T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HEMEN HEMEN YARI KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLARIN GEOMETRİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

RAMAZAN TAŞ

KASIM 2015

DÜZCE

KABUL VE ONAY BELGESİ

Ramazan TAŞ tarafından hazırlanan Hemen Hemen Yarı Kosimplektik Manifoldların Geometrisi isimli lisansüstü tez çalışması, Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 19.10.2015 tarih ve 2015/934 sayılı kararı ile oluşturulan jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Üye

(Tez Danışmanı)

Prof. Dr. Nesip AKTAN

Necmettin Erbakan Üniversitesi

Üye	Üye
Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA	Doç. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ
Düzce Üniversitesi	Afyon Kocatepe Üniversitesi

Tezin Savunulduğu Tarih : 05.11.2015

ONAY

Bu tez ile Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Ramazan TAŞ'ın Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans derecesini almasını onaylamıştır.

Prof. Dr. Haldun MÜDERRİSOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

05 Kasım 2015

Ramazan TAŞ

Sevgili Aileme ve Eşime

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans öğrenimim ve bu tezin hazırlanması süresince gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Prof. Dr. Nesip AKTAN' a en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme, eşime ve çalışma arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

05 Kasım 2015 **Ramazan Taş**

İÇİNDEKİLER **Sayfa**

TEŞEKKÜR SAYFASI i

İÇİNDEKİLER ii

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ iii

ÖZET 1

ABSTRACT 2

EXTENDED ABSTRACT 3

1. GİRİŞ 6

2. MATERYAL VE YÖNTEM 8

2.1. YARI RİEMANN MANİFOLDLAR 8

2.2. HEMEN HEMEN DEĞME MANİFOLDLAR 14

2.3. ALT MANİFOLDLAR 19

3. BULGULAR VE TARTIŞMA 22

3.1. HEMEN HEMEN YARI KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLAR 22

3.2. TENSÖR ALANLARI VE ÖZELLİKLERİ 37

3.3. EĞRİLİK ÖZELLİKLERİ 40

3.4. PARALEL TENSÖR ALANLARI 44

4. ÖRNEKLER 51

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 54

KAYNAKLAR 55

ÖZGEÇMİŞ 58

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathcal{D}$	Değme dağılımı
div	Divergens operatörü
J	Hemen hemen kompleks yapı
B	İkinci temel form
∇	Levi-Civita konneksiyonu
$\mathcal{L}$	Lie türev operatörü
$\chi(M)$	M üzerindeki C^{∞} vektör alanları uzayı
TM	M üzerindeki tanjant demeti
N	Nijenhuis tensör alanı
R	Riemann eğrilik tensörü
$\overline{\nabla}$	Van der Waerden-Bortolotti konneksiyonu

ÖZET

HEMEN HEMEN YARI KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLARIN GEOMETRİSİ

Ramazan TAŞ
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Prof. Dr. Nesip AKTAN
Kasım 2015, 61 sayfa

Bu tez çalışmasında hemen hemen yarı kosimplektik manifoldlar olarak adlandırılan değme manifoldların geniş bir sınıfı ele alınmıştır. Öncelikle hemen hemen yarı kosimplektik manifoldların genel eğrilik özelliklerine yer verilerek bu tip manifoldlara ait önemli bağıntılar elde edilmiştir. Ayrıca çeşitli tensör özellikleri altında bu manifoldların yapısı incelenmiştir.

Anahtar sözcükler: Değme manifold, hemen hemen kosimplektik manifold, hemen hemen yarı kosimplektik manifold.

ABSTRACT

THE GEOMETRY OF ALMOST PSEUDO COSYMPLECTIC MANIFOLDS

Ramazan TAŞ
Düzce University
Institute of Science and Technology, Department of Mathematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Prof. Nesip Aktan
November 2015, 61 pages

In this thesis, we consider a wide subclass for almost contact metric manifolds which is called almost pseudo cosymplectic manifolds. Firstly, we give the concept of almost pseudo cosymplectic manifolds and state general curvature properties. We derive several important formulas on almost pseudo cosymplectic manifolds. These formulas enable us to find the geometrical properties of almost pseudo cosymplectic manifolds. Also, several tensor conditions are studied for such type of manifolds.

Key Words: Almost Cosymplectic Manifold, Almost Pseudo Cosymplectic Manifold, Contact Manifold.

EXTENDED ABSTRACT

THE GEOMETRY OF ALMOST PSEUDO COSYMPLECTIC MANIFOLDS

Ramazan TAŞ
Duzce University
Institute of Science and Technology, Department of Mathematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Prof. Nesip Aktan
November 2015, 61 pages

1. INTRODUCTION

The class of almost contact metric manifolds which are called almost cosymplectic manifolds M , were firstly introduced by Kenmotsu. These manifolds appear for the first time in (Kenmotsu 1972), where they have been locally classified. Kenmotsu defined a structure closely related to the warped product which was characterized by tensor equations.

Contact metric structures have been intensively studied by several authors. The recent monograph of (Blair 2002) gives a wide and detailed overview of the results obtained in this framework. Contact pseudo-metric structures (η, g) , where η is a contact one-form and g a pseudo-Riemannian metric associated to it, are a natural generalization of contact metric structures. Contact structures equipped with pseudo-Riemannian metrics were first introduced and studied by (Takahashi 1969), who focused on the Sasakian case. Since then, up to our knowledge, most of the research devoted to the topic was concerned with Sasakian pseudo-Riemannian metrics (see for instance Duggal 1990; Bejancu and Duggal 1993). On the other hand, a systematic study of general contact pseudo-metric manifolds has undertaken by (Calvaruso and Perrone 2010). The authors provide the technical apparatus needed for further investigations, prove some general classification results and exhibit several explicit examples.

In (Boeckx 2006), the authors showed that a locally symmetric contact metric space is either Sasakian with the constant curvature or locally isometric to the unit tangent sphere bundle of an Euclidean space. Following these works, Cho et all investigated the η -parallelity of the torsion tensor τ of a contact metric manifold M . The tensor field τ was firstly introduced by Hamilton and Chern. They defined by the torsion tensor field τ for any vector fields X and Y on M as follows:

$$g(\tau X, Y) = \left(\mathcal{L}_{\xi} g\right)(X, Y)$$

Cho showed that a non-Sasakian contact metric manifold with the η-parallel torsion tensor is a (k, μ)-contact manifold.

2. MATERIAL AND METHODS:

In this section, we introduce some fundamental concept of manifold theory. In the first subsection, we give pseudo-Riemannian manifolds and some basic properties. In the second subsection, we introduce some fundamental concept of pseudo almost contact metric manifolds. In the second subsection, we give submanifolds.

3. RESULTS AND DISCUSSIONS:

In this section, we define a wide subclass of almost contact metric manifolds which is called almost pseudo cosymplectic manifold. Firstly, we give the concept of almost pseudo cosymplectic manifolds and state general curvature properties. We derive several important formulas on almost pseudo cosymplectic manifolds. These formulas enable us to find the geometrical properties of almost pseudo cosymplectic manifolds with η -parallel tensors h and φh . We also examine the tensor field τ on M. Then we give some propositions and theorems on η-parallelity, cyclic parallelity, Codazzi condition and η-cyclic parallelity. Finally, we give two extensive examples on almost pseudo cosymplectic manifolds.

4. CONCLUSION AND OUTLOOK:

In this study, we have a generalization of almost cosymplectic manifolds and some curvature properties. Submanifolds of pseudo almost cosymplectic manifolds and symmetry properties are open problems, one can obtain very important results.

1. GİRİŞ

Manifold teorisinde hemen hemen değme manifoldları çok önemli bir yere sahiptir. $(2n+1)$-boyutlu bir C sınıfından diferensiyellenebilir M manifoldunun tanjant demetlerinin grup yapısı $U(n)x1$ tipine indirgenebiliyorsa M ye hemen hemen değme manifold denir. İlk olarak 1959 yılında J. Gray tek boyutlu manifoldlar üzerinde yaptığı çalışmada $U(n)x1$ yapısal grubunun bir indirgenmesiyle hemen hemen değme yapıları tanımlamıştır (Gray 1959). Buna göre, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme yapısı

$$\varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi$$

$$\eta(\xi) = 1$$

denklemlerini sağlayan (1,1)-tipli bir tensör alanı φ, bir vektör alanı ξ ve bir 1- form olan η ile oluşturulan (φ, ξ, η) üçlüsüyle ifade edilir. Daha sonra 1960 yılında Sasaki (φ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı üzerine

$$\eta(X) = g(X, \xi),$$

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

eşitlikleriyle verilen uygun bir g metriği tanımlayarak hemen hemen değme metrik yapıyı ifade etmiştir (Sasaki 1960). 1961 yılında Sasaki ve Hatakeyema hemen hemen değme manifoldlar için normallik şartının J kompleks yapısının $J^2 = -I$ integrallenebilmesi olduğunu ispatlamıştır (Sasaki ve Hatakeyema 1961).

1969 yılında Goldberg ve Yano hemen hemen değme metrik manifoldlar üzerinde yeni bir karakterizasyon ve sınıflama ortaya koymuştur. Bu sınıflama kosimplektik manifold olarak adlandırılmıştır. (Goldberg ve Yano 1969). 2012 yılında Yıldırım ve Aktan hemen hemen değme yapılarını ele aldığı çalışmalarında hemen hemen kosimplektik manifoldları genişleterek hemen hemen f-kosimplektik manifoldları tanımlamışlardır. (Yıldırım ve Aktan 2012).

$(\mathrm{M}, \varphi, \xi, \eta, g)$, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme yapısı

$$d\Phi = 0 \qquad \text{ve} \quad d\eta = 0$$

şartlarını sağlıyor ise bu manifoldlara hemen hemen kosimplektik manifold denir. Normallik koşulu altında ise kosimplektik manifold olarak adlandırılır.

İkinci bölümde, manifoldlar ve altmanifoldlar ile ilgili temel kavramlar tanıtılacaktır. Bu bölümün ilk kısmında, manifold teorisi ile ilgili temel kavramlar verilmiştir. İlk kısım iki alt kısımdan oluşmaktadır. Birinci alt kısımda, Riemann manifoldları ve bazı temel özellikleri tanıtılmıştır. İkinci alt kısımda, hemen hemen değme metrik manifoldlar ile ilgili temel kavramlar verilmiştir. İkinci kısımda, altmanifoldlar teorisi hakkında temel kavramlar tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde, hemen hemen yarı kosimplektik manifoldlar ile ilgili genel sonuçlar elde edilmiştir. Özellikle, paralel tensör alanlarını göz önüne alarak bu tür manifoldları ayrıntılı bir şekilde araştırılmıştır. Bu bölümün ilk kısmında, hemen hemen yarı kosimplektik yapılar tanıtılmıştır. İkinci kısımda, bazı özel tensör alanlarının temel özellikleri verilmiştir. Üçüncü kısımda, Riemann eğrilik tensörü özellikleri verilmiş hemen hemen kosimplektik ile ilgili temel özellikler genişletilmiştir. Son kısımda, bazı paralel tensör alanları ve h, $\emptyset h$ tensörleri yardımıyla yeni sonuçlara ulaşılmıştır. Özellikle, bu kısımda h tensör alanının η-paralellik koşulu önemli yer kaplamaktadır.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. YARI RİEMANN MANİFOLDLAR

Tanım 2.1.1. V bir reel vektör uzayı olsun.

$$g: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü $\forall\ a, b \in R$ ve $\forall u, v, w \in V$ için,

$i)$ $g(u, v) = g(v, u)$,

$ii)$ $g(au + bv, w) = ag(u, w) + bg(v, w)$,

$g(u, av + bw) = ag(u, v) + bg(u, w)$

özelliklerine sahip ise g dönüşümüne V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.2. V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form g olsun.

$i)$ $\forall v \in V$ ve $v \neq 0 için$ $g(v, v) > 0$ *ise* g *simetrik bilineer formuna pozitif tanımlı,*

$ii)$ $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ $için$ $g(v, v) < 0$ *ise* g *simetrik bilineer formuna negatif tanımlı,*

$iii)$ $\forall v \in V$ $için$ $g(v, v) \geq 0$ *ise* g *simetrik bilineer formuna pozitif yarı-tanımlı,*

$iv)$ $\forall v \in V$ $için$ $g(v, v) \leq 0$ *ise* g *simetrik bilineer formuna negatif yarı-tanımlı*

denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.3. V bir reel vektör uzayı ve g , V üzerinde simetrik bilineer form olsun.

$0 \neq \xi \in V$ olmak üzere $\forall\ v \in V$ için

$$g(\xi, v) = 0$$

ise g simetrik bilineer formuna V üzerinde dejeneredir denir. Aksi durumda g ye non-dejeneredir denir.

Buradan görülür ki , g nin non-dejenere olması için gerek ve yeter şart $\forall\, u \in V$ için

$$g(u, v) = 0 \; iken \; v = 0$$

olmasıdır (Duggal 1996).

Tanım 2.1.4. V bir reel vektör uzayı ve g, V üzerinde simetrik bilineer form olsun.

$$g|_W : W \, x \, W \longrightarrow \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekildeki en büyük boyutlu W altuzayının boyutuna g simetrik bilineer formun indeksi denir ve v ile gösterilir (O'Neill 1983).

Teorem 2.1.5. V bir reel vektör uzayı ve V üzerinde simetrik bilineer form g olsun. Bu durumda,

$i)\; g(\alpha_i, \alpha_j) = 0, i \neq j$

$ii)\; g(\alpha_i, \alpha_i) = 1, 1 \leq i \leq \gamma,$

$iii)\; g(\alpha_i, \alpha_i) = -1, \gamma + 1 \leq i \leq \gamma + v$

$iv)\; g(\alpha_i, \alpha_i) = 0, \gamma + v + 1 \leq i \leq n = \gamma + v + \mu$

olacak şekilde V nin $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ bazı vardır (Duggal 1996).

Tanım 2.1.6. V reel vektör uzayı üzerinde non-dejenere simetrik bilineer forma V reel vektör uzayı üzerinde bir skalar çarpım (yarı-öklid metriği) denir. V üzerindeki bir skalar çarpma g ise (V, g) ikilisine de skalar çarpım uzayı (yarı-öklid uzayı) denir.

Eğer g pozitif tanımlı ise o zaman g bir iç çarpım (Öklid metriği) olur ve (V, g) de Öklid uzay olarak adlandırılır. Eğer g nin indeksi $v = 1$ ise g ye Lorentz (Minkowski) metriği ve (V, g) yede Lorentz (Minkowski) uzayı denir. Eğer g dejenere ise o zaman V vektör uzayına g ye göre lightlike (dejenere) vektör uzayı denir (Duggal 1996).

Teorem 2.1.7. V bir yarı-öklid uzay ve W da bu uzayın bir lightlike altuzayı olsun. Bu durumda , W boyunca V uzayının bir quasi-ortonormal bazı vardır. (Duggal 1996).

Tanım 2.1.8. $M\ bir\ C^{\infty}$ manifold olsun. $p \in M$ noktasındaki tanjant uzay T_pM olmak üzere

$$g|_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(X_p, Y_p) \quad \longrightarrow g|_p(X_p, Y_p) = g(X_p, Y_p)$$

biçiminde tanımlı sabit indeksli, simetrik, bilineer, non-dejenere $(0,2)$ tensör alanına M üzerinde metrik tensör alanı denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.9. $M\ bir\ C^{\infty}$ manifold olsun. M, bir g metrik tensörü ile donatılmışsa, M ye yarı-Riemann manifoldu denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.10. Bir M yarı-Riemann manifoldu üzerinde g metrik tensörünün indeksine yarı-Riemann manifoldunun indeksi denir ve $indM$ ile gösterilir.

Eğer indeks v ise $0 \leq v \leq boyM$ dir. Özel olarak, $v = 0$ ise $\forall p \in M$ için $g|_p, T_pM$ üzerinde pozitif tanımlı bir iç çarpım olduğundan, M bir Riemann manifoldu olur. $v = 1$ ve $n \geq 2$ olması durumunda ise, M ye bir Lorentz manifoldu denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.11. $M\ bir\ C^{\infty}$ n-boyutlu manifold olsun. M üzerinde

$$\mathcal{D} : M \longrightarrow T_pM$$

$$p \longrightarrow \mathcal{D}_p \subset T_pM$$

şeklinde tanımlı $\mathcal{D}$ dönüşümüne r −boyutlu dağılım ve $X \in \Gamma(TM)$ için $Xp \in \mathcal{D}_p$ ise X vektör alanına da $\mathcal{D}$ ye aittir denir. Eğer her $p \in M$ noktası için $\mathcal{D}_p$ de r tane diferensiyellenebilir lineer bağımsız vektör alanı var ise $\mathcal{D}$ dağılımına diferensiyellenebilir denir (Duggal 1996).

Tanım 2.1.12. M bir diferensiyellenebilir manifold olsun ve K de M üzerinde herhangi bir tensör alanı olsun. Bu durumda $p \in M, t \in I \subset \mathbb{R}$ ve X$\in \Gamma(TM)$ olmak üzere

$$\mathcal{L}_X K = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(K(p) - (\Phi_t K)(p))$$

ile tanımlanan $\mathcal{L}_X$ diferensiyel operatörüne X vektör alanına göre Lie türevi denir.

Burada Φ,

$$\Phi: (t,x) \in [-\varepsilon, \varepsilon]xU \longrightarrow \Phi(t,x) \in M$$

şeklinde tanımlı bir dönüşümdür (Duggal 1996).

Teorem 2.1.13. M bir diferensiyellenebilir manifold ve $\mathcal{L}_X$ de manifold üzerinde tanımlı Lie türevi olsun. O zaman $\forall Y, Z \in \ \Gamma(TM) \ \ ve \ \ f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$i)$ $\mathcal{L}_X f = X(f)$

$ii)$ $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$

$iii)$ ψ, M üzerinde $(0,2)$ tipinde bir tensör alanı olmak üzere

$$(\mathcal{L}_X \psi)(Y, Z) = X\big(\psi(Y, Z)\big) - \psi([X, Y], Z) - \psi(Y, [X, Z])$$

dir (Duggal 1996).

Tanım 2.1.14. M bir C^∞ n-boyutlu manifold ve $\mathcal{D}$, M üzerinde r-boyutlu bir dağılım olsun. Eğer $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \Gamma(\mathcal{D})$ için $[X, Y] \in \Gamma(\mathcal{D})$ ise $\mathcal{D}$ dağılımına involutivedir denir (Duggal 1996).

Tanım 2.1.15. $\{u_1, \ldots, u_n\}$, $\mathbb{R}_v^n$ üzerinde doğal koordinatlar olsun.

V ve $W = \sum W_i \partial_i, \mathbb{R}_v^n$ üzerinde vektör alanları iseler

$$\nabla_V W = \sum V(W_i)\partial_i$$

vektör alanına W nın V ye göre kovaryant türevi denir (O’Neill 1983).

Tanım 2.1.16. M bir C^∞ manifold olsun. M üzerindeki bir ∇ konneksiyonu

$i)$ $\nabla_V W, V\ ye\ göre\ \ C^\infty(M,\mathbb{R})\ lineerdir,$

$ii)$ $\nabla_V W, W\ ya\ göre\ \mathbb{R}\ \ lineerdir,$

$iii)$ $\nabla_V(fW) = V(f)W + f\nabla_V W,\ \ \forall f \in\ \ C^\infty(M,\mathbb{R})$

şartlarını sağlayan ve

$$\nabla: \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$

şeklinde tanımlanan bir fonksiyondur (O'Neill 1983).

Teorem 2.1.17. Bir M yarı-Riemann manifoldu üzerinde $\forall\ X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$i)$ $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$

$ii)$ $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$

olacak şekilde M nin bir tek ∇ Levi-Civita konneksiyonu vardır ve bu konneksiyon

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y)$$

$$-g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y])$$

Koszul formülü ile karakterize edilir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.18. M bir C^∞ manifold ve ∇**,** M üzerinde bir lineer konneksiyon olsun.

Eğer $\mathrm{X}, \mathrm{Y}\ \in \Gamma(\mathcal{D})$ için

$$\nabla_X Y \in \Gamma(TM)$$

ise $\mathcal{D}$ dağılımına paraleldir denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.19. M, Levi-Civita konneksiyonu ∇ olan bir yarı-Riemann manifoldu olsun. $\forall\ X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$R: \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$$

$$(X, Y, Z) \longrightarrow R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

biçiminde tanımlanan M üzerinde $(1,3)$ tipindeki R fonksiyonuna M nin Riemann eğrilik tensörü denir (O'Neill 1983).

Teorem 2.1.20. M bir yarı-Riemann manifoldu ve R, M nin Riemann eğrilik tensörü olsun. O zaman, $\forall X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ için

$i)$ $g(R(X,Y)Z, W) = -g(R(Y,X)Z, W)$,

$ii)$ $g(R(X,Y)Z, W) = -g(R(X,Y)W, Z)$,

$iii)$ $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$,

$iv)$ $g(R(X,Y)Z, W) = g(R(Z,W)X, Y)$

dir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.21. Eğer M manifoldu sabit bir c eğrisine sahipse M nin eğrilik tensörü $\forall\ X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$R(X,Y)Z = c\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\}$$

şeklindedir (O'Neill 1983).

Tanım2.1.22. M bir yarı-Riemann manifold ve R, M nin Riemann eğrilik tensörü olsun. $\{e_1, \dots, e_n\}$, T_pM nin bir ortonormal bazı olmak üzere

$$S: T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(X_p, Y_p) \longrightarrow S(X_p, Y_p) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g(R(e_i, X_p)\, Y_p, e_i)$$

veya

$$S(X_p, Y_p) = iz\{Z_p \longrightarrow R(Z_p, X_p)Y_p\}$$

şeklinde tanımlı Ricci tensörüne M yarı- Riemann manifoldunun Ricci eğrilik tensörü ve $S\left(X_p, Y_p\right)$ değerine de Ricci eğriliği denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.23. M yarı-Riemann manifoldu ve R , M nin Riemann eğrilik tensörü olsun. $\{e_1, \dots e_n\}$, T_pM nin bir ortonormal bazı olmak üzere

$$\rho = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i S(e_i, e_i)$$

değerine M yarı-Riemann manifoldunun skalar eğriliği denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.24. M bir yarı-Riemann manifold ve R de M nin eğrilik tensörü olsun. Eğer, $R = 0$ ise M ye lokal flat ve $\nabla R = 0$ ise M ye lokal simetrik uzay denir. (Hacısalihoğlu H. H. 2003).

2.2. HEMEN HEMEN DEĞME MANİFOLDLAR

Bu kısımda, hemen hemen değme manifoldlar ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

Tanım 2.2.1. M^{2n+1}, $(2n+1)$-boyutlu bir manifold φ, ξ, η da M^{2n+1} üzerinde, sırasıyla, $(1,1)$ - tipinde bir tensör alanı, bir vektör alanı ve 1-form olsunlar. Eğer φ, ξ, η için, M^{2n+1} üzerinde herhangi bir vektör alanı X olmak üzere,

$$\eta(\xi) = 1 \tag{2.1}$$

$$\varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi$$

eşitlikleri sağlanıyorsa o zaman, (φ, ξ, η) üçlüsüne M^{2n+1} üzerinde bir hemen hemen değme yapı ve bu yapı ile birlikte M^{2n+1} ye bir hemen hemen değme manifold denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.2. M^{2n+1} , (φ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı ile verilsin. M^{2n+1} üzerinde bir g Riemann metriği

$$\eta(X) = g(X, \xi), \tag{2.2}$$

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

şartlarını sağlıyorsa g metriğine M^{2n+1} üzerinde hemen hemen değme metrik, (φ, ξ, η, g) yapısına hemen hemen değme metrik ve (φ, ξ, η, g) yapısı ile M^{2n+1} ye de hemen hemen değme metrik manifold denir (Yano ve Kon 1984).

Sonuç 2.2.1. M^{2n+1}, (φ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik manifold verilsin. Bu durumda,

$$g(\varphi X, Y) = -g(X, \varphi Y) \tag{2.3}$$

dir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.3. M^{2n+1} üzerinde bir hemen hemen değme manifold (φ, ξ, η, g) olmak üzere,

$$\Phi(X, Y) = g(X, \varphi Y) \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlı Φ dönüşümüne hemen hemen değme manifoldun temel 2-formu denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.4. (M^n, g) bir Riemann manifold ve $x_1, x_2, \dots, x_n$ M^n nin lokal korrdinatları olsun. $\omega = \sqrt{|g|}dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots dx_n \; ve \; g(x) > 0$ ise ω ye M^n üzerindeki bir hacim form denir. Bu arada dx_i , M^n üzerindeki kotanjant uzayda 1-formlar ve $|g|$, M^n üzerindeki metrik tensörün determinantıdır (Spivak 1965).

Tanım 2.2.5. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. M^n üzerinde bir hacim form mevcut ise M^n ye yönlendirilebilirdir denir (Gallot, Hulin, Lafontaine 2004).

Sonuç 2.2.2. Φ temel 2-formu ters simetrik ve Tanım 2.2.3. yardımıyla $\eta \wedge \Phi^n \neq 0$ dır. Böylece Tanım 2.2.5. gereğince $(M^n, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen değme manifoldu yönlendirilebilirdir (Gonzalez 1990).

Tanım 2.2.6. M bir C^∞ manifold olsun. Eğer ω 1-form ise, keyfi X, Y vektör alanları için,

$$2d\omega(X,Y) = X\big(\omega(Y)\big) - Y\big(\omega(X)\big) - \omega[X,Y]$$

dır. Eğer ω 2-form ise,

$$3d\omega(X,Y,Z) = X\big(\omega(Y,Z)\big) - Y\big(\omega(Z,Y)\big) + Z\big(\omega(X,Y)\big)$$
$$-\omega([X,Y],Z) - \omega([Y,Z],X) - \omega([Z,X],Y)$$

dır (Yano ve Kon 1984).

Önerme 2.2.1. $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ bir hemen hemen değme manifold ve ∇ Riemann konneksiyonu olsun. Keyfi X,Y,Z vektör alanları için,

(i) $(\nabla_X\Phi)(Y,Z) = g(Y,(\nabla_X\varphi)Z)$

(ii) $(\nabla_X\Phi)(Y,Z) + (\nabla_X\Phi)(\varphi Y,\varphi Z) = \eta(Z)(\nabla_X\eta)\varphi Y - \eta(Y)(\nabla_X\eta)\varphi Z$

(iii) $(\nabla_X\eta)Y = g(Y,\nabla_X\xi) = (\nabla_X\Phi)(\xi,\varphi Y)$

(iv) $2d\eta(X,Y) = (\nabla_X\eta)Y - (\nabla_Y\eta)X$

(v) $3d\Phi(X,Y,Z) = \underset{X,Y,Z}{\oplus}(\nabla_X\Phi)(Y,Z)$

eşitlikleri geçerlidir. Burada $\underset{X,Y,Z}{\oplus}$, X,Y,Z vektör alanları üzerinden alınan devirli toplamı göstermektedir.

Ayrıca, $\{X_i,\varphi X_i,\xi\}$ $i=1,2,\dots,n$ olmak üzere, M^{2n+1} nin açık bir alt cümlesi üzerinde tanımlanan bir lokal ortonormal baz olsun. O zaman, δ operatörü

$$\delta\eta = -\sum_{i=1}^{n}\{\big(\nabla_{X_i}\eta\big)X_i + \big(\nabla_{\varphi X_i}\eta\big)\varphi X_i\}$$

şeklinde elde edilir (Gonzalez 1990).

Tanım 2.2.7. M^n bir reel diferensiyellenebilir manifold olsun. Eğer M^n nin $\forall$ p noktası için $J^2 = -I$ olacak şekilde T_PM tanjant uzayının bir J endomorfizması mevcut ise, o zaman M^n üzerindeki J tensör alanına bir hemen hemen kompleks yapı adı verilir. Bir

J hemen hemen kompleks yapısı ile verilen manifolda bir hemen hemen kompleks manifold denir (Yano ve Kon 1984).

M üzerinde bir hemen hemen pseudo yapısı (φ, ξ, η, g) ile verilsin. O zaman, $Mx\mathbb{R}$ üzerinde herhangi bir vektör alanı

$$(X, f\frac{d}{dt})$$

şeklinde tanımlanır. Burada X, M manifolduna teğet bir vektör alanı; $t, \mathbb{R}$ nin bir koordinatı ve $f, M \times \mathbb{R}$ üzerinde bir C^{∞} fonksiyondur.

M üzerinde (φ, ξ, η, g) bir hemen hemen değme manifold olsun. Böylece $M \times \mathbb{R}$ üzerindeki bir hemen hemen kompleks yapı

$$J\left(X, f\frac{d}{dt}\right) = \left(\varphi X - f.\xi, \eta(X)\frac{d}{dt}\right)$$

biçiminde tanımlanır. Kolayca $J^2 = -I$ elde edilir (Yano ve Kon 1984).

Tanım.2.2.8. M^n bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere , M^n üzerinde $(1,1)$ tipli bir tensör alanı F olsun. $\forall\, X, Y \in \mathcal{X}(M)$ için,

$$N_F(X,Y) = F^2[X,Y] + [FX,FY] - F[FX,Y] - F[X,FY]$$

şeklinde tanımlı N_F tensör alanına F tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörü denir (Yano ve Kon 1984).

J, M^n üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı olsun. Tanım 2.2.8 yardımıyla M^n üzerinde J tensör alanına Nijenhuis torsiyon tensörü

$$N_J(X,Y) = J^2[X,Y] + [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY]$$

$$= -[X,Y] + [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY]$$

şeklindedir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.9. (M^{2n}, J) hemen hemen kompleks manifold olsun. O zaman, $N_J = 0$ ise J dönüşümüne integrallenebilirdir denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.10. Eğer $M^{2n} \times \mathbb{R}$ üzerindeki bir J hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir ise (φ, ξ, η) hemen hemen değme yapısına normaldir denir (Yano ve Kon 1984).

Önerme 2.2.2. M^{2n+1} üzerinde (φ, ξ, η) hemen hemen değme yapısının normal olması için gerek ve yeter koşul

$$N_\varphi + 2d\eta \otimes \xi = 0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada N_φ, φ tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörüdür (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.11. (M^{2n}, J) hemen hemen kompleks manifold olsun. M^{2n} üzerinde $\forall\ X, Y$ vektör alanları için,

$$g(JX, JY) = g(X, Y)$$

şeklinde verilen g Riemann metriğine Hermit metriği denir. Hermit metriği ile verilen bir hemen hemen kompleks manifolda bir hemen hemen Hermit manifoldu denir. Hermit metriği ile verilen kompleks manifolda ise Hermit manifoldu denir (Blair 2002).

Tanım 2.2.12. (M^{2n}, J, g) bir hemen hemen Hermit manifoldu olsun. $\forall\ X, Y$ vektör alanları için,

$$\Omega(X, Y) = g(X, JY)$$

eşitliği ile tanımlanan Ω 2-formuna hemen hemen Hermit yapısının temel 2-formu denir. Eğer $d\Omega = 0$ ise (J, g) yapısına hemen hemen Kaehler manifoldu denir. Bir Kaehler yapı ile verilen kompleks manifolda Kaehler manifoldu denir. Bir Hermit manifoldunun bir Kaehler manifold olması için gerek ve yeter koşul $\nabla J = 0$ eşitliğinin sağlanmasıdır (Blair 2002).

2.3. ALT MANİFOLDLAR

Bu kısımda, altmanifoldlar teorisinin hakkında bazı temel kavramlar verilmiştir.

Tanım 2.3.1. $\widetilde{M}$ Riemann manifoldunun bir alt cümlesi M olsun. $\widetilde{M}$ üzerindeki metrik $\tilde{g}$ olmak üzere,

$$j : M \longrightarrow \widetilde{M}$$

$$p \longrightarrow j(p) = p$$

dahil etme dönüşümü için $p \in M$ noktasındaki

$$T_pM \xrightarrow{j_*|p} T_p\widetilde{M}$$

$$T_pM^* \xrightarrow{j^*|p} T_p\widetilde{M}^*$$

türev ve ek dönüşümleri için,

$$\left(j_p^*(\tilde{g}_p)\right)(v, w_p) = \tilde{g}_p\left(j_*(v_p), j_*(w_p)\right);\ \forall\, v_p, w_p \in T_pM$$

eşitliği ile tanımlanan $j_p^*\tilde{g}_p = g_p$ dönüşümü M üzerinde bir metrik ise M ye $\widetilde{M}$ nın bir Riemann altmanifoldu denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.3.2. $(\widetilde{M}^{\boldsymbol{n+d}}, \tilde{g})$ Riemann manifoldunun bir Riemann altmanifoldu (M^n, g) olsun. $\nabla\ ve\ \widetilde{\nabla}$ sırasıyla, $M^n\ ve\ \widetilde{M}^{\boldsymbol{n+d}}$ manifoldlarının Levi-Civita konneksiyonları olsun. O halde, Gauss ve Weingarten eşitlikleri, sırasıyla,

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X, Y) \tag{2.5}$$

$$\widetilde{\nabla}_X N = -A_\gamma X + \nabla_X^\perp N \tag{2.6}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada B ye M^n nin ikinci temel formu denir ve N, M^n üzerinde bir normal vektör alanıdır. Eğer $\forall\, X, Y \in \mathcal{X}(M^n)$ için, $B(X, Y) = 0$ ise M manifolduna total geodeziktir denir (Chen 1973).

İkinci temel form $B \ ve \ A_\gamma$ şekil operatörü arasında baza göre yazılım

$$B(X,Y) = \sum_{\gamma=1}^{d} g(A_\gamma X, Y) N_\gamma$$

Eşitliği şeklindedir. Burada $N_\gamma, (\gamma = 1, \dots, d)$ M^n altmanifolduna dik olan vektör alanları, $\nabla^\perp$ de M^n altmanifoldunun normal konneksiyonudur. Kolayca

$$g\big(A_\gamma X, Y\big) = g(B(X,Y), N_\gamma)$$

eşitliği elde edilir (Chen 1973).

Tanım 2.3.3. $(M^n, g), (\widetilde{M}^{n+d}, \tilde{g})$ Riemann manifoldunun bir alt manifoldu olsun. O zaman,

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} B(e_i, e_i)$$

şeklinde tanımlanan H vektör alanına M^n nin ortalama eğrilik vektör alanı denir. Eğer $H = 0$ ise M^n altmanifolduna minimaldir denir. H ortalama eğrilik vektörünün normuna M^n nin ortalama eğriliği denir. Burada $\{e_1, \dots, e_n\}$ M^n üzerinde bir lokal ortonormal bazdır (O'Neill 1983).

Tanım 2.3.4. $(\widetilde{M}^{n+d}, \tilde{g})$ Riemann manifoldunun bir altmanifoldu (M^n, g) olsun. $\forall\, X, Y \in \mathcal{X}(M^n)$ olmak üzere,

$$B(X,Y) = g(X,Y)H$$

eşitliği sağlanıyorsa M^n ye total umbilik altmanifold denir (Chen 1973).

Tanım 2.3.5. $(M^n, g), (\widetilde{M}^{n+d}, \tilde{g})$ Riemann manifoldunun bir alt manifoldu olsun. B ikinci temel formu $\forall\, X, Y, Z \in \mathcal{X}(M^n)$ için, B nin X yönündeki kovaryant türevi

$$(\bar{\nabla}_X B)(Y,Z) = \nabla_X^\perp \big(B(Y,Z)\big) - B(\nabla_X Y, Z) - B(Y, \nabla_X Z)$$

şeklinde tanımlıdır. $\overline{\nabla}B$ (0,3)-tipli bir tensör alanıdır ve M^n altmanifoldunun üçüncü temel formu olarak adlandırılır. Ayrıca, $\overline{\nabla}$ ya Van der Waerden-Bortolotti konneksiyonu adı verilir. Eğer $\overline{\nabla}B = 0$ ise M^n altmanifoldu paralel ikinci temel formludur denir (Chen 1973).

B ikinci temel formunun $\overline{\nabla}^2 B$ ikinci kovaryant türevi

$$
\begin{aligned}
(\overline{\nabla}^2 B)(Z,W,X,Y) &= (\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y B)(Z,W) \\
&= \nabla_X^{\perp}\left((\overline{\nabla}_Y B)(Z,W)\right) - (\overline{\nabla}_Y B)(\nabla_X Z, W) \\
&\quad -(\overline{\nabla}_X B)(Z, \overline{\nabla}_Y W) - \overline{\nabla}_{\nabla_X Y} B(Z,W) \qquad (2.7)
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlıdır (Chen 1973).

Tanım 2.3.6. $(M^n, g), (\widetilde{M}^{n+d}, \tilde{g})$ Riemann manifoldunun bir alt manifoldu olsun. O zaman,

$$
R^{\perp}(X,Y) = \nabla_X^{\perp}\nabla_Y^{\perp} - \nabla_Y^{\perp}\nabla_X^{\perp} - \nabla_{[X,Y]}^{\perp} \qquad (2.8)
$$

şeklinde tanımlı $R^{\perp}$ dönüşümüne M^n nin normal yöndeki eğrilik tensörü denir (O'Neill 1983).

(2.7) ve (2.8) eşitlikleri yardımıyla

$$
\begin{aligned}
(\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y B)(Z,W) - (\overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X B)(Z,W) &= (\overline{R}(X,Y).B)(Z,W) \\
&= R^{\perp}(X,Y)B(Z,W) - B(R(X,Y)Z,W) \\
&\quad -B(Z,R(X,Y)W)
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir. Burada $R^{\perp}, \overline{\nabla}$ konneksiyonuna göre eğrilik tensörüdür (Chen 1973).

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, hemen hemen değme metrik manifoldların geniş bir alt sınıfı olan hemen hemen yarı kosimplektik manifoldlar incelenmiştir. Bu bölüm orijinal sonuçlar içermektedir.

3.1. HEMEN HEMEN YARI KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLAR

Bu kısımda öncelikle hemen hemen yarı kosimplektik yapılar tanıtılarak, gerekli literatür bilgisi verilmiştir.

Tanım 2.2.2. M^{2n+1} , (φ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı ile verilsin. M^{2n+1} üzerinde bir g yarı Riemann metriği

$$\eta(X) = \varepsilon g(X, \xi),$$

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \varepsilon\eta(X)\eta(Y)$$

şartlarını sağlıyorsa g yarı Riemann metriğine M^{2n+1} üzerinde hemen hemen değme yarı Riemann metrik, (φ, ξ, η, g) yapısına hemen hemen yarı değme metrik yapı ve (φ, ξ, η, g) yapısı ile M^{2n+1} ye de hemen hemen yarı değme metrik manifold denir. Burada $\varepsilon \pm 1$ dir. (Calvaruso and Perrone 2010).

Tanım 3.1.1. $(M, \phi, \xi, \eta, g), (2n + 1)$-boyutlu bir hemen hemen yarı değme metrik manifold olsun. M^{2n+1} üzerinde

$$d\eta = 0, \qquad d\Phi = 0$$

eşitlikleri sağlanıyorsa M^{2n+1} ye hemen hemen yarı kosimplektik manifold denir.

Yardımcı Teorem 3.1.1. M^{2n+1} manifoldunun bir (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısı için,

$$2g\big((\nabla_X\phi)Y,Z\big) = 3d\Phi(X,\phi Y,\phi Z) - 3d\Phi(X,Y,Z) \tag{3.1}$$

$$+g\big(N^{(1)}(Y,Z),\phi X\big) + \varepsilon N^{(2)}(Y,Z)\eta(X)$$

$$+2\varepsilon d\eta(\phi Y,X)\eta(Z) - 2\varepsilon d\eta(\phi Z,X)\eta(Y)$$

dir. Burada $N^{(1)}, N^{(2)}$ tensör alanları, sırasıyla,

$$N^{(1)}(X,Y) = N_\phi(X,Y) + 2d\eta(X,Y)\xi \tag{3.2}$$

$$N^{(2)}(X,Y) = (\mathcal{L}_{\phi X}\eta)Y - (\mathcal{L}_{\phi Y}\eta)X \tag{3.3}$$

dir (Calvaruso and Perrone 2010).

Önerme 3.1.1. $(M^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)$, bir hemen hemen yarı kosimplektik manifold olsun. O zaman, $\forall\, X,Y \in \mathcal{X}(M^{2n+1})$ için,

$$i)\ hX = \tfrac{1}{2}\big(\mathcal{L}_\xi\phi\big)X,\ \ h(\xi) = 0 \tag{3.4}$$

$$ii)\ \nabla_X\xi = -\phi hX \tag{3.5}$$

$$iii)\ \nabla_\xi\xi = 0,\ \ \nabla_\xi\phi = 0 \tag{3.6}$$

$$iv)\ (\phi\ o\ h)X + (h\ o\ \phi)X = 0 \tag{3.7}$$

$$v)\ (\nabla_X\eta)Y = \varepsilon g(\phi Y,hX) \tag{3.8}$$

$$vi)\ \text{İz}(h) = 0 \tag{3.9}$$

$$vii)\ h = 0 \iff \nabla_\xi = 0 \tag{3.10}$$

dir.

İspat $(\boldsymbol{i})$ **ve** $(\boldsymbol{ii})$**:** Koszul formülünden

$$2g\big((\nabla_X\varphi)Y,Z\big) = g\big(N^{(1)}(Y,Z),\varphi X\big) + \varepsilon N^{(2)}(Y,Z)\eta(X)$$

yazılabilir. Bu eşitlikte $Y = \xi$ alınırsa

$$2g\big((\nabla_X\varphi)\xi, Z\big) = g\big(N^{(1)}(\xi, Z), \varphi X\big) + \varepsilon N^{(2)}(\xi, Z)\eta(X)$$

eşitliği elde edilir.

(3.2) ve (3.3) ile verilen $N^{(1)}$ ve $N^{(2)}$ de $X = \xi$ ve $Y = Z$ yazılırsa;

$$N^{(1)}(\xi, Z) = \varphi^2[\xi, Z] - \varphi[\xi, \varphi Z]$$

ve

$$N^{(2)}(\xi, Z) = \eta[\varphi Z, \xi]$$

yazılır. Bu değerler kullanılarak

$$\begin{aligned}
2g\big((\nabla_X\varphi)\xi, Z\big) &= g\big(N^{(1)}(\xi, Z), \varphi X\big) + \varepsilon N^{(2)}(\xi, Z)\eta(X) \\
&= -g\big(\varphi\big(\mathcal{L}_\xi\varphi\big)Z, \varphi X\big) - \varepsilon\big[\big(\mathcal{L}_{\varphi Z}\eta\big)\xi\big]\eta(X) \\
&= -g\left(\big(\mathcal{L}_\xi\varphi\big)Z, X\right) + \varepsilon\eta\left(\big(\mathcal{L}_\xi\varphi\big)Z\right)\eta(X) - \varepsilon\left(\big(\mathcal{L}_{\varphi Z}\eta\big)\xi\right)\eta(X) \\
&= -g\left(\big(\mathcal{L}_\xi\varphi\big)Z, X\right) + \varepsilon\eta([\xi, \varphi Z] - \varphi[\xi, Z])\eta(X) \\
&\quad -\varepsilon\big(\varphi Z\big(\eta(\xi)\big) - \eta[\varphi Z, \xi]\big)\eta(X) \\
&= -g\left(\big(\mathcal{L}_\xi\varphi\big)Z, X\right) + \varepsilon\eta[\xi, \varphi Z]\eta(X) + \varepsilon\eta[\varphi Z, \xi]\eta(X) \\
&= -g\left(\big(\mathcal{L}_\xi\varphi\big)Z, X\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $hZ = \frac{1}{2}\big(\mathcal{L}_\xi\varphi\big)Z$ olarak tanımlanır ise h simetrik bir operatör olup,

$$g\big((\nabla_X\varphi)\xi, Z\big) = -g(hX, Z)$$

dir ve buradan

$$\nabla_X \xi = -\varphi h X$$

bulunur.

$iii)$ (3.5) eşitliğinde $X = \xi$ alınır ise;

$$\nabla_\xi \xi = 0$$

olduğu kolayca görülür. Ayrıca

$$(\nabla_X \varphi)\xi = -hX$$

eşitliği göz önüne alınır ve Koszul formülünde $X = \xi$ alınır ise;

$$2g\left((\nabla_\xi \varphi)Y, Z\right) = g\left(N^{(1)}(Y,Z), \varphi\xi\right) + \varepsilon N^{(2)}(Y,Z)$$

$$= \varepsilon N^{(2)}(Y,Z)$$

$$= 0$$

yazılabilir. $Z \neq 0$ olduğundan $\nabla_\xi \varphi = 0$ dır.

(iv) $\forall\, X, Y \in \mathcal{X}(M^{2n+1})$ için,

$$\begin{aligned}
(\phi\ o\ h)X + (h\ o\ \phi)X &= \varphi(hX) + h(\varphi X) \\
&= \frac{1}{2}(\varphi[\xi, \varphi X] - \varphi^2[\xi, X]) + \frac{1}{2}([\xi, \varphi^2 X] - \varphi[\xi, \varphi X]) \\
&= -\frac{1}{2}\varphi^2[\xi, X] + \frac{1}{2}[\xi, \varphi^2 X] \\
&= \frac{1}{2}[\xi, X] - \frac{1}{2}\eta([\xi, X])\xi + \frac{1}{2}[\xi, -X + \eta(X)\xi] \\
&= \frac{1}{2}[\xi, X] - \frac{1}{2}\eta([\xi, X])\xi - \frac{1}{2}[\xi, X] + \frac{1}{2}[\xi, \eta(X)\xi] \\
&= -\frac{1}{2}\eta([\xi, X])\xi + \frac{1}{2}[\xi, \eta(X)\xi]
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2}\eta\big(\nabla_\xi X - \nabla_X \xi\big)\xi + \frac{1}{2}\big(\nabla_\xi \eta(X)\xi\ - \nabla_{\eta(X)\xi}\xi\big)$$

$$= -\frac{1}{2}\eta\big(\nabla_\xi X\big)\xi + \frac{1}{2}\eta(\nabla_X \xi)\xi + \frac{1}{2}\nabla_\xi \eta(X)\xi$$

$$= -\frac{1}{2}\eta\big(\nabla_\xi X\big)\xi + \frac{1}{2}\eta(\nabla_X \xi)\xi + \frac{\varepsilon}{2}\nabla_\xi g(X,\xi)\xi$$

$$= -\frac{1}{2}\eta\big(\nabla_\xi X\big)\xi + \frac{1}{2}\eta(\nabla_X \xi)\xi + \frac{1}{2}\eta\big(\nabla_\xi X\big)\xi$$

$$= 0$$

yazılabilir. Dolayısı ile (3.7) eşitliği elde edilir.

(v) $\forall\, X, Y \in \mathcal{X}(M^{2n+1})$ için

$$(\nabla_X \eta)Y = \nabla_X \eta(Y) - \eta(\nabla_X Y)$$

$$= \nabla_X \varepsilon g(Y,\xi) - \eta(\nabla_X Y)$$

$$= \varepsilon \nabla_X g(Y,\xi) - \eta(\nabla_X Y)$$

$$= \varepsilon g(\nabla_X Y,\xi) + \varepsilon g(Y,\nabla_X \xi) - \eta(\nabla_X Y)$$

$$= \varepsilon g(Y,\nabla_X \xi)$$

$$= \varepsilon g(Y,-\varphi h X)$$

$$= -\varepsilon g(Y,\varphi h X)$$

$$= \varepsilon g(\varphi Y, h X)$$

dır. Dolayısı ile (3.8) ispat edilmiş olur.

(vi) ve (vii) eşitlikleri (3.4)'den açıktır.

Yardımcı Teorem 3.1.2. $(M^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)$, bir hemen hemen değme manifold olsun. O zaman, $\forall\, X \in \mathcal{X}(M)$ için

$$\left(\nabla_{\xi} h\right) o\, \phi + \phi\, o \left(\nabla_{\xi} h\right) = 0$$

dir (Blair 2002).

Önerme 3.1.2. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen yarı kosimplektik manifold olsun. O zaman, $\forall\, X, Y \in \mathcal{X}(M)$ için Levi-Civita konneksiyonu

$$(\nabla_X \phi)Y + \left(\nabla_{\phi X} \phi\right)\phi Y = -\eta(Y)hX \tag{3.11}$$

koşulunu sağlar.

İspat: (3.1) eşitliğinden yararlanılarak;

$$2g\big((\nabla_X \varphi)Y, Z\big) = g\big(N^{(1)}(Y, Z), \varphi X\big)$$

yazılabilir. Bu eşitlikte $X = \varphi X$, $Y = \varphi Y$ yazılırsa;

$$2g\left(\left(\nabla_{\varphi X} \varphi\right)\varphi Y, Z\right) = g\big(N^{(1)}(\varphi Y, Z), \varphi^2 X\big)$$

bulunur. Elde edilen her iki eşitlik toplanırsa;

$$\begin{aligned} 2g\left((\nabla_X \varphi)Y + \left(\nabla_{\varphi X} \varphi\right)\varphi Y, Z\right) &= -g\big(\varphi N^{(1)}(Y, Z) + N^{(1)}(\varphi Y, Z), X\big) \\ &\quad +(1/\varepsilon)\eta(X)\eta\left(N^{(1)}(\varphi Y, Z)\right) \end{aligned} \tag{3.12}$$

elde edilir.

$$\varphi N^{(1)}(Y, Z) + N^{(1)}(\varphi Y, Z)$$

toplanacak olursa

$$\varphi N^{(1)}(Y, Z) = \varphi^3[Y, Z] + \varphi[\varphi Y, \varphi Z] - \varphi^2[\varphi Y, Z] - \varphi^2[Y, \varphi Z]$$
$$+$$
$$N^{(1)}(\varphi Y, Z) = \varphi^2[\varphi Y, Z] + [\varphi^2 Y, \varphi Z] - \varphi[\varphi^2 Y, Z] - \varphi[\varphi Y, \varphi Z]$$

ifadelerinden

$$\varphi N^{(1)}(Y,Z)+N^{(1)}(\varphi Y,Z)=-\varphi[Y,Z]-\varphi^2[\varphi Y,Z]-\varphi^2[Y,\varphi Z]+\varphi^2[\varphi Y,Z]$$

$$+[\varphi^2 Y,\varphi Z]-\varphi[\varphi^2 Y,Z]$$

$$=-\varphi[Y,Z]-\varphi^2[\varphi Y,Z]+[\varphi^2 Y,\varphi Z]-\varphi[\varphi^2 Y,Z]$$

$$-\varphi^2[Y,\varphi Z]+\varphi^2[\varphi Y,Z]$$

$$=-\varphi[Y,Z]+[\varphi Y,Z]-\eta([\varphi Y,Z])\xi$$

$$-[Y,\varphi Z]+[\eta(Y)\xi,\varphi Z]+\varphi[Y,Z]$$

$$-\varphi[\eta(Y)\xi,Z]+\varphi^2[\varphi Y,Z]-\varphi^2[Y,\varphi Z]$$

$$=[\varphi Y,Z]-\eta([\varphi Y,Z])\xi-[Y,\varphi Z]+[\eta(Y)\xi,\varphi Z]$$

$$-\varphi[\eta(Y)\xi,Z]\ +\varphi^2[\varphi Y,Z]-\varphi^2[Y,\varphi Z]$$

$$=\nabla_{\varphi Y}Z-\nabla_Z\varphi Y-\eta\big(\nabla_{\varphi Y}Z\big)\xi+\eta(\nabla_Z\varphi Y)\xi$$

$$-\nabla_Y\varphi Z+\nabla_{\varphi Z}Y+\nabla_{\eta(Y)\xi}\varphi Z-\nabla_{\varphi Z}\eta(Y)\xi-\varphi\nabla_{\eta(Y)\xi}Z$$

$$+\varphi(\nabla_Z\eta(Y)\xi)+\varphi^2[\varphi Y,Z]-\varphi^2[Y,\varphi Z]$$

$$=\nabla_{\varphi Y}Z-\nabla_Z\varphi Y-\eta\big(\nabla_{\varphi Y}Z\big)\xi-\varepsilon g(\varphi Y,\nabla_Z\xi)\xi$$

$$-\nabla_Y\varphi Z+\nabla_{\varphi Z}Y-\eta(Y)\nabla_\xi\varphi Z-\varepsilon g\big(\nabla_{\varphi Z}Y,\xi\big)\xi$$

$$-\varepsilon g\big(Y,\nabla_{\varphi Z}\xi\big)\xi-\eta(Y)\nabla_{\varphi Z}\xi-\eta(Y)\varphi\nabla_\xi Z$$

$$+\varphi(\varepsilon g(\nabla_Z Y,\xi)\xi)+\varphi(\varepsilon g(Y,\nabla_Z\xi)\xi)+\varphi\eta(Y)\nabla_Z\xi$$

$$+\varphi^2[\varphi Y,Z]-\varphi^2[Y,\varphi Z]$$

$$=\nabla_{\varphi Y}Z-\nabla_Z\varphi Y-\eta\big(\nabla_{\varphi Y}Z\big)\xi-\varepsilon g(\varphi Y,\nabla_Z\xi)\xi$$

$$-\nabla_Y\varphi+\nabla_{\varphi Z}Y-\varphi\eta(Y)\nabla_\xi Z-\eta\big(\nabla_{\varphi Z}Y\big)\xi$$

$$-\varepsilon g\big(Y,\nabla_{\varphi Z}\xi\big)\xi-\eta(Y)\nabla_{\varphi Z}\xi-\varphi\eta(Y)\nabla_{\xi}Z$$

$$+\varphi\eta(Y)\nabla_{Z}\xi+\varphi^{2}[\varphi Y,Z]-\varphi^{2}[Y,\varphi Z]$$

$$=\nabla_{\varphi Y}Z-\nabla_{Z}\varphi Y-\eta\big(\nabla_{\varphi Y}Z\big)\xi-\varepsilon g(\varphi Y,\nabla_{Z}\xi)\xi$$

$$-\nabla_{Y}\varphi Z+\nabla_{\varphi Z}Y-\eta\big(\nabla_{\varphi Z}Y\big)\xi-\varepsilon g\big(Y,\nabla_{\varphi Z}\xi\big)\xi$$

$$-\eta(Y)\nabla_{\varphi Z}\xi+\ \eta(Y)\varphi\nabla_{Z}\xi+\varphi^{2}[\varphi Y,Z]-\varphi^{2}[Y,\varphi Z]$$

$$=\nabla_{\varphi Y}Z-\nabla_{Z}\varphi Y-\eta\big(\nabla_{\varphi Y}Z\big)\xi-\varepsilon g(\varphi Y,\nabla_{Z}\xi)\xi$$

$$-\nabla_{Y}\varphi Z+\ \nabla_{\varphi Z}Y-\eta\big(\nabla_{\varphi Z}Y\big)\xi-\varepsilon g\big(Y,\nabla_{\varphi Z}\xi\big)\xi$$

$$-\eta(Y)\nabla_{\varphi Z}\xi+\quad\eta(Y)\varphi\nabla_{Z}\xi-\nabla_{\varphi Y}Z+\nabla_{Z}\varphi Y$$

$$+\eta\big(\nabla_{\varphi Y}Z\big)\xi-\eta(\nabla_{Z}\varphi Y)\xi+\ \nabla_{Y}\varphi Z-\nabla_{\varphi Z}Y$$

$$-\eta(\nabla_{Y}\varphi Z)\xi+\eta\big(\nabla_{\varphi Z}Y\big)\xi$$

$$=-\varepsilon g(\varphi Y,\nabla_{Z}\xi)\xi-\varepsilon g\big(Y,\nabla_{\varphi Z}\xi\big)\xi-\eta(Y)\nabla_{\varphi Z}\xi$$

$$+\eta(Y)\varphi\nabla_{Z}\xi+\varepsilon g(\varphi Y,\nabla_{Z}\xi)\xi+\varepsilon g(\varphi Z,\nabla_{Y}\xi)\xi$$

$$=-\varepsilon g(Y,-\varphi^{3}Z-\varphi h\varphi Z)\xi-\eta(Y)(-\varphi^{3}Z-\varphi h\varphi Z)$$

$$+\eta(Y)(-\varphi^{3}Z-\varphi^{2}hZ)+\varepsilon g(\varphi Z,-\varphi^{2}Y-\varphi hY)\xi$$

$$=-\varepsilon g(Y,\varphi Z)\xi+\varepsilon g(Y,hZ)\xi-\eta(Y)\varphi Z+\eta(Y)hZ$$

$$+\eta(Y)\varphi Z+\eta(Y)hZ-\varepsilon g(Z,\varphi Y)\xi-\varepsilon g(Z,hY)\xi$$

$$=2\eta(Y)hZ$$

dır. Yani;

$$\varphi N^{(1)}(Y,Z)+N^{(1)}(\varphi Y,Z)=2\eta(Y)hZ$$

olarak bulunur. Ayrıca

$$\eta\left(N^{(1)}(\varphi Y,Z)\right)=\varepsilon g\big(N^{(1)}(\varphi Y,Z),\xi\big)$$

$$=\varepsilon g(\varphi^2[\varphi Y,Z]+[\varphi^2 Y,\varphi Z]-\varphi[\varphi^2 Y,Z]-\varphi[\varphi Y,\varphi Z],\xi)$$

$$=\varepsilon g([\varphi^2 Y,\varphi Z],\xi)+\varepsilon g(-[Y,\varphi Z],\xi)+\varepsilon g([\eta(Y)\xi,\varphi Z],\xi)$$

$$=\varepsilon g\big(\nabla_{\varphi Z}Y,\xi\big)-\varepsilon g(\nabla_Y\varphi Z,\xi)+\varepsilon g\big(\nabla_{\eta(Y)\xi}\varphi Z,\xi\big)$$

$$-\varepsilon g\big(\nabla_{\varphi Z}\eta(Y)\xi,\xi\big)$$

$$=\eta\big(\nabla_{\varphi Z}Y\big)-\eta(\nabla_Y\varphi Z)-\varepsilon g\left(\varepsilon g\big(\nabla_{\varphi Z}Y,\xi\big)\right)\xi+\varepsilon g\big(Y,\nabla_{\varphi Z}\xi\big)\xi$$

$$+\big(\eta(Y)\nabla_{\varphi Z}\xi,\xi\big)$$

$$=\eta\big(\nabla_{\varphi Z}Y\big)-\eta(\nabla_Y\varphi Z)-\varepsilon g\big(\eta\big(\nabla_{\varphi Z}Y\big)\xi,\xi\big)$$

$$-g\big(Y,\nabla_{\varphi Z}\xi\big)g(\xi,\xi)-\varepsilon g\big(\eta(Y)\nabla_{\varphi Z}\xi,\xi\big)$$

$$=\eta\big(\nabla_{\varphi Z}Y\big)-\eta(\nabla_Y\varphi Z)\ \ -\eta\big(\nabla_{\varphi Z}Y\big)$$

$$-\varepsilon g\big(Y,\nabla_{\varphi Z}\xi\big)-\varepsilon\eta(Y)g\big(\nabla_{\varphi Z}\xi,\xi\big)$$

$$=\ \varepsilon g(\varphi Z,\nabla_Y\xi)-\varepsilon g\big(Y,\nabla_{\varphi Z}\xi\big)$$

$$=\varepsilon g(\varphi Z,-\varphi^2 Y-\varphi hY)-\varepsilon g(Y,-\varphi^3 Z-\varphi h\varphi Z)$$

$$=\varepsilon g(Z,\varphi^3 Y)-\varepsilon g(Z,hY)+\varepsilon g(Y,\varphi^3 Z)+g(Y,hZ)=0$$

dır. Bu ifadeler (3.12) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$2g\left((\nabla_X\varphi)Y+\big(\nabla_{\varphi X}\varphi\big)\varphi Y,Z\right)=-2\eta(Y)g(hX,Z)$$

olarak bulunur. Bu son eşitlikten

$$(\nabla_X\phi)Y + \big(\nabla_{\phi X}\phi\big)\phi Y = -\eta(Y)hX$$

dir. Bu ise (3.11) in ispatıdır.

Sonuç: $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, hemen hemen yarı kosimplektik manifold olsun. $\forall\, X, Y\ \in \mathcal{X}(M)$ için,

$$\phi\big(\nabla_{\phi X}\phi\big)Y - (\nabla_X\phi)Y = -\varepsilon g(hX, Y)\xi \qquad (3.13)$$

dir.

İspat: $\forall\, X, Y \in \mathcal{X}(M^{2n+1})$ için,

$$\begin{aligned}
\big(\nabla_{\phi X}\phi\big)\phi Y &= \nabla_{\varphi X}\varphi^2 Y - \varphi\nabla_{\varphi X}\varphi Y \\
&= -\nabla_{\varphi X}Y + \nabla_{\varphi X}\eta(Y)\xi - \varphi^2\nabla_{\varphi X}Y - \varphi\big(\nabla_{\varphi X}\varphi\big)Y \\
&= -\nabla_{\varphi X}Y + \varepsilon g\big(\nabla_{\varphi X}Y, \xi\big)\xi + \varepsilon g\big(Y, \nabla_{\varphi X}\xi\big) \\
&\quad +\eta(Y)\nabla_{\varphi X}\xi + \nabla_{\varphi X}Y \ - \eta\big(\nabla_{\varphi X}Y\big)\xi - \ \varphi\big(\nabla_{\varphi X}\varphi\big)Y \\
&= \varepsilon g(Y, -\varphi h\varphi X)\xi + \eta(Y)(-\varphi h\varphi X) - \varphi\big(\nabla_{\varphi X}\varphi\big)Y \\
&= \varepsilon g(Y, -hX)\xi - \eta(Y)hX - \varphi\big(\nabla_{\varphi X}\varphi\big)Y
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafına $(\nabla_X\varphi)Y$ eklenirse;

$$(\nabla_X\varphi)Y + \big(\nabla_{\phi X}\phi\big)\phi Y = -\varepsilon g(Y, hX)\xi \ - \eta(Y)hX - \varphi\big(\nabla_{\varphi X}\varphi\big)Y \ + (\nabla_X\varphi)Y$$

olup (3.11) eşitliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
(\nabla_X\varphi)Y - \varphi\big(\nabla_{\varphi X}\varphi\big)Y &= \varepsilon g(Y, hX)\xi \\
&= \ \varepsilon g(hY, X)\xi \\
&= \varepsilon g(hX, Y)\xi
\end{aligned}$$

$$\varphi\big(\nabla_{\varphi X}\varphi\big)Y - (\nabla_X\varphi)Y = -\varepsilon g(hX, Y)\xi$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

Önerme 3.1.3. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen yarı kosimplektik manifold olsun. O zaman $\forall\, X, Y \in \mathcal{X}(M)$ için,

$$g\big(R_{\xi X}Y, Z\big) - g\big(R_{\xi X}\phi Y, \phi Z\big) + g\big(R_{\xi\phi X}Y, \phi Z\big) + g\big(R_{\xi\phi X}\phi Y, Z\big) \qquad (3.14)$$

$$= 2(\nabla_{hX}\Phi)(Y, Z)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: R Riemann eğrilik tensörü simetrik olduğundan $R(\xi, X, Y, Z) = g(X, R(Y, Z)\xi)$ dır. (3.20) eşitliğinin kullanılmasıyla

$$R(\xi, X, Y, Z) - R(\xi, X, \varphi Y, \varphi Z) + R(\xi, \varphi X, Y, \varphi Z) + R(\xi, \varphi X, \varphi Y, Z)$$

$$= g\big((\nabla_Z\varphi h)Y, X\big) - g\big((\nabla_Y\varphi h)Z, X\big)$$

$$-g\left(\big(\nabla_{\varphi Z}\varphi h\big)\varphi Y, X\right) + g\left(\big(\nabla_{\varphi Y}\varphi h\big)\varphi Z, X\right)$$

$$+g\left(\big(\nabla_{\varphi Z}\varphi h\big)Y, \varphi X\right) - g\big((\nabla_Y\varphi h)\varphi Z, \varphi X\big)$$

$$+g\big((\nabla_Z\varphi h)\varphi Y, \varphi X\big) - g\left(\big(\nabla_{\varphi Y}\varphi h\big)Z, \varphi X\right)$$

elde edilir.

$$B(X, Y, Z) = -g(\varphi X, (\nabla_Y\varphi h)\varphi Z) - g(X, (\nabla_Y\varphi h)Z)$$

$$+g\big(X, \big(\nabla_{\varphi Y}\varphi h\big)\varphi Z\big) - g\big(\varphi X, \big(\nabla_{\varphi Y}\varphi h\big)Z\big)$$

şeklinde tanımlanır ise

$$B(X, Z, Y) = -g(\varphi X, (\nabla_Z\varphi h)\varphi Y) - g(X, (\nabla_Z\varphi h)Y)$$

$$+g\big(X, \big(\nabla_{\varphi Z}\varphi h\big)\varphi Y\big) - g\big(\varphi X, \big(\nabla_{\varphi Z}\varphi h\big)Y\big)$$

yazılabilir.

$$B(X,Y,Z)-B(X,Z,Y)=-g(\varphi X,(\nabla_Y\varphi h)\varphi Z)-g(X,(\nabla_Y\varphi h)Z)$$

$$+\,g\big(X,\big(\nabla_{\varphi Y}\varphi h\big)\varphi Z\big)-g\big(\varphi X,\big(\nabla_{\varphi Y}\varphi h\big)Z\big)$$

$$+g(\varphi X,(\nabla_Z\varphi h)\varphi Y)+g(X,(\nabla_Z\varphi h)Y)$$

$$-g\big(X,\big(\nabla_{\varphi Z}\varphi h\big)\varphi Y\big)+g\big(\varphi X,\big(\nabla_{\varphi Z}\varphi h\big)Y\big)$$

olacağından

$$R(\xi,X,Y,Z)-R(\xi,X,\varphi Y,\varphi Z)+R(\xi,\varphi X,Y,\varphi Z)+R(\xi,\varphi X,\varphi Y,Z)$$

$$=B(X,Y,Z)-B(X,Z,Y) \tag{3.15}$$

şeklinde elde edilir. Öte yandan

$$g\big(X,\big(\nabla_{\varphi Y}\varphi h\big)\varphi Z\big)-g\big(\varphi X,\big(\nabla_{\varphi Y}\varphi h\big)Z\big)$$

$$=g\big(\varphi X,\varphi\big(\nabla_{\varphi Y}\varphi h\big)\varphi Z\big)-g\big(\varphi X,\big(\nabla_{\varphi Y}\varphi h\big)Z\big)+\eta(X)\eta\left(\big(\nabla_{\varphi Y}\varphi h\big)\varphi Z\right)$$

$$=g\big(\varphi X,\varphi\big(\nabla_{\varphi Y}\varphi h\big)\varphi Z\big)-\big(\nabla_{\varphi Y}\varphi h\big)$$

$$+\,\eta(X)\eta\left(\big(\nabla_{\varphi Y}\varphi h\big)\varphi Z\right) \tag{3.16}$$

ve

$$\varphi(\nabla_Y\varphi h)\varphi Z-(\nabla_Y\varphi h)Z=\varphi\nabla_Y\varphi h\varphi Z-\varphi^2h\nabla_Y\varphi Z-\nabla_Y\varphi hZ+\varphi h\nabla_Y Z$$

$$=\varphi\nabla_Y hZ+h\nabla_Y\varphi Z-\nabla_Y\varphi hZ+\varphi h\nabla_Y Z$$

$$=\varphi\nabla_Y hZ+h\varphi\nabla_Y Z+h(\nabla_Y\varphi)Z-(\nabla_Y\varphi)hZ$$

$$-\varphi\nabla_Y hZ+\varphi h\nabla_Y Z\ \varphi(\nabla_Y\varphi h)\varphi Z\ -(\nabla_Y\varphi h)Z$$

$$=h(\nabla_Y\varphi)Z-(\nabla_Y\varphi)hZ \tag{3.17}$$

$$\eta\left(\left(\nabla_{\varphi Y}\varphi h\right)\varphi Z\right) = \varepsilon g\left(\left(\nabla_{\varphi Y}\varphi h\right)\varphi Z, \xi\right)$$

$$= \varepsilon g\left(\nabla_{\varphi Y}\varphi h\varphi Z, \xi\right) - \varepsilon g\left(\varphi h\nabla_{\varphi Y}\varphi Z, \xi\right)$$

$$= \varepsilon g\left(\nabla_{\varphi Y}hZ, \xi\right)$$

$$= -\varepsilon g\left(hZ, \nabla_{\varphi Y}\xi\right)$$

$$= -\varepsilon g(hZ, -\varphi^3 Y - \varphi h\varphi Y)$$

$$= -\varepsilon g(hZ, \varphi Y - hY)$$

$$= \varepsilon g(hZ, -\varphi Y + hY) \tag{3.18}$$

Olarak elde edilen $(3.16), (3.17)$ ve (3.18) ifadelerinin yanı sıra $(3.11), (3.13)$ eşitlikleri de $B(X, Y, Z)$'de yerine yazılırsa

$$B(X, Y, Z) = g\left(X, \varphi\left((\nabla_Y\varphi h)\varphi Z\right) - (\nabla_Y\varphi h)Z\right)$$

$$+g\left(\varphi X, \varphi\left(\left(\nabla_{\varphi Y}\varphi h\right)\varphi Z\right) - \left(\nabla_{\varphi Y}\varphi h\right)Z\right)$$

$$+\eta(X)\eta\left(\left(\nabla_{\varphi Y}\varphi h\right)\varphi Z\right)$$

$$= g(X, -(\nabla_Y\varphi)hZ + h(\nabla_Y\varphi)Z)$$

$$+g\left(\varphi X, -\left(\nabla_{\varphi Y}\varphi\right)hZ + h\left(\nabla_{\varphi Y}\varphi\right)Z\right)$$

$$+\eta(X)\eta\left(\left(\nabla_{\varphi Y}\varphi h\right)\varphi Z\right)$$

$$= -g(X, -(\nabla_Y\varphi)hZ) + g(hX, (\nabla_Y\varphi)Z)$$

$$-g\left(\varphi X, -\left(\nabla_{\varphi Y}\varphi\right)hZ\right) + g\left(\varphi X, h\left(\nabla_{\varphi Y}\varphi\right)Z\right)$$

$$+\eta(X)\eta\left(\left(\nabla_{\varphi Y}\varphi h\right)\varphi Z\right)$$

$$= g\left(X, \varphi\left(\nabla_{\varphi Y}\varphi\right)hZ - (\nabla_Y\varphi)hZ\right)$$

$$+g\left(hX,(\nabla_Y\varphi)Z+\varphi\left(\nabla_{\varphi Y}\varphi\right)Z\right)+\eta(X)\eta\left(\left(\nabla_{\varphi Y}\varphi h\right)\varphi Z\right)$$

$$=g(X,-\varepsilon g(hY,hZ)\xi)$$

$$+g(hX,2(\nabla_Y\varphi)Z-\varepsilon g(\varphi Y+hY,Z)\xi)+\eta(X)[\varepsilon g(hZ,hY)]$$

$$=-g(hY,hZ)\eta(X)\ +2g(hX,(\nabla_Y\varphi)Z)+\varepsilon g(hZ,hY)\eta(X)$$

$$B(X,Y,Z)=(\varepsilon-1)g(hY,hZ)\eta(X)+2g(hX,(\nabla_Y\varphi)Z) \tag{3.19}$$

eşitliği elde edilir. Bu ifadeler kullanılarak (3.15) eşitliği

$$R(\xi,X,Y,Z)-R(\xi,X,\varphi Y,\varphi Z)+R(\xi,\varphi X,Y,\varphi Z)+R(\xi,\varphi X,\varphi Y,Z)$$

$$=2g(hX,(\nabla_Y\varphi)Z)-2g(hX,(\nabla_Z\varphi)Y)$$

şeklinde yeniden yazılarak

$$d\Phi=0$$

ve

$$3d\Phi(Y,Z,hX)=(\nabla_Y\Phi)(Z,hX)+(\nabla_Z\Phi)(hX,Y)+(\nabla_{hX}\Phi)(Y,Z)$$

eşitlikleri göz önüne alınarak ispat tamamlanır.

Tanım 3.1.2. M^n bir C^∞ manifold olsun. Keyfi bir $p\in M^n$ noktası için T_PM^n nin r-boyutlu altuzayı $r\leq n$ $\mathcal{D}$ ve $\mathcal{D}_P$ nin bir koleksiyonu $\mathcal{D}=\{\mathcal{D}_P\}$ olmak üzere, p noktasını ihtiva eden M^n nin bir U açık altcümlesi üzerinde C^∞sınıfından lineer bağımsız $\{X_1,\dots,X_r\}$ vektör alanları U nun her $q\in M^n$ noktasında hala $\mathcal{D}_P$ nin bir bazı oluyorsa $\mathcal{D}$ ye M^n üzerinde bir r-boyutlu dağılım ve $\{X_1,\dots,X_r\}$ cümlesine U üzerinde $\mathcal{D}$ için bir lokal baz denir (Sharpe 1997).

Tanım 3.1.3. M^n bir C^∞ manifold ve M^n nin bir r-boyutlu dağılımı $\mathcal{D}$ olsun. M^n nin bir haritası $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ olmak üzere, $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_r}\right\}$ cümlesi $\mathcal{D}$ dağılımı için bir baz oluşturuyorsa x haritasına $\mathcal{D}$ dağılımına göre düzlemseldir denir. Eğer M^n nin her noktasında tanımlı olan $\mathcal{D}$ dağılımı için bir düzlemsel harita bulunabiliyorsa $\mathcal{D}$ dağılımına integrallenebilirdir denir (Sharpe 1997).

Tanım 3.1.4. M^n bir C^∞ manifold ve M^n nin bir r-boyutlu bağlantılı altmanifoldu N ve M^n nin bir r-boyutlu dağılımı $\mathcal{D}$ olsun. Her $p \in N$ için, $\mathcal{D}_P = T_P N$ ise N ye M^n nin r-boyutlu integral altmanifoldu denir (Sharpe 1997).

Önerme 3.1.4. M^n bir C^∞ manifold ve w M^n üzerinde C^∞ bir 1-form olsun. M^n nin her $p \in M^n$ noktası için $n = boy(\ker w_p) = r$ sabit ise $\ker w_p$ M^n üzerinde bir r-boyutlu dağılımdır (Sharpe 1997).

Teorem 3.1.1. (Frobenius Teoremi) M^n bir C^∞ manifold ve M^n nin bir r-boyutlu dağılımı $\mathcal{D}$ olsun. $\mathcal{D}$ dağılımının integrallenebilmesi için gerek ve yeter koşul her $X, Y \in \mathcal{D}$ için $[X, Y] \in \mathcal{D}$ olmasıdır (Sharpe 1997).

Önerme 3.1.5. M^n bir C^∞ manifold ve w M^n üzerinde C^∞ bir 1-form olsun. M^n nin her $p \in M^n$ noktası için $n = boy(\ker w_p) = r$ sabit olsun. Böylece

$\mathcal{D} = \{\ker w_p : p \in M^n\}$ dağılımının integrallenebilmesi için gerek ve yeter koşul $\forall X, Y \in \ker w$ için $dw(X, Y) = 0$ olmasıdır (Sharpe 1997).

Uyarı 3.1.1. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen yarı kosimplektik manifold olsun. $\forall\, p \in M^{2n+1}$ için,

$$\mathcal{D}_P = \ker \eta_p = \{X \in T_P M : \eta(X_P) = 0\}$$

ve $\mathcal{D} = \{\mathcal{D}_P\}$ olmak üzere, $boy(\mathcal{D}_P) = 2n$ olduğundan Önerme 3.1.4. gereğince $\mathcal{D}$ M^{2n+1} nin bir $2n$-boyutlu dağılımı olur. Diğer yandan, M^{2n+1} bir hemen hemen yarı kosimplektik manifold olduğundan $d\eta = 0$ olup, Önerme 3.1.5. yardımıyla $\mathcal{D}$ dağılımı integrallenebilirdir. Böylece $\mathcal{D}$ dağılımına $2n$-boyutlu integral altmanifoldları karşılık gelir.

Önerme 3.1.6.$(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, $\mathcal{D}$ değme dağılımının integral altmanifoldları Kaehler olacak şekilde bir hemen hemen yarı kosimplektik manifold olsun. O zaman, M^{2n+1} nin yarı kosimplektik manifold olması için gerek ve yeter koşul $\nabla_\xi = -\phi^2$ olmasıdır.

İspat: Herhangi bir vektör alanı X olmak üzere, $N_\phi(X,\xi) = 2\phi hX$ eşitliği yazılır. Bu nedenle, yapının normal olduğunu kabul edersek $Y \in \mathcal{D}$ için, $h(Y) = 0$ elde edilir.

$h(\xi) = 0$ olduğundan $h = 0$ bulunur ve (3.10) ifadesi $\nabla_\xi = -\phi^2$ eşitliğini gerektirir. (3.10) ifadesi yardımıyla eğer $\nabla_\xi = -\phi^2$ ise $h = 0$ dır. O halde, keyfi X vektör alanları için $N_\phi(X,\xi) = 0$ dır. $J_{\mathcal{D}}$ hemen hemen kompleks yapı olsun. Bu durumda her $X, Y \in \mathcal{D}$ için $N_\phi(X,Y) = N_{J_{\mathcal{D}}}(X,Y) = 0$ dır. Böylece $\mathcal{D}$ dağılımının integral manifoldları Kaehler yapıdadır.

Sonuç 3.1.1. (M,ϕ,ξ,η,g), 3-boyutlu bir hemen hemen yarı kosimplektik manifoldu $\nabla_\xi = -\phi^2$ şartını sağlıyorsa bir kosimplektik manifolddur.

İspat: Boyutun 3 olması durumunda, $\mathcal{D}$ dağılımının integral altmanifoldları boyutu 2 olan hemen hemen Kaehler yapıdadırlar. Böylece Önerme 3.1.8. den dolayı ispat tamamlanır.

3.2. TENSÖR ALANLARI VE ÖZELLİKLERİ

Bu kısımda belli tensör koşulları sağlayan $A\ ve\ h$ tensör alanları incelenmiştir.

Yardımcı Teorem 3.2.1. $(M^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)$, bir hemen hemen yarı kosimplektik manifold olsun. M^{2n+1} üzerinde (1,1)-tipli A tensör alanı, $A = -\nabla\xi$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda, $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$ için,

(i) $A\ ve\ h$ simetriktir,

(ii) $A\phi + \phi A = 0$,

(iii) $\eta\ o\ A = 0,\ \eta\ o\ h = 0$,

(iv) $h = A\ o\ \phi$,

(v) $hA + Ah = 0$,

(vi) $İz\ (A) = 0$,

(vii) $İz(\phi A) = 0$

eşitlikleri sağlanır.

İspat: (i) M^{2n+1} üzerinde herhangi X, Y vektör alanları için,

$$g(AX, Y) = g(\varphi hX, Y)$$

$$= g(X, \varphi hY)$$

$$g(AX, Y) = g(X, AY)$$

dır. Böylece A simetriktir. Özel olarak, $X = \xi$ için $A\xi = \phi h\xi = 0$ elde edilir. Benzer olarak, h tensör alanının simetrik olduğu kolayca elde edilir.

(ii) A tensör alanının tanımı göz önüne alındığında

$$A\phi = (\phi h)\phi \text{ ve } \phi A = \phi(\phi h)$$

yazılabilir. Bu iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa

$$A\phi + \phi A = 0$$

eşitliği bulunur.

(iii) A tensör alanının tanımından

$$(\eta\ o\ A)X = \eta(AX)$$

$$= \varepsilon g(AX, \xi)$$

$$= \varepsilon g(X, A\xi) = 0$$

ve

$$(\eta\ o\ h)X = \eta(hX)$$

$$= \varepsilon g(hX, \xi)$$

$$= \varepsilon g(X, h\xi) = 0$$

dir.

(iv) (3.5) eşitliğinden

$$AX = \varphi hX$$

$$A\varphi X = \varphi h\varphi X$$

$$= -\varphi X + hX$$

$$hX = A\varphi X$$

elde edilir.

(v) $AX = -\nabla_X \xi = \varphi hX$ eşitliğinden yararlanılırsa;

$$hAX = h\varphi hX$$

$$= -\varphi h^2 X$$

ve

$$AhX = \varphi h^2 X$$

şeklinde bulunur. Böylece yukarıdaki iki eşitlik taraf tarafa toplanarak

$$hAX + AhX = 0$$

elde edilir.

(vi)

$$iz(A) = \sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i g(AE_i, E_i) = \sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i g(\varphi^2 E_i, \varphi hE_i, E_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i g(\varphi hE_i, E_i) = -\sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i tr(\varphi h) = 0$$

(vii)

$$iz(\varphi A) = \sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i g(\varphi AE_i, E_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i g(+\varphi^2 hE_i, E_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i g(-hE_i, E_i) = -iz(h) = 0$$

elde edilir.

Önerme 3.2.2. Bir hemen hemen yarı kosimplektik manifoldun $\mathcal{D}$ dağılımının integral altmanifoldlarının Kaehler yapıda olması için gerek ve yeter koşul $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$ için,

$$(\nabla_X \phi)Y = -g(\phi AX, Y)\xi + \eta(Y)\phi AX \tag{3.20}$$

dır. Burada her X vektör alanı için, $AX = \phi hX$ dır.

İspat: (Pastore ve Falcitelli 2006) önerme 2.2 s=1 için kolayca görülür.

3.3. EĞRİLİK ÖZELLİKLERİ

Bu kısımda, Riemann eğrilik tensörü yardımıyla bazı eğrilik özellikleri incelenmiştir

Önerme 3.3.1.$(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen yarı kosimplektik manifold olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M^{2n+1})$ için,

$$R(X, Y)\xi = (\nabla_Y \phi h)X - (\nabla_X \phi h)Y$$

$$= (\nabla_Y A)X - (\nabla_X A)Y \tag{3.21}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: R Riemann eğrilik tensörü tanımından

$$R(X, Y)\xi = \nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_Y \nabla_X \xi - \nabla_{[X,Y]}\xi$$

$$= -(\nabla_X \varphi hY) + (\nabla_Y \varphi hX)$$

elde edilir.

Önerme 3.3.2. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen yarı kosimplektik manifold olsun. Bu durum

$$i)\ R(X,\xi)\xi = -h^2X + \phi\left(\nabla_\xi h\right)X \tag{3.22}$$

$$ii)\ \left(\nabla_\xi h\right)X = -\phi R(X,\xi)\xi - \phi h^2 X \tag{3.23}$$

$$iii)\ R(X,\xi)\xi - \phi R(\phi X,\xi)\xi = -2h^2X \tag{3.24}$$

$$iv)\ S(X,\xi) = -\left(div(\phi h)\right)X \tag{3.25}$$

$$v)\ S(\xi,\xi) = \dot{\mathrm{I}}z(l) = -\dot{\mathrm{I}}z(h^2) \tag{3.26}$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat i) **:** (3.21) eşitliğinde $Y = \xi$ yazılır ise;

$$R(X,\xi)\xi = \left(\nabla_\xi \varphi h\right)X - (\nabla_X \varphi h)\xi$$

olarak bulunur. Bu ifadede yer alan

$\left(\nabla_\xi \varphi h\right)X \quad ve \quad (\nabla_X \varphi h)\xi$ değerleri

$$\begin{aligned}(\nabla_X \varphi h)\xi &= \nabla_X \varphi h\xi - \varphi h \nabla_X \xi \\ &= -\varphi h(\varphi h X) \\ &= \varphi h \varphi h x \\ &= -\varphi^2 h^2 X \\ &= h^2 X\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\left(\nabla_\xi \varphi h\right)X &= \nabla_\xi \varphi h X - \varphi h \nabla_\xi X \\ &= \left(\nabla_\xi \varphi\right)hX + \varphi \nabla_\xi h X - \varphi h \nabla_\xi X\end{aligned}$$

$$= \varphi h \nabla_\xi X + \varphi(\nabla_\xi h)X - \varphi h \nabla_\xi X$$

$$= \varphi(\nabla_\xi h)X$$

şeklinde olacaktır. Bu değerler yerine yazılır ise

$$R(X,\xi)\xi = -h^2 X + \varphi(\nabla_\xi h)X$$

olarak bulunur.

$ii)$ $R(X,\xi)\xi = \ell x$ olsun,

$$\varphi \ell x = -\varphi h^2 X + \varphi^2(\nabla_\xi h)X$$

$$= -\varphi h^2 X - (\nabla_\xi h)X + \eta\left((\nabla_\xi h)X\right)\xi$$

ve

$$\eta\left((\nabla_\xi h)X\right)\xi = \varepsilon g\left((\nabla_\xi h)X,\xi\right) = \varepsilon g(X,(\nabla_\xi h)\xi) = 0$$

olacağından

$$(\nabla_\xi h)X = -\varphi \ell x - \varphi h^2 X$$

dır.

$iii)$ (3.22) ifadesinde X yerine ϕX alınırsa

$$R(\phi X,\xi)\xi = -h^2 \phi X + \phi(\nabla_\xi h)(\phi X) \tag{3.27}$$

eşitliği bulunur. (3.22) ve (3.27) ifadeleri göz önüne alındığında

$$\ell x - \varphi \ell \varphi x = -h^2 X + \varphi(\nabla_\xi h)X - \left[-\varphi h^2 \varphi X + \varphi^2(\nabla_\xi h)\varphi X\right]$$

$$= -h^2 X + \varphi(\nabla_\xi h)X - h^2 X - \varphi^2(\nabla_\xi h)\varphi X$$

$$= -2h^2X$$

olup

$$R(X,\xi)\xi - \varphi R(\varphi X,\xi)\xi = -2h^2X$$

dir.

$iv)$ (3.21) ifadesinden

$$\begin{aligned} S(X,\xi) &= \sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i g(R(E_i,X)\xi,E_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g(R(e_i,X)\xi,e_i) \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{n+i} g(R(\varphi e_i,X)\xi,\varphi e_i) + \varepsilon_{2n+1} g(R(\xi,X)\xi,\xi) \\ &= \sum_{i=1}^{n} [\varepsilon_i g((\nabla_X \varphi h)e_i,e_i) + \varepsilon_{n+i} g((\nabla_X \varphi h)\varphi e_i,\varphi e_i)] \\ &- \sum_{i=1}^{n} \left[\varepsilon_i g\big((\nabla_{e_i}\varphi h)X,e_i\big) + \varepsilon_{n+i} g\big((\nabla_{\varphi e_i}\varphi h)X,\varphi e_i\big)\right] \\ &= \sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i g\left((\nabla_{E_i}\varphi h)X,E_i\right) = [div(\varphi h)]X \end{aligned}$$

şeklinde (3.25) eşitliği elde edilir.

$v)$ (3.25) eşitliğinde $X = \xi$ alnırsa

$$S(\xi,\xi) = -[div(\varphi h)]\xi$$

dır. Bu ifadede yer alan $\big(div(\varphi h)\big)\xi$ hesaplanırsa

$$\begin{aligned}\big(div(\varphi h)\big)\xi &= \sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i g\left(\left(\nabla_{E_i}\varphi h\right)\xi, E_i\right)\\ &= \sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i [g(h^2E_i, E_i)]\\ &= \sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i g\,(h^2E_i, E_i)\\ &= -\text{İ}z(h^2)\end{aligned}$$

olacağından (3.25) eşitliğinde $X = \xi$ alınarak

$$S(\xi,\xi) = -\big(div(\varphi h)\big)\xi = -\text{İ}z(h^2)$$

elde edilir. Böylece (3.26) eşitliği ispatlanmış olur.

3.4. PARALEL TENSÖR ALANLARI

Bu kısımda, hemen hemen yarı kosimplektik manifoldlar üzerinde η-paralellik, Kodazzi, devirli paralellik ve devirli η-paralellik tensör koşulları incelenmiştir.

Tanım 3.4.1. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$**,** bir hemen hemen değme metrik olsun. $\forall\ \{X, Y, Z\} \in \ker\eta$ olmak üzere

$$g\big((\nabla_X\eta)Y, Z\big) = 0 \tag{3.28}$$

koşulu sağlıyorsa M^{2n+1} ye η-paraleldir denir (Boeckx 2005).

Tanım 3.4.2. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. M^n üzerinde herhangi simetrik (1,1)- tipli tensör alanı T olmak üzere, herhangi X, Y, Z vektör alanları için

$$(\nabla_X T)Y = (\nabla_Y T)X \tag{3.29}$$

ise T ye Kodazzi tensör alanı denir (Blair 2002).

Tanım 3.4.3. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. M^n üzerinde herhangi simetrik (1,1)- tipli tensör alanı T olmak üzere, herhangi X, Y, Z vektör alanları için

$$g\big((\nabla_X T)Y, Z\big) + g\big((\nabla_Y T)Z, X\big) + g\big((\nabla_Z T)X, Y\big) = 0 \tag{3.30}$$

eşitliği sağlanıyorsa T ye devirli paralel tensör alanı denir (Cho 2008).

Tanım 3.4.4. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$**,** bir hemen hemen değme metrik olsun.

$\forall \{X, Y, Z\} \in \ker \eta$ olmak üzere M^{2n+1} üzerindeki herhangi simetrik (1,1)- tipli T tensör alanı

$$g\big((\nabla_X T)Y, Z\big) + g\big((\nabla_Y T)Z, X\big) + g\big((\nabla_Z T)X, Y\big) = 0 \tag{3.31}$$

eşitliği sağlanıyorsa T ye devirli η-paralel tensör alanı denir (Cho 2008).

Tanım 3.4.5. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$**,** bir değme metrik manifold olsun. $\forall$ X, Y vektör alanları için,

$$g(\tau X, Y) = \big(\mathcal{L}_\xi g\big)(X, Y)$$

eşitliği ile verilen τ tensör alanına torsiyon tensör alanı denir (Cho 2008).

Bu tanımlamaya göre aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 3.4.1. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$**,** bir hemen hemen yarı kosimplektik manifold olsun. O zaman, M^{2n+1} manifoldu için τ torsiyon tensör alanı

$$\tau X = -2AX \tag{3.32}$$

dır.

İspat: τ tensör alanının tanımından M^{2n+1} üzerindeki tüm vektör alanları için,

$$\big(\mathcal{L}_\xi g\big)(X, Y) = \mathcal{L}_\xi g(X, Y) + g\big(\mathcal{L}_\xi X, Y\big) - g\big(X, \mathcal{L}_\xi Y\big)$$

$$= g(\nabla_X \xi, Y) + g(X, \nabla_Y \xi)$$

$$= 2g(-\varphi h X, Y)$$

elde edilir. (3.5) kullanılarak istenen sonuca ulaşılır.

Önerme 3.4.2. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen yarı kosimplektik manifold olsun. Eğer h tensör alanı η-paralel ise o zaman, $\forall\, X, Y \in \mathcal{X}(M^{2n+1})$ için

$$(\nabla_X h)Y = -\eta(X)[\varphi l Y + \varphi h^2 Y] - \eta(Y)[\varphi h^2 X]$$
$$-\varepsilon g(Y, \varphi h^2 X)\xi \qquad (3.33)$$

eşitliği sağlanır. Burada $l. = R(.,\xi)\xi$ dır.

İspat: h tensör alanı η-paralel olsun. Her X vektör alanı için $X^T = X - \eta(X)\xi$ alınırsa

$$0 = g\left((\nabla_{X^T} h)Y^T, Z^T\right)$$

$$= g\left(\left(\nabla_{X-\eta(X)\xi} h\right)(Y - \eta(Y)\xi), Z - \eta(Z)\xi\right)$$

$$= g\big((\nabla_X h)Y, Z\big) - \eta(X) g\left(\left(\nabla_\xi h\right)Y, Z\right) - \eta(Y) g\big((\nabla_X h)\xi, Z\big)$$

$$-\eta(Z) g\big((\nabla_X h)Y, \xi\big) + \eta(X)\eta(Y) g\left(\left(\nabla_\xi h\right)\xi, Z\right)$$

$$+\eta(Y)\eta(Z) g\big((\nabla_X h)\xi, \xi\big) + \eta(Z)\eta(X) g\left(\left(\nabla_\xi h\right)Y, \xi\right)$$

$$-\eta(X)\eta(Y)\eta(Z) g\left(\left(\nabla_\xi h\right)\xi, \xi\right)$$

eşitliği elde edilir. Yukarıdaki eşitlik sadeleşirse

$$(\nabla_X h)Y = \eta(X)\big(\nabla_\xi h\big)Y + \eta(Y)(\nabla_X h)\xi + \varepsilon g\big((\nabla_X h)\xi, Y\big)\xi$$

denklemi elde edilir. $(3.5),(3.7)$ ve (3.23) denklemleri yardımıyla (3.33) Eşitliği bulunur.

Önerme 3.4.3. (M,φ,ξ,η,g)**,** bir hemen hemen yarı kosimplektik manifold olsun. Eğer φh tensör alanı η-paralel ise o zaman, her X,Y vektör alanları için,

$$(\nabla_X\varphi h)Y=\eta(X)[lY-\varphi^2Y-2\varphi hY+h^2Y]$$

$$-\eta(Y)[\varphi hX-h^2X]-\varepsilon g(Y,\varphi hX-h^2X)\xi \qquad (3.34)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: φh tensör alanının η-paralel olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
0 &= g\left((\nabla_{X^T}\varphi h)Y^T,Z^T\right)\\
&= g\left(\left(\nabla_{X-\eta(X)\xi}\varphi h\right)(Y-\eta(Y)\xi),Z-\eta(Z)\xi\right)\\
&= g\big((\nabla_X\varphi h)Y,Z\big)-\eta(X)g\left(\left(\nabla_\xi\varphi h\right)Y,Z\right)-\eta(Y)g\big((\nabla_X\varphi h)\xi,Z\big)\\
&\quad -\eta(Z)g\big((\nabla_X\varphi h)Y,\xi\big)+\eta(X)\eta(Y)g\left(\left(\nabla_\xi\varphi h\right)\xi,Z\right)\\
&\quad +\eta(Y)\eta(Z)g\big((\nabla_X\varphi h)\xi,\xi\big)+\eta(Z)\eta(X)g\left(\left(\nabla_\xi\varphi h\right)Y,\xi\right)\\
&\quad -\eta(X)\eta(Y)\eta(Z)g\left(\left(\nabla_\xi\varphi h\right)\xi,\xi\right)
\end{aligned}$$

denklemi yazılır. Bu denklem düzenlenirse

$$g\big((\nabla_X\varphi h)Y,\varphi^2Z\big)=-\eta(X)g\left(\left(\nabla_\xi\varphi h\right)Y,Z\right)-\eta(Y)g\big((\nabla_X\varphi h)\xi,Z\big)$$

elde edilir. (3.5) ve (3.7) denklemleri kullanılarak

$$(\nabla_X\varphi h)Y=\eta(X)\big(\nabla_\xi\varphi h\big)Y-\eta(Y)[-h^2X]-\varepsilon g(Y,-h^2X)\xi$$

$$=\eta(X)\big(\nabla_\xi\varphi h\big)Y+\eta(Y)h^2X+\varepsilon g(Y,h^2X)\xi$$

eşitliği bulunur. Burada $\big(\nabla_\xi\varphi h\big)Y=\varphi\big(\nabla_\xi h\big)Y$ olduğundan (3.33) denklemine ulaşılır.

Önerme 3.4.4. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen yarı kosimplektik manifold olsun. Eğer φh tensör alanı η-paralel ise o zaman, her X, Y vektör alanları için,

$$R(X,Y)\xi = \eta(Y)lX - \eta(X)lY \tag{3.35}$$

dir.

İspat: (3.21) denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned} R(X,Y)\xi = {} & [\eta(X)Y - \eta(Y)X] - [\eta(X)\varphi hY - \eta(Y)\varphi hX] - \eta(X)\big(\nabla_\xi \varphi h\big)Y \\ & + \eta(Y)[-h^2X] + \varepsilon g(Y, -h^2X)\xi + \eta(Y)\big(\nabla_\xi \varphi h\big)X \\ & - \eta(X)[-h^2Y] - \varepsilon g(X, -h^2Y)\xi \end{aligned}$$

elde edilir. (3.34) ifadesinden ispat tamamlanır.

Böylece Ricci operatörü ile ilgili aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Teorem 3.4.3. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen yarı kosimplektik manifold olsun. Eğer φh tensör alanı η-paralel ise o zaman, ξ vektör alanı M^{2n+1} üzerinde $Ricci$ operatörünün özvektörüdür.

İspat: $\{E_1, \dots, E_{2n+1}, \xi\}$, tanjant uzayın herhangi bir noktasındaki ortonormal bazı olmak üzere (3.31) eşitliğinden

$$\sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i g(R(E_i, Y)\xi, E_i) = \sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i [\eta(Y) g(lE_i, E_i) - \eta(E_i) g(lY, E_i)]$$

olup bu eşitlikte $Y = \xi$ alınarak

$$S(\xi, \xi) = \sum_{\dot{\imath}=1}^{2n+1} \varepsilon_i g(lE_i, E_i)$$

ifadesine ulaşılır. Buradan

$$Q\xi = trace(l)\xi \tag{3.36}$$

dır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.4.4. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$**,** bir hemen hemen yarı kosimplektik manifold olsun. Eğer φh veya h tensör alanları Kodazzi şartlarını sağlıyorsa bu durumda, $\forall$ X, Y, Z vektör alanları için $\mathcal{D}$ 'nin integral alt manifoldları total umbuliktir.

İspat: φh tensör alanı Kodazzi şartını sağlasın. O halde, X, Y, Z vektör alanları için,

$$0 = g\big((\nabla_Y \varphi h)X, Z\big) - g\big((\nabla_X \varphi h)Y, Z\big) \tag{3.37}$$

eşitliği sağlanır. (3.37) eşitliğinden

$$(\nabla_Y \varphi h)X - (\nabla_X \varphi h)Y = 0$$

yazılır. $X = \xi$ seçilerek

$$lY = \varphi^2 Y + \varphi h Y \tag{3.38}$$

denklemine ulaşılır. (3.38) eşitliğinin her iki tarafına φ uygulanıp, (3.24) eşitliği kullanıldığında

$$-2h^2 Y = 0$$

elde edilir. Sonuç olarak, $h = 0$ dır. Bu nedenle, Önerme 3.1.6 ve Önerme 3.1.7 den ispat tamamlanacaktır.

Önerme 3.4.5. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$**,** bir hemen hemen yarı kosimplektik manifold olsun. Eğer τ tensör alanı η-paralel ise o zaman, $\forall$ X, Y, Z vektör alanları için,

$$(\nabla_X \varphi h)Y = \eta(X)\big(\nabla_\xi \varphi h\big)Y - \eta(Y)\varphi h \nabla_X \xi + \varepsilon g\big((\nabla_X \varphi h)\xi, Y\big)\xi \tag{3.39}$$

denklemi geçerlidir.

İspat: Hipotez gereğince tüm X^T tanjant vektörleri için,

$$g\left((\nabla_{X^T\tau})Y^T, Z^T\right) = 0$$

eşitliği sağlanır. τ tensör alanının tanımı kullanılır ve $X^T = X - \eta(X)\xi$ olarak seçilirse

$$(\nabla_X\tau)Y = \eta(X)\left(\nabla_\xi\tau\right)Y + \eta(Y)(\nabla_X\tau)\xi + g\left((\nabla_X\tau)Y, \xi\right)\xi \tag{3.40}$$

$$(\nabla_X\tau)Y = -2\eta(Y)\nabla_X\xi - 2g(\nabla_X\xi, Y)\xi - 2(\nabla_X\varphi h)Y \tag{3.41}$$

$$(\nabla_X\tau)\xi = -2\nabla_X\xi + 2\varphi \mathrm{h}\nabla_X\xi \tag{3.42}$$

$$\left(\nabla_\xi\tau\right)Y = -2\left(\nabla_\xi\varphi h\right)Y \tag{3.43}$$

denklemleri elde edilir. (3.42), (3.43) denklemleri (3.40) ve (3.41) eşitliklerinde yerine yazılarak, bu iki denklem birbirine eşitlenirse (3.39) denklemi bulunur.

Teorem 3.4.5. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$**,** bir hemen hemen yarı kosimplektik manifold olsun. Eğer τ tensör alanı η-paralel ise o zaman, ξ vektör alanı M^{2n+1} üzerinde Ricci operatörünün özvektörüdür.

İspat: (3.40) denklemi kullanılarak

$$(\nabla_Y\varphi h)X - (\nabla_X\varphi h)Y = \eta(Y)\left(\nabla_\xi\varphi h\right)X - \eta(X)\varphi h\nabla_Y\xi$$

$$-\eta(X)\left(\nabla_\xi\varphi h\right)Y + \eta(Y)\varphi h\nabla_X\xi \tag{3.44}$$

yazılır. (3.20), (3.22), (3.44) eşitlikleri göz önüne alındığında

$$R(X, Y)\xi = \eta(Y)lX - \eta(X)lY$$

bulunur.

4. ÖRNEKLER

Örnek 4.1. R_p^{2n+1} in standart koordinatlarını $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z)$ ve $M = \{(x_1, \dots, x\{n\}, y_1, \dots, y\{n\}, z) | z \neq 0\}$ tarafından tanımlanan $M \subset \mathbb{R}_p^{2n+1}$ $(2n+1)$-boyutlu manifoldunu alalım. M nin bir bazı

$$X_i = \left(-(z+1) + \sqrt{(z+1)^2 + e^{2z}}\right)\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial z},$$
$$Y_i = \left((z+1) + \sqrt{(z+1)^2 + e^{2z}}\right)\frac{\partial}{\partial y_i},$$
$$\xi = \frac{\partial}{\partial z}, i = 1,2, \dots, n,$$

şeklinde olsun. Eğer

$$\eta = dz,$$
$$g = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\varepsilon_i}{\left(-(z+1) + \sqrt{(z+1)^2 + e^{2z}}\right)^2} dx_i^2 + \varepsilon_{n+i}\frac{1}{\left((z+1) + \sqrt{(z+1)^2 + e^{2z}}\right)} dy_i^2\right) + \varepsilon dz^2$$
$$\varphi(\xi) = 0, \varphi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{(z+1) + \sqrt{(z+1)^2 + e^{2z}}}{-(z+1) + \sqrt{(z+1)^2 + e^{2z}}}\frac{\partial}{\partial y_i},$$
$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right) = \frac{(z+1) + \sqrt{(z+1)^2 + e^{2z}}}{(z+1) - \sqrt{(z+1)^2 + e^{2z}}}\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{1}{(z+1) + \sqrt{(z+1)^2 + e^{2z}}}\frac{\partial}{\partial z},$$

olarak alınırsa M üzerindeki (φ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısının sağlandığı görülür. Üstelik $d\eta = 0$ koşulunun sağlandığı aşikârdır. Öte yandan,

$\Phi_{ii} := g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \varphi \frac{\partial}{\partial y_i}\right) = -\varepsilon_i$ dışındaki tüm Φ_{ij} ler sıfırdır, bu nedenle

$\Phi = -\sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i$ olup, $d\Phi$ dış türevi $d\Phi = 0$ dır. Sonuç olarak, φ nin Nijenhuis torsiyon tensörünün sıfır olmaması nedeniyle, manifold hemen hemen yarı kosimplektik manifolddur.

Örnek 4.2. R_p^{2n+1} in standart koordinatlarını $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z)$ ve $M = \{(x_1, \dots, x\{n\}, y_1, \dots, y\{n\}, z) | z \neq 0\}$ tarafından tanımlanan $M \subset \mathbb{R}_p^{2n+1}$ $(2n+1)$-boyutlu manifoldunu alalım. M nin bir bazı

$$X_i = \left(-1 + \sqrt{1 + e^{2z}}\right) \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial z},$$

$$Y_i = \left(1 + \sqrt{1 + e^{2z}}\right) \frac{\partial}{\partial y_i},$$

$$\xi = \frac{\partial}{\partial z}, i = 1, 2, \dots, n,$$

şeklinde olsun. Eğer

$$\eta = dz,$$

$$g = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\varepsilon_i}{\left(-1 + \sqrt{1 + e^{2z}}\right)^2} dx_i^2 + \varepsilon_{n+i} \frac{1}{\left(1 + \sqrt{1 + e^{2z}}\right)} dy_i^2 \right) + \varepsilon dz^2$$

$$\varphi(\xi) = 0, \varphi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{1 + \sqrt{1 + e^{2z}}}{-1 + \sqrt{1 + e^{2z}}} \frac{\partial}{\partial y_i},$$

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right) = \frac{1 + \sqrt{1 + e^{2z}}}{1 - \sqrt{1 + e^{2z}}} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{1}{1 + \sqrt{1 + e^{2z}}} \frac{\partial}{\partial z},$$

olarak alınırsa, M üzerindeki (φ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısının sağlandığı görülür. Üstelik $d\eta = 0$ koşulunun sağlandığı aşikârdır. Öte yandan

$\Phi_{ii} := g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \varphi \frac{\partial}{\partial y_i}\right) = -\varepsilon_i$ dışındaki tüm Φ_{ij} ler sıfırdır. Bu nedenle

$\Phi = -\sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i$ olup, $d\Phi$ dış türevi $d\Phi = 0$ dır. Sonuç olarak,

φ nin Nijenhuis torsiyon tensörünün sıfır olması nedeniyle, manifold yarı kosimplektik manifolddur.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada değme manifoldların yeni bir sınıfı olan hemen hemen yarı kosimplektik manifoldlar tanımlanarak bu manifoldların bazı temel özellikleri elde edilmiştir. Bu yapılan çalışmalar sonunda hemen hemen yarı kosimplektik (κ,μ,ν)- uzayları için genel bir sınıflandırma problemi açıktır. Ayrıca, Ricci simetrik, Ricci yarı-simetrik, yarı simetrik gibi özel tensör şartları altında hem hemen hemen yarı kosimplektik hem de (κ,μ,ν)- uzayları için ilginç sonuçlar bulunabilir. Bundan başka $divR = 0$ ve $divC = 0$ eşitlikleri bu tür uzaylar için açık uçlu problemlerdir.

KAYNAKLAR

Alsancak D., Hemen hemen yarı Kenmotsu manifoldlar, *Yüksek Lisans Tezi*, Düzce Üniversitesi, (**2013**).

Bejancu A., Duggal K.L., Real hypersurfaces of indefinite Kaehler manifolds, *Int, J. Math. Math. Sci.* 16 (**1993)** 545-556.

Blair D.E., *Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds,* Progress in Mathematics, 203. Birkhauser, Boston., (**2002**).

Boeckx E., Cho J.T., η-parallel contact metric spaces, *Differential Geometry and its Application*, 22 (**2005)** 275-285.

Boeckx E., Cho J.T., Locally symmetric contact metric manifolds, *Monatshefte für Mathematik,* 148(4) **(2006)** 269-281.

Calvaruso G., Perrone D., Contact pseudo-metric manifolds, *Differential Geometry and its Applications,* 28 (**2010**) 615-634.

Chen B., *Geometry of submanifolds,* New York, M. Dekker, (**1973**).

Chern S., Hamilton S., On Riemannian Metrics Adapted Too Three-Dimensional Contact Manifolds, *Lecture Notes in Math* **(1985)** 279-305

Chinea D., Gonzalez C., A classification of almost contact metric manifolds, *Annali di Matematica pura ed applicata*, 156(4) (**1990**) 15-36.

Cho J.T., Sharma R., Ghosh A., Contact metric manifolds with η -parallel torsion tensör, *Annals of Global Analysis and Geometry*, 34(3) ***(2008)*** 287-299.

Duggal K.L., Space time manifolds and contact structures, *Int. J. Math. Math. Sci.* 13 (**1990**) 545-554.

Duggal K.L., Bejancu, A. , *Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifold and Applications,* Kluwer, Dordrecht (**1996**).

Falcitelli M., Pastore A.M., Almost Kenmotsu f-manifolds, *Mediterranean Journal Of Mathematics* 3 (**2006**) 549-564.

Gallot S., Hulin D., Lafontaine J., *Riemann Geometry,* 3rd ed., XVI, 322 p., Springer Universitext, ISBN: 9783540204930, (**2004**).

Goldberg S.I. , Yano K., Integrability Of Almost Cosymplectic Structures, *Pacific Journal Of Mathematics*, 31(2) **(1969).**

Gray J., Some global properties of contact structures, *Annals of Mathematics,* 69 **(1959)** 421-450.

Hacısalihoğlu H. H. , Ekmekçi N. , *Tensör Geometri,* Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, (**2003**).

Janssens D., Vanhecke L., Almost contact structures and curvature tensors, *Kodai Math. J.*, 4(**1981**) 1-27.

Kenmotsu K., A class of contact Riemannian manifold, *Tohoku Math. Journal* 24 (**1972**) 93-103.

Kim T. W., Pak H. K., Canonical foliations of certain classes of almost contact metric structures, *Acta Math. Sinica, Eng. Ser.* Aug., 21(4) (**2005**) 841-846.

O'neill B., *Semi Riemannian Geometry,* A. Press, London, (**1983**).

Olszak Z., *On almost cosymplectic manifolds,* Kodai Math, 4(2) (**1981)** 239-250.

Sasaki S, On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure I, *Tohoku Math. J.,* 2 **(1960)** 459-476.

Sasaki S., Hatakeyema Y., On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure II, *Tohoku Math. J.,* 2 **(1961)** 281-294.

Sharpe R.W., Differential Geometry, Cartan's generalization of Klein's Erlangen program, *Graduate Texts in Mathematics 166*, Springer, **(1997).**

Spivak M., *Calculus on Manifolds,* Reading, Massachusetts, W.A. Benjamin, Inc., ISBN:97800805390219, (**1965**).

Takahashi T., Sasakian manifold with pseudo-Riemannian metrics, *Tohoku Math. J.* , 21 (**1969)** 271-290.

Yano K., Kon M., *Structures on manifolds,* Series in Pure Mathematics, 3.World Scientific Publishing Corp., Singapore, (**1984**).

Yıldırım M., f-Kosimplektik manifoldlar, *Yüksek Lisans Tezi*, Düzce Üniversitesi, **(2012).**

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: TAŞ, Ramazan
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 01.06.1985 / Düzce
Telefon	: 553 297 97 35
E-posta	: tas-ramazan@hotmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Yüksek Lisans	Düzce Üniversitesi/Matematik ABD	2015
Lisans	Gazi Üniversitesi/Matematik Bölümü	2008
Lise	Düzce Lisesi (Y.D.A.)	2003

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2008-2010	Anahtar Dershaneleri(Ankara)	Matematik Öğrt.
2010-2011	Jale Tezer Dershanesi(Ankara)	Matematik Öğrt.
2012-2013	Sarıdere - Kemeryanı İlköğretim O.	Matematik Öğrt.
2013-Devam	Düzce Defterdarlığı Muh. Md.	V.H.K.İ.

Yabancı Dil

İngilizce : Orta seviye