i(k^2+1)T(t) = 0$$

birinci mertebeden adi diferansiyel denklemini yazabiliriz. Bu denklemin genel çözümü

$$T_k(t) = A_k e^{i(k^2+1)t}$$

dir. Böylece,

$$v(t,x) = T_k(t)X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{i(k^2+1)t} \sin kx$$

olur.

Benzer şekilde $-1 \leq t \leq 0$ için

$$v(t,x) = T(t)X(x) \neq 0$$

olsun. Bu durumda,

$$\frac{T'(t)+T(t)}{T(t)}-\frac{X''(x)}{X(x)}=-k^2=\lambda$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan,

$$X''(x)+k^2X(x)=0$$

ve sınır koşullarından $X(0)=X(\pi)=0$ ve dolayısıyla

$$X_k(x)=\sin kx$$

olarak yazılır. $T(t)$ fonksiyonunu bulmak için

$$T'(t)+(1+k^2)T(t)=0$$

birinci mertebeden adi diferansiyel denklemini çözelim. Böylece,

$$T_k(t)=B_ke^{(1+k^2)t}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla,

$$v(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(B_ke^{(1+k^2)t}\right)\sin kx$$

olur.

Lokal olmayan sınır koşulu ve süreklilik koşulları

$$\begin{cases} v(1,x)=\dfrac{1}{2}v(-1,x), \\ v(0^+,x)=v(0^-,x), \\ v_t(0^+,x)=v_t(0^-,x) \end{cases}$$

kullanılarak $k=1,2,\cdots$ için $A_k=B_k=0$ elde edilir. Dolayısıyla, $v(t,x)\equiv 0$ olur.

Şimdi, (1.3) probleminin çözümünü bulalım. $0\leq t\leq 1$ için

$$w(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k(t)\sin kx$$

olsun. Buradan,

$$iw_t-w_{xx}+w=\sum_{k=1}^{\infty}\left[iA_k'(t)+(k^2+1)A_k(t)\right]\sin kx=(2\cos t-i\sin t)\sin x$$

yazılabilir. Yukarıdaki denklem

$$\begin{cases} iA_1'(t)+2A_1(t)=2\cos t-i\sin t, k=1 \\ iA_k'(t)+(k^2+1)A_k(t)=0, k\neq 1 \end{cases}$$

olduğunu gösterir. $-1 \leq t \leq 0$ için

$$w(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k(t) \sin kx$$

olsun. Buradan,

$$w_t - w_{xx} + w = \sum_{k=1}^{\infty} \left[B_k^{'}(t) + (k^2+1) B_k(t) \right] \sin kx = (2\cos t - \sin t) \sin x$$

yazılabilir. Yukarıdaki denklem

$$\begin{cases} B_1^{'}(t) + 2B_1(t) = 2\cos t - \sin t, \;\; k = 1 \\ \\ B_k^{'}(t) + (k^2+1) B_k(t) = 0, \;\; k \neq 1 \end{cases}$$

olduğunu gösterir. Lokal olmayan sınır koşul ve süreklilik koşulları

$$\begin{cases} w\left(0^+, x\right) = w\left(0^-, x\right), \\ \\ w_t\left(0^+, x\right) = w_t\left(0^-, x\right), \\ \\ w\left(1, x\right) = \dfrac{1}{2} w\left(-1, x\right) + \dfrac{1}{2} \cos 1 \sin x \end{cases}$$

kullanılarak

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} A_k\left(0\right) \sin kx = \sum_{k=1}^{\infty} B_k\left(0\right) \sin kx, \\ \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} A_k^{\prime}\left(0\right) \sin kx = \sum_{k=1}^{\infty} B_k^{\prime}\left(0\right) \sin kx, \\ \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} A_k\left(1\right) \sin kx = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} B_k\left(-1\right) \sin kx + \frac{1}{2} \cos 1 \sin x \end{cases}$$

denklemleri yazılır. Buradan, $k = 1, 2, \cdots$ için $A_k\left(0\right) = B_k\left(0\right)$ ve $A_k^{\prime}\left(0\right) = B_k^{\prime}\left(0\right)$ elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{cases} A_1\left(1\right) = \dfrac{1}{2} B_1\left(-1\right) + \dfrac{1}{2} \cos 1, k = 1 \\ \\ A_k\left(1\right) = \dfrac{1}{2} B_k\left(-1\right), k \neq 1 \end{cases}$$

bulunur. Eğer $k = 1$ ise,

$$\begin{cases} A_1\left(t\right) = \cos t \\ \\ B_1\left(t\right) = \cos t \end{cases}$$

dir. Eğer $k \neq 1$ ise, $A_k\left(t\right) = B_k\left(t\right) \equiv 0$ dır. Böylece, $\forall t \in [-1, 1]$ için

$$w\left(t, x\right) = \cos t \sin x$$

olur. Dolayısıyla, $\forall t \in [-1, 1]$ için

$$u(t, x) = v(t, x) + w(t, x) = \cos t \sin x$$

(1.1) probleminin çözümüdür.

Benzer şekilde aşağıdaki

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \displaystyle\sum_{r=1}^{n} \alpha_r \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_r^2} = f(t,x), \\ x = (x_1, \cdots, x_n) \in \overline{\Omega}, 0 \le t \le T, \\ \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \displaystyle\sum_{r=1}^{n} \alpha_r \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_r^2} = g(t,x), \\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \overline{\Omega}, -T \le t \le 0, \\ u_t(0+, x) = u_t(0-, x), x \in \overline{\Omega}, \\ u(-T, x) = u(T, x) + \varphi(x),\ x \in \overline{\Omega}, \\ u(t, x) = 0, x \in S \end{cases}$$

çok boyutlu Schrödinger-parabolik denklemleri için lokal olmayan sınır-değer probleminin çözümü elde edilebilir. Burada, $\alpha_r > 0$ ve $f(t,x)$ $(t \in [0,T],\ x \in \overline{\Omega})$, $g(t,x)$ $(t \in [-T,0],\ x \in \overline{\Omega}), \varphi(x), \psi(x)$ $(x \in \overline{\Omega})$ verilmiş düzgün (smooth) fonksiyonlardır. Ayrıca Ω, $\mathbb{R}^n$ n-boyutlu Öklit uzayında S ve $\overline{\Omega} = \Omega \cup S$ ile sınırlandırılmış olan bir birim açık küp olup,

$$(x : x = (x_1, \cdots, x_n), 0 < x_k < 1, 1 \le k \le n)$$

dir.

Ancak, değişkenlerine ayırma yöntemi yalnızca sabit katsayılı denklemlerin çözümünde kullanılabilmektedir. Oysa ki fark şemaları yöntemi katsayıların sabit olmadığı durumlarda da kullanılabilen çok kullanışlı bir yöntemdir.

İkinci olarak, Schrödinger-parabolik denklemi için

$$\begin{cases} iu_t - u_{xx} + u = -i(1 - (1+x)e^{-x}) \sin t + (-2e^{-x} + 1) \cos t, \\ 0 \le t \le 1, 0 < x < \infty, \\ u_t - u_{xx} + u = (1 - (1+x)e^{-x}) \sin t + (-2e^{-x} + 1) \cos t, \\ -1 \le t \le 0, 0 < x < \infty, \\ u(1, x) = \dfrac{1}{2} u(-1, x) + \dfrac{1}{2} [1 - (1+x) e^{-x}] \cos 1, 0 < x < \infty, \\ u(t, 0) = u_x(t, 0) = 0, -1 \le t \le 1 \end{cases} \tag{1.4}$$

problemini ele alalım. (1.4) problemi Laplace dönüşümü yöntemi (x'e göre) ile çözülebilir. Öncelikle, $0 \leq t \leq 1$ aralığını göz önüne alalım. Verilen denklemin her iki yanına Laplace dönüşümünü uygulayalım. Bu durumda,

$$L\left\{iu_t\right\} - L\left\{u_{xx}\right\} + L\left\{u\right\} = -i\sin t L\{1-(1+x)e^{-x}\} + \cos t L\{(-2e^{-x}+1)\}$$

veya

$$L\{iu\}_t - s^2 L\{u\} + su(t,0) + u'(t,0) + L\{u\} = -i\sin t\frac{1}{(s+1)^2 s} - \cos t\frac{s-1}{s(s+1)}$$

olacaktır. Burada,

$$L\left\{u\left(t,x\right)\right\} = u\left(t,s\right)$$

olarak gösterelim. Böylece denklem,

$$iu_t\left(t,s\right) - s^2 u\left(t,s\right) + u\left(t,s\right) = -i\sin t\frac{1}{(s+1)^2 s} - \cos t\frac{s-1}{s(s+1)}$$

birinci mertebeden adi diferansiyel denklem haline gelir. Bu denkleme karşılık gelen homojen denklem

$$iu_t\left(t,s\right) + \left(1-s^2\right)u\left(t,s\right) = 0$$

dir ve genel çözümü

$$u_c\left(t,s\right) = 0$$

dır. Homojen olmayan denklemin özel çözümü ise,

$$u_p\left(t,s\right) = \frac{1}{s(s+1)^2}\cos t$$

dir. Böylece,

$$u\left(t,s\right) = \frac{1}{s(s+1)^2}\cos t$$

elde edilir.

Şimdi, $-1 \leq t \leq 0$ durumunu göz önüne alalım. Denklemin her iki tarafının Laplace dönüşümü alınırsa,

$$L\left\{u_t\right\} - L\left\{u_{xx}\right\} + L\left\{u\right\} = \sin t L\left\{1-(1+x)\,e^{-x}\right\} + \cos t L\left\{1-2e^{-x}\right\}$$

elde edilir. O halde,

$$u_t\left(t,s\right) - s^2 u\left(t,s\right) + u\left(t,s\right) = \sin t\left[\frac{1}{s\left(s+1\right)^2}\right] + \cos t\left[\frac{s-1}{s\left(s+1\right)}\right]$$

veya

$$u_t\left(t,s\right) + \left(1-s^2\right)u\left(t,s\right) = \sin t\left[\frac{1}{s\left(s+1\right)^2}\right] + \cos t\left[\frac{s-1}{s\left(s+1\right)}\right]$$

yazılır. Bu diferansiyel denklemine karşılık gelen homojen denklemin genel çözümü

$$u_c\left(t,s\right) = 0$$

dır. Homojen olmayan denklemin özel çözümü ise

$$u_p\left(t,s\right)=\frac{\cos t}{s\left(s+1\right)^2}$$

dir. Buradan,

$$u\left(t,s\right)=\frac{\cos t}{s\left(s+1\right)^2}$$

dir. Son olarak, ters Laplace dönüşümü uygulanırsa, (1.4) probleminin çözümü

$$u\left(t,x\right)=L^{-1}\left\{u\left(t,s\right)\right\}=\cos t L^{-1}\left\{\frac{1}{s\left(s+1\right)^2}\right\}$$

ya da

$$u\left(t,x\right)=\left[1-\left(1+x\right)e^{-x}\right]\cos t$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde aşağıdaki

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}-\displaystyle\sum_{r=1}^{n}\alpha_r\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_r^2}=f(t,x), \\ x=(x_1,\cdots,x_n)\in\overline{\Omega}^{+},0\le t\le T, \\ \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}-\displaystyle\sum_{r=1}^{n}\alpha_r\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_r^2}=g(t,x), \\ x=(x_1,\cdots,x_n)\in\overline{\Omega}^{+},-T\le t\le 0, \\ u(-T,x)=u(T,x)+\varphi(x), \\ u_t(0+,x)=u_t(0-,x)+\varphi(x),\ x\in\overline{\Omega}^{+}, \\ u(t,x)=0,\ x\in S^{+} \end{cases}$$

çok boyutlu Schrödinger-parabolik denklemleri için lokal olmayan sınır değer probleminin çözümü elde edilebilir. Burada, $\alpha_r>0$ ve $f(t,x)$ $(t\in[0,T],\ x\in\overline{\Omega})$, $g(t,x)$ $(t\in[-T,0],\ x\in\overline{\Omega}),\varphi(x),\psi(x)$ $(x\in\overline{\Omega})$ verilmiş düzgün (smooth) fonksiyonlardır. Ayrıca Ω, $\mathbb{R}^n$ n-boyutlu Öklit uzayında S ve $\overline{\Omega}=\Omega\cup S$ ile sınırlandırılmış olan bir birim açık küp olup,

$$\left(x:x=\left(x_1,\cdots,x_n\right),0<x_k<1,1\le k\le n\right)$$

dir.

Ne var ki, Laplace dönüşümü yöntemi (bazı özel durumlar hariç) yalnızca sabit katsayılı denklemlerin çözümünde kullanılabilen klasik bir yöntemdir. Buna karşılık fark şemaları yöntemi, katsayıların sabit olmadığı durumlarda da kullanılabilen oldukça yararlı bir yöntemdir.

Laplace dönüşümü, katsayıları polinomlar olan değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemlere de uygulanabilir. Bu durumda,

$$L\left\{x^n f(x)\right\} = (-1)^n \frac{d^n F}{ds^n}$$

formülünde $f(x)$ yerine $f^{(m)}(x)$ $(m = 0, 1, \cdots)$ koymak suretiyle elde edilen

$$L\left\{x^n f^{(m)}(x)\right\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} L\left\{f^{(m)}(x)\right\}, \quad (m = 0, 1, \cdots)$$

formülü kullanılır. Bu halde, Laplace dönüşümü uygunlandıktan sonra $L\{y\}$ ye göre bir adi diferansiyel denklem elde edilir.

Örnek 1.1. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} - y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$ başlangıç-değer problemini ele alalım. Denklemin her iki tarafına Laplace dönüşü uygulayalım. Bu durumda,

$$L\left\{\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y\right\} = L\{0\}$$

$$L\left\{\frac{d^2y}{dx^2}\right\} + L\left\{x\frac{dy}{dx}\right\} - L\{y\} = 0$$

$$s^2L\{y\} - sy(0) - y'(0) - \frac{d}{ds}L\{y'\} - L\{y\} = 0$$

$$s^2L\{y\} - 1 - s\frac{d}{ds}\left[sL\{y\}\right] - L\{y\} = 0$$

$$s^2L\{y\} - 1 - s\frac{d}{ds}L\{y\} - L\{y\} = 0$$

$$\frac{d}{ds}L\{y\} - \frac{s^2 - 2}{s}L\{y\} = -\frac{1}{s}$$

elde edilir. Bu, $L\{y\}$ bilinmeyenine göre birinci mertebeden bir lineer denklemdir. Genel çözümü

$$L\{y\} = \frac{1}{s^2} + \frac{c}{s^2}e^{s^2/2}$$

dir. Burada, c integrasyon sabitini belirtmek için, $s \to \infty$ için $L\{y\} \to 0$ gerçeğini kullanalım. Bu özellik, $c = 0$ olmasını gerektirir. Böylece,

$$L\{y\} = \frac{1}{s^2}$$

ve buradan $y = x$ bulunur. [31]

Son olarak, Fourier dönüşümü yöntemi ile çözülecek olan

$$\begin{cases} iu_t - u_{xx} + u = -ie^{-x^2}\sin t + (-4x^2 + 3)e^{-x^2}\cos t, \\ 0 \le t \le 1, -\infty < x < \infty, \\ u_t - u_{xx} + u = e^{-x^2}\sin t + (-4x^2 + 3)e^{-x^2}\cos t, \\ -1 \le t \le 0, -\infty < x < \infty, \\ u(1, x) = \dfrac{1}{2}u(-1, x) + \dfrac{1}{2}e^{-x^2}\cos 1, -\infty < x < \infty \end{cases} \tag{1.5}$$

bir karma tipli lokal olmayan sınır-değer problemini ele alalım.

Öncelikle, $0 \leq t \leq 1$ aralığını ele alalım. Verilen denklemin her iki yanına Fourier dönüşümü uygulanırsa

$$F\{iu_t\} - F\{u_{xx}\} + F\{u\} = -iF\left\{e^{-x^2}\right\}\sin t$$
$$+\left[F\left\{e^{-x^2}\right\} + F\left\{\left(2-4x^2\right)e^{-x^2}\right\}\right]\cos t$$

eşitliği elde edilecektir. Burada,

$$F\{u(t,x)\} = u(t,s)$$

gösterimini kullanılacaktır. Böylece denklem,

$$iu_t(t,s) + \left(1+s^2\right)u(t,s) = -iF\left\{e^{-x^2}\right\}\sin t + \left(1+s^2\right)F\left\{e^{-x^2}\right\}\cos t$$

ya da

$$u_t(t,s) - \left(i+is^2\right)u(t,s) = -F\left\{e^{-x^2}\right\}\sin t - \left(i+is^2\right)F\left\{e^{-x^2}\right\}\cos t$$

şeklinde yazılır. Bu denkleme karşılık gelen homojen denklemin genel çözümü

$$u_c(t,s) = c_1 e^{i\left(1+s^2\right)t}$$

dir. Homojen olmayan denklemin özel çözümü ise

$$u_p(t,s) = F\left\{e^{-x^2}\right\}\cos t$$

dir. Dolayısıyla,

$$u(t,s) = c_1 e^{i\left(1+s^2\right)t} + F\left\{e^{-x^2}\right\}\cos t$$

biçiminde bulunur.

Şimdi, $-1 \leq t \leq 0$ aralığını göz önüne alalım. Her iki tarafın Fourier dönüşümü alınırsa,

$$F\{u_t\} - F\{u_{xx}\} + F\{u\} = F\left\{e^{-x^2}\right\}\sin t$$
$$+\left[F\left\{e^{-x^2}\right\} + F\left\{\left(2-4x^2\right)e^{-x^2}\right\}\right]\cos t$$

eşitliği elde edilir. Burada,

$$F\{u(t,x)\} = u(t,s)$$

gösterimini kullanalım. Böylece denklem,

$$u_t(t,s) + \left(1+s^2\right)u(t,s) = F\left\{e^{-x^2}\right\}\sin t + \left(1+s^2\right)F\left\{e^{-x^2}\right\}\cos t$$

şeklinde yazılır. Bu denkleme karşılık gelen homojen denklemin genel çözümü

$$u_c(t,s) = c_2 e^{-\left(1+s^2\right)t}$$

dir. Homojen olmayan denklemin özel çözümü ise

$$u_p\left(t,s\right)=F\left\{e^{-x^2}\right\}\cos t$$

dir. Dolayısıyla,

$$u\left(t,s\right)=c_2e^{-\left(1+s^2\right)t}+F\left\{e^{-x^2}\right\}\cos t$$

biçiminde bulunur.

Süreklilik ve lokal olmayan sınır koşulları bir arada kullanılarak $c_1=c_2=0$ elde edilir. Böylece,

$$u\left(t,s\right)=F\left\{e^{-x^2}\right\}\cos t$$

dir. Son olarak, ters Fourier dönüşümü uygulanırsa, (1.5) lokal olmayan sınır-değer probleminin tam çözümü

$$u\left(t,x\right)=e^{-x^2}\cos t$$

elde edilir.

Benzer şekilde aşağıdaki

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial u}{\partial t}-\displaystyle\sum_{|r|=2m}a_r\dfrac{\partial^{|\tau|}u}{\partial x_1^{r_1}\cdots\partial x_n^{r_n}}=f(t,x), \\ 0\leq t\leq T, x,r\in\mathbb{R}^n, |r|=r_1+\cdots+r_n, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}-\displaystyle\sum_{|r|=2m}a_r\dfrac{\partial^{|\tau|}u}{\partial x_1^{r_1}\cdots\partial x_n^{r_n}}=f(t,x), \\ -T\leq t\leq 0, x,r\in\mathbb{R}^n, |r|=r_1+\cdots+r_n, \\ u(-T,x)=u\left(T,x\right)+\varphi(x), x\in\mathbb{R}^n, \\ u_t(0+,x)=u_t(0-,x),\ x\in\mathbb{R}^n \end{cases}$$

çok boyutlu Schrödinger-parabolik denklemleri için lokal olmayan sınır değer probleminin çözümü elde edilebilir. Burada α_r, $f(t,x)$ $(t\in[0,T],\ x\in R^n)$, $g(t,x)$ $(t\in\left[-T,0\right], x\in R^n)$, $\varphi(x),\psi(x)$ $(x\in R^n)$ verilmiş düzgün fonksiyonlardır.

Ancak, Fourier dönüşümü yöntemi yalnızca sabit katsayılı denklemlerin çözümünde kullanılabilmektedir. Oysa ki fark şemaları yöntemi katsayıların sabit olmadığı durumlarda da kullanılabilen çok kullanışlı bir yöntemdir.

Bu çalışmada bir H Hilbert uzayında verilen fark denklemlerinin, öz-eşlenik pozitif tanımlı A operatörlü lokal olmayan sınır-değer problemi

$$\begin{cases} i\dfrac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t)\,(0 \leq t \leq 1)\,, \\ \dfrac{du(t)}{dt} + Au(t) = g(t)\,(-1 \leq t \leq 0)\,, \\ u(-1) = \alpha u\,(\mu) + \varphi, 0 < \mu \leq 1 \end{cases} \tag{1.6}$$

ele alınmıştır. Bu lokal olmayan sınır-değer probleminin çözümü için kararlılık kestirimleri elde edilmiştir [29]. Bu çalışmamızda esas olarak, birinci basamaktan doğrululu fark şemaları kullanılarak (1.6) probleminin yaklaşık çözümleri elde edilmiştir. Bu çözümler için grafikleri ve hata analizini de içeren bir nümerik analiz yapılmıştır.

2 MATERYAL VE YÖNTEM

Yaptığımız bu çalışma için herhangi bir materyale, teçhizata ya da laboratuvar ortamına ihtiyaç duyulmamakla beraber, araştırmamızda yöntem olarak, sırasıyla, ope-ratör yaklaşımı ve sonlu fark yöntemleri kullanılmıştır. Ayrıca elde edilen teorik sonuçların geçerliliğini ve güvenilirliğini desteklemek adına yapılan nümerik denemelerde, iyileştirilmiş-Gauss yok etme yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntemi uygulamak için Intel(R) Core(TM)2 Duo CPU 2,93 GHz 2,00 GB RAM teknik özelliklerine sahip bir bilgisayar kullanılmıştır.

2.1 HİLBERT UZAYININ ELEMANLARI

Bu bölümde Hilbert uzayı teorisinin seçilmiş temel kavramları verilecektir (bkz. [30]).

Tanım 2.1. Aynı F skalerler cismi üzerinde tanımlanmış U ve V vektör uzaylarını göz önüne alalım. Bir $A : U \to V$ fonksiyonu

(i) $\forall u_1, u_2 \in U$, $A(u_1 + u_2) = Au_1 + Au_2$ (toplamsallık),

(ii) $\forall u \in U$ ve $\forall \alpha \in F$, $A(\alpha u) = \alpha A(u)$ (homojenlik)

koşullarını gerçekliyorsa bir *lineer dönüşüm* ya da *lineer operatör* adını alır.

Tanım 2.2. X boş olmayan bir küme olsun. Bu küme reel değerli, negatif olmayan bir $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlasın:

(i) Her $x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$.

(ii) Her $x, y \in X$ için ancak ve ancak $x = y$ ise $d(x, y) = 0$.

(iii) Her $x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$.

(iv) Her $x, y, z \in X$ için $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (üçgen eşitsizliği).

Böyle bir $d(x, y)$ fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir *metrik* adını verecek ve X kümesinin bundan böyle nokta adını vereceğimiz x ve y gibi elemanları arasındaki *uzaklık* olarak yorumlayacağız.

Tanım 2.3. (X, d) bir metrik uzay olsun. Bu uzaydaki her Cauchy dizisi yakınsaksa X bir *tam metrik uzay* adını alınır. Dolayısıyla bir tam metrik uzayda bir dizinin yakınsaklık testi Cauchy dizisi olma tesbitiyle örtüşür.

Örnek 2.1. $X = C[-2, 2]$ sürekli fonksiyonlar kümesi üzerinde d_1 metriğini göz önüne alalım. Bir $\{x_n(t)\}$ sürekli fonksiyonlar dizisini

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & -2 \leq t \leq 1 - (1/n), \\ nt + 1 - n, & 1 - (1/n) \leq t \leq 1, \\ 1, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

ile tanımlayalım. Bu dizi bir Cauchy dizisidir. Genellikten kaybetmeksizin $n > m$ alırsak

$$d_1(x_m, x_n) = \int_{-2}^{2} |x_n(t) - x_m(t)|\, dt$$

$$= \int_{1-(1/m)}^{1-(1/n)} (mt + 1 - m)\, dt + \int_{1-(1/n)}^{1} (n - m)(1 - t)\, dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)$$

elde ederiz. Dolayısıyla $m, n \to \infty$ için $d(x_m, x_n) \to 0$ buluruz. Yani $\{x_n(t)\}$ bir Cauchy dizisidir. Ancak bu dizinin limitini hemen görebileceğimiz gibi

$$x(t) = \begin{cases} 0, & -2 \le t \le 1, \\ 1, & \quad 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

fonksiyonudur. Gerçekten

$$d_1(x_n, x) = \int_{1-(1/n)}^{1} (nt + 1 - n)\, dt = \frac{1}{2n}$$

bulunur ve $\lim\limits_{n\to\infty} d_1(x_n, x) = 0$ çıkar. Ancak limit fonksiyon süreksiz olduğundan X uzayının içinde değildir ve $\{x_n(t)\}$ dizisi (X, d_1) de yakınsamaz.

Tanım 2.4. V ile çoğunlukla kompleks sayılar cismi olarak seçeceğimiz bir F skalerler cismi üzerinde tanımlanmış bir lineer vektör uzayını gösterelim. Reel değerli, negatif olmayan bir $N : V \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonunu aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde seçilebilsin:

(i) Her $v \in V$ için $N(v) \ge 0$ ve ancak ve ancak $v = 0$ ise $N(v) = 0$ olur.

(ii) Her $v \in V$ ve $\alpha \in F$ için $N(\alpha v) = |\alpha|\, N(v)$ olur.

(iii) Her $u, v \in V$ için $N(u + v) \le N(u) + N(v)$ olur.

Böyle bir fonksiyon V uzayı üzerinde bir norm adını alır. Bir normla donatılmış bir vektör uzayına da *normlu lineer uzay* veya *normlu vektör uzayı* ya da sadece *normlu uzay* adını veririz.

Tanım 2.5. $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{C}$ fonksiyonu, daha doğru bir deyişle fonksiyoneli aşağıdaki kuralları sağladığı takdirde bir *iç çarpım* adını alır:

i) Her $u, v \in H$ için $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$.

ii) Her $u, v \in H$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ için $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$.

iii) Her $u, v, w \in H$ için $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.

iv) Her $u \in H, u \ne 0$ için $\langle u, u \rangle > 0$.

Burada bir üst çizgi kompleks eşleniği göstermektedir. Bir iç çarpımla donatılmış bir lineer vektör uzayına *iç çarpım uzayı* adı verilir.

İç çarpım kısaca *Schwarz*, daha doğru bir deyişle *Cauchy-Bunyakowski-Schwarz eşitsizliği* adını vereceğimiz bir bağıntıyı sağlar.

Teorem 2.1. H bir iç çarpım uzayı ise sıfırdan farklı her $u, v \in H$ vektörü için $|\langle u, v\rangle| \leq \sqrt{\langle u, u\rangle \langle u, v\rangle}$ eşitsizliği sağlanır. Eşitlik ancak ve ancak u ve v vektörleri lineer bağımlıysa geçerlidir.

Teorem 2.2. H bir iç çarpım uzayı olsun. Her $u \in H$ vektörü için $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$ fonksiyonu H üzerinde bir *doğal norm*dur.

Norm tanımıyla Schwarz eşitsizliğini

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \, \|v\| \tag{2.1}$$

şeklinde de ifade edebiliriz.

İç çarpımın ürettiği norma göre her iki vektör *paralelkenar kuralını* gerçekler. Böyle iki $u, v \in H$ vekörü için

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right) \tag{2.2}$$

elde ederiz.

İç çarpımdan üreyen *doğal norm* da H vektör uzayı üzerinde bir doğal metriği

$$d\langle u, v\rangle = \|u-v\| = \sqrt{\langle u-v, u-v\rangle} \tag{2.3}$$

fonksiyonu ile üretir. Doğal metriğe göre tam bir iç çarpım uzayı *Hilbert uzayı* adını alır. Bir Hilbert uzayının aynı zamanda bir *Banach uzayı* olacağı tartışma götürmez.

Örnek 2.2. $C[0, \pi/2]$ bir iç çarpım uzayı mıdır?

Çözüm:

$$x(t) \in C[a, b] \Rightarrow \|x\|_{\mathbb{C}[a,b]} = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|$$

$x(t) = \sin t, y(t) = \cos t$ olmak üzere $x(t), y(t) \in C[0, \pi/2]$ olsun.

$$\|x\|_{C[0,\pi/2]} = \max_{a \leq t \leq b} |\sin t| = 1$$

$$\|y\|_{C[0,\pi/2]} = \max_{a \leq t \leq b} |\cos t| = 1$$

$$\|x+y\|_{C[0,\pi/2]} = \max_{0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}} |\sin t + \cos t| = \max\left\{\varphi(0), \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right), \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\} = \sqrt{2}$$

$$\varphi(t) = \sin t + \cos t, \varphi(0) = 1, \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\varphi\prime(t) = \cos t - \sin t = 0 \Leftrightarrow \cos t = \sin t \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4}$$

$$\varphi(\frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\|x-y\|_{C[0,\pi/2]} = \max_{0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}} |\sin t - \cos t| = \max\left\{\varphi(0), \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right), \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\} = 1$$

$$\|x+y\|^2_{C[0,\pi/2]} + \|x-y\|^2_{C[0,\pi/2]} = 2\left(\|x\|^2_{C[0,\pi/2]} + \|y\|^2_{C[0,\pi/2]}\right) \Rightarrow 3 \neq 4$$

Dolayısıyla, $C[0, \pi/2]$ uzayı bir iç çarpım uzayı değildir.

Tanım 2.6. Bir $A : U \to V$ operatörü sınırlı kümeleri yine sınırlı kümelere dönüştürüyorsa *sınırlı operatör* adını alır.

Teorem 2.3. U ve V normlu uzaylar ve $A : U \to V$ bir lineer operatör olsun. Ancak ve ancak her $u \in U$ için

$$\|Au\|_V \leq K \|u\|_U$$

olacak şekilde bir $K > 0$ sabiti varsa A operatörü sınırlıdır.

Tanım 2.7 Sınırlı bir A lineer operatörü söz konusu olduğunda K sayılarının en küçüğüne *operatörün normu* adı verilir:

$$\|A\| = \inf \left\{K > 0 : \|Au\|_V \leq K \|u\|_U, \forall u \in U\right\}.$$

Normun bu tanımı aşağıdaki tanımlara da eşdeğerdir:

$$\|A\| = \sup \left\{\|Au\|_V : \|u\|_U \leq 1\right\},$$

$$\|A\| = \sup \left\{\|Au\|_V : \|u\|_U = 1\right\},$$

$$\|A\| = \sup \left\{\frac{\|Au\|_V}{\|u\|_U} : u \in U, u \neq 0\right\}.$$

Örnek 2.3. $Ax = \int\limits_0^1 K(t,s)x(s)ds$ integral operatörünü ele alalım. Eğer

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 |K(t,s)|^2 \, dsdt < \infty$$

ise, bu durumda $A : L_2 \; [0,1] \to L_2 \; [0,1]$ operatörünün sınırlı olduğunu ispatlayınız.

Çözüm: Öncelikle,

$$\int\limits_0^1 |x(t)|^2 \, dt < \infty \Rightarrow \int\limits_0^1 |Ax(t)|^2 \, dt < \infty \tag{2.4}$$

A operatörünün sınırlı olduğu, daha sonra ise

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay; \quad x \in L_2 \; [0,1] \Rightarrow Ax \in L_2 \; [0,1]$$

A operatörünün lineer olduğu gösterilecektir. $L_2 \; [0,1]$ uzayında $Ax\,(t)$ nin normu

$$\left(\int\limits_0^1 |Ax(t)|^2 \, dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left[\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 |K(t,s)x(s)ds|\right)^2 dt\right]^{\frac{1}{2}}$$

dir. Cauchy-Minkowski eşitsizliğinden,

$$\left(\int_0^1 |Ax(t)|^2 \, dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left[\int_0^1 \left\{\left(\int_0^1 |K(t,s)|^2 \, ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |x(s)|^2 \, ds\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}}\right] dt$$

$$= \left[\int_0^1 \left(\int_0^1 |K(t,s)|^2 \, ds\right) \left(\int_0^1 |x(s)|^2 \, ds\right) dt\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\int_0^1 \int_0^1 |K(t,s)|^2 \, ds dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |x(s)|^2 \, ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Böylece,

$$\int_0^1 |Ax(t)|^2 \, dt < \infty \Longrightarrow Ax \in L_2 \ [0,1]$$

dir. O halde, (2.4) eşitsizliği ispatlanmış olur. Şimdi, lineer operatör olduğunu ispatlayalım. Burada,

$$A(\alpha x + \beta y) = \int_0^1 K(t,s) [\alpha x(s) + \beta y(s)] \, ds$$

$$= \alpha \int_0^1 K(t,s) \, x(s) \, ds + \beta \int_0^1 K(t,s) \, y(s) \, ds = \alpha Ax + \beta Ay$$

olduğu kolayca görülecektir. Dolayısıyla, verilen ope-ratör $L_2 \ [0,1]$ de lineer operatördür.

Tanım 2.8 $A : H_1 \to H_2$ olmak üzere sınırlı, lineer bir operatör olsun. Burada, H_1 ve H_2 herhangi iki Hilbert uzaylarıdır. $A^* : H_1 \to H_2$ olmak üzere $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle$ operatörüne A nın *eşleniği* denir.

Tanım 2.9 $A : H \to H$ sınırlı, lineer bir operatör olsun. Eğer $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ ise, bu durumda A ya *öz-eşlenik operatör* denir.

Tanım 2.10 $A : H \to H$ öz-eşlenik operatör olsun. Eğer $\langle Ax, x\rangle > \delta \langle x, x\rangle$ ise, bu durumda A'ya *pozitif tanımlı operatör* denir.

Tanım 2.11 $A : H \to H$ öz-eşlenik operatör olsun. $\forall x \in D(A)$ için eğer $\langle Ax, x\rangle > 0$ ise, bu durumda A ya *pozitif tanımlı* denir.

Tanım 2.12 $A : D(A) \to H$ ve $\overline{D(A)} = H$ olmak üzere bir lineer operatör olsun. Eğer $\forall x, y \in H$ için $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ ise, bu durumda A ya *simetrik operatör* denir.

Tanım 2.13 Eğer A bir simetrik operatör ve $D(A) = D(A^*)$ ise, bu durumda A ya *öz-eşlenik operatör* denir.

Örnek 2.4. $Ax(t) = -x''(t)$,

$$D(A) = \{x : x(t), x''(t) \in L_2[0,1] \text{ ve } x(0) = x(1) = 0\}$$

operatörünün öz-eşlenik, pozitif operatör olup olmadığını araştırınız.

Çözüm: $L_2\ [0,1]$ uzayında iç çarpım

$$\langle x, y \rangle = \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}dt$$

ile tanımlanır. Simetrik olduğunu göstermek için $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ olduğunu göstermeliyiz. Burada,

$$\langle Ax, y \rangle = \int_0^1 Ax(t)\overline{y(t)}dt = -\int_0^1 x''(t)\overline{y(t)}dt$$

kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$= -x'(t)\overline{y(t)}\Big]_0^1 + \int_0^1 x'(t)\overline{y'(t)}dt$$

elde edilir. Tekrar kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\langle Ax, y \rangle = -x'(1)\overline{y(1)} + x'(0)\overline{y(0)} + x(t)\overline{y'(t)}\Big]_0^1 - \int_0^1 x(t)(\overline{-y''(t)})dt$$

$$= x(1)\overline{y'(1)} - x(0)\overline{y'(0)} + \int_0^1 x(t)(\overline{-y''(t)})dt = \langle x, Ay \rangle$$

bulunur. Böylece, A operatörünün $L_2\ [0,1]$ uzayında simetrik olduğunu göstermiş olduk. Şimdi, de A operatörünün pozitif tanımlı olduğunu gösterelim. Burada,

$$\langle Ax, x \rangle = -\int_0^1 x''(t)\overline{x(t)}dt$$

kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$= -x'(t)]_0^1 + \int_0^1 x'(t)\overline{x'(t)}dt = \int_0^1 |x'(t)|^2\, dt \geq \int_0^1 |x(t)|^2\, dt = \langle x, x \rangle$$

elde edilir. O halde,

$$\langle Ax, x \rangle \geq \langle x, x \rangle \Rightarrow \delta = 1 > 0$$

dır. Dolayısıyla, A operatörü $L_2\ [0,1]$ Hilbert uzayında pozitif tanımlıdır.

3 SCHRÖDINGER-PARABOLİK DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ

H Hilbert uzayında öz-eşlenik pozitif tanımlı bir A operatörü ile

$$\begin{cases} i\dfrac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t)\,(0 \le t \le 1), \\ \\ \dfrac{du(t)}{dt} + Au(t) = g(t)\,(-1 \le t \le 0), \\ \\ u(-1) = \alpha u(\mu) + \varphi, 0 < \mu \le 1 \end{cases} \tag{3.1}$$

lokal olmayan sınır değer problemini ele alalım.

Bilindiği gibi parabolik-Schrödinger denklemleri için lokal olmayan sınır-değer problemlerinin (3.1) problemine indirgenebilmektedir.

Eğer aşağıdaki şartlar sağlanır ise, $u(t)$ fonksiyonuna (3.1) probleminin çözümüdür denilir.

(i) $u(t)$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında sürekli türevlenebilir ve $[-1,1]$ arasında türevlenebilir olmalıdır. Aralığın uç noktalarında türev tek taraflı türev manasındadır.

(ii) $u(t)$ fonksiyonu, her $t \in [-1,1]$ için $D(A)$ (A nın tanım kümesi) nin elemanıdır ve $Au(t)$, $[-1,1]$ aralığında süreklidir.

(iii) $u(t)$ fonksiyonu, (3.1) probleminin denklemlerini ve lokal olmayan sınır koşulunu sağlar.

Burada önemli olan, (3.1) probleminin kararlılığıdır.

Teorem 3.1. $\varphi \in D(A)$ olsun. $f(t)$, $[0,1]$ aralığında sürekli türevlenebilir ve $g(t)$, $[-1,0]$ aralığında türevlenebilir bir fonksiyonlar olsun. Bu durumda (3.1) probleminin tek bir çözümü vardır ve

$$\max_{-1\le t\le 1} \|u(t)\|_H \le M\left[\|\varphi\|_H + \max_{-1\le t\le 0}\|g(t)\|_H + \max_{0\le t\le 1}\|f(t)\|_H\right],$$

$$\max_{-1\le t\le 1}\|Au(t)\|_H \le M\left\{\|A\varphi\|_H + \|g(0)\|_H\right.$$

$$\left. + \max_{-1\le t\le 0}\|g'(t)\|_H + \|f(0)\|_H + \max_{0\le t\le 1}\|f'(t)\|_H\right\}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Burada M, $f(t), t \in [0,1]$, $g(t), t \in [-1,0]$ ve φ ifadelerinden bağımsızdır. [29]

Bunlardan başka, Schrödinger Parabolik denklemlerinin matematiğin diğer alanlarında, fizik ve mühendislik alanlarında da önemli bir rol oynadığını belirtmek gerekir. (bkz. [15-21]) (Ayrıntıları kaynaklar kısmında verilmiştir).

Ayrıca, başlangıç-değer problemleri ve Schrödinger denklemlerinin nümerik çözümleri, son 10 yılda kapsamlı bir araştırma alanı olmuştur. (bkz. [22-28]) (Detayları kaynaklar kısmında verilmiştir).

4 SCHRÖDINGER-PARABOLİK FARK DENKLEMLERİ

Bu bölümde, (3.1) sınır-değer problemi ile bu probleme karşılık gelen

$$\begin{cases} i\dfrac{u_k-u_{k-1}}{\tau}+Au_k=f_k, f_k=f\left(t_k\right), t_k=k\tau, 1\leq k\leq N, \\ \\ u_1-2u_0+u_{-1}=0, \\ \\ \dfrac{u_k-u_{k-1}}{\tau}+Au_k=g_k, g_k=g\left(t_k\right), t_k=k\tau, -N+1\leq k\leq 0, \\ \\ u_{-N}=\alpha u_N+\varphi \end{cases} \tag{4.1}$$

birinci basamaktan doğruluklu fark şeması incelenmiştir. Bilindiği gibi, H Hilbert uzayında öz-eşlenik pozitif tanımlı A diferansiyel operatörlü lokal olmayan sınır değer probleminin bir değişkenli diskritizasyon (discretization) fark şemalarını araştırmak demek, H_h Hilbert uzaylarında h'ye $(0<h\leq h_0)$ göre düzgün öz-eşlenik pozitif tanımlı A_h fark operatörlü çok değişkenli diskritizasyon fark şemalarını araştırmak demektir.

Teorem 4.1. Eğer $\varphi\in D(A)$ ise, bu durumda (4.1) fark şemasının çözümü için

$$\max_{-N\leq k\leq N}\|u_k\|_H\leq M\left[\|\varphi\|_H+\max_{-N\leq k\leq 0}\|g_k\|_H+\max_{1\leq k\leq N}\|f_k\|_H\right], \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}\max_{-N\leq k\leq N}\|Au_k\|_H\leq M\Bigg[&\|A\varphi\|_H+\|g_0\|_H+\max_{-N+1\leq k\leq 0}\left\|\left(g_k-g_{k-1}\right)\tau^{-1}\right\|_H \\ &+\|f_1\|_H+\max_{2\leq k\leq N}\left\|\left(f_k-f_{k-1}\right)\tau^{-1}\right\|_H\Bigg]\end{aligned} \tag{4.3}$$

kararlılık kestirimleri sağlanır. Burada, M katsayısı $\tau, f_k, 1\leq k<N, g_k, -N<k\leq 0$ ve φ den bağımsızdır. [29]

5 NÜMERİK ANALİZ

Bu bölümde Schrödinger-parabolik denkleminin lokal olmayan sınır-değer problemini

$$\begin{cases} iu_t - u_{xx} = f(t,x), 0 < t < 1,\ 0 < x < 1, \\ u_t - u_{xx} = g(t,x), -1 < t < 0,\ 0 < x < 1, \\ u(0^+,x) = u(0^-,x), u_t(0^+,x) = u_t(0^-,x), 0 \le x \le 1, \\ u(-1,x) = u(1,x) + \varphi(x), 0 \le x \le 1, \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, -1 \le t \le 1, \end{cases} \tag{5.1}$$

ele alalım. Burada

$$f(t,x) = \left(i + \pi^2 t\right) \sin \pi x$$
$$g(t,x) = \left(1 + \pi^2 t\right) \sin \pi x$$

ve

$$\varphi(x) = -2 \sin \pi x$$

dir. (5.1) probleminin gerçek çözümü

$$u(t,x) = t \sin \pi x$$

dir.

(5.1) probleminin yaklaşık çözümü için, farklı τ ve h değerleri için birinci basamaktan doğruluklu fark şemaları kullanılacaktır. İkinci mertebeden, katsayıları matris olan, n'ye göre fark denklemleri elde edilecektir. Bu fark denklemlerini çözmek için, iyileştirilmiş-Gauss eliminasyon yöntemi kullanılacaktır.

Schrödinger-parabolik denklemi için lokal olmayan sınır-değer problemini (5.1) göz önüne alalım. (5.1) probleminin yaklaşık çözümü için, τ üzerinden tanımlı ağ noktalarının ailesini ve

$$[0,1]_\tau \times [0,1]_h = \{(t_k, x_n) : t_k = k\tau, 1 \le k \le N-1, N\tau = 1,$$
$$x_n = nh,\ 1 \le n \le M-1,\ Mh = 1\}$$

ifadesini $[0,1]_\tau \times [0,1]_h$ aralığında göz önüne alalım. Aşağıdaki

$$\begin{cases} i\dfrac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} - \dfrac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} = f(t_k, x_n), \\ 1 \le k \le N-1, 1 \le n \le M-1, \\ \dfrac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} - \dfrac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} = g(t_k, x_n), \\ -N+1 \le k \le 0, 1 \le n \le M-1, \\ u_n^1 - u_n^0 = u_n^0 - u_n^{-1}, 1 \le n \le M-1, \\ u_n^{-N} = u_n^N - 2\sin \pi x, 1 \le n \le M-1, \\ u_0^k = u_M^k = 0, 0 \le k \le N, \end{cases}$$

veya

$$\begin{cases} \left(-\dfrac{i}{\tau}\right) u_n^{k-1} + \left(\dfrac{i}{\tau} + \dfrac{2}{h^2}\right) u_n^k + \left(-\dfrac{1}{h^2}\right) u_{n+1}^k \\ + \left(-\dfrac{1}{h^2}\right) u_{n-1}^k = f(t_k, x_n), 1 \le k \le N-1, 1 \le n \le M-1, \\ \left(-\dfrac{1}{\tau}\right) u_n^{k-1} + \left(\dfrac{1}{\tau} + \dfrac{2}{h^2}\right) u_n^k + \left(-\dfrac{1}{h^2}\right) u_{n+1}^k \\ + \left(-\dfrac{1}{h^2}\right) u_{n-1}^k = g(t_k, x_n), -N+1 \le k \le 0, 1 \le n \le M-1, \\ u_n^1 - u_n^0 = u_n^0 - u_n^{-1},\ 1 \le n \le M-1, \\ u_n^{-N} = u_n^N - 2\sin \pi x,\ 1 \le n \le M-1, \\ u_0^k = u_M^k = 0,\ 0 \le k \le N \end{cases} \tag{5.2}$$

sunulur.

Burada, $(2N+1) \times (2N+1)$ boyutlu doğrusal denklem sistemi elde edilmiş olur. Bu doğrusal denklem sistemi düzenlenerek matris formunda yazılırsa

$$\begin{cases} Au_{n+1} + Bu_n + Cu_{n-1} = D\varphi, 1 \le n \le M-1, \\ U_0 = \vec{0}, U_M = \vec{0} \end{cases} \tag{5.3}$$

elde edilir. Böylece,

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(2N+1)\times(2N+1)},$$

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1\\ b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & d & e & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & d & e & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & e & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(2N+1)\times(2N+1)}$$

ve $C=A$,

$$D=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(2N+1)\times(2N+1)}$$

dir. Burada,

$$a=-\frac{1}{h^2}, b=-\frac{1}{\tau}, c=\frac{1}{\tau}+\frac{2}{h^2}, d=-\frac{i}{\tau},\ e=\frac{i}{\tau}+\frac{2}{h^2},$$

$$\varphi_n^k=\begin{cases} -2\sin(\pi x_n), k=-N,\\ g(t_k,x_n), -N+1\le k\le 0,\\ f(t_k,x_n), 1\le k\le N-1,\\ 0, k=N, \end{cases}$$

$$\varphi_n = \begin{bmatrix} \varphi_n^{-N} \\ \varphi_n^{-N+1} \\ \vdots \\ \varphi_n^{0} \\ \varphi_n^{1} \\ \vdots \\ \varphi_n^{N} \end{bmatrix}_{(2N+1)\times 1},$$

$$U_s = \begin{bmatrix} U_s^{-N} \\ U_s^{-N+1} \\ \vdots \\ U_s^{0} \\ U_s^{1} \\ \vdots \\ U_s^{N-1} \\ U_s^{N} \end{bmatrix}_{(2N+1)\times (1)}, s = \ n-1, n, n+1$$

dir. (5.3) matris denkleminin çözümü için iyileştirilmiş Gauss yok etme yöntemi kullanılır. Bu yüzden aşağıdaki formda,

$$U_n = \alpha_{n+1}U_{n+1} + \beta_{n+1}, n = M-1, \cdots, 2, 1, 0,$$

bir çözüm aranmaktadır. Öyle ki α_j $(j = 1, \cdots, M-1)$ 'ler $(2N+1)\times(2N+1)$ tipinde kare matris ve β_j $(j = 1, \cdots, M-1)$ ler $(2N+1)\times 1$ şeklinde sütun matris ve α_1, β_1

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{(2N+1)\times(2N+1)}, \beta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{(2N+1)\times 1}.$$

biçimindedir. Aşağıdaki eşitlik

$$U_s = \alpha_{s+1}U_{s+1} + \beta_{s+1}, \ (s = n, n-1 \text{ için}),$$

ve

$$Au_{n+1} + Bu_n + Cu_{n-1} = D\varphi_n$$

eşitliği kullanılarak

$$[A + B\alpha_{n+1} + C\alpha_n\alpha_{n+1}]\, U_{n+1} + \left[B\beta_{n+1} + C\alpha_n\beta_{n+1} + C\beta_n\right] = D\varphi_n.$$

yazılabilir. Son denklemin

$$A + B\alpha_{n+1} + C\alpha_n\alpha_{n+1} = 0,$$

$$\left[B\beta_{n+1} + C\alpha_n\beta_{n+1} + C\beta_n\right] = D\varphi_n, 1 \le n \le M-1$$

şeklinde seçilmesi uygundur. O halde, $\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}$ için formüller

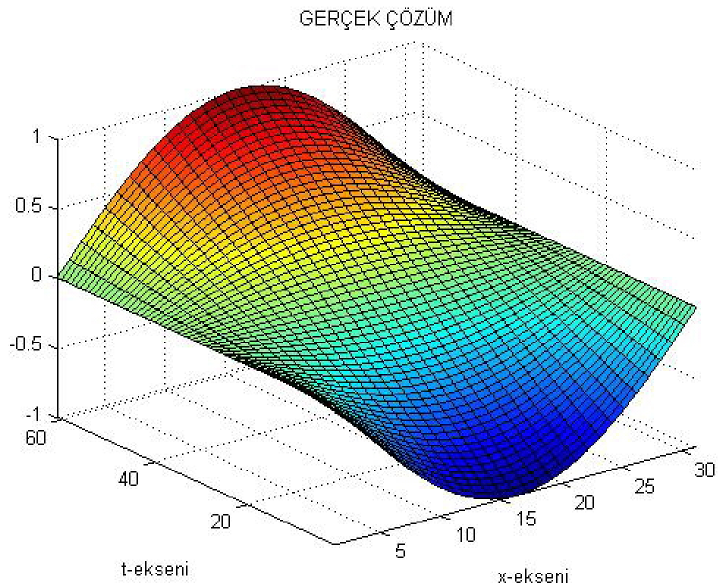
$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = -\left(B + C\alpha_n\right)^{-1} A, \\ \\ \beta_{n+1} = \left(B + C\alpha_n\right)^{-1}\left(D\varphi_n - C\beta_n\right), n = 1, 2, \cdots, M-1 \end{cases}$$

biçimindedir. Bu yüzden

$$U_M = \vec{0},$$

$$U_n = \alpha_{n+1}U_{n+1} + \beta_{n+1}, n = M-1, \cdots, 2, 1$$

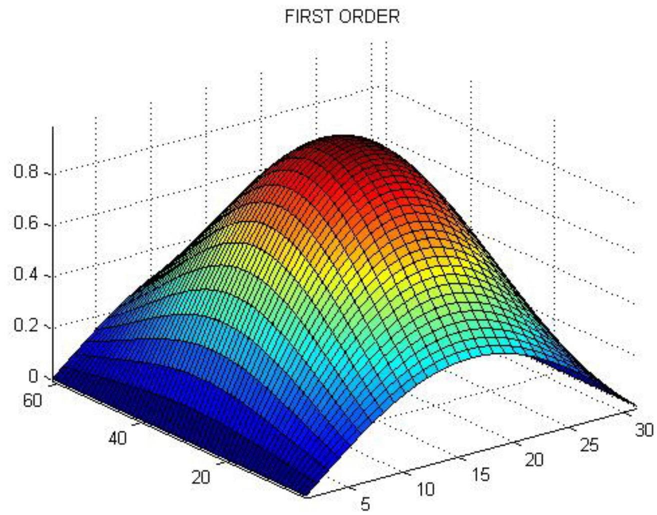
olacaktır.



6 BULGULAR

6.1 HATA ANALİZİ

Şimdi, sayısal sonuçlar verilecektir. Schrödinger-parabolik denklemi için (5.1) problemini göz önüne alalım. (5.1) probleminin yaklaşık çözümüne birinci basamaktan doğruluklu fark şemalarının farklı τ ve h değerleri için bakalım. Kesin ve sayısal çözümler Şekil 1. ve Şekil 2. ile verilmiştir.



Karşılaştırma hataları

$$E_M^N = \max_{1\leq k\leq N-1}\left(\sum_{n=1}^{M-1}\left|u\left(t_k,x_n\right)-u_n^k\right|^2 h\right)^{1/2}$$

formülü kullanılarak hesaplanmıştır. Bu sayısal sonuçlar N ve M nin farklı değerleri için bulunmuştur. Burada (t_k, x_n) noktasında $u(t_k, x_n)$ gerçek çözümü, u_n^k nümerik çözümü temsil etmektedir. Sonuçlar Tablo 1. de gösterilmiştir.

Tablo 1. Farklı N ve M değerleri için yaklaşık çözümler

Yöntem	N=M=10	N=M=20	N=M=40	N=M=80	N=M=160
Fark Şeması (4.1)	$0,0658$	$0,0314$	$0,0150$	$0,0080$	$0,0055$

7 SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu çalışma Schrödinger-parabolik denklemleri için lokal olmayan sınır-değer problemi-nin nümerik çözümleri için ayrılmıştır. Çalışma sonunda aşağıdaki özgün sonuçlar elde edilmiştir:

- Schrödinger-parabolik denklemlerinin lokal olmayan sınır-değer problemlerinin yaklaşık çözümü için birinci basamaktan doğruluklu fark şemaları sunulmuştur,
- Bu fark şemalarının teorik ifadeleri nümerik deneylerle desteklenmiştir,

Schrödinger-parabolik denklemleri için lokal olmayan sınır-değer problemleri bölümünde elde edilen kararlı çözümler aşağıdaki;

$$\begin{cases} i\dfrac{du}{dt} + Au\left(t\right) = f\left(t\right) \quad \left(0 \leq t \leq 1\right), \\ \\ \dfrac{du}{dt} + Au\left(t\right) = g\left(t\right) \quad \left(-1 \leq t \leq 0\right), \\ \\ u\left(-1\right) = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \alpha_j u\left(\mu_j\right) + \varphi, \\ \\ 0 < \mu_j \leq 1, 1 \leq j \leq N \end{cases}$$

H Hilbert uzayındaki pozitif tanımlı öz-eşlenik A operatörü ile karma tipli diferansiyel denklemin çok noktalı lokal olmayan sınır değer problemi için de elde edilebilir.

6 KAYNAKLAR

[1] Salakhitdinov M. S., *Equations of Mixed-Composite Type*, Tashkent: FAN, (**1974**) (Russian).

[2] Djuraev T. D., *Boundary Value Problems for Equations of Mixed and Mixed-Composite Types*, Tashkent: FAN, (**1979**) (Russian).

[3] Bazarov D., Soltanov H., *Some Local and Nonlocal Boundary Value Problems for Equations of Mixed and Mixed-Composite Types*, Ashgabat: Ylym, **(1995)** (Russian).

[4] Glazatov S. N., Nonlocal boundary value problems for linear and nonlinear equations of variable type, *Sobolev Institute of Mathematics SB RAS*, Preprint no. 46, **(1998)** (Russian).

[5] Ashyralyev A., Aggez N., A note on difference schemes of the nonlocal boundary problems for hyperbolic equations, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, (25) **(2004)** 439–462.

[6] Ashyralyev A., Ozdemir Y., On nonlocal boundary value problems for hyperbolic-parabolic equations, *Taiwanese Journal of Mathematics*, 4 (11) **(2007)** 1075–1089.

[7] Ashyralyev A., Gercek O., Nonlocal boundary value problems for elliptic-parabolic differential and difference equations, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, (2008) **(2008)** 1–16.

[8] Ashyralyev A., Sirma A., Nonlocal boundary value problems for the Schrodinger equation, *Computers and Mathematics with Applications*, 3 (55) **(2008)** 392–407.

[9] Ashyralyev A., Yildirim O., On multipoint nonlocal boundary value problems for hyperbolic differential and difference equations, *Taiwanese Journal of Mathematics*, 1 (14) **(2010)** 165–194.

[10] Ashyralyev A., Hicdurmaz B., A note on the fractional Schrodinger differential equation, *Kybernetes*, 5-6 (40) **(2011)** 736–750.

[11] Ashyralyev A., Ozger F., The hyperbolic-elliptic equation with the nonlocal condition, *AIP Conference Proceedings*, (1389) **(2011)** 581–584.

[12] Ozdemir Y., Kucukunal M., A note on boundary value problems for hyperbolic-Schrödinger equation, *Abstract and Applied Analysis*, (2012) **(2012)** 1–12.

[13] Ozdemir Y., Alp M., Numerical solution of the parabolic-Schrödinger equation with the nonlocal boundary condition, *AIP Conference Proceedings*, (1611) **(2014)** 221-224.

[14] Ozdemir Y., Eser M., Numerical solution of the elliptic-Schrödinger equation with the the Dirichlet and Neumann condition, *AIP Conference Proceedings*, (1611) **(2014)** 410-414.

[15] Gao W., Jiang Y., L^p estimate for parabolic Schrödinger operator with certain potentials, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, (310) **(2005)** 128-143.

[16] Carbonaro A., Metafune G., Spina C., Parabolic Schrödinger operators, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, (343) **(2008)** 965-974.

[17] Shvedov O. Yu., Approximations for strongly singular evolution equations, *Journal of Functional Analysis*, (210) **(2004)** 259-294.

[18] Kozlowski K., Kozlowska J. M., Development on the Schrodinger equation for attosecond laser pulse interaction with planck gas, *Laser in Engineering*, 3-4 (20) **(2010)** 157–166.

[19] Quittner P., Souplet P., Optimal Lioville-type theorems for noncooperative elliptic Schrödinger systems and applications, *Communications in Mathematical Physics*, (311) **(2012)** 1–19.

[20] Godet N., Tzvetkov N., Strichartz estimates for the periodic non-elliptic Schrödinger equation, Comptes Rendus Mathematique, 21–22 (350) **(2012)** 955–958.

[21] Liu B., Ma L., Symmetry results for elliptic Schrödinger systems on half spaces, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1 (401) **(2013)** 259–268.

[22] Tselios K., Simos T. E., Runge-Kutta methods with minimal dispersion and dissipation for problem arising from computational acoustics, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1 (175) **(2005)** 173-181.

[23] Sakas D. P., Simos T. E., Multiderivative methods of eighth algebraic order with minimal phase-lag for the numerical solution of the radial Schrodinger equation, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1 (175) **(2005)** 161-172.

[24] Psihoyios G., Simos T. E., A fourth algebraic order trigonometrically fitted predictor-corrector scheme for IVPs with oscillating solutions, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1 (175) **(2005)** 137-147.

[25] Anastassi Z. A., Simos T. E., An optimized Runge-Kutta method for the solution of orbital problems, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1 (175) **(2005)** 1-9.

[26] Simos T. E., Closed Newton-Cotes trigonometrically-fitted formulae of high order for long-time integration of orbital problems, *Applied Mathematics Letters*, 10 (22) **(2009)** 1616-1621.

[27] Stavroyiannis S., Simos T. E., Optimization as a function of the phase-lag order of nonlinear explicit two-step P-stable method for linear periodic IVPs, *Applied Numerical Mathematics*, 10 (59) **(2009)** 2467-2474.

[28] Simos T. E., Exponentially and trigonometrically fitted methods for the solution of the Schrodinger equation, *Acta Applicandae Mathematicae*, 3 (110) **(2010)** 1331-1352.

[29] Alp M., Parabolik-Schrödinger diferansiyel ve fark denklemleri için lokal olmayan sınır değer problemleri, *Yüksek Lisans Tezi*, Düzce Üniversitesi, Düzce-Türkiye, **(2014)**.

[30] Suhubi E. S., Fonksiyonel Analiz, İtü Vakfı Yayınları no.38, **(2001)**.

[31] Çağlıyan M., Çelik N., Doğan S., Adi Diferansiyel Denklemler, Dora Yayıncılık, 2. baskı, **(2008)**.

7 EKLER

EK-1. ALGORİTMA

1. Adım: $\tau = \dfrac{1}{N}$ ve $h = \dfrac{1}{M}$ olarak al.

2. Adım: Birinci dereceden doğruluklu fark şemasını kullan ve matris formunda yaz.

$$AU_{n+1} + BU_n + CU_{n-1} = D\varphi_n, 1 \leq n \leq M-1$$

3. Adım: A, B, C ve D matrislerinin girdilerini belirle.

4. Adım: α_1, β_1 i bul.

5. Adım: $\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}$ i hesapla.

6. Adım: U_n için $n = M-1, \cdots, 1, 0$ $U_n = \alpha_{n+1}U_{n+1} + \beta_{n+1}, n = M-1, \cdots, 2, 1$ formülünü kullanarak hesapla.

EK-2. BİRİNCİ BASAMAKTAN DOĞRULUKLU FARK ŞEMASI İÇİN MATLAB PROGRAMI

```
function [table,es,p]=firstorder(N,M)
    close; close;
    if nargin<1; N=30 ; M=30 ;end;
    tau=1/N; h=1/M;
    A=zeros(2*N+1,2*N+1);

    for i=2:N+1; A(i,i)=-1/(h^2); end; % parabolik kısım asıl köşegen
    for i=N+2:2*N; A(i,i+1)=-1/(h^2); end; % schrödinger kısım asıl köşegen + 1
    A;
    B=zeros(2*N+1,2*N+1);
    % lokal olmayan koşulun etkisi
    B(1,1)=1;
    B(1,2*N)=1/tau;
    B(1,2*N+1)=-1/tau-1;
    for i=2:N+1; B(i,i-1)=-1/tau; end; % parabolik kısım asıl köşegen - 1
    for i=2:N+1; B(i,i)=(1/tau)+(2/(h^2))+1; end; % parabolik kısım asıl köşegen
    for i=N+2:2*N; B(i,i+1)=(complex(0,1)/tau)+(2/(h^2))+1; end; % schrödinger
kısım asıl köşegen + 1
    for i=N+2:2*N; B(i,i)=-complex(0,1)/tau; end; % schrödinger kısım asıl köşegen
```

```
% süreklilik koşulunun etkisi
B(2*N+1,N)=1;
B(2*N+1,N+1)=-2;
B(2*N+1,N+2)=1;
B;
C=A;

for i=1:2*N+1; D(i,i)=1; end ;

'fi(j) = fi(k,j) hesaplanıyor ' ;

for j=1:M; x=j*h;

fii(1,j:j)=2*exp(-1)*sin(pi*x);
fii(2*N+1,j:j)=0;

for k=2:N+1; x=j*h; t=(-N+k-1)*tau ; fii(k,j:j)=g(t,x); end;

for k=N+2:2*N; t=(-N+k-1)*tau; x=j*h; fii(k,j:j)=f(t,x); end;

end;

'alpha(N+1,N+1,j) ve betha(N+1,j) ler hesaplanacak' ;
alpha(2*N+1,2*N+1,1:1)= 0;
betha(2*N+1,1:1)=0;
for j=1:M-1;
alpha(:,:,j+1:j+1)=-inv(B+C*alpha(:,:,j:j))*A;
betha(:,j+1:j+1)=inv(B+C*alpha(:,:,j:j))*(D*(fii(:,j:j))-(C*betha(:,j:j)));
end;

U(2*N+1,1,M:M)=0;

for z=M-1:-1:1 ;
```

```
U(:,:,z:z)=alpha(:,:,z+1:z+1)*U(:,:,z+1:z+1)+betha(:,z+1:z+1);

end;

for z=1:M; p(:,z+1:z+1)=U(:,:,z:z); end;

'KTDD nin GERÇEK ÇÖZÜMÜ' ;

for j=1:M+1;

for k=1:2*N+1;

t=(-N+k-1)*tau;

x=(j-1)*h; %exact solution on grid points,
es(k,j) = exact(t,x);

end;

end;

%%%%%%%%%%%%%ERROR ANALYSIS%%%%%%%%%%%
ftf1=abs(es-p);
fmat1=abs(ftf1);
fmat2=fmat1.*fmat1*h;
fmat3=sum(fmat2,2);
fmat4=fmat3.^(1/2);
sumerror2=max(fmat4)
maxerror2=max(max(abs(es-p)))
maxes=max(max(es));
maxapp=max(max(p));
%%%%%%%%%%%%%ÇÖZÜMÜN GRAFİĞİ%%%%%%%%%%%
figure;
m(1,1)=min(min(p))-0.01;
```

```
m(2,2)=nan;
surf(m);
hold;
surf(es) ; rotate3d ;axis tight;
title('GERÇEK ÇÖZÜM');
figure ;
m(1,1)=min(min(p))-0.01;
m(2,2)=nan;
surf(m);
hold;
surf(p) ; rotate3d ;axis tight;
title('YAKLAŞIK ÇÖZÜM');
%%%%%%%%%%% GRAFİK BİTTİ%%%%%%%%%%%%%%%%

function estx=exact(t,x)

estx= exp(-t^2)*sin(pi*x);

function ftx=f(t,x)

ftx=(-2*complex(0,1)*t+1+pi^2)*exp(-t^2)*sin(pi*x);

function gtx=g(t,x)

gtx=(-2*t+1+pi^2)*exp(-t^2)*sin(pi*x);
```

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: KARABACAK, Yasemin
Uyruğu	: T.C
Doğum tarihi ve yeri	: 24.08.1987 / DÜZCE
Telefon	: 0 (554) 887 32 54
E-posta	:yaseminkarabacak@kpslamine.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek Lisans	Düzce Üniversitesi/Matematik B.	2015
Lisans	Yıldız Teknik Üniv./Matematik B.	2009
Lise	Yunus Bey Koleji	2004

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2009-2015	Karabacak Parke	Genel Müdür

Yabancı Dil

İngilizce