T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KESİRLİ İNTEGRALLERDEN YARARLANARAK s-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ HERMİTE-HADAMARD TİPİNDEKİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FATMA ERTUĞRAL

TEMMUZ 2015

DÜZCE

KABUL VE ONAY BELGESİ

Fatma ERTUĞRAL tarafından hazırlanan Kesirli İntegrallerden yararlanarak s-Konveks Fonksiyonlar İçin Genelleştirilmiş Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitlikleri isimli lisansüstü tez çalışması, Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 18.04.2015 tarih ve .. sayılı kararı ile oluşturulan jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Üye
(Tez Danışmanı)
Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Düzce Üniversitesi

Üye
Doç. Dr. Nesip AKTAN
Düzce Üniversitesi

Üye
Doç. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Tezin Savunulduğu Tarih :21.07.2015

ONAY

Bu tez ile Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Fatma ERTUĞRAL'ın Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans derecesini almasını onamıştır.

Prof. Dr. Haldun MÜDERRİSOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu olmadığını beyan ederim.

21.07.2015

Fatma Ertuğral

Sevgili Aileme,

Arkadaşlarıma ve tüm sevdiklerime

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim ve bu tezin hazırlanmasında süresince gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA'ya en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme ve çalışma arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

21 Temmuz 2015 **Fatma Ertuğral**

İÇİNDEKİLER **Sayfa**

SİMGELER VE KISALTMALAR

f'	f in birinci türevi
f''	f in ikinci türevi
$\|f\|$	f in mutlak değeri
H.-H.	Hermite-Hadamard
I	R nin içinde bir aralık
I^o	I nin içi
K_s^1	Birinci anlamda s -konveks fonksiyon
K_s^2	İkinci anlamda s -konveks fonksiyon
$L[a,b]$	$[a,b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonların kümesi
R	Reel Sayılar Kümesi
R^n	n boyutlu Öklid Uzayı
R_+	Pozitif Reel Sayılar Kümesi

ÖZET

KESİRLİ İNTEGRALLERDEN YARARLANARAK s-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ HERMİTE HADAMARD TİPİNDEKİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Fatma ERTUĞRAL
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Doç. Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Temmuz 2015, 63sayfa

Konvekslik kavramı ve genelleştirilmiş konvekslik kavramları matematiksel programlamada, mühendislikte, denge problemlerinde, varyasyonel problemlerde ve özellikle optimizasyon teorisinde çok önemli bir yer tutmaktadır. Genelleştirilmiş konvekslik kavramlarından biride s-konvekslik kavramıdır. Bu tezde amacımız kesirli integrallerden yararlanarak s-konveks fonksiyonlar için genelleştirilmiş Hermite-Hadamard tipinde eşitsizlik elde etmektir.

Anahtar sözcükler: Hermite-Hadamard eşitsizliği, s-konveks fonksiyon, Hölder eşitsizliği

ABSTRACT

GENERALIZED HERMITE-HADAMARD TYPE INTEGRAL INEQUALITIES FOR s-CONVEX FUNCTIONS VIA FRACTIONAL INTEGRALS

FATMA ERTUĞRAL
Duzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Departmant of Matematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Assoc.Prof.Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
July 2015, 63 pages

Convexity and the generalization of convexity are one of the most important aspects in mathematical programming, optimization theory, equilibrum problems and variational problems. One of generalization convexity is s-convexity.The aim of this thesis, generalized Hermite-Hadamard type integral inequalities for s-convex functions via fractional integrals.

Keywords: Hermite-Hadamard type inequality, s-convex function, Hölder's inequality.

EXTENDED ABSTRACT

GENERALIZED HERMITE-HADAMARD TYPE INTEGRAL INEQUALITIES FOR s-CONVEX FUNCTIONS VIA FRACTIONAL INTEGRALS

FATMA ERTUĞRAL
Duzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Departmant of Mathematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. M.Zeki SARIKAYA
July 2015, 62 pages

1. INTRODUCTION:

Inequalities have proven to be one of the most important and far-reaching tools for the development of many branches of mathematics. There are many types of inequalities of importance. Integral and finite difference inequalities with explicit estimates are powerful mathematical appartus which aid the study of the qualitative behavior of solutions of various types of differential, integral and finite difference equations. Because of its usefulness and importance, such inequalities have attracted much attention and a great number of papers, surveys and monographs have appeared in the literature.

2. MATERIAL AND METHODS:

s- convex functions have been introduced by Breckner in (Breckner 1978) and they play an important role in optimization theory and mathematical economics. Various properties and applicatins of them can be found in (Dragomir and Fitzpatrik 1999).

3. RESULTS AND DISCUSSIONS:

Over the past two decades or so, the field of inequalities has undergone explosive growth. Concerning numerous analytic inequalities, in particular a great many research papers have been written related to the inequalities associated to the names of Cebysev, Grüss, Ostrowski, Hermite-Hadamard and Jensen. A number of surveys and monographs published during the past few years described much of the progress.

4. CONCLUSION AND OUTLOOK:

In this thesis, using functions whose derivatives absolute values are s-convex functions, we obtained new inequalities related to generalized hermite-hadamard type integral inequalities for s-conveks functions via fractional integrals.

1. GİRİŞ

1.1. AMAÇ VE KAPSAM

Konvekslik, M.Ö. 250 yılında Archimedes'in ünlü π değerini hesaplamasına kadar uzanan basit ve bilinen bir kavramdır. Konveks fonksiyonların sistematik araştırmasına ilk olarak 19. yüzyılın sonlarında rastlanmasına rağmen, 20. yüzyılın ortalarında matematiğin önemli bir alanı olarak görülmeye başlanmıştır. Konvekslik, geometri, analiz, lineer cebir ve topolojide kullanılır ve sayı teorisi, klasik ekstremum problemleri, lineer programlama, oyun teorisi ve eşitsizlikler teorisi (lineer, klasik ve matris) gibi çeşitli konularda önemli rol oynar. Son yüzyılda gelişen disiplini ve artan uygulamalarıyla matematiksel analizin merkezi alanlarından biri olarak yerini almıştır.

(Hardy, Littlewood ve Polya 1934) yazılan "Inequalities" adlı eser eşitsizlikler teorisi için temel başvuru kaynağıdır. Okuyucu bu eserde konveks fonksiyonlarla ilgili klasik ve yeni eşitsizlikleri, problemleri, ispat yöntemlerini ve sonuçlar bulabilir. Buna ek olarak (Beckenbach ve Bellman 1965) yazdığı "Inequalities" adlı eser ve (Mitrinovic 1970) de yazdığı "Analytic Inequalities" adlı eseri de söyleyebiliriz. Bu kaynaklar eşitsizlikler teorisini araştırmak isteyen okuyucu için el altında bulunması gereken kaynaklardır.

Analitik eşitsizlikler yaygın olarak matematik ve birçok uygulamalı matematiğin çeşitli dallarında gelişiminin arkasındaki temel itici güçlerinden biri olarak kabul edilmektedir. Eşitsizlikler ile ilgili çalışmalar son on yıldan fazladır matematiğin birçok farklı alanlardaki uygulamalara nasıl büyük bir katkı sağlandığı açıkça ortadadır. Örneğin, Cebysev, Grüss, Yamuk, Ostrowski, Hadamard ve Jensen eşitsizlikler ile ilgili birçok uygulama literatürde çok önemli bir yere sahiptir.

Tezimizin temel taşlarını oluşturan Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler ile ilgili çalışmaların büyük bir kısmı da (Dragomir ve Pearce 2002) tarafından yazılmış olan "Selected Topic on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications" isimli kitapta bir araya getirilmiştir.

Bu tezde amacımız kesirli integrallerden yararlanarak s-konveks fonksiyonlar için genelleştirilmiş Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizlikleri vererek yukarıda bahsedilen gelişmeler çerçevesinde literatürde bu eşitsizliklerin de yer bulmasını sağlamaktır.

1.2. GENEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezimiz için gerekli olan tanım ve teoremler verilerek gerekli görülen bazı önemli teoremlerin ispatları da verilmiştir.

Tanım 1.2.1. (Konveks Fonksiyon) Her $u,v \in I$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$f(tu+(1-t)v) \leq tf(u)+(1-t)f(v)$$

eşitsizliğini sağlayan $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir (eşdeğer olarak t, $(0,1)$ aralığında da seçilebilir). Geometrik olarak bu eşitsizlik, f fonksiyonunun grafiği kirişlerinin altından geçer anlamındadır.

Aşağıdaki kriterler konveks fonksiyon tanımına eşdeğerdir.

a) I aralığı üzerinde f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart herhangi bir $c \in I$ noktası için, $f(x)-f(c)/(x-c)$ fonksiyonunun I aralığında artan olmasıdır.

b) $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart her $c,x \in (a,b)$ için,

$$f(x)-f(c)=\int_c^x g(t)dt$$

olacak şekilde $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ artan fonksiyonun olmasıdır.

c) f diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere, f in konveks olması için gerek ve yeter şart f' fonksiyonunun artan olmasıdır.

d) f'', (a,b) de mevcut olsun. Bu durumda f nin konveks olması için gerek ve yeter şart $f''(x) \geq 0$ olmasıdır.

e) $f:(a,b)\to \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart her $x_0 \in (a,b)$ için f fonksiyonun en az bir support doğrusuna sahip olmasıdır. Yani

$$f(x)\geq f(x_0)+\lambda(x-x_0) \qquad \forall x\in(a,b)$$

eşitsizliğini sağlamasıdır. Burada λ, x_0 a bağlıdır ve eğer f' varsa o zaman $\lambda = f'(x_0)$ ya da $f'_-(x_0)\neq f'_+(x_0)$ ise $\lambda\in[f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$ dir.

f) $f:(a,b)\to \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart P,Q ve R noktaları f fonksiyonun grafiği üzerinde herhangi üç nokta olmak üzere,

$$eğimPQ \leq eğimPR \leq eğimQR$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Şimdi konveks fonksiyonların bazı özelliklerini verelim :

i. Kapalı aralıkta tanımlı konveks fonksiyon sınırlıdır.

ii. $f:I\to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ise, I° (I nın içi) inde herhangi bir $[a,b]$ kapalı aralığında Lipschitz şartını sağlar. Bu nedenle $\boldsymbol{f}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında da mutlak sürekli ve I° de süreklidir.

iii. $f:I\to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ise, I° de $f'_-(x)$ ve $f'_+(x)$ vardır ve artandır.

iv. $f:I\to \mathbb{R}$ fonksiyonu I açık aralığında konveks ise, sayılabilir bir E kümesi haricinde f' mevcuttur ve süreklidir.

v. k tane fonksiyon $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de konveks fonksiyonlar olsun. Bu takdirde;

$$f(x)=\sum_{j=1}^{k} a_j f_j(k),\ a_j>0,\ (j=1,2,3,\ldots,k)$$

fonksiyonu da konvekstir.

vi. $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ azalmayan ve konveks fonksiyon ayrıca $h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ konveks fonksiyon olsun. Bu takdirde; $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $f(x)=(g\circ h)(x)$ olarak tanımlanan f bileşke fonksiyonu da konvekstir.

vii. $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ konveks ve $h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $h(x)=Ax+B$ formunda konveks olmak üzere (Burada A uygun matristir.)

$$f(x)=g(h(x))$$

fonksiyonu konveks fonksiyondur. (Pečarić ve diğ. 1992)

Teorem 1.2.2. (Jensen Eşitsizliği) f fonksiyonu (a,b) aralığında konveks ve $x_i\in(a,b)$ olsun. Bu durumda $\alpha_i>0$ ve $\sum_{i=1}^n\alpha_i=1$ ise,

$$f\left(\sum_{i=1}^n\alpha_i x_i\right)\le\sum_{i=1}^n\alpha_i f(x_i)$$

eşitsizliği geçerlidir. (Pečarić ve diğ. 1992)

İspat. f fonksiyonu her $x_0\in(a,b)$ için bir suport doğruya sahiptir. Yani her x_0 noktası için $f(x)\ge f(x_0)+m(x-x_0)$ olacak şekilde x_0 a bağlı bir m noktası vardır. Bu eşitsizlikte özel olarak $i=1,2,...,n$ için $x_0=\sum_{i=1}^n\alpha_i x_i$ seçilirse,

$$f(x_i)\ge f(x_0)+m(x_i-x_0)$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu eşitsizlikler α_i ile çarpılır, taraf tarafa toplanır ve düzenlenirse Jensen Eşitsizliği elde edilir.

Teorem 1.2.3 (AO-GO Eşitsizliği) Eğer her $i=1,2,...,n$ için $x_i\ge 0$, $\alpha_i>0$ ve $\sum_{i=1}^n\alpha_i=1$ ise,

$$\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}\le\sum_{i=1}^n\alpha_i x_i$$

eşitsizliği geçerlidir. (Pečarić ve diğ. 1992)

İspat. En az bir i için $x_i = 0$ ise ispat aşikârdır. $x_i > 0$ durumunda, $y_i = \log x_i$ seçilirse,

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\right)$$

olup $f(t) = e^t$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ 'de konveks olduğundan Jensen Eşitsizliğini uygularsak,

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} &= f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(y_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\end{aligned}$$

elde edilip ispat tamamlanmış olur. Özel olarak $n = 2$, $\alpha_1 = \frac{1}{p}$, $\alpha_2 = \frac{1}{q}$, $x_1 = x^p$ ve $x_2 = y^q$ seçilirse Young Eşitsizliği olarak bilinen,

$$xy \leq \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 1.2.4. (Hölder Eşitsizliği) $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n > 0$, $p, q > 1$ öyle ki $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} . \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğine Hölder Eşitsizliği denir. Özel olarak $p = q = 2$ seçilirse yukardaki eşitsizlik Cauchy-Buniakowsky-Schwartz eşitsizliği elde edilir. (Bayraktar 2006)

İspat. Yukardaki eşitsizlikte x_i ve y_i lerden en az birinin sıfırdan farklı olduğunu düşünebiliriz. O halde $u = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$ ve $v = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$ her ikisi de pozitiftir, Young eşitsizliğinde $x = x_i / u$ ve $y = y_i / v$ seçersek,

$$\frac{x_i}{u}\cdot\frac{y_i}{v}\le\frac{1}{p}\left(\frac{x_i}{u}\right)^p+\frac{1}{q}\left(\frac{y_i}{v}\right)^q$$

elde edilip bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i}{uv}\le\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

olur. Bu da Hölder eşitsizliğini verir.

Tanım 1.2.5. (İntegraller İçin Hölder Eşitsizliği) $p>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olsun. f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b|f(x)g(x)|dx\le\left(\int_a^b|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b|g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir. (Bayraktar 2006)

Tanım 1.2.6. (Kuvvet Ortalama Eşitsizliği) $q\ge1$ olsun. f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar $|f|$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b|f(x)g(x)|dx\le\left(\int_a^b|f(x)|dx\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_a^b|f(x)||g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir. (Bayraktar 2006)

Tanım 1.2.7.(Mutlak Süreklilik) $[a,b]$ aralığının ayrık açık alt aralıklarının birikimi $\{(a_i,b_i)\}_1^n$ için

$$\sum_1^n(b_i-a_i)<\delta$$

olduğunda,

$$\sum_{1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$$

olacak şekilde herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, bir $\delta > 0$ bulunabiliyorsa, f fonksiyonuna $[a,b]$ aralığında mutlak süreklidir denir. (Dönmez 2001)

Teorem 1.2.8. (Hermite-Hadamard Eşitsizliği) $f : [a,b] \to \mathrm{R}$ konveks fonksiyon olmak üzere,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{1.1}$$

eşitsizliğine Hermite-Hadamard Eşitsizliği denir. Burada f fonksiyonunun konkav olması eşitsizliği tersine çevirir. Klasik Hermite-Hadamard (H.-H.) eşitsizliği bir $f : [a,b] \to R$ konveks fonksiyonunun ortalama değerinin hesabını sağlar. (Dragomir ve Pearce 2002)

İspat. f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde konveks olduğundan, $t \in [0,1]$ için,

$$f(ta+(1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğin her iki tarafının $[0,1]$ aralığında t ye göre integralini alırsak,

$$\int_{0}^{1} f(ta+(1-t)b)dt \leq \int_{0}^{1} tf(a)dt + \int_{0}^{1}(1-t)f(b)dt = \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

elde ederiz. Diğer yandan, f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde konveks olduğundan, $t \in [0,1]$ için,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f\left(\frac{ta+(1-t)b}{2} + \frac{(1-t)a+tb}{2}\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\left[f(ta+(1-t)b) + f((1-t)a+tb)\right] \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğin her iki tarafının $[0,1]$ aralığında t ye göre integralini alırsak,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_0^1 [f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)]dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt+\int_0^1 f((1-t)a+tb)dt\right]$$

elde ederiz. Bu eşitsizliğin sağ tarafında ikinci integralde $1-t=s$ yazarsak soldaki eşitsizlikte

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt+\int_0^1 f(sa+(1-s)b)ds\right]$$

$$=\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt$$

buluruz ve buradan

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq \int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

elde ederiz. $\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt$ integralinde $ta+(1-t)b=x$ yazarsak,

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

olduğunu kolaylıkla görürüz ve böylece ispat tamamlanır.

Tanım 1.2.9. (Birinci Anlamda s-Konveks Fonksiyon) $0<s\leq 1$ olsun. $R_+ := [0,\infty)$ olmak üzere $f: R_+ \to R$ fonksiyonuna, her $u,v\in R_+$ ve $\alpha,\beta\geq 0$ ile $\alpha^s+\beta^s=1$ için,

$$f(\alpha u+\beta v)\leq \alpha^s f(u)+\beta^s f(v) \tag{1.2}$$

şartını sağlıyorsa birinci anlamda s-konveks fonksiyon denir. Reel fonksiyonların bu sınıfı K_s^1 ile gösterilir. (Dragomir ve Pearce 2002)

Teorem 1.2.10. $f\in K_s^1$ olsun. (1.2) eşitsizliğinin her $u,v\in R_+$ ve $\alpha,\beta\geq 0$ ile $\alpha^s+\beta^s\leq 1$ durumlarında sağlanması için gerek ve yeter şart $f(0)\leq 0$ olmasıdır.

İspat. Gereklilik $u=v=0$ ve $\alpha=\beta=0$ alınarak kolaylıkla bulunur. Bu nedenle $u,v\in R_+$, $\alpha,\beta\geq 0$ ve $0<\gamma=\alpha^s+\beta^s<1$ olduğunu varsayalım. $a=\alpha\gamma^{-\frac{1}{s}}$ ve $b=\beta\gamma^{-\frac{1}{s}}$ olarak alırsak, $a^s+b^s=\dfrac{\alpha^s}{\gamma}+\dfrac{\beta^s}{\gamma}=1$ olur ve buradan

$$\begin{aligned}
f(\alpha u+\beta v) &= f\left(a\gamma^{\frac{1}{s}}u+b\gamma^{\frac{1}{s}}v\right)\\
&\leq a^s f\left(\gamma^{\frac{1}{s}}u\right)+b^s f\left(\gamma^{\frac{1}{s}}v\right)\\
&= a^s f\left(\gamma^{\frac{1}{s}}u+(1-\gamma)^{\frac{1}{s}}0\right)+b^s f\left(\gamma^{\frac{1}{s}}v+(1-\gamma)^{\frac{1}{s}}0\right)\\
&\leq a^s\left[\gamma f(u)+(1-\gamma)f(0)\right]+b^s\left[\gamma f(v)+(1-\gamma)f(0)\right]\\
&= a^s\gamma f(u)+b^s\gamma f(v)+(1-\gamma)f(0)\\
&\leq \alpha^s f(u)+\beta^s f(v)
\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 1.2.11. $0<s<1$ olsun. $f\in K_s^1$ şartı sağlanıyorsa f fonksiyonu $(0,\infty)$ üzerinde azalmayandır ve $\lim_{u\to 0^+} f(u)\le f(0)$ dır.

İspat. $u>0$ ve $\alpha\in[0,1]$ için,

$$f\left[\left(\alpha^{\frac{1}{s}}+(1-\alpha)^{\frac{1}{s}}\right)u\right]\le \alpha f(u)+(1-\alpha)f(u)=f(u)$$

vardır.

$$h(\alpha)=\alpha^{\frac{1}{s}}+(1-\alpha)^{\frac{1}{s}}$$

fonksiyonu $[0,1]$ aralığı üzerinde sürekli, $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ aralığı üzerinde azalan, $\left[\frac{1}{2},1\right]$ aralığı üzerinde artan ve $h([0,1])=\left[h\left(\frac{1}{2}\right),h(1)\right]=\left[2^{1-\frac{1}{s}},1\right]$ dır. Buradan her $u>0, t\in\left[2^{1-\frac{1}{s}},1\right]$ için,

$$f(tu)\le f(u) \tag{1.3}$$

olur. $t\in\left[2^{1-\frac{1}{s}},1\right]$ ise o halde $t^{\frac{1}{2}}\in\left[2^{1-\frac{1}{s}},1\right]$ dır. Bu durumda her $u>0$ için (1.3) sağlanır ve böylece her $u>0$ için

$$f(tu)=f\left(t^{\frac{1}{2}}\left(t^{\frac{1}{2}}u\right)\right)\le f\left(t^{\frac{1}{2}}u\right)\le f(u)$$

elde ederiz. Tümevarımla, her $u>0,\ t\in(0,1]$ için

$$f(tu)\le f(u) \tag{1.4}$$

buluruz. Bu nedenle, $0<u\le v$ alarak ve (1.4) uygulayarak

$$f(u) = f\left(\frac{u}{v}.v\right) \leq f(v)$$

elde ederiz. Bu da f fonksiyonu $(0,\infty)$ üzerinde azalmayan demektir.

İkinci kısım şu şekilde ispatlanabilir. Her $u > 0$ için

$$f(\alpha u) = f(\alpha u + \beta 0) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(0)$$

geçerlidir ve $u \to 0^+$ alarak

$$\lim_{u \to 0^+} f(u) \leq \lim_{u \to 0^+} f(\alpha u) \leq \alpha^s \lim_{u \to 0^+} f(u) + \beta^s f(0)$$

ve bunun sonucunda

$$\lim_{u \to 0^+} f(u) \leq f(0)$$

buluruz.

Teorem 1.2.12. $0 < s_1, s_2 \leq 1$ olacak şekilde $f \in K_{s_1}^1$ ve $g \in K_{s_2}^1$ olsun.

a) f azalmayan, g negatif olmayan fonksiyonlar ve $f(0) \leq 0 = g(0)$ ise f ve g nin $f \circ g$ bileşkesi K_s^1 e aittir öyle ki $s = s_1.s_2$ dır.

b) $0 < s_1, s_2 < 1$ olduğunu varsayalım. Eğer f ve g negatif olmayan fonksiyonlar, $f(0) = 0$ ya da $g(0) = 0$ ise f ve g nin $f.g$ çarpımı K_s^1 e aittir öyle ki $s = \min(s_1, s_2)$ dir.

İspat.

a) $u, v \in R_+$, $\alpha, \beta \geq 0$ ve $s = s_1.s_2$ olmak üzere $\alpha^s + \beta^s = 1$ olsun. $i = 1,2$ için $\alpha^{s_i} + \beta^{s_i} \leq \alpha^{s_1.s_2} + \beta^{s_1.s_2} = 1$ olduğundan, Teorem 1.2.10 den ve yukarıdaki kabullerden,

$$(f\circ g)(\alpha u+\beta v)=f\left(g(\alpha u+\beta v)\right)\leq f\left(\alpha^{s_2}g(u)+\beta^{s_2}g(v)\right)$$

$$\leq \alpha^{s_1.s_2}f\left(g(u)\right)+\beta^{s_1.s_2}f\left(g(v)\right)$$

$$\leq \alpha^{s}(f\circ g)(u)+\beta^{s}(f\circ g)(v)$$

elde edilir ki bu $f\circ g\in K_s^1$ demektir.

b) Teorem 1.2.11 e göre, f ve g fonksiyonlarının ikisi de $(0,\infty)$ aralığı üzerinde azalmayandır. Dolayısıyla her $v\geq u>0$ için

$$\left(f(u)-f(v)\right)\left(g(u)-g(v)\right)\geq 0$$

ya da diğer bir ifadeyle

$$f(u)g(v)+f(v)g(u)\leq f(u)g(u)+f(v)g(v) \tag{1.5}$$

olur. $v>u=0$ ise o halde (1.3) eşitsizliği f ve g negatif olmayan fonksiyonlar ve $f(0)=g(0)=0$ iken de geçerlidir.

Şimdi $u,v\in R_+$, $\alpha,\beta\geq 0$ ve $s=\min(s_1,s_2)$ olacak şekilde $\alpha^s+\beta^s=1$ olsun. $i=1,2$ için $\alpha^{s_i}+\beta^{s_i}\leq\alpha^s+\beta^s=1$ olduğundan ve Teorem 1.2.10 ile (1.5) eşitsizliğinden,

$$f(\alpha u+\beta v)g(\alpha u+\beta v)$$

$$\leq\left(\alpha^{s_1}f(u)+\beta^{s_1}f(v)\right)\left(\alpha^{s_2}g(u)+\beta^{s_2}g(v)\right)$$

$$=\alpha^{s_1+s_2}f(u)g(u)+\alpha^{s_1}\beta^{s_2}f(u)g(v)+\alpha^{s_2}\beta^{s_1}f(v)g(u)+\beta^{s_1+s_2}f(v)g(v)$$

$$\leq\alpha^{2s}f(u)g(u)+\alpha^{s}\beta^{s}\left(f(u)g(v)+f(v)g(u)\right)+\beta^{2s}f(v)g(v)$$

$$\leq\alpha^{s}f(u)g(u)+\beta^{s}f(v)g(v)$$

elde edilir ki bu $f.g\in K_s^1$ demektir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. İKİNCİ ANLAMDA S -KONVEKS FONKSİYONLAR

Şimdi ikinci anlamda s-konveks fonksiyonlarla ilgili aşağıdaki bazı sonuçları verelim (Hudzik ve Maligranda 1994).

Tanım 2.1.1. Her $u,v \in R_+$, $\alpha + \beta = 1$ olacak şekilde $\alpha, \beta \geq 0$ ve $s \in (0,1]$ için

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v) \tag{2.1}$$

sağlanıyorsa $f \ : \ R_+ \to R$ fonksiyonuna ikinci anlamda s-konveks fonksiyon denir ve $f \in K_s^2$ olarak gösterilir.

Önerme 2.1.2 . $f \in K_S^2$ ise f , $[0,\infty)$ üzerinde negatif olmayan bir fonksiyondur.

İspat. $u \in R_+$ için,

$$f(u) = f\left(\frac{u}{2} + \frac{u}{2}\right) \leq \frac{f(u)}{2^s} + \frac{f(u)}{2^s} = 2^{1-s} f(u)$$

alalım. Buradan $(2^{1-s} - 1) f(u) \geq 0$ olur ve böylece $f(u) \geq 0$ elde edilir.

Örnek 2.1.3. $0 < s < 1$ ve $a,b,c \in R$ olsun. $u \in R_+$ için

$$f(u) := \begin{cases} a & ,u = 0 \\ bu^s + c & ,u > 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanan f fonksiyonunda,

(i) $b \geq 0$ ve $0 \leq c \leq a$ için $f \in K_s^2$

(ii) $b > 0$ ve $c < 0$ için $f \notin K_s^2$

durumlar vardır.

İspat.

(i) nin ispatında açık olmayan iki durum vardır:

1. $u, v > 0$ olsun. O halde $\alpha u + \beta v > 0$ olur ve

$$
\begin{aligned}
f(\alpha u + \beta v) = b(\alpha u + \beta v)^s + c &\le b(\alpha^s u^s + \beta^s v^s) + c \\
&= b(\alpha^s u^s + \beta^s v^s) + c(\alpha + \beta) \\
&\le b(\alpha^s u^s + \beta^s v^s) + c(\alpha^s + \beta^s) \\
&= \alpha^s (bu^s + c) + \beta^s (bv^s + c) \\
&= \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

2. $v > u = 0$ ve $\beta > 0$ olsun. O halde $\alpha u + \beta v > 0$ olur ve

$$
\begin{aligned}
f(\alpha 0 + \beta v) = f(\beta v) = b(\beta v)^s + c &= b(\beta^s v^s) + c(\alpha + \beta) \\
&\le b(\beta^s v^s) + c(\alpha^s + \beta^s) = \alpha^s c + \beta^s (bv^s + c) \\
&\le \alpha^s + \beta^s (bv^s + c) = \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

(ii) nin ispatı yeterince küçük u değerleri için f negatif olacağından Önerme 2.1.2 den hemen görülür.

K_s^2 nin tanımında $\alpha + \beta = 1$ durumunun eşdeğeri bir şekilde $\alpha + \beta \le 1$ durumu ile yer değiştirebileceğini bilmek önemlidir.

Şimdi s -konveks fonksiyonlar için önemli olan aşağıdaki teoremi verelim (Hudzik ve Maligranda 1994).

Teorem 2.1.4 . $f \in K_s^2$ olsun. Her $u, v \in R_+$, $\alpha, \beta \ge 0$ ile $\alpha + \beta \le 1$ durumlarında (2.1) eşitsizliğinin olması için gerek ve yeter şart $f(0) = 0$ olmasıdır.

İspat.

Gereklilik $u=v=\alpha=\beta=0$ alarak, $f(0)\le 0$ buluruz ve $f(0)\ge 0$ olduğundan (Önerme 2.1.2.) $f(0)=0$ elde ederiz.

Yeterlilik $u,v\in R_+$ ve $\alpha,\beta\ge 0$ ile $0<\gamma=\alpha+\beta\le 1$ olsun. $a=\frac{\alpha}{\gamma}$ ve $b=\frac{\beta}{\gamma}$ alalım. O halde $a+b=\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\gamma}$ olur ve buradan

$$
\begin{aligned}
f(\alpha u+\beta v) = f(a\gamma u+b\gamma v) &\le \alpha^s f(\gamma u)+b^s f(\gamma v)\\
&= a^s f(\gamma u+(1-\gamma)0)+b^s f(\gamma v+(1-\gamma)0)\\
&\le a^s\left[\gamma^s f(u)+(1-\gamma)^s f(0)\right]+b^s\left[\gamma^s f(v)+(1-\gamma)^s f(0)\right]\\
&= a^s\gamma^s f(u)+b^s\gamma^s f(v)+\left(a^s+b^s\right)(1-\gamma)^s f(0)\\
&= \alpha^s f(u)+\beta^s f(v)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Yukardaki teorem ve K_s^1 için benzer türdeki teorem 1.2.10 i kullanarak, s - konveksliğin her iki tanımını aşağıdaki teoremde karşılaştırabiliriz (Hudzik ve Maligranda 1994).

Teorem 2.1.5.

a) $0<s\le 1$ olsun. Eğer $f\in K_s^2$ ve $f(0)=0$ ise $f\in K_s^1$ dir.

b) $0<s_1\le s_2\le 1$ olsun. Eğer $f\in K_s^2$ ve $f(0)=0$ ise $f\in K_s^1$ dir.

İspat.

a) Farz edelim ki $f\in K_s^2$ ve $f(0)=0$ olsun. $u,v\in R_+$ ve $\alpha,\beta\ge 0$ ile $\alpha^s+\beta^s=1$ için $\alpha+\beta\le\alpha^s+\beta^s=1$ olur ve Teorem 2.1.4 den

$$f(\alpha u+\beta v)\le\alpha^s f(u)+\beta^s f(v)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

b) $f \in K_s^2$ ve $u,v \in R_+$, $\alpha,\beta \geq 0$ ile $\alpha+\beta=1$ ile olduğunu varsayalım. O halde

$$f(\alpha u+\beta v) \leq \alpha^{s_2} f(u)+\beta^{s_2} f(v)$$

$$\leq \alpha^{s_1} f(u)+\beta^{s_1} f(v)$$

olur ki bu $f \in K_{s_1}^1$ demektir.

Teorem 1.2.12 ün kanıtındaki gibi benzer bir ispat kullanılarak aşağıdaki teorem de gösterilebilir (Hudzik ve Maligranda 1994).

Teorem 2.1.6. f fonksiyonu K_s^2 de azalmayan ve g fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığı üzerinde negatif olmayan fonksiyonlar olsun. Öyleyse f ve g nin $f \circ g$ bileşkesi K_s^2 e aittir.

Ψ -fonksiyonlar için, $f : R_+ \to R_+$ fonksiyonu azalmayan ve sürekli, $f(0)=0$ ise f fonksiyonuna Ψ - fonksiyon denildiğinden, aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.1.7. ϕ fonksiyonu bir Ψ -fonksiyon ve f , K_s^2 de bir Ψ -fonksiyon ise $f \circ \phi$ bileşkesi K_s^2 ye aittir.

Aşağıda ikinci anlamda s-konveks fonksiyonlar için H.- H. sonucunun farklı bir gösterimini verelim (Dragomir and Fitzpatrik 1999).

Teorem 2.1.8 . $f : R_+ \to R_+$ ikinci anlamda s - konveks bir fonksiyon , $s \in (0,1)$ ve $a,b \in R_+$ ile $a<b$ olsun. $f \in L_1[a,b]$ ise aşağıdaki eşitsizlik vardır:

$$2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{s+1} \qquad (2.2)$$

İspat. f fonksiyonu ikinci anlamda s-konveks olduğundan, her $t \in [0,1]$ için

$$f(ta+(1-t)b) \leq t^s f(a)+(1-t)^s f(b)$$

vardır. Bu eşitsizliği $[0,1]$ aralığı üzerinde integrallersek,

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)$$

$$\leq f(a)\int_0^1 t^s dt + f(b)\int_0^1 (1-t)^s dt$$

$$= \frac{f(a)+f(b)}{s+1}$$

elde ederiz. $x = ta+(1-t)b$ değişken değiştirmesi ile

$$\int_0^1 f(ta(1-t)b)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

olur, böylece (2.2) de ikinci eşitsizlik ispatlanır. (2.2) de birinci eşitsizliği ispatlamak için her $x, y \in I$ için geçerli olan

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2^s} \tag{2.3}$$

eşitsizliğini göz önüne alalım. $x = ta+(1-t)b$ ve $y = (1-t)a+tb$ ile $t \in [0,1]$ olsun. O halde (2.3) eşitsizliğinden, her $t \in [0,1]$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)}{2^s}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizliği $[0,1]$ aralığı üzerinde integrallersek (2.2) nin birinci kısmını göstermiş oluruz.

Hatırlatma 2.1.9 . (2.2) deki ikinci eşitsizlikte $s \in (0,1]$ için $k = \frac{1}{s+1}$ sabiti mümkün olan en iyi sabittir.

Şimdi f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığı üzerinde Lebesgue anlamında integrallenebilir olduğunu varsayalım ve

$$H(t) := \frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(tx+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)dx$$

olarak verilen $H := [0,1] \to R$ fonksiyonunu göz önüne alalım.
Aşağıdaki teorem geçerlidir. (Dragomir and Fitzpatrik 1999).

Teorem 2.1.10. $f : I \subseteq R_+ \to R$ fonksiyonu üzerinde ikinci anlamda s-konveks, $s \in (0,1]$ ve $a < b$ olacak şekilde $[a,b] \subset I$ üzerinde Lebesgue anlamında integrallenebilir olsun. O halde:

i. H fonksiyonu $[0,1]$ aralığı üzerinde ikinci anlamda s-konvekstir.

ii. Her $t \in [0,1]$ için

$$H(t) \geq 2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{2.4}$$

eşitsizliği vardır.

iii. $t \in (0,1]$ olmak üzere,

$$H(t) \leq \min\{H_1(t), H_2(t)\}, t \in [0,1] \tag{2.5}$$

eşitsizliği vardır öyle ki

$$H_1(t) = t^s . \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx + (1-t)^s f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

ve

$$H_2(t) = \frac{f\left(ta+(1-t)\frac{a+b}{2}\right) + f\left(tb+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)}{s+1}$$

olarak tanımlanmıştır.

iv. $\hat{H}(t) := \max\{H_1(t), H_2(t)\}, t \in [0,1]$, ise

$$\hat{H}(t) \leq t^s . \frac{f(a)+f(b)}{s+1} + (1-t)^s . \frac{2}{s+1} f\left(\frac{a+b}{2}\right), t \in [0,1] \qquad (2.6)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat.

i. $t_1, t_2 \in [0,1]$ ve $\alpha, \beta \geq 0$ ile $\alpha + \beta = 1$ olsun. Sıra ile

$$H(\alpha t_1 + \beta t_2)$$

$$= \frac{1}{b-a} \int_a^b f\left((\alpha t_1 + \beta t_2)x + [1-(\alpha t_1 + \beta t_2)] \frac{a+b}{2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \int_a^b f\left(\alpha \left[t_1 x + (1-t_1)\frac{a+b}{2} \right] + \beta \left[t_2 x + \left((1-t_2)\frac{a+b}{2} \right) \right] \right) dx$$

$$\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \left[\alpha^s f\left(t_1 x + (1-t_1)\frac{a+b}{2} \right) + \beta^s f\left(t_2 x + (1-t_2)\frac{a+b}{2} \right) \right] dx$$

$$= \alpha^s H(t_1) + \beta^s H(t_2)$$

sağlanır ki bu bize H fonksiyonunun $[0,1]$ aralığı üzerinde ikinci anlamda s-konveks olduğunu gösterir.

ii. $t \in (0,1]$ olduğunu varsayalım. $u = tx + (1-t)\frac{a+b}{2}$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$H(t) := \frac{1}{t(b-a)} \int_{ta+(1-t)\frac{a+b}{2}}^{tb+(1-t)\frac{a+b}{2}} f(u)du = \frac{1}{p-q} \int_q^p f(u)du$$

olur. Burada $p = tb + (1-t)\frac{a+b}{2}$ ve $q = ta + (1-t)\frac{a+b}{2}$ dır.

Birinci H.-H. eşitsizliğini uygulayarak,

$$\frac{1}{p-q}\int_q^p f(u)du \geq 2^{s-1} f\left(\frac{p+q}{2}\right) = 2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

elde ederiz ve (2.4) eşitsizliği bulunur.

iii. İkinci H.-H. eşitsizliğini uygulayarak, her $t \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{p-q}\int_q^p f(u)du \\
&\leq \frac{f(p)+f(q)}{r+1} \\
&= \frac{f\left(tb+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)+f\left(ta+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)}{r+1} \\
&= H_2(t)
\end{aligned}$$

buluruz. Diğer yandan, her $t \in [0,1]$ ve $x \in [a,b]$ için

$$f\left(tb+(1-t)\frac{a+b}{2}\right) \leq t^s f(x)+(1-t)^s f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

olduğu açıktır. Bu eşitsizlik $[a,b]$ aralığı üzerinde integrallenirse, $H_1(t)$ için (2.5) elde edilir ve istenen ispatlanır.

iv. Her $t \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned}
&H_2(t) \\
&\leq \frac{t^s f(a)+(1-t)^s f\left(\frac{a+b}{2}\right)+t^s f(b)+(1-t)^s f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{s+1} \\
&= t^s.\frac{f(a)+f(b)}{s+1}+(1-t)^s.\frac{2}{s+1}.f\left(\frac{a+b}{2}\right)
\end{aligned}$$

geçerlidir. Diğer yandan,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le \frac{f(a)+f(b)}{s+1}$$

ve $t \in [0,1]$ olmak üzere

$$(1-t)^s f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le (1-t)^s.\frac{2}{s+1}.f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

olduğunu biliyoruz. Bu da bize

$$H_1(t) \le t^s.\frac{f(a)+f(b)}{s+1} + (1-t)^s.\frac{2}{s+1}.f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

eşitsizliğini verir ve teorem ispatlanır.

Şimdi, $f : [a,b] \to R$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığı üzerinde Lebesgue anlamında integrallenebilir olduğunu varsayalım. O halde

$$F(t) := \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b \int_a^b f(tx+(1-t)y)dxdy, t \in [0,1]$$

fonksiyonunu göz önüne alalım.

Aşağıdaki teorem bu fonksiyonun temel özelliklerini içerir (Dragomir and Fitzpatrik 1999).

Teorem 2.1.11 . $f : I \subseteq R_+ \to R_+$ ikinci anlamda s-konveks bir fonksiyon , $s \in (0,1]$, $a,b \in I$ ile $a < b$ ve f fonksiyonu $[a,b]$ aralığı üzerinde Lebesgue anlamında integrallenebilir olsun. O halde:

i. Her $s \in [0,\frac{1}{2}]$ için

$$F\left(s+\frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}-s\right)$$

ve her $t \in [0,1]$ için

$$F(t) = F(1-t)$$

olur.

ii. F , $[0,1]$ aralığı üzerinde ikinci anlamda s-konveks bir fonksiyondur.

iii. $t \in [0,1]$ için

$$2^{1-s} F(t) \geq F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b f\left(\frac{x+y}{2}\right) dxdy \tag{2.7}$$

eşitsizliği vardır.

iv. $t \in [0,1]$ için

$$F(t) \geq 2^{s-1} H(t) \geq 4^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

eşitsizliği vardır.

v. $t \in [0,1]$ için

$$F(t)$$

$$\leq \min\left\{ \left[t^s + (1-t)^s\right] \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx, \right. \tag{2.9}$$

$$\frac{f(a) + f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb) + f(b)}{(s+1)^2}$$

eşitsizliği vardır.

İspat.

i. İspat açıktır.

ii. Teorem 2.1.10'un ispatına benzer şekilde yapılır.

iii. f , I üzerinde ikinci anlamda s- konveks bir fonksiyon olduğundan, her $t \in [0,1]$ ve $x, y \in [a,b]$ için

$$\frac{f(tx+(1-t)y)+f((1-t)x+ty)}{2^s} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

vardır. Bu eşitsizliği $[a,b]^2$ üzerinde integral alırsak,

$$\frac{1}{2^s}\left[\int_a^b\int_a^b f(tx+(1-t)y)dxdy+\int_a^b\int_a^b f((1-t)x+ty)dxdy\right]$$

$$\geq \int_a^b\int_a^b f\left(\frac{x+y}{2}\right)dxdy$$

buluruz. Buradan da

$$\int_a^b\int_a^b f(tx+(1-t)y)dxdy=\int_a^b\int_a^b f((1-t)x+ty)dxdy$$

olduğundan dolayı yukardaki eşitsizlik bize istenen sonuç (2.7) yi verir.

iv. Öncelikle

$$F(t)=\frac{1}{b-a}\int_a^b\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f((1-t)x+ty)dx\right]dy$$

olarak yazalım. Şimdi $[a,b]$ aralığı içindeki y sabiti için,

$$H_y(t) := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(tx+(1-t)y)dx$$

olarak tanımlanan $H_y(t):[0,1]\to R$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Teorem 2.1.10 un ispatında gösterildiği gibi, $t\in[0,1]$ için $p=tb+(1-t)y$, $q=ta+(1-t)y$ olmak üzere

$$H_y(t) := \frac{1}{p-q}\int_q^p f(u)du$$

eşitliği vardır. H.-H. eşitsizliğini uygulayarak, her $t \in (0,1)$ ve $y \in [a,b]$ için

$$\frac{1}{p-q}\int_q^p f(u)du \geq 2^{s-1} f\left(\frac{p+q}{2}\right) = 2^{s-1} f\left(t.\frac{a+b}{2} + (1-t)y\right)$$

elde ederiz. y 'ye göre $[a,b]$ aralığı üzerinde integrallersek, kolayca her $t \in (0,1)$ için

$$F(t) \geq 2^{s-1} H(1-t)$$

olduğu sonucuna varırız. $F(t) = F(1-t)$ olduğundan, $t \in (0,1)$ için (2.8) eşitsizliği ispatlanır.

v. İkinci anlamda s-konveks bir fonksiyonların tanımından, her $x, y \in [a,b]$ ve $t \in (0,1)$ için

$$f(tx + (1-t)y) \leq t^s f(x) + (1-t)^s f(y)$$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizliği $[a,b]^2$ üzerinde integrallersek, (2.9) eşitsizliğinin ilk kısmını elde ederiz.

Şimdi, H.-H. eşitsizliğinin ikinci kısmından $t \in [0,1]$, $p = tb + (1-t)y$ ve $q = ta + (1-t)y$ olmak üzere

$$H_y(t) = \frac{1}{p-q}\int_q^p f(u)du \leq \frac{f(tb + (1-t)y) + f(ta + (1-t)y)}{s+1}$$

gelen eşitsizliği ele alalım. Bu eşitsizliği y' ye göre $[a,b]$ aralığı üzerinde integrallersek

$$F(t) \leq \frac{1}{s+1}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(tb + (1-t)y)dy + \frac{1}{b-a}\int_a^b f(ta + (1-t)y)dy\right]$$

sonucuna varırız. Basit bir hesaplamayla , $r = b$, $l = tb + (1-t)a$ ve $t \in (0,1)$ olmak üzere

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(tb+(1-t)y)dy$$

$$=\frac{1}{r-l}\int_l^r f(u)du \leq \frac{f(r)+f(l)}{s+1}$$

$$=\frac{f(b)+f(tb+(1-t)a)}{s+1}$$

olduğunu ve benzer şekilde

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(ta+(1-t)y)dy \leq \frac{f(a)+f(ta+(1-t)b)}{s+1}, t\in(0,1)$$

olduğunu görürüz. Bu da bize (2.9) daki ikinci eşitsizliği verir.

2.2. KESİRLİ İNTEGRALLERİN ELDE EDİLİŞ YÖNTEMLERİ

Kesirli Hesaplamaların başlangıcı $n-$ ci mertebeden bir tamsayı için türevin anlamının $n-$ tamsayı olmadığında da olabilir mi sorusunun sorulmasıyla başlamıştır. Bu soru 30 Eylül 1695 de L'Hopital tarafından ortaya atılmıştır. Bir gün Leibniz mektubunda $\frac{D^n x}{Dx^n}$ şeklinde $f(x)=x$ fonksiyonun $n-$ ci türevini bu sembol ile gösterilmiştir. L'Hopital da adi bir şekilde $n=\frac{1}{2}$ olduğunda sonucun ne olacağını sormuş ve Leibniz de cevaben "bir paradoks gibi bir gün yararlı bir sonuç olarak ortaya çıkacaktır" demiştir. Bu konu birçok büyük matematikçinin ilgisini çekmiştir. Bunlardan bazıları, Euler, Laplace, Fourier, Lacroix, Abel, Riemann ve Liouville gibi matematikçilerdir.

1819 da Lacroix kesirli türev düşüncesini bir makale olarak ilk yayımlayan matematikçidir. Ona vermiş olduğu tanım aşağıdaki şekilde verelim:

m pozitif tamsayı olmak üzere $y=x^m$ fonksiyonunu alalım. $n-$ ci mertebeden türevini Lacroix

$$\frac{d^n y}{dx^n}=\frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}, m\geq n \tag{2.10}$$

şeklinde bulmuş ve Legendre'nin Γ sembolünü kullanarak genelleşmiş faktöriyel için

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}$$

şeklinde yazılmıştır. Son olarak $m=1$ ve $n=\frac{1}{2}$ için Lacroix

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} y}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$$

elde etmiştir. Bununla birlikte kesirli operatörlerin ilk kullanımı Lacroix tarafından değil Abel tarafından 1823 yılında verilmiştir. Abel tautochrone probleminin formülasyonundan ortaya çıkan bir integral denkleminin çözümünde kesirli hesaplamalar uygulamıştır.

Yıllarca birçok matematikçi kendi notasyonlarını ve yaklaşımlarını kullanarak tamsayı olmayan mertebeden integral ve türev fikrine uygun birçok tanım vermişlerdir. Bu tanımlamalardan en popüler olarak ortaya çıkan Riemann-Liouville' nin tanımı olmuştur. İlginç olan bir kesirli türevin Riemann-Liouville tanımı Lacroix tarafından elde edilen (2.10) denklemine benzer sonuç olmuştur. Riemann-Liouville kesirli integral ve türevin tanımına bakmadan önce bazı önemli matematiksel kavramlar verelim: Bunlar sırasıyla Gamma, beta, error(hata), Mittag-Leffler ve Mellin-Ross fonksiyonlarıdır.

Tanım 2.2.1. (Gamma Fonksiyonu)

$x \in R_+$ için

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

olarak tanımlanır. Gamma fonksiyonun önemli bir özelliği

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), x \in \mathbb{R}^+$$
$$\Gamma(x) = (x-1)!, x \in \mathbb{N} \tag{2.11}$$

dır. (2.11) den $\Gamma(1)=1$ ve

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

dır. Ayrıca tam olmayan Gamma fonksiyonu

$$\Gamma^{*}(\nu,t)=\frac{1}{\Gamma(\nu)t^{\nu}}\int_{0}^{t}e^{-x}x^{\nu-1}dx, \operatorname{Re}\nu>0$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.2. (Beta Fonksiyonu)

$x,y\in R_{+}$ için

$$B(x,y)=\int_{0}^{1}t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

olarak tanımlanır. Beta fonksiyonu gamma fonksiyonu cinsinden

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, x,y\in\mathbb{R}^{+}$$

dır.

Burada ilk olarak daha çok kullanılan ${}_{c}D_{x}^{-\nu}f(x)$ $x-$ ekseni boyunca keyfi $\nu-$ ci mertebeden $f(x)$ fonksiyonun kesirli integrali olarak tanımlayacağız. Bu notasyonda ν pozitif reel sayı ve c ve x de integrasyon limitleridir.

ν negatif olmayan bir reel sayı olsun. f , $J^{'}=(0,\infty)$ da noktasal sürekli ve $J=[0,\infty]$ nın herhangi bir sonlu alt aralığında integrallenebilir olsun. Bu durumda $t>0$ için $\nu-$ ci mertebeden f nin Riemann-Liouville kesirli integrali

$${}_{c}D_{x}^{-\nu}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_{c}^{x}(x-t)^{\nu-1}f(t)dt, \nu>0 \tag{2.12}$$

olarak tanımlanır. (2.12) ifadesi birçok yolla elde edilebilir. Diferansiyel denklemler teorisinde kullanılan bir yaklaşım göz önüne alalım. Bunun için

$$\begin{gathered} y^{(n)}(x) = f(x) \\ y(c) = 0,\ y'(c) = 0, \ldots, y^{(n-1)}(c) = 0 \end{gathered} \tag{2.13}$$

başlangıç değer problemini göz önüne alalım. Dolayısıyla

$$H(x,t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \tag{2.14}$$

Cauchy fonksiyonunu kullanacak olursak,

$$y(x) = \int_c^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,dt \tag{2.15}$$

nın (2.13) denkleminin bir tek çözümü olduğunu iddia ediyoruz. Bunu göstermek için tümevarım yöntemini kullanalım:

$n = 1$ için

$$y'(x) = f(x), y(c) = 0 \tag{2.16}$$

olur. (2.16) denklemini çözersek,

$$\int_c^x y'(t)\,dt = \int_c^x \frac{(x-t)^{1-1}}{(1-1)!} f(t)\,dt$$

olup $y(c) = 0$ den

$$y(x) = \int_c^x f(t)\,dt$$

elde edilir. Keyfi n için (2.15) ifadesini doğru olduğunu kabul edelim ve $n+1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$y^{(n+1)}(x) = f(x)$$
$$y(c) = y'(c) = \ldots = y^{(n)}(c) = 0 \tag{2.17}$$

denklemini göz önüne alalım. $y^{(n+1)}(x) = \left(y'\right)^{(n)}(x)$ olduğundan

$$u(x) = y'(x) \tag{2.18}$$

alınırsa (2.17) denklemi

$$u^{(n)}(x) = f(x)$$
$$u(c) = u'(c) = \ldots = u^{(n-1)}(c) = 0$$

olur. O halde n için doğru olduğundan,

$$\int_c^x y'(t)dt = \int_{z=c}^{x}\left(\int_{t=c}^{z}\frac{(z-t)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)dt\right)dz$$

Dirichlet formülü kullanılırsa,

$$y(x) - y(c) = \int_{t=c}^{z}\left(\int_{z=c}^{x}\frac{(z-t)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)dz\right)dt$$

$$= \int_c^x \frac{(x-t)^n}{n!}f(t)dt$$

olur. Burada $y(c)=0$ olduğundan

$$y(x)=\int_c^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)dt$$

elde edilir ki bu da (2.15) denkleminin bir çözümüdür. (2.13) de $f(x)$ y nin $n-$ ci mertebeden türevi olduğundan $f(x)$ in $n-$ ci mertebeden integrali olarak $y(x)$ i gösterebiliriz. Yani

$$ {}_cD_x^{-n} f(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_c^x (x-t)^{n-1} f(t)dt \tag{2.19}$$

yazılır. Son olarak n yerine herhangi bir ν reel sayısını ve faktöriyel yerine de gamma fonksiyonu yazılırsa (2.19) ifadesi (2.12) Riemann-Liouville kesirli integral tanımına dönüşür. $c=0$ olduğundan $D^{-\nu}$ notasyonunu kullanacağız.

Örnek 2.2.3. $\mathrm{Re}\,\nu>0$, $\mu>-1$ olmak üzere $D^{-\nu}x^{\mu}$ hesaplayalım:

Riemann-Liouville kesirli integral tanımından

$$D^{-\nu}x^{\mu} = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^x (x-t)^{\nu-1}t^{\mu}dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^x \left(1-\frac{t}{x}\right)^{\nu-1} x^{\nu-1}t^{\mu}dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^1 (1-u)^{\nu-1}x^{\nu-1}(xu)^{\mu}\,xdu, \left(u=\frac{t}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\nu)}x^{\mu+\nu}\int_0^1 u^{\mu}(1-u)^{\nu-1}du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\nu)}x^{\mu+\nu}B(\mu+1,\nu)=\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)}x^{\mu+\nu}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$D^{-\nu} x^{\mu} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)} x^{\mu+\nu}, \nu > 0, \mu > -1, x > 0$$

dır. Benzer olarak $\nu -$ ci mertebeden k sabitinin kesirli integrali

$$D^{-\nu} k = \frac{k}{\Gamma(\nu+1)} x^{\nu}$$

dır. Özel olarak $\nu = \frac{1}{2}$ ise

$$D^{-\frac{1}{2}} x^{0} = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$$

$$D^{-\frac{1}{2}} x^{1} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} x^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{x^{3}}{\pi}}$$

$$D^{-\frac{1}{2}} x^{2} = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} x^{\frac{5}{2}} = \frac{16}{15}\sqrt{\frac{x^{5}}{\pi}}$$

yazılabilir.

Daha çok kesirli integraller Riemann versiyonu

$${}_{c}D_{x}^{-\nu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{c}^{t} (t-x)^{\nu-1} f(x) dx$$

ve Liouville versiyonuda

$${}_{-\infty}D_{x}^{-\nu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{-\infty}^{t} (t-x)^{\nu-1} f(x) dx$$

ile gösterilir. $c = 0$ için

$${}_{0}D_{x}^{-\nu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{0}^{t} (t-x)^{\nu-1} f(x) dx$$

ifadesine Riemann-Liouville kesirli integrali denir. α ve β skaler sayılar için

$$D[\alpha f(t)+\beta g(t)]=\alpha Df(t)+\beta Dg(t)$$

olduğu kolayca gösterilir. Benzer olarak kesirli integraller de lineerlik özelliği kolayca gösterilebilir.

$n-$tane integrali alarak

$$_{c}D_{x}^{-n} f(t)=\int_{c}^{x} dx_1 \int_{c}^{x_1} dx_2 \int_{c}^{x_2} dx_3 \ldots \int_{c}^{x_{n-1}} f(t)dt \qquad (2.20)$$

alalım. (2.20) deki f fonksiyonu $x<b$ için $[c,b]$ üzerinde sürekli olduğunu kabul edelim. (2.20) ifadesi $K_n(x,t)$, n,x ve t nin bir fonksiyonu olan bir çekirdek olmak üzere

$$\int_{c}^{x} K_n(x,t) f(t)dt \qquad (2.21)$$

şeklinde bir tek integral olarak yazılabilir. n tamsayı olmadığında bile $K_n(x,t)$ anlamlı fonksiyon olacağını göstereceğiz. Böylece, $\operatorname{Re}\nu>0$ tüm ν için $_{c}D_{x}^{-\nu} f(t)$ i

$$_{c}D_{x}^{-\nu} f(t)=\int_{c}^{x} K_\nu(x,t) f(t)dt$$

şeklinde tanımlayacağız.

Şimdi bunlar ispatlamak için $x<b$ olmak üzere $G(x,t)$, $[c,b]\times[c,b]$ üzerinde sürekli ise

$$\int_{c}^{x} dx_1 \int_{c}^{x_1} G(x,t)dt=\int_{c}^{x} dt \int_{t}^{x} G(x_1,t)dx_1$$

yazabiliriz. Özel olarak $G(x_1,t)=f(t)$ ise

$$\int_c^x dx_1 \int_c^{x_1} f(t)dt = \int_c^x f(t)dt \int_t^x dx_1$$
$$= \int_c^x (x-t)\, f(t)dt$$

yazılır. Böylece iki integral bir tek integrale dönüşmüş olur.
$n=3$ ise bu durumda

$${}_cD_x^{-3} f(t) = \int_c^x dx_1 \left[\int_c^{x_1} (x_1-t)\, f(t)dt \right]$$

olur. Benzer işlemler altında

$${}_cD_x^{-3} f(t) = \int_c^x f(t)dt \int_t^x (x_1-t)dx_1$$
$$= \int_c^x \frac{(x-t)^2}{2} f(t)dt$$

olacaktır. Dolayısıyla bu işlem $n-$ kez uygulandığında (2.20) ifadesi

$$K_n(x,t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

olmak üzere (2.21) indirgenmiş olacaktır. Böylece

$${}_cD_x^{-n} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_c^x (x-t)^{n-1} f(t)dt \qquad (2.22)$$

olarak yazılır. (2.22) ifadesinin sağ tarafı sıfırdan büyük her n reel sayısı için anlamlı olacağından $\nu-$ ci mertebeden f nin kesirli integralini

$$ {}_{c}D_{x}^{-\nu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{c}^{x} (x-t)^{\nu-1} f(t)\,dt, \operatorname{Re}\nu > 0 $$

yazabiliriz.

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

Hermite-Hadamard eşitsizliği günümüze kadar bir çok araştırmacının ilgisini çekmiş ve bu konu ile ilgili olarak literatürde oldukça yayın bulunmaktadır. Hermite-Hadamard eşitsizliğinin birinci ve ikinci tarafı ile ilgili yapılan çalışmaların tümü bu iki eşitsizliğin arasındaki farkın en iyi şekilde verebilecek bir özdeşliğin elde edilmesi ile mümkündür. Dolayısıyla ilk olarak, Hermite-Hadamard eşitsizliği ikinci tarafı ile ilgili eşitsizlikleri Dragomir ve Agarwal elde etmiştir. Bu bölümde amacımız bu tip eşitsizlikleri Riemann-Liouville kesirli integraller yardımıyla elde etmektedir.

3.1. KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN HERMİTE-HADAMARD EŞİTSİZLİĞİ VE KESİRLİ İNTEGRALLERLE İLİŞKİSİ

Bu kısımda ilk olarak Hermite-Hadamard eşitsizliğinin ikinci kısmı için önemli olan bir eşitsizliğin elde edilmesi için önemli olan aşağıdaki özdeşliği verelim:

Lemma 3.1.1. $f : I \subseteq R \to R$ fonksiyonu I üzerinde diferansiyellenebilir $a,b \in I$ ve $a<b$ olsun. Eğer $f' \in L[a,b]$ ise aşağıdaki özdeşlik sağlanır.(Dragomir ve Agarval 1998)

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2}\int_0^1(1-2t)\,f'(ta+(1-t)b)dt.$$

özdeşliği vardır.

İspat. Kısmi integrasyon yardımıyla,

$$\frac{b-a}{2}\int_0^1(1-2t)\,f'(ta+(1-t)b)dt$$

$$=\frac{b-a}{2}\left[\int_0^1 f'(ta+(1-t)b)dt-\int_0^1 2tf'(ta+(1-t)b)dt\right]$$

$$= \frac{b-a}{2}\left[\left. \frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b} \right|_0^1 - 2t \left. \frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b} \right|_0^1 + \frac{2}{a-b}\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt \right]$$

$$= \frac{b-a}{2}\left[\frac{f(a)-f(b)}{a-b} - \frac{2f(a)}{a-b} + \frac{2}{a-b}\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt \right]$$

$$= \frac{f(b)+f(a)}{2} - \int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt$$

buluruz. Buradaki $\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt$ integralinde $ta+(1-t)b=x$ değişken değiştirmesi yaparsak, istenilen sonuç elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.2. $f : I \subseteq R \to R$ fonksiyonu I üzerinde diferansiyellenebilir $a,b \in I$ ve $a<b$ olsun. Eğer $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \right| \le \frac{b-a}{4}\left(\frac{|f'(a)|+|f'(b)|}{2} \right)$$

eşitsizliği vardır.

İspat. Lemma 3.1.1. de özdeşliğin her iki tarafına mutlak değeri uygular ve $|f'|$ fonksiyonun $[a,b]$ aralığında konveks olduğunu kullanırsak,

$$\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \right| \le \frac{b-a}{2}\int_0^1 |1-2t||f'(ta+(1-t)b)|dt$$

$$= \frac{b-a}{2}\left[\int_0^{\frac{1}{2}} (1-2t)|f'(ta+(1-t)b)|dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2t-1)|f'(ta+(1-t)b)|dt \right]$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\left[\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2t)(t|f'(a)|+(1-t)|f'(b)|)dt+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2t-1)(t|f'(a)|+(1-t)|f'(b)|)dt\right]$$

$$=\frac{b-a}{2}\left[\int_0^{\frac{1}{2}}\left(t-2t^2\right)|f'(a)|dt+\int_0^{\frac{1}{2}}\left(1-3t+2t^2\right)|f'(b)|dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(2t^2-t\right)|f'(a)|dt+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(3t-2t^2-1\right)|f'(b)|dt\right]$$

$$=\frac{b-a}{8}\left(|f'(a)|+|f'(b)|\right)$$

elde ederiz. Böylece ispat tamamlanır.

Yukarıdaki bölümde vermiş olduğumuz Riemann-Liouville integralinin tanımını özel olarak aşağıdaki şekilde verelim:

Tanım 3.1.3. (Alt ve Üst Riemann-Liouville integralleri). $f\in L_1[a,b]$ olsun. Bu durumda $J_{a^+}^{\alpha}f$ ve $J_{b^-}^{\alpha}f$ sağ ve sol kesirli integralleri $\alpha>0$ ve $a\geq 0$ için

$$J_{a^+}^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x(x-t)^{\alpha-1}f(t)dt, \qquad x>a$$

ve

$$J_{b-}^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b(t-x)^{\alpha-1}f(t)dt, \qquad x<b$$

ile tanımlanır. Burada, $\Gamma(\alpha)$ Gamma fonksiyonu ve $J_{a^+}^{0}f\,(x)=J_{b^-}^{0}f\,(x)=f(x)$ dır.

2013 yılında, Sarıkaya ve arkadaşları kesirli integraller için önemli bir eşitsizlik olan Hermite-Hadamard eşitsizliğini aşağıdaki şekilde vermişlerdir.(Sarıkaya ve arkadaşları 2013)

Teorem 3.1.4. $f:[a,b]\to R$ bir fonksiyon ve $a<b$ ve $f\in L_1[a,b]$. Eğer f, $[a,b]$ üzerinde konveks fonksiyon ise $\alpha>0$ iken

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^{+}}^{\alpha}f(b)+J_{b^{-}}^{\alpha}f(a)\right]\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği vardır.

İspat . f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde konveks fonksiyon olduğundan $x,y\in[a,b]$ ve $\lambda=\frac{1}{2}$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq\frac{f(x)+f(y)}{2}$$

olup bu eşitsizlikte $x=ta+(1-t)b$ ve $y=(1-t)a+tb$ ifadeleri yazılırsa

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)$$

elde ederiz. Bu eşitsizliğin her iki tarafın $t^{\alpha-1}$ ile çarpıp $t\in[0,1]$ için integral alırsak

$$\frac{2}{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\int_0^1 t^{\alpha-1}f(ta+(1-t)b)dt+\int_0^1 t^{\alpha-1}f((1-t)a+tb)dt$$

yazılır. Burada

$$ta+(1-t)b=u \quad \text{ve} \quad (1-t)a+tb=v$$

dönüşümleri yapılır ve Riemann-Liouville integral tanımı yardımıyla

$$\frac{2}{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\leq\int_b^a\left(\frac{b-u}{b-a}\right)^{\alpha-1}f(u)\frac{du}{a-b}+\int_a^b\left(\frac{v-a}{b-a}\right)^{\alpha-1}f(v)\frac{dv}{b-a}$$

$$= \frac{1}{(b-a)^\alpha}\int_a^b (b-u)^{\alpha-1} f(u)du + \frac{1}{(b-a)^\alpha}\int_a^b (v-a)^{\alpha-1} f(v)dv$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha}\left[J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)\right]$$

sonucunu elde ederiz. Dolayısıyla,

$$\frac{2}{\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha}\left[J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)\right]$$

olup bu eşitsizliğinin her iki tarafını $\frac{\alpha}{2}$ ile çarpar ve $\alpha\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha+1)$ kullanırsak

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}\left[J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)\right]$$

elde ederiz.Yani eşitsizliğin sol kısmını elde etmiş oluruz. İkinci kısım için ise f konveks fonksiyon olduğu için

$$f(ta + (1-t)b) \le tf(a) + (1-t) f(b)$$

$$f((1-t)a + tb) \le (1-t) f(a) + tf(b)$$

eşitsizlikleri yazılabilir ve bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa

$$f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)$$

$$\le tf(a) + (1-t) f(b) + (1-t) f(a) + tf(b)$$

$$\le f(a) + f(b)$$

elde edilir. Son eşitsizliği $t^{\alpha-1}$ ile çarpıp $t \in [0,1]$ için integral alırsak,

$$\int_0^1 t^{\alpha-1} f(ta+(1-t)b)dt+\int_0^1 t^{\alpha-1} f((1-t)a+tb)dt$$

$$\leq [f(a)+f(b)]\int_0^1 t^{\alpha-1}dt$$

olup buradan da

$$\frac{1}{(b-a)^{\alpha}}\int_a^b (b-u)^{\alpha-1} f(u)du+\frac{1}{(b-a)^{\alpha}}\int_a^b (v-a)^{\alpha-1} f(v)dv$$

$$\leq \frac{f(a)+f(b)}{\alpha}$$

yazılır. Böylece

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha} f(b)+J_{b^-}^{\alpha} f(a)\right]\leq \frac{f(a)+f(b)}{\alpha}$$

olur. Dolayısıyla bu son eşitsizliği $\frac{1}{2}$ ile çarpıp düzenlersek

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha} f(b)+J_{b^-}^{\alpha} f(a)\right]\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

elde ederiz. Böylelikle eşitsizliğin her iki tarafını da ispatlamış oluruz.

Lemma 3.1.5. $f:[a,b]\to R$ fonksiyonu (a,b) üzerinde diferansiyellenebilir olsun. Eğer $f'\in L[a,b]$ ise kesirli integral için

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha} f(b)+J_{b^-}^{\alpha} f(a)\right]=\frac{b-a}{2}\int_0^1\left[(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right]f'(ta+(1-t)b)dt$$

özdeşliği vardır.

İspat. İlk olarak Lemmanın ispat için

$$I = \int_0^1 \left[(1-t)^\alpha - t^\alpha\right] f'(ta+(1-t)b)dt$$

$$= \left[\int_0^1 (1-t)^\alpha f'(ta+(1-t)b)dt\right] + \left[-\int_0^1 t^\alpha f'(ta+(1-t)b)dt\right]$$

$$= I_1 + I_2$$

olarak yazalım. Buradan da kısmi integrasyon yardımıyla,

$$I_1 = \int_0^1 (1-t)^\alpha f'(ta+(1-t)b)dt$$

$$= (1-t)^\alpha \left.\frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}\right|_0^1 + \frac{\alpha}{a-b}\int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} f(ta+(1-t)b)dt$$

$$= \frac{f(b)}{b-a} + \frac{\alpha}{a-b}\int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} f(ta+(1-t)b)dt$$

yazılır. Burada $\int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} f(ta+(1-t)b)$ integralinde $ta+(1-t)b = x$ değişken değiştirmesi yaparsak

$$I_1 = \frac{f(b)}{b-a} + \frac{\alpha}{a-b}\int_b^a \left(\frac{a-x}{a-b}\right)^{\alpha-1} f(x)\frac{dx}{a-b}$$

$$= \frac{f(b)}{b-a} - \frac{\alpha}{(b-a)^{\alpha+1}}\int_a^b (x-a)^{\alpha-1} f(x)dx$$

$$= \frac{f(b)}{b-a} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}} J_{b^-}^{\alpha} f(a)$$

elde ederiz. Benzer şekilde

$$I_2 = -\int_0^1 t^{\alpha} f'\big(ta+(1-t)b\big)dt$$

$$= -t^{\alpha}\,\frac{f\big(ta+(1-t)b\big)}{a-b}\Bigg|_0^1 - \frac{\alpha}{b-a}\int_0^1 t^{\alpha-1} f\big(ta+(1-t)b\big)dt$$

$$= \frac{f(a)}{b-a} - \frac{\alpha}{b-a}\int_b^a \left(\frac{x-b}{a-b}\right)^{\alpha-1} f(x)\frac{dx}{a-b}$$

$$= \frac{f(a)}{b-a} - \frac{\alpha}{(b-a)^{\alpha+1}}\int_a^b (b-x)\, f(x)dx$$

$$= \frac{f(a)}{b-a} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}} J_{a^+}^{\alpha} f(b)$$

bulunur. Buradan da

$$I = I_1 + I_2$$

$$= \frac{f(a)+f(b)}{b-a} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[J_{a^+}^{\alpha} f(b) + J_{b^-}^{\alpha} f(a)\right]$$

yazılır. Bu son eşitliğin her iki tarafını $\frac{b-a}{2}$ ile çarparsak ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.6. $f : [a,b] \to R$ fonksiyonu (a,b) üzerinde diferansiyellenebilir olsun. Eğer $|f'|$, $[a,b]$ üzerinde konveks ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha} f(b) + J_{b^-}^{\alpha} f(a)\right]\right| \le \frac{b-a}{2(\alpha+1)}\left(1-\frac{1}{2^{\alpha}}\right)\left[f'(a)+f'(b)\right]$$

dır.

İspat. Lemma 3.1.5 i ve $|f'|$ nin konveksliğini kullanarak,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}f(b)+J_{b^-}^{\alpha}f(a)\right]\right|$$

$$\leq\frac{b-a}{2}\int_0^1\left|(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right|\left|f'(ta+(1-t)b)\right|dt$$

$$\leq\frac{b-a}{2}\int_0^1\left|(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right|\left[t\left|f'(a)\right|+(1-t)\left|f'(b)\right|\right]dt$$

$$=\frac{b-a}{2}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}}\left[(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right]\left[t\left|f'(a)\right|+(1-t)\left|f'(b)\right|\right]dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left[t^{\alpha}-(1-t)^{\alpha}\right]\left[t\left|f'(a)\right|+(1-t)\left|f'(b)\right|\right]dt\right\}$$

$$=\frac{b-a}{2}\left(K_1+K_2\right)$$

şeklinde düzenleyelim ve çözümü kısım kısım yapalım. İlk olarak

$$K_1=\left|f'(a)\right|\left[\int_0^{\frac{1}{2}}t(1-t)^{\alpha}dt-\int_0^{\frac{1}{2}}t^{\alpha+1}dt\right]$$

$$+\left|f'(b)\right|\left[\int_0^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\alpha+1}dt-\int_0^{\frac{1}{2}}(1-t)t^{\alpha}dt\right]$$

dır. Burada $1-t=u$ değişken değiştirmesi yaparsak

$$K_1=\left|f'(a)\right|\left[-\int_1^{\frac{1}{2}}u^{\alpha}(1-u)du-\int_0^{\frac{1}{2}}t^{\alpha+1}dt\right]$$

$$+\left|f'(b)\right|\left[\int_0^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\alpha+1}dt-\int_0^{\frac{1}{2}}t^{\alpha}dt+\int_0^{\frac{1}{2}}t^{\alpha+1}dt\right]$$

$$=|f'(a)|\left[\int_{\frac{1}{2}}^{1}u^{\alpha}du-\int_{\frac{1}{2}}^{1}u^{\alpha+1}du-\int_{0}^{\frac{1}{2}}t^{\alpha+1}dt\right]$$

$$+|f'(b)|\left[\int_{0}^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\alpha+1}dt-\int_{0}^{\frac{1}{2}}t^{\alpha}dt+\int_{0}^{\frac{1}{2}}t^{\alpha+1}dt\right]$$

$$=|f'(a)|\left[\left.\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_{\frac{1}{2}}^{1}-\left.\frac{u^{\alpha+2}}{\alpha+2}\right|_{\frac{1}{2}}^{1}-\left.\frac{t^{\alpha+2}}{\alpha+2}\right|_{0}^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$+|f'(b)|\left[\left.\frac{-(1-t)^{\alpha+2}}{\alpha+2}\right|_{0}^{\frac{1}{2}}-\left.\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_{0}^{\frac{1}{2}}+\left.\frac{t^{\alpha+2}}{\alpha+2}\right|_{0}^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$=|f'(a)|\left[\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]+|f'(b)|\left[\frac{1}{\alpha+2}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]$$

elde ederiz. Diğer yandan

$$K_2=|f'(a)|\left[\int_{\frac{1}{2}}^{1}t^{\alpha+1}dt-\int_{\frac{1}{2}}^{1}t(1-t)^{\alpha}dt\right]$$

$$+|f'(b)|\left[\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)t^{\alpha}dt-\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^{\alpha+1}dt\right]$$

$$=|f'(a)|\left[\left.\frac{t^{\alpha+2}}{\alpha+2}\right|_{\frac{1}{2}}^{1}+\left.\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_{\frac{1}{2}}^{0}-\left.\frac{u^{\alpha+2}}{\alpha+2}\right|_{\frac{1}{2}}^{0}\right]$$

$$+|f'(b)|\left[\left.\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_{\frac{1}{2}}^{1}-\left.\frac{t^{\alpha+2}}{\alpha+2}\right|_{\frac{1}{2}}^{1}+\left.\frac{(1-t)^{\alpha+2}}{\alpha+2}\right|_{\frac{1}{2}}^{1}\right]$$

$$=|f'(a)|\left[\frac{1}{\alpha+2}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]$$

$$+|f'(b)|\left[\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]$$

olacağından K_1 ve K_2 değerlerini toplarsak

$$
\begin{aligned}
& K_1+K_2 \\
&=|f'(a)|\left[\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+\frac{1}{\alpha+2}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right] \\
&\quad+|f'(b)|\left[\frac{1}{\alpha+2}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right] \\
&=|f'(a)|\left[\frac{1}{\alpha+1}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}}{\alpha+1}\right]+|f'(b)|\left[\frac{1}{\alpha+1}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}}{\alpha+1}\right] \\
&=\frac{b-a}{2(\alpha+1)}\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)\left[|f'(a)|+|f'(b)|\right]
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Böylece ispat tamamlanır.

3.2. KESİRLİ İNTEGRALLERDEN YARARLARAK s -CONVEX FONKSİYONLAR İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ HERMITE-HADAMARD TİPİNDEKİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Bu bölümde daha önce elde edilmiş sonuçları veren ve burada elde edeceğimiz sonuçlar için çok önemli olan aşağıdaki özdeşliği verelim:

Lemma 3.2.1. $f\ :\ [a,b]\to R$ fonksiyonu (a,b) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir olsun. Eğer $f'\in L[a,b]$ ise

$$
\begin{aligned}
& -\frac{f(\lambda a+(1-\lambda)b)+f(\lambda b+(1-\lambda)a)}{(1-2\lambda)(b-a)}+\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-2\lambda)^{\alpha+1}(b-a)^{\alpha+1}} \\
& \times\left[J^{\alpha}_{(\lambda b+(1-\lambda)a)^+}f(\lambda a+(1-\lambda)b)+J^{\alpha}_{(\lambda a+(1-\lambda)b)^-}f(\lambda b+(1-\lambda)a)\right] \\
& =\int_0^1\left[(1-t)^\alpha-t^\alpha\right]f'[t(\lambda a+(1-\lambda)b)+(1-t)(\lambda b+(1-\lambda)a)]dt
\end{aligned}
$$

dır. Burada $\lambda\in[0,1]/\left\{\frac{1}{2}\right\}$ ve $\alpha>0.$

İspat. Kolaylık olsun diye ilk olarak

$$I=\frac{f(\lambda a+(1-\lambda)b)+f(\lambda b+(1-\lambda)a)}{(1-2\lambda)(b-a)}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-2\lambda)^{\alpha+1}(b-a)^{\alpha+1}}$$

$$\times\left[J^{\alpha}_{(\lambda b+(1-\lambda)a)^{+}}f(\lambda a+(1-\lambda)b)+J^{\alpha}_{(\lambda a+(1-\lambda)b)^{-}}f(\lambda b+(1-\lambda)a)\right]$$

$$=\int_0^1\left[t^{\alpha}-(1-t)^{\alpha}\right]f'\left[t(\lambda a+(1-\lambda)b)+(1-t)(\lambda b+(1-\lambda)a)\right]dt$$

$$=\int_0^1 t^{\alpha}f'\left[t(\lambda a+(1-\lambda)b)+(1-t)(\lambda b+(1-\lambda)a)\right]dt$$

$$-\int_0^1(1-t)^{\alpha}f'\left[t(\lambda a+(1-\lambda)b)+(1-t)(\lambda b+(1-\lambda)a)\right]dt$$

$$=I_1-I_2$$

yazalım. Daha sonra kısmi integrasyon yardımıyla,

$$I_1=\int_0^1 t^{\alpha}f'\left[t(\lambda a+(1-\lambda)b)+(1-t)(\lambda b+(1-\lambda)a)\right]dt$$

$$=\left.\frac{(t^{\alpha}f\left[t(\lambda a+(1-\lambda)b)+(1-t)(\lambda b+(1-\lambda)a)\right]}{(b-a)(1-2\lambda)}\right|_0^1$$

$$-\frac{\alpha}{(b-a)(1-2\lambda)}\int_0^1 f\left[t(\lambda a+(1-\lambda)b)+(1-t)(\lambda b+(1-\lambda)a)\right]t^{\alpha-1}dt$$

$$=\frac{f\left[\lambda a+(1-\lambda)b\right]}{(b-a)(1-2\lambda)}-\frac{\alpha}{(b-a)^2(1-2\lambda)^2}\int_{\lambda b+(1-\lambda)a}^{\lambda a+(1-\lambda)b}\left[\frac{x-(\lambda b+(1-\lambda)a)}{(b-a)(1-2\lambda)}\right]^{\alpha-1}f(x)dx$$

$$=\frac{f\left[\lambda a+(1-\lambda)b\right]}{(b-a)(1-2\lambda)}-\frac{\alpha}{(b-a)^{\alpha+1}(1-2\lambda)^{\alpha+1}}\int_{\lambda b+(1-\lambda)a}^{\lambda a+(1-\lambda)b}\left[x-(\lambda b+(1-\lambda)a)\right]^{\alpha-1}f(x)dx$$

$$=\frac{f\left[\lambda a+(1-\lambda)b\right]}{(b-a)(1-2\lambda)}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}(1-2\lambda)^{\alpha+1}}J^{\alpha}_{(\lambda a+(1-\lambda)b)^{-}}f(\lambda b+(1-\lambda)a)$$

bulunur ve benzer şekilde

$$I_2 = \int_0^1 (1-t)^{\alpha} f'\left[t(\lambda a+(1-\lambda)b)+(1-t)(\lambda b+(1-\lambda)a)\right]dt$$

$$= \left.\frac{(1-t)^{\alpha} f'\left[t(\lambda a+(1-\lambda)b)+(1-t)(\lambda b+(1-\lambda)a)\right]}{(b-a)(1-2\lambda)}\right|_0^1$$

$$+\frac{\alpha}{(b-a)(1-2\lambda)}\int_0^1 f\left[t(\lambda a+(1-\lambda)b)+(1-t)(\lambda b+(1-\lambda)a)\right](1-t)^{\alpha-1}dt$$

$$=-\frac{f\left[\lambda b+(1-\lambda)a\right]}{(b-a)(1-2\lambda)}+\frac{\alpha}{(b-a)^2(1-2\lambda)^2}\int_{\lambda b+(1-\lambda)a}^{\lambda a+(1-\lambda)b}\left[\frac{\lambda a+(1-\lambda)b-x}{(b-a)(1-2\lambda)}\right]^{\alpha-1} f(x)dx$$

$$=-\frac{f\left[\lambda b+(1-\lambda)a\right]}{(b-a)(1-2\lambda)}+\frac{\alpha}{(b-a)^{\alpha+1}(1-2\lambda)^{\alpha+1}}\int_{\lambda b+(1-\lambda)a}^{\lambda a+(1-\lambda)b}\left[\lambda a+(1-\lambda)b-x\right]^{\alpha-1} f(x)dx$$

$$=-\frac{f\left[\lambda b+(1-\lambda)a\right]}{(b-a)(1-2\lambda)}+\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}(1-2\lambda)^{\alpha+1}} J^{\alpha}_{(\lambda b+(1-\lambda)a)^+} f(\lambda a+(1-\lambda)b)$$

yazılır. Bu son iki ifade taraf tarafa çıkartılırsa,

$$I = I_2 - I_1$$

$$=-\frac{f\left[\lambda b+(1-\lambda)a\right]+f(\lambda a+(1-\lambda)b)}{(b-a)(1-2\lambda)}+\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}(1-2\lambda)^{\alpha+1}}$$

$$\times\left[J^{\alpha}_{(\lambda b+(1-\lambda)a)^+} f(\lambda a+(1-\lambda)b)+J^{\alpha}_{(\lambda a+(1-\lambda)b)^-} f(\lambda b+(1-\lambda)a)\right]$$

elde edilir. Bu da istenilen sonuç olur.

Teorem 3.2.2. $f\ :\ [a,b]\to R$ fonksiyonu $a\le b$ iken (a,b) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir olsun. Eğer $|f'|^q, q\ge 1$ ve $[a,b]$ üzerinde s-konveks ise kesirli integral için

$$\left|\frac{f(\lambda a+(1-\lambda)b)+f(\lambda b+(1-\lambda)a)}{(1-2\lambda)(b-a)}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-2\lambda)^{\alpha+1}(b-a)^{\alpha+1}}\right.$$

$$\left.\times\left[J^{\alpha}_{(\lambda b+(1-\lambda)a)^{+}}f(\lambda a+(1-\lambda)b)+J^{\alpha}_{(\lambda a+(1-\lambda)b)^{-}}f(\lambda b+(1-\lambda)a)\right]\right|$$

$$\leq\left(\frac{2}{\alpha+1}\left[1-\frac{1}{2^{\alpha}}\right]\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\left|f'(\lambda a+(1-\lambda)b)\right|^{q}+\left|f'(\lambda b+(1-\lambda)a)\right|^{q}\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\times\left[\beta_{1\backslash 2}(s+1,\alpha+1)-\frac{1}{2^{\alpha+s}(\alpha+s+1)}+\frac{1}{\alpha+s+1}-\beta_{1/2}(\alpha+1,s+1)\right]$$

eşitsizliği vardır. Buarada $\lambda\in[0,1]/\{\frac{1}{2}\},\alpha>0,$ ve β_x tam olmayan beta fonksiyonu

$$\beta_x(m,n)=\int_0^x t^{m-1}(1-t)^{n-1}dt\ \ m,n>0,0<x\leq 1$$

şeklinde tanımlıdır.

İspat. İlk olarak farzedelim ki $q=1$ olsun. Lemma 3.1.1.i ve $|f'|^q$ nın s - konveksliğini kullanarak bulalım:

$$\left|\frac{f(\lambda a+(1-\lambda)b)+f(\lambda b+(1-\lambda)a)}{(1-2\lambda)(b-a)}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-2\lambda)^{\alpha+1}(b-a)^{\alpha+1}}\right.$$

$$\left.\times\left[J^{\alpha}_{(\lambda b+(1-\lambda)a)^{+}}f(\lambda a+(1-\lambda)b)+J^{\alpha}_{(\lambda a+(1-\lambda)b)^{-}}f(\lambda b+(1-\lambda)a)\right]\right|$$

$$\leq\int_0^1\left|(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right|\left|f'[t(\lambda a+(1-\lambda)b)+(1-t)(\lambda b+(1-\lambda)a)]\right|dt$$

$$\leq\int_0^1\left|(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right|\left[t^{s}\left|f'(\lambda a+(1-\lambda)b)\right|+(1-t)^{s}\left|f'(\lambda b+(1-\lambda)a)\right|\right]dt$$

$$= \left| f'(\lambda a+(1-\lambda)b) \right| \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \left[(1-t)^{\alpha}.t^{s} - t^{\alpha+s} \right] dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left[t^{\alpha+s} - (1-t)^{\alpha}.t^{s} \right] dt \right]$$

$$+ \left| f'(\lambda b+(1-\lambda)a) \right| \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \left[((1-t)^{\alpha} - t^{\alpha}).(1-t)^{s} \right] dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left[\left(t^{\alpha} - (1-t)^{\alpha} \right)(1-t)^{s} \right] dt \right]$$

$$= K_1 + K_2$$

yazılır. Buradaki integrali hesaplayalım:

$$K_1 = \left| f'(\lambda a+(1-\lambda)b) \right| \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \left[(1-t)^{\alpha}.t^{s} - t^{\alpha+s} \right] dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left[t^{\alpha+s} - (1-t)^{\alpha}.t^{s} \right] dt \right]$$

$$= \left| f'(\lambda a+(1-\lambda)b) \right| \left[\int_0^{\frac{1}{2}} (1-t)^{\alpha} t^{s} dt - \int_0^{\frac{1}{2}} t^{\alpha+s} dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} t^{\alpha+s} dt - \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-t)^{\alpha} t^{s} dt \right]$$

$$= \beta_{1/2}(s+1, \alpha+1) - \frac{1}{2^{\alpha+s+1}(\alpha+s+1)} + \frac{1}{\alpha+s+1}$$

$$- \frac{1}{2^{\alpha+s+1}(\alpha+s+1)} - \beta_{1/2}(\alpha+1, s+1)$$

$$= \beta_{1/2}(s+1, \alpha+1) - \beta_{1/2}(\alpha+1, s+1) - \frac{1}{2^{\alpha+s}(\alpha+s+1)} + \frac{1}{\alpha+s+1}$$

sonucunu elde ederiz. K_2 için de benzer olarak

$$K_2 = \left| f'(\lambda b+(1-\lambda)a) \right| \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \left[\left((1-t)^{\alpha} - t^{\alpha} \right)(1-t)^{s} \right] dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left[\left(t^{\alpha} - (1-t)^{\alpha} \right)(1-t)^{s} \right] dt \right]$$

$$= \left| f'(\lambda b+(1-\lambda)a)\right| \left[\int_0^{\frac{1}{2}} (1-t)^{\alpha+s}\,dt - \int_0^{\frac{1}{2}} t^{\alpha}(1-t)^{s}\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} t^{\alpha}(1-t)^{s}\,dt - \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-t)^{\alpha+s}\,dt \right]$$

$$= -\frac{1}{2^{\alpha+s}(\alpha+s+1)} + \frac{1}{\alpha+s+1} - \beta_{1/2}(\alpha+1,s+1) + \beta_{1/2}(s+1,\alpha+1)$$

sonucunu elde ederiz ve ortak paranteze alarak,

$$\left| \frac{f(\lambda a+(1-\lambda)b)+f(\lambda b+(1-\lambda)a)}{(1-2\lambda)(b-a)} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-2\lambda)^{\alpha+1}(b-a)^{\alpha+1}} \right.$$

$$\left. \times \left[J^{\alpha}_{(\lambda b+(1-\lambda)a)^{+}} f(\lambda a+(1-\lambda)b) + J^{\alpha}_{(\lambda a+(1-\lambda)b)^{-}} f(\lambda b+(1-\lambda)a) \right] \right|$$

$$\le \left[\beta_{1/2}(s+1,\alpha+1) - \frac{1}{2^{\alpha+s}(\alpha+s+1)} + \frac{1}{\alpha+s+1} - \beta_{1/2}(\alpha+1,s+1) \right]$$

$$\times \left[\left| f'(\lambda a+(1-\lambda)b)\right| + \left| f'(\lambda b+(1-\lambda)a)\right| \right]$$

sonucuna ulaşırız.

İkinci olarak farzedelim ki $q>1$ olsun. Lemma 3.1.1 eşitliğini, power mean eşitsizliğinden ve $|f'|^{q}$ s-konveksliği kullanılırsa

$$\int_0^1 \left|(1-t)^{\alpha} - t^{\alpha}\right| \left| f'\left[t(\lambda a+(1-\lambda)b)+(1-t)(\lambda b+(1-\lambda)a)\right]\right| dt$$

$$\le \left(\int_0^1 \left|(1-t)^{\alpha} - t^{\alpha}\right| \right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times \left(\int_0^1 \left|(1-t)^{\alpha} - t^{\alpha}\right| \left[t^{s}\left| f'(\lambda a+(1-\lambda)b)\right|^{q} + (1-t)^{s}\left| f'(\lambda b^{s}+(1-\lambda)a)\right|^{q} \right] dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

şeklinde yazarız. Dolayısıyla

$$\left| \frac{f(\lambda a+(1-\lambda)b)+f(\lambda b+(1-\lambda)a)}{(1-2\lambda)(b-a)} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-2\lambda)^{\alpha+1}(b-a)^{\alpha+1}} \right.$$

$$\left. \times\left[J^{\alpha}_{(\lambda b+(1-\lambda)a)^{+}} f(\lambda a+(1-\lambda)b)+J^{\alpha}_{(\lambda a+(1-\lambda)b)^{-}} f(\lambda b+(1-\lambda)a)\right] \right|$$

$$\leq\left(\int_0^1\left|(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right|\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left(\int_0^1\left|(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right|\left[t^{s}\left|f'(\lambda a+(1-\lambda)b)\right|^{q}+(1-t)^{s}\left|f'(\lambda b^{s}+(1-\lambda)a)\right|^{q}\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left[(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right]dt+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left[t^{\alpha}-(1-t)^{\alpha}\right]dt\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left(\int_0^1\left|(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right|\left[t^{s}\left|f'(\lambda a+(1-\lambda)b)\right|^{q}+(1-t)^{s}\left|f'(\lambda b^{s}+(1-\lambda)a)\right|^{q}\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\left(\frac{2}{\alpha+1}\left[1-\frac{1}{2^{\alpha}}\right]\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\left|f'(\lambda a-(1-\lambda)b)\right|^{q}+\left|f'(\lambda b-(1-\lambda)a)\right|^{q}\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\times\left[\beta_{1\backslash 2}(s+1,\alpha+1)-\beta_{1/2}(\alpha+1,s+1)-\frac{1}{2^{\alpha+s}(\alpha+s+1)}+\frac{1}{\alpha+s+1}\right]^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. Buda ispatı tamamlar.

Hatırlatma 3.2.3.(Trapezoid Eşitsizliği). Eğer $s=1$, $\alpha=1$ ve $\lambda=0$(veya $\lambda=1$) alınırsa Teorem 3.2.2 den

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\leq\frac{b-a}{8}2^{\frac{q-1}{q}}\left[\left|f'(a)\right|^{q}+\left|f'(b)\right|^{q}\right]^{\frac{1}{q}}$$

olur. Burada $q\geq1$ dir. Son eşitsizlikte $q=1$ seçersek,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\leq\frac{b-a}{8}\left[\left|f'(a)\right|-\left|f'(b)\right|\right]$$

şeklinde Dragomir ve Agarwal' ın eşitsizliğini elde etmiş oluruz.

Teorem 3.2.4 . $f\ :\ [a,b]\rightarrow R$ fonksiyonu $a<b$ iken (a,b) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde s-conveks ise $q>1$ için

$$\left|\frac{f(\lambda a+(1-\lambda)b)+f(\lambda b+(1-\lambda)a)}{(1-2\lambda)(b-a)}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-2\lambda)^{\alpha+1}(b-a)^{\alpha+1}}\right.$$

$$\left.\times\left[J^{\alpha}_{(\lambda b+(1-\lambda)a)^+}f(\lambda a+(1-\lambda)b)+J^{\alpha}_{(\lambda a+(1-\lambda)b)^-}f(\lambda b+(1-\lambda)a)\right]\right|$$

$$\leq\left[\frac{2}{\alpha p+1}\left(1-\frac{1}{2^{\alpha p}}\right)\right]^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f'(\lambda a+(1-\lambda)b)|^q+|f'(\lambda b+(1-\lambda)a)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$$

dır. Burada $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ \alpha>0$ ve $\lambda\in[0,1]/\left\{\frac{1}{2}\right\}$ dır.

İspat. $|f|^q$ nun s -konveksliğini, Hölder eşitizliğini ve Lemma 3.1.1. kullanarak

$$\left|\frac{f(\lambda a+(1-\lambda)b)+f(\lambda b+(1-\lambda)a)}{(1-2\lambda)(b-a)}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-2\lambda)^{\alpha+1}(b-a)^{\alpha+1}}\right.$$

$$\left.\times\left[J^{\alpha}_{(\lambda b+(1-\lambda)a)^+}f(\lambda a+(1-\lambda)b)+J^{\alpha}_{(\lambda a+(1-\lambda)b)^-}f(\lambda b+(1-\lambda)a)\right]\right|$$

$$\leq\int_0^1\left|(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right|\left|f'[t(\lambda a+(1-\lambda)b)+(1-t)(\lambda b+(1-\lambda)a)]\right|dt$$

$$\leq\left(\int_0^1\left|(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f'[(t(\lambda a+(1-\lambda)b))dt+(1-t)(\lambda b+(1-\lambda)a)]\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left[(1-t)^{\alpha} - t^{\alpha} \right]^p dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left[t^{\alpha} - (1-t)^{\alpha} \right]^p dt \right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times \left(\int_0^1 \left[t^s \left| f'(\lambda a + (1-\lambda)b) \right|^q + (1-t)^s \left| f'(\lambda b^s + (1-\lambda)a) \right|^q \right] dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left[(1-t)^{\alpha p} - t^{\alpha p} \right] dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left[t^{\alpha p} - (1-t)^{\alpha p} \right] dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times \left(\left| f'(\lambda a + (1-\lambda)b) \right|^q \int_0^1 t^s dt + \left| f'(\lambda b + (1-\lambda)a) \right|^q \int_0^1 (1-t)^s dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left[\frac{2}{\alpha p + 1} \left(1 - \frac{1}{2^{\alpha p}} \right) \right]^{\frac{1}{q}} \times \left(\frac{\left| f'(\lambda a + (1-\lambda)b) \right|^q + \left| f'(\lambda b + (1-\lambda)a) \right|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}}$$

sonucunu elde edilir. Burada $c > d > 0$ ve $p > 1$ iken

$$(c-d)^p < c^p - d^p$$

eşitsizliğini kullandık .

Hatrlatma 3.2.5 . (Trapezoid Eşitsizliği). Eğer Teorem 3.2.4 te $s = 1,\ \alpha = 1$ ve $\lambda = 0$(veya $\lambda = 1$) alırsak,

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{b-a}{2} \left[\frac{2}{p+1} \left(1 - \frac{1}{2^p} \right) \right]^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\left| f'(a) \right|^q + \left| f'(b) \right|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}$$

Dragomir ve Agarwal ın eşitsizliğini sağlar.

Teorem 3.2.6. $f\ :\ [a,b] \to R$ fonksiyonu (a,b) aralığı üzerinde diferansiyellenebillir olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığı üzerinde s-konveks ise $q > 1$ için kesirli integraller için

$$\left|\frac{f(\lambda a+(1-\lambda)b)+f(\lambda b+(1-\lambda)a)}{(1-2\lambda)(b-a)}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-2\lambda)^{\alpha+1}(b-a)^{\alpha+1}}\right.$$

$$\left.\times\left[J^{\alpha}_{(\lambda b+(1-\lambda)a)^{+}}f(\lambda a+(1-\lambda)b)+J^{\alpha}_{(\lambda a+(1-\lambda)b)^{-}}f(\lambda b+(1-\lambda)a)\right]\right|$$

$$=\left[\frac{1}{q\alpha+1}\left(1-\frac{1}{2^{q\alpha+1}}\right)\right]^{\frac{1}{q}}\times\left(\frac{|f'(\lambda a+(1-\lambda)b)|^{q}+|f'(\lambda b+(1-\lambda)a)|^{q}}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}$$

dır. Burada $\lambda\in[0,1]/\left\{\frac{1}{2}\right\}$ ve $\alpha>0$ dır.

İspat. Lemma 3.2.1 ' i, $|f'|^{q}$ nun s -konveksliğini ve bilinen Hölder eşitsizliğini kullanırsak

$$\left|\frac{f(\lambda a+(1-\lambda)b)+f(\lambda b+(1-\lambda)a)}{(1-2\lambda)(b-a)}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-2\lambda)^{\alpha+1}(b-a)^{\alpha+1}}\right.$$

$$\left.\times\left[J^{\alpha}_{(\lambda b+(1-\lambda)a)^{+}}f(\lambda a+(1-\lambda)b)+J^{\alpha}_{(\lambda a+(1-\lambda)b)^{-}}f(\lambda b+(1-\lambda)a)\right]\right|$$

$$\leq\int_{0}^{1}\left|(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right|\left|f'[t(\lambda a+(1-\lambda)b)+(1-t)(\lambda b+(1-\lambda)a)]\right|dt$$

$$\leq\left(\int_{0}^{1}1^{p}\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left(\int_{0}^{1}\left|(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right|^{q}\left|f'[t(\lambda a+(1-\lambda)b)+(1-t)(\lambda b+(1-\lambda)a)]^{q}\right|dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq\left(\int_{0}^{\frac{1}{2}}\left[(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right]^{q}\left[t^{s}|f'(\lambda a)+(1-\lambda)b|^{q}+(1-t)^{s}|f'(\lambda b+(1-\lambda)a)|^{q}\right]dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|t^{\alpha}-(1-t)^{\alpha}\right|^{q}\left[t^{s}|f'(\lambda a)+(1-\lambda)b|^{q}+(1-t)^{s}|f'(\lambda b+(1-\lambda)a)|^{q}\right]dt\right)$$

$$= \Bigg[|f'(t(\lambda a + (1-\lambda)b)|^q \times \int_0^{\frac{1}{2}} [(1-t)^{q\alpha} t^s - t^{q\alpha+s}] dt$$

$$+|f'(\lambda b + (1-\lambda)a)|^q \times \int_0^{\frac{1}{2}} [(1-t)^{q\alpha+s} - t^{q\alpha}(1-t)^s] dt$$

$$+|f'(t(\lambda a + (1-\lambda)b)|^q \times \int_{\frac{1}{2}}^1 (t^{q\alpha+s} - (1-t)^{q\alpha} t^s) dt$$

$$+|f'(\lambda b + (1-\lambda)a)| \times \int_{\frac{1}{2}}^1 [t^{q\alpha} - (1-t)^{q\alpha+s}] dt \Bigg]$$

$$= \left[\frac{1}{q\alpha+1} \left(1 - \frac{1}{2^{q\alpha+1}} \right) \right]^{\frac{1}{q}} \times \left(\frac{|f'(\lambda a + (1-\lambda)b)|^q + |f'(\lambda b + (1-\lambda)a)|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}}$$

elde ederiz. Burada $c > d \geq 0$ ve $p \geq 1$ iken

$$(c-d)^p \leq c^p - d^p$$

eşitsizliğini kullandık.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Hermite-Hadamard eşitsizliği son zamanlarda matematiğin birçok alanında oldukça yaygın bir şekilde kullanılmaya başlanan ve birçok araştırmacının da ilgisini çekmiştir. Burada ki amacımız bir anlamda bu eşitsizliğin bir genelleşmesini yapmanın yanısıra bir çok yeni sonuçlar elde ederek bu sonuçları da uluslar arası prestijli bir dergide de yayınlattık. Lemma 3.2.1 özdeşliği ve s-konveks fonksiyonları kullanılarak elde ettiğimiz sonuçların daha da genelleştirilmesi özellikle h-konveks fonksiyonlar içinde yapılabilir. Ayrıca elde edilen sonuçlarımız kesirli integraller için önemli bir yer tutmaktadır. Burada elde ettiğimiz sonuçlar k-kesirli integraller veya log-kesirli integraller yardımıylada yeniden yeni sonuçlarda elde edebiliriz. Bu anlamda bu çalışmaları açık problem olarak okuyuculara ve araştırmacılara bırakılmıştır.

KAYNAKLAR

Azpeitia A.G., *Convex functions and The Hadamard inequality*, Rev. Colombiana Math., 28(1994), 7-12.

Breckner W. W., *Stetigkeitsaussagen für eine Klase verallgemeinerter konvexer funktionen in topologischen linearen Raumen*, Pupl. Inst. Math., 23(**1978),** 13-20.

Dragomir S. S. and Fitzpatrick S., *The Hadamard's inequality for s-convex functions in the first sense, Demonstratio Math*., 31 (3) **(1998)**, 633-642.

Dragomir S. S. and Fitzpatrick S., *The Hadamard's inequality for s-convex functions in the second sense*, Demonstratio Math.,32 (4) **(1999),** 687-696.

Dragomir S. S. and Agarval R. P., *Two inequalities for differentiable mappings and applications to special meansof real numbers and to trapezoidal formula,* Appl. Math., 11(5)**(1998)**, 91-95.

Hudzik H., Maligranda L., *Some remarks on s-convex functions*, Aequationes Math., 48**(1994)**, 100-111.

Sarikaya M. Z., Set E., Yaldiz H., Başak N.,*Hermite-Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities*, Mathematical and Computer Modelling, 57 **(2013)**, 2403-2407.

Zhang Y. and Wang J.,, *On some new Hermite-Hadamard inequalities involving Riemann-Liouville fractional integrals*, J.Inequal. Appl.220 (**2013**)

Dragomir S. S. and Pearce C. E. M., *Selected Topics on Hermite-Hadamard* Inequalities and Applications, **(2002)**

Dönmez A., *Reel Analiz, Ankara*, Seçkin Yayıncılık, **(2001)** Bayraktar M., *Fonksiyonel Analiz*, Ankara, Gazi Kitapevi, **(2006)**

Pečarić J. E., Proschan F. and Tong Y. L., *Convex Functions,Partial Orderings*, And Statistical Applications, New York, Academic Press, **(1992)**

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: Ertuğral, Fatma
Uyruğu	:TC
Doğum tarihi ve yeri	:12.06.1990/Vakfıkebir
Telefon	:
Faks	:
E-posta	: dolunay_sfm@windowslive.com

Eğitim

Derece	*Eğitim Birimi*	*Mezuniyet tarihi*
Yüksek Lisans	Düzce Üniversitesi/Matematik Bölümü	2015
Lisans	Düzce Üniversitesi/Matematik Bölümü	2013
Lise	Dikmen Lisesi	2008

Yabancı Dil

İngilizce (YDS : 52.50)

Yayınlar

1 Sarıkaya M.Z. and F. Ertuğral, Generalized Hermite-Hadamard type integral inequalities for s-konveks functions via fractional integrals,Annal of the University of Craiova-Mathematics and Computer Science Series, Volume 41(2),2014,226-233