T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YAKLAŞIK C-MANİFOLDLARIN GEOMETRİSİ

DOKTORA TEZİ

YAVUZ SELİM BALKAN

MAYIS 2016

DÜZCE

KABUL VE ONAY BELGESİ

Yavuz Selim BALKAN tarafından hazırlanan Yaklaşık C-Manifoldların Geometrisi isimli lisansüstü tez çalışması, Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 18.04.2016 tarih ve 2016/411 sayılı kararı ile oluşturulan jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Üye
(Tez Danışmanı)
Prof. Dr. Nesip AKTAN
Necmettin Erbakan Üniversitesi

Üye
Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Düzce Üniversitesi

Üye
Doç. Dr. Erdal ÖZÜSAĞLAM
Aksaray Üniversitesi

Üye
Doç. Dr. Emrah Evran KARA
Düzce Üniversitesi

Üye
Yrd. Doç. Dr. Mahmut AKYİĞİT
Sakarya Üniversitesi

Tezin Savunulduğu Tarih: 12.05.2016

<u>ONAY</u>

Bu tez ile Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yavuz Selim BALKAN'ın Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora derecesini almasını onamıştır.

Doç. Dr. Resul KARA
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

12 Mayıs 2016

Yavuz Selim BALKAN

Sevgili Eşime ve Canım Oğluma

TEŞEKKÜR

Doktora öğrenimim ve bu tezin hazırlanması süresince gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Prof. Dr. Nesip AKTAN'a en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen ve yoğun çalışma dönemimde beni her zaman anlayışla karşılayan sevgili eşim Hatice BALKAN'a ve doğumu ile hayatıma farklı bir heyecan katan canım oğlum Enes Hamza BALKAN'a en samimi teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca eğitim hayatımın ilk yıllarından itibaren hiçbir desteğini esirgemeyen ve her türlü fedakarlığa katlanan sevgili annem Ayşe BALKAN'a ve fedakarlığının yanında maddi konuda da her zaman destek olan değerli babam Mehmet BALKAN'a sonsuz şükranlarımı sunarım.

Özellikle tez yazım esnasında her konuda anlayış gösteren ve yapıcı eleştirilerini hiçbir zaman esirgemeyen değerli çalışma arkadaşlarım Arş. Gör. Dr. Fuat USTA, Arş. Gör. Dr. İzzettin DEMİR, Arş. Gör. Hüseyin BUDAK, Arş. Gör. Tuba TUNÇ ve Arş. Gör. Merve İLKHAN'a teşekkürü bir borç bilirim.

12 Mayıs 2016 **Yavuz Selim BALKAN**

İÇİNDEKİLER **Sayfa**

SİMGELER VE KISALTMALAR

M	Diferensiyellenebilir manifold
g	Riemann metriği
(M,g)	Riemann manifold
R	Riemann eğriliği
$R^{\perp}$	Ortogonal konneksiyona karşılık gelen Riemann eğriliği
∇	Riemann konneksiyonu
$\nabla^{\perp}$	Ortogonal konneksiyon
$\prod$	2 -boyutlu alt uzay
S	Ricci tensör alanı
Q	Ricci operatörü
r	Skaler eğrilik
T_pM	M manifoldunun p noktasındaki tanjant uzayı
$\chi(M)$	M manifoldunun düzgün vektör alanları kümesi
J	Hemen hemen kompleks yapı
φ	$(1,1)$ tipinde ters simetrik tensör alanı
D	Dağılım fonksiyonu
$D^{\perp}$	Ortogonal dağılım
Φ	Temel 2 -form
ψ	İmmersiyon (daldırma)
h	İkinci temel form
H	Ortalama eğrilik
$\overline{\nabla}$	Vander Waerden-Bartolotti konneksiyonu
N	Nijenhuis tensör alanı
L	Lie türev operatörü
$[,]$	Lie parantez operatörü
d	Dış türev operatörü
$\overline{M}$	Esas uzay

ÖZET

YAKLAŞIK C-MANİFOLDLARIN GEOMETRİSİ

Yavuz Selim BALKAN
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi
Danışman: Prof. Dr. Nesip AKTAN
Mayıs 2016, 104 sayfa

Bu tez çalışmasında, yaklaşık manifoldların yeni bir sınıfı olan yaklaşık C-manifoldların tanımı verilmiş ve bazı eğrilik özellikleri elde edilmiştir. Elde edilen bazı özellikler, verilen örnekler üzerinde hesaplanmıştır. Ayrıca bu yeni sınıfın bazı alt manifoldları çalışılmıştır. Öte yandan yaklaşık C-manifoldların sağladığı özelliklerin, bazı D-konformal dönüşümler altında değişmez kalıp kalmadığı incelenmiştir. Bu yeni manifold sınıfı üzerinde Ricci solitonlar göz önüne alınarak bazı sınıflandırılmaları yapılmıştır. Yaklaşık C-manifoldlar genelleştirilmiş S-uzay formların alt manifoldları olarak ele alınmıştır. Son olarak bu yaklaşık C-alt manifoldların bazı sınıflandırmalarına yer verilmiştir.

Anahtar sözcükler: f-yapı, Yaklaşık C-manifold, Kesitsel eğrilik, Alt manifold, D-konformal dönüşüm, Ricci soliton, Genelleştirilmiş S uzay-form, Einstein manifold.

ABSTRACT

GEOMETRY OF NEARLY C-MANİFOLDS

Yavuz Selim BALKAN
Duzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Departmant of Mathematics

Doctoral Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Nesip AKTAN
May 2016, 104 pages

In this thesis, we introduced nearly C-manifold which is a class of nearly manifolds. Then we give some non-trivial examples to clarify some properties. On the other hand, we investigate some submanifolds of these manifolds. We search whether the properties of nearly C-manifolds are invariant under some D-conformal transformations. On this new class of manifolds, we consider Ricci solitons and we give some classifications of them. We consider nearly C-manifold as a submanifold of a generalized S-space form. On the other hand, we give some classifications of nearly C-submanifold.

Keywords: f-structure, Nearly C-manifold, Sectional curvature, Submanifold, D-conformal transformation, Ricci soliton, Generalized S space-form, Einstein manifold.

EXTENDED ABSTRACT

GEOMETRY OF NEARLY C -MANİFOLDS

Yavuz Selim BALKAN
Duzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Departmant of Mathematics
Doctoral Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Nesip AKTAN
May 2016, 104 pages

1. INTRODUCTION:

Manifold theory is important in mathematics, especially in geometry. There are two classes of manifolds with respect to their dimensions. The first one is complex manifold, which is even dimensional, the other one is contact manifold which is odd dimensional. These manifolds are also called with respect to admitting structures satisfying some properties. Complex manifolds have an almost complex structure, denoted by J , of type $(1,1)$. On the other hand, contact manifolds are characterized by a tensor field φ of type $(1,1)$. Additionally, there is a class of manifolds, which generalizes these two classes. It is called globally framed manifold of $(2n+s)$-dimensional. If $s=0$, it comes down to a complex manifold, whereas if $s=1$, then it become a contact manifold.

There is a relation between J complex structure and φ tensor field. Using this, we can get some properties on contact manifolds similar to complex manifolds. For example, considering nearly Kähler manifold, we get a class of nearly contact manifolds or almost contact manifolds.

2. MATERIAL AND METHODS:

Classification is important in manifold theory as well as in all sciences. Several different researchers introduce a lot of new structures on manifolds to classify them. On the other hand, they give some new notions to generalize structures on manifolds or submanifolds. One of the them is Ricci soliton. Ricci soliton is a generalization of

Einstein manifolds. Einstein metric on Einstein manifolds is a solution of Einstein field equations. So, they are called Einstein manifolds.

Submanifold is always an interactive topic in manifold theory from Nash's embedding theorem. From then, several authors introduced and studied new classes of submanifolds, as slant, semi slant, invariant, anti-invariant, CR-submanifolds etc.

Invariance of structures on manifolds is so important. Structural properties of manifolds are invariant under some D-conformal transformations. On the other hand, using D-conformal transformations, one can get some new classes of manifolds and one can compute a topological property of manifolds, which is called Betti number.

3. RESULTS AND DISCUSSIONS:

In this thesis work, combining some concepts in the literature, we introduce a new class of globally framed manifolds. Such type manifolds are called nearly C-manifolds. When we define nearly C-manifolds, we use the relation between almost complex structure and globally framed structure. Additionally, we consider Kähler conditions for this new class of manifold.

On nearly C-manifolds, we investigate some Riemannian curvature properties and φ-sectional curvature properties. We obtain the scalar curvature in the same time. Furthermore, considering nearly C-manifolds as a Ricci soliton, we give some classifications of Ricci solitons.

We investigate some submanifolds of this type manifold, and we get interesting results. In view of D-conformal transformations, we obtained some necessary and sufficient conditions. Moreover, we consider nearly C-manifolds as submanifolds of generalized S-space form. We obtain some important results on nearly C-submanifolds. Finally we give some several non-trivial examples to prove existence of these type manifolds. We compute some properties on these examples.

4. CONCLUSION AND OUTLOOK:

In view of this work, one can study some another classes of these type manifolds. Considering the definition of nearly C-manifolds, one can introduce some new classes of nearly globally framed manifolds. Focusing on the new classifications of Ricci soliton, one can give characterizations of these Ricci solitons. So, this work is a basic work for researchers who want to study on these topics. Since these topics are always interesting and they contain useful results for other sciences, especially physics, a lot of researchers want to study on these topics. On the other hand, examples on this study show that these results give another opportunity to determine the character of some manifolds. Furthermore, some other open problems on the literature are considered for these type of manifolds.

1. GİRİŞ

Diferensiyel geometri alanında çalışma yapan araştırmacılar için manifold teorinin önemli bir yeri vardır. Manifoldlar, topolojik uzaylar üzerine kurulu bazı özel şartlara sahip yerel olarak Euclid uzay olan yapılardır (Willmore 1959). Bu sayede manifold üzerinde diferensiyellenebilir yapılar tanımlanıp bazı hesaplamalar yapmak mümkün hale gelir (Willmore 1959). Diferensiyellenebilir manifoldların başta fizik olmak üzere birçok alana uygulamaları mevcuttur (O'Neill 1983).

Eğer bir manifold üzerinde bir Riemann metriği tanımlıysa bu manifolda Riemann manifold denir (Willmore 1959). Riemann manifoldlar, temelde tek boyutlu ve çift boyutlu manifoldlar olmak üzere iki gruba ayrılırlar (Yano 1984). Çift boyutlu manifoldlar kompleks manifold olarak adlandırılırken tek boyutlu manifoldlara değme manifold denir (Yano 1984).

Kompleks manifold ile ilgili çalışmalar, 1930 yılında Schouten ve Dantzig'in Riemann metriği ve afin konneksiyona sahip manifoldların diferensiyel geometrideki sonuçlarını bu uzaylara taşımalarıyla başlar. Bu çalışmada, simetrik konneksiyon ile birlikte Hermite adı verilen uzay elde edilir (Schouten ve Dantzig 1930). 1933 yılında ise bunlardan bağımsız olarak, Kähler tarafından bugün Kähler manifoldlar olarak adlandırılan aynı konneksiyona sahip manifoldlar tanımlanmıştır (Kähler 1933). Bundan sonra 1947 yılında Weil tarafından kompleks manifoldlar üzerinde karesi eksi birime eşit olan $(1,1)$ mertebeli J tensörünün varlığı ispatlanmıştır (Weil 1947). Ehresmann, 1947 ve 1950 yıllarında yaptığı çalışmalarda, bu tensörü kullanarak çift boyutlu diferensiyellenebilir manifold olan hemen hemen kompleks manifoldları tanımlamıştır Bir kompleks manifoldun, hemen hemen kompleks manifold olduğu fakat bunun tersinin doğru olmadığını göstermiştir (Ehresmann 1950).

Riemann manifoldların tek boyutlu bir sınıfı olan değme manifoldar ise 1958 yılında Boothby ve Wang tarafından tanımlanmıştır (Boothby ve Wang 1958). Bu çalışmada, değme manifoldların topolojik özellikleri yoğun olarak çalışılmıştır. Burada verilen tanıma göre, $(2n+1)$-boyutlu bir M manifoldu üzerinde $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ şartını sağlayan bir η 1-formu varsa M bir değme manifold olur (Boothby ve Wang 1958). 1959 yılında Gray tarafından yapılan bir çalışmada, bu manifold sınıfının topolojik özelliklerinin incelenmesine devam edilmiştir (Gray 1959). Aynı çalışmada, tek boyutlu manifoldların yeni bir sınıfı olan hemen hemen değme manifoldar tanımlanmıştır. Buna göre tek boyutlu bir manifoldun tanjant demetinin yapısal grubu $U(n)\times 1$'e indirgenebiliyorsa bu manifold hemen hemen değme manifold olarak isimlendirilir (Gray 1959). Bir değme manifold aynı zamanda bir hemen hemen değme manifold olur. Fakat tersi doğru değildir (Gray 1959).

1960 yılında Sasaki tek boyutlu manifoldlara farklı bir açıdan yaklaşarak bu manifoldlar üzerinde hemen hemen kompleks yapıya benzer olarak yeni bir yapı tanımlamıştır (Sasaki 1960). Buna göre M $(2n+1)$-boyutlu bir manifold, φ $(1,1)$ tipinde bir tensör alanı, ξ bir vektör alanı ve η bir 1-form olmak üzere, eğer

$$\eta(\xi)=1, \quad rank(\varphi)=2n, \quad \varphi\xi=0, \quad \eta\circ\varphi=0 \quad \varphi^2=-I+\eta\otimes\xi$$

koşulları sağlanıyorsa M'ye (φ,ξ,η)-yapısına sahiptir denir (Sasaki 1960). Öte yandan eğer M üzerinde, $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$g(X,\xi)=\eta(X), \quad g(\varphi X,\varphi Y)=g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y)$$

koşullarını sağlayan bir Riemann metriği tanımlı ise M'nin (φ,ξ,η,g)-yapısına sahip olduğu söylenir (Sasaki 1960). Bu çalışmada, (φ,ξ,η,g)-yapısına sahip $(2n+1)$-boyutlu bir M manifoldunun tanjant demetinin yapısal grubunun $U(n)\times 1$'e indirgenebildiği yani hemen hemen değme bir manifold olduğu ve bunun tersinin de doğru olduğu ispatlanmıştır (Sasaki 1960). Öte yandan değme bir manifoldun (φ,ξ,η,g)-yapısına sahip olduğu gösterilmiştir. Ayrıca değme manifold üzerindeki η değme 1-formunun dış türevinin yani $d\eta$'nın

$$\Phi(X,Y)=g(X,\varphi Y)$$

şeklinde tanımlanan temel 2-forma eşit olduğu görülmüştür (Sasaki 1960). Daha sonra 1961 yılında, Sasaki ve Hatakeyama tarafından hemen hemen değme bir yapının değme bir yapı olma koşulu olan normallik şartı elde edilmiştir (Sasaki ve Hatakeyama 1961).

Riemann manifoldların diğer bir sınıfı, kompleks manifoldların ve değme manifoldların bir genelleştirilmesi olan $(2n+s)$-boyutlu çatılı manifoldlardır. Öncelikle 1961 yılında Yano

$$f^3+f=0$$

koşulunu sağlayan f-yapıyı tanımlamıştır (Yano 1961). Daha sonra 1964 yılında, Ishihara ve Yano tarafından bu yapının integrallenebilir olması için gerekli ve yeterli koşullar verilmiştir (Ishihara ve Yano 1964). 1969 yılında ise Goldberg ve Yano, değme yapılara benzer olarak global çatılı f-yapıyı ve buna bağlı olarak da global çatılı f-manifoldları tanımlamıştır (Goldberg ve Yano 1969). Bundan sonra bu manifold üzerindeki çalışmalar yoğunlaşmıştır. 1970 yılında, Blair global çatılı f-manifoldların birer sınıfı olan K-manifold, S-manifold ve C-manifoldu tanıtmıştır (Blair 1970). Bu alanda günümüze kadar birçok çalışma yapılmıştır. Günümüze yakın bir tarih olan 2007 yılında, Falcitelli ve Pastore hemen hemen Kenmotsu f-manifoldun tanımını vermiştir (Falcitelli ve Pastore 2007). 2014 yılında ise Öztürk ve diğ. tarafından, hemen hemen C-manifold ve hemen hemen Kenmotsu f-manifoldun bir genelleştirilmesi olan hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldlar tanımlanmıştır (Öztürk ve diğ. 2014).

Manifoldların önemli bir sınıfı da Einstein manifold olarak adladırılan manifoldlardır. Bu manifold sınıfı üzerinde tanımlı olan metrik, Einstein alan denklemlerinin çözümü olduğundan dolayı fizik alanında çalışma yapan araştırmacılar için de özel bir öneme sahiptir. Bu manifold sınıfını 1987 yılında Besse tanımlamıştır (Besse 1987). Bu manifoldların bir genelleştirilmesi olan Ricci solitonlar ise 1988 yılında Hamilton tarafından ifade edilmiştir (Hamilton 1988).

Elde edilen veya tanımlanan bir yapının kararlığı her bilim dalında olduğu gibi matematikte de önem arz etmektedir. Bu yüzden manifold üzerindeki yapıların bazı dönüşümler altında değişmez kalması oldukça önemlidir. Bunu test etmenin yöntemlerinden biri de D-konformal dönüşümlerdir. Bu dönüşümlerden bir tanesi 1970 yılında, Tanno tarafından ifade edilmiştir (Tanno 1967). Bu dönüşümler, bazen manifold üzerindeki bazı özellikleri daha kolay elde etmede kullanılırken bazen de var olan bir manifolddan yeni bir manifold türü elde etmede kullanılır.

Diferensiyel geometrinin önemli çalışma alanlarından bir tanesi de alt manifoldlardır. Nash'in ünlü teoremini ifade etmesinden itibaren bu alan birçok araştırmacının ilgisini çekmiştir. Bu konuda birçok çalışma yapılmış ve alt manifoldların birçok sınıflandırılması verilmiştir. Bunlardan bazıları, 1978 yılında Bejancu tarafından tanımlanan CR-alt manifoldlar ve 1990 yılında Chen tarafından ifade edilen slant alt manifoldlardır. Bu iki alt manifold türü birçok alt manifold sınıfını içermektedir

(Bejancu 1978) (Chen 1990).

Yapılan bu çalışmalar ışığında mevcut tez çalışmasında, yaklaşık Kähler manifoldlara benzer olarak global çatılı manifoldlar üzerinde yaklaşık C-manifoldlar tanımlanmıştır. Bu manifold sınıfının bazı temel eğrilik özellikleri incelenerek yapısı karakterize edilmiştir. Ayrıca yaklaşık C-manifoldun bir C-manifold olması için gerekli ve yeterli koşullar araştırılmıştır. Öte yandan yaklaşık bir C-manifoldun sabit bir φ-kesitsel eğriliğe sahip olması durumunda Riemann eğrilik tensörü hesaplanmıştır. Bu yeni manifold sınıfı bazı özel D-konformal dönüşümlere tabi tutularak yapı deforme edilmiş ve sahip olduğu özelliklerin korunup korunmadığı incelenmiştir. Bazı özel alt manifoldları ele alınıp yapısı sınıflandırılmıştır. Ayrıca yaklaşık C-manifoldlar bir Ricci soliton gibi ele alınıp potansiyel alanın yapısına göre genel bir sınıflandırılması yapılmıştır. Bu manifold türü genelleştirilmiş S-uzay formlarının bir alt manifoldu olarak ele alınmıştır. Bu yaklaşık C-alt manifoldların genelleştirilmiş S-uzay formlarının bir alt manifoldu olması için bazı gerekli ve yeterli koşullar ifade ve ispat edilmiştir. Ayrıca bu yaklaşık C-alt manifoldların bazı sınıflandırmaları yapılmıştır. Son olarak yaklaşık C-manifoldların varlığına dair aşikar olmayan bazı örneklere yer verilmiştir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. RİEMANN MANİFOLDLAR

Tanım 2.1.1. M, C^{∞} sınıfından n-boyutlu manifold olsun. $\chi(M)$, M üzerindeki düzgün vektör alanlarının uzayı ve $C^{\infty}(M,R)$'de reel değerli C^{∞} sınıfından fonksiyonların halkası olmak üzere

$$g:\chi(M)\times\chi(M)\to C^{\infty}(M,R)$$

şeklindeki simetrik, bilineer ve pozitif tanımlı g dönüşümüne M üzerinde bir Riemann metrik tensörü ve (M,g) ikilisiyle verilen manifolda da Riemann manifoldu denir. M manifoldunun p_1 ve p_2 şeklindeki herhangi iki noktası için M üzerinde bu noktaları birleştiren bir eğri bulunabiliyorsa M'ye bağlantılı manifold adı verilir (Willmore 1959).

Tanım 2.1.2. M, C^{∞} sınıfından bir manifold olsun. $\chi(M)$, M üzerindeki düzgün vektör alanlarının uzayı olmak üzere $\forall f,g\in C^{\infty}(M,R)$ ve $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$ için

$$\begin{aligned}\nabla:\chi(M)\times\chi(M)&\to\chi(M)\\ (X,Y)&\to\nabla(X,Y)=\nabla_X Y\end{aligned}$$

dönüşümü

(1) $\nabla_X(Y+Z)=\nabla_X Y+\nabla_X Z$

(2) $\nabla_{(fX+gY)}Z=f\nabla_X Z+g\nabla_Y Z$

(3) $\nabla_X fY=X(f)Y+f\nabla_X Y$

özelliklerini sağlıyorsa ∇'ya M üzerinde afin konneksiyon denir (Willmore 1959).

Tanım 2.1.3. (M,g) n-boyutlu Riemann manifold ve ∇ da M üzerinde afin konneksiyon olsun. Bu durumda ∇ dönüşümü $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$ için

(1) $\nabla_X Y-\nabla_Y X=[X,Y]$

(2) $Xg(Y,Z)=g(\nabla_X Y,Z)+g(Y,\nabla_X Z)$

şartlarını sağlıyorsa ∇'ya M üzerinde sıfır torsiyonlu Riemann konneksiyonu veya M'nin Levi-Civita konneksiyonu denir (Willmore 1959).

Tanım 2.1.4. (M,g) bir Riemann manifold ve ∇ da M üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu olsun. $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} &R:\chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M)\to\chi(M) \\ &(X,Y,Z)\to R(X,Y,Z)=\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z \end{aligned} \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanan $(1,3)$ tipindeki R tensör alanına M 'nin Riemann eğrilik tensörü denir. Bu tensor alanı $\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için

(1) $R(X,Y)Z=-R(Y,X)Z$

(2) $g(R(X,Y)Z,W)=-g(R(X,Y)W,Z)$

(3) $R(X,Y)Z+R(Y,Z)X+R(Z,X)Y=0$

(4) $g(R(X,Y)Z,W)=g(R(Z,W)X,Y)$

özelliklerini sağlar (Willmore 1959).

Önerme 2.1.1. (M,g) Riemann manifold, ∇ M üzerinde Levi-Civita konneksiyonu ve φ de $(1,1)$ tipinde bir tensör alanı olsun. Bu durumda

$$\nabla_X(\varphi Y)=(\nabla_X\varphi)Y+\varphi(\nabla_X Y) \tag{2.2}$$

olur (Willmore 1959).

Önerme 2.1.2. (M,g) Riemann manifold olsun. F simetrik tensör alanı olmak üzere $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için

$$g((\nabla_X F)Y,Z)=g(Y,(\nabla_X F)Z)$$

ifadesi sağlanır (Willmore 1959).

Önerme 2.1.3. (M,g) Riemann manifold olsun. G ters simetrik tensör alanı olmak üzere $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için

$$g((\nabla_X G)Y,Z)=-g(Y,(\nabla_X G)Z)$$

eşitliği geçerlidir (Willmore 1959).

Tanım 2.1.5. (M,g) Riemann manifold ve T_pM de M 'nin p noktasındaki tanjant uzayı olsun. $\prod$, bu tanjant uzayın 2-boyutlu alt uzayı olmak üzere $V,W \in \prod$ vektörleri üzerine kurulan paralelkenarın alanı

$$g(V,V)g(W,W)-(g(V,W))^2 \neq 0$$

şeklinde tanımlanır. Bu durumda

$$K(V,W)=\frac{g(R(V,W)W,V)}{g(V,V)g(W,W)-(g(V,W))^2}$$

denklemine 2 -boyutlu $\prod$ alt uzayının kesit eğriliği denir ve $K(\prod)$ ile gösterilir (Willmore 1959).

Tanım 2.1.6. (M,g) n -boyutlu Riemann manifold ve $\{e_1,\ldots,e_n\}$ kümesi de bir $p\in M$ noktasındaki tanjant uzayın ortonormal bazı olsun. $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$\begin{aligned} &S:\chi(M)\times\chi(M)\to\Re \\ &(X,Y)\to S(X,Y)=\sum_{i=1}^{n}g(R(e_i,X)Y,e_i) \end{aligned} \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanan $(0,2)$-tipindeki S tensör alanına M üzerinde Ricci eğrilik tensörü denir. Ayrıca $(0,2)$-tipindeki Q Ricci operatörü

$$S(X,Y)=g(QX,Y)$$

ile ifade edilir (Willmore 1959).

Tanım 2.1.7. (M,g) n -boyutlu Riemann manifold olsun. $\{e_1,\ldots,e_n\}$ kümesi de bir $p\in M$ noktasındaki tanjant uzayın ortonormal bir bazı olmak üzere

$$r=\sum_{i=1}^{n}S(e_i,e_i) \tag{2.4}$$

ifadesine M ’nin skaler eğriliği denir (Willmore 1959).

Tanım 2.1.8. (M,g) Riemann manifold ve ρ da M üzerinde pozitif tanımlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda $g^*=\rho^2 g$ eşitliği M üzerinde bir metrik değişimi tanımlar. Burada herbir noktadaki iki vektör arasındaki açı değişmez kaldığından bu metrik değişimine metriğin konformal değişimi denir. Eğer ρ fonksiyonu sabit bir fonksiyon ise bu konformal değişim homotetik değişim olarak adlandırılır. Eğer bu sabit fonksiyon özel olarak 1’e eşit ise bu dönüşüm bir izometri olur (Kobayashi ve Nomizu 1963).

Ayrıca eğer bir g Riemann metriği yerel olarak düzlemsel olan bir g^* Riemann metriği ile konformal olarak bağlantılı ise M Riemann manifolduna konformal düzlemsel manifold denir (Kobayashi ve Nomizu 1963).

Teorem 2.1.1. (M,g) sabit κ eğriliğine sahip Riemann manifold olsun. Bu durumda R Riemann eğriliği $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ vektör alanları için

$$R(X,Y)Z = \kappa[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y]$$

şeklinde ifade edilir (Kobayashi ve Nomizu 1963).

Tanım 2.1.9. κ sabit eğriliğine sahip, tam ve bağlantılı n-boyutlu M manifolduna uzay form denir ve $M(\kappa)$ ile gösterilir (Kobayashi ve Nomizu 1963).

Sonuç 2.1.1. (M,g) sabit κ eğriliğine sahip bir uzay form olsun. Eğer $\kappa = 0$ ise $M(\kappa)$ n-boyutlu Euclid uzayı, $\kappa = \frac{1}{r^2}$ ise $M(\kappa)$ r yarıçapına sahip n-boyutlu hiperküre ve $\kappa = -\frac{1}{r^2}$ ise de $M(\kappa)$ n-boyutlu hiperbolik uzaydır (Kobayashi ve Nomizu 1969).

Tanım 2.1.10. M, C^∞ sınıfından bir manifold olsun. Eğer

$$\begin{aligned} \phi : I \times M &\to M \\ (t,p) &\to \phi_t(p) \end{aligned}$$

dönüşümü

(1) $\forall t \in I$ ve $\forall p \in M$ için, $\phi_t : p \to \phi_t(p)$ bir diffeomorfizm

(2) $\forall t,s \in I$ ve $\forall p \in M$ için, $\phi_{t+s}(p) \to \phi_t(\phi_s(p))$

özelliklerini sağlıyorsa ϕ dönüşümüne M manifoldunun diferensiyellenebilir 1-parametreli bir grubu denir (Kobayashi ve Nomizu 1963).

Tanım 2.1.11. M C^∞ sınıfından bir manifold, X, M üzerinde bir vektör alanı ve ϕ_t de X tarafından gerilmiş yerel dönüşümlü 1-parametreli bir grup olsun. Bu durumda bir K tensör alanı ve bir $p \in M$ noktası için

$$(L_X K)_p = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left[K_p - (\phi_t K)_p\right]$$

ile tanımlanan $(L_X K)$ dönüşümüne K tensör alanının X vektör alanı yönündeki Lie türevi denir (Kobayashi ve Nomizu 1963).

Önerme 2.1.4. M, C^∞ sınıfından bir manifold olsun. M üzerindeki X vektör alanı yönündeki Lie türevi

(1) $\forall Y,Z \in \chi(M)$ vektör alanları için, $L_X(Y \otimes Z) = (L_X Y) \otimes Z + Y \otimes (L_X Z)$

(2) f , K cismi üzerinde bir vektör alanı olmak üzere $L_X f = X(f)$

(3) $\forall V \in \chi(M)$ için, $L_X V = [X,V]$

özelliklerini sağlar (Kobayashi ve Nomizu 1963).

Tanım 2.1.12. (M,g) Riemann manifold olsun. M üzerindeki $\forall X$ vektör alanı için $L_X g = 0$ oluyorsa X vektör alanına bir Killing vektör alanı denir (Kobayashi ve Nomizu 1963).

Tanım 2.1.13. M C^∞ sınıfından n-boyutlu bir manifold, w 1-form ve $\tilde{w}$ da 2-form olsun. Bu 1-form ve 2-formun dış türevleri $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için sırasıyla

$$dw = \frac{1}{2}\{X(w(Y)) - Y(w(X)) - w([X,Y])\}$$

ve

$$d\tilde{w} = \frac{1}{3}\{X(w(Y,Z)) + Y(w(Z,X)) + Z(w(X,Y))$$
$$- w([X,Y],Z) - w([Y,Z],X) - w([Z,X],Y)\}$$

şeklinde tanımlanır (Kobayashi ve Nomizu 1963).

2.2. HEMEN HEMEN KOMPLEKS MANİFOLDLAR

Tanım 2.2.1. M n-boyutlu diferensiyellenebilir reel manifold olsun. $\forall p \in M$ noktasındaki T_pM tanjant uzayının $J^2 = -I$ şartını sağlayan J endomorfizmine M üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı denir. Sabit bir hemen hemen kompleks yapıya sahip manifolda hemen hemen kompleks manifold denir. Burada I birim dönüşümü simgelemektedir ve n bir çift tamsayıdır (Ehresmann 1950).

Tanım 2.2.2. M n-boyutlu hemen hemen kompleks manifold ve J de M üzerinde hemen hemen kompleks yapı olsun. J 'nin Nijenhuis tensörü

$$N(X,Y) = J^2[X,Y] + [J(X),J(Y)] - J[J(X),Y] - J[X,(J)Y] \tag{2.5}$$

şeklinde tanımlanan vektör değerli N bilineer fonksiyonudur (Nijenhuis ve Woolf 1963).

Tanım 2.2.3. M n-boyutlu manifold olsun. M 'nin $\forall p \in M$ noktasına bu noktadaki T_pM tanjant uzayının alt uzayı olan r-boyutlu bir D_p alt uzay atayan D fonksiyonuna

M üzerinde r-boyutlu bir dağılım denir (Willmore 1959).

Eğer $\forall p \in M$ noktasının bir U komşuluğu varsa ve bu U komşuluğu üzerindeki r tane diferensiyellenebilir $X_1, \ldots, X_r$ vektör alanları $\forall q \in U$ noktasındaki D_q alt uzayın bir bazı oluyorsa, bu D dağılımı diferensiyellenebilirdir denir (Willmore 1959).

M bir manifold, D, M üzerinde bir dağılım ve $\widetilde{M}$ de M'nin bir alt manifoldu olsun. $\widetilde{M}$'nın $\forall x \in \widetilde{M}$ noktasındaki tanjant uzayı bu noktadaki D_x alt uzayı tarafından kapsanıyorsa, $\widetilde{M}$ alt manifolduna M'nin integral alt manifoldu denir (Willmore 1959).

Eğer M manifoldunun $\forall m \in M$ noktasının n-boyutlu bir integral alt manifoldu varsa bu n-boyutlu dağılıma tamamen integrallenebilirdir denir (Willmore 1959).

Teorem 2.2.1. Hemen hemen kompleks bir manifold üzerindeki hemen hemen J kompleks yapısının tamamen integrallenebilir olması için gerekli ve yeterli koşul Nijenhuis tensörünün sıfır olmasıdır (Nijenhuis ve Woolf 1963).

Tanım 2.2.4. Nijenhuis tensörü sıfır olan hemen hemen kompleks bir manifold kompleks manifold olarak adlandırılır (Nijenhuis ve Woolf 1963).

Tanım 2.2.5. (M, g) hemen hemen kompleks bir manifold olsun. Eğer M üzerinde $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(J(X), J(Y)) = g(X, Y) \tag{2.6}$$

şartını sağlayan bir g metriği bulunuyorsa M hemen hemen kompleks manifolduna hemen hemen Hermit manifoldu ve (J, g) ikilisine de hemen hemen Hermit yapısı denir (Schotuen ve Dantzig 1930).

Teorem 2.2.2. M, J hemen hemen kompleks yapısına ve g Hermit metriğine sahip hemen hemen Hermit manifold olsun. Bu durumda g Riemann konneksiyonun ∇ kovaryant türevi, $\widetilde{J}$ temel iki formu ve N Nijenhuis tensörü $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$2g((\nabla_X J)Y, Z) = g(J(X), N(Y, Z)) - 3d\widetilde{J}(X, J(Y), J(Z)) + 3d\widetilde{J}(X, Y, Z) \tag{2.7}$$

eşitliğini sağlar (Kobayashi ve Nomizu 1969).

Tanım 2.2.6. M n-boyutlu hemen hemen Hermit manifold olsun. X ve JX

tarafından oluşturulan düzleme M manifoldunun X tarafından gerilen holomorfik kesiti denir. X tarafından belirlenen holomorfik kesitsel eğrilikle ilişkili olan M ’nin herhangi bir noktasındaki $k(X)$ kesitsel eğriliğe M manifoldunun X ’e göre kesitsel eğriliği denir ve

$$k(X) = -\frac{g(R(X, JX)X, JX)}{[g(X, X)]^2} \tag{2.8}$$

şeklinde tanımlanır (Kobayashi ve Nomizu 1969).

Tanım 2.2.7. N Nijenhuis tensörü sıfır olan hemen hemen Hermit manifolda, Hermit manifold denir (Kobayashi ve Nomizu 1969).

Teorem 2.2.3. Bir hemen hemen Hermit manifoldun, Hermit manifold olması için gerekli ve yeterli koşul

$$(\nabla_X J)(Y) = (\nabla_{J(X)} J)(Y) \tag{2.9}$$

olmasıdır (Kobayashi ve Nomizu 1969).

Tanım 2.2.8. $(\nabla_X J)(Y) = 0$ koşulunu sağlayan bir hemen hemen Hermit manifolda, Kähler manifold denir (Kobayashi ve Nomizu 1969).

Teorem 2.2.4. Bir hemen hemen Hermit manifoldun, bir Kähler manifold olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\nabla_X J(Y) = J(\nabla_X Y)$$

olmasıdır (Kobayashi ve Nomizu 1969).

2.3. YAKLAŞIK KÄHLER MANİFOLDLAR

Tanım 2.3.1. M , J hemen hemen kompleks yapısına ve g Riemann metriğine sahip n-boyutlu hemen hemen Hermit manifold olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \chi(M)$ vektör alanı için

$$J^2 = -I, \quad g(J(X), J(Y)) = g(X, Y)$$

olur. Eğer M üzerindeki J hemen hemen kompleks yapısı

$$(\nabla_X J)(Y) + (\nabla_Y J)(X) = 0 \tag{2.10}$$

ifadesini sağlarsa M ’ye yaklaşık Kähler manifold veya hemen hemen Tachibana manifold ya da hemen hemen K-manifold denir (Gray 1970).

Eğer hemen hemen bir Tachibana manifold üzerinde Nijenhuis tensörü sıfır oluyorsa bu manifolda Tachibana manifold denir (Gray 1970).

Teorem 2.3.1. Eğer n-boyutlu bir M yaklaşık Kähler manifoldun N Nijenhuis tensörü sıfır ise M bir Kähler manifold olur. Başka bir ifadeyle eğer yaklaşık Kähler manifoldun hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir ise manifold, Kähler manifolda dönüşür (Gray 1970).

Teorem 2.3.2. Bir yaklaşık Kähler manifoldun R eğrilik tensörü $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(R(X,Y)X,Y) = g(R(X,Y)JX, JY) + g((\nabla_X J)(Y), (\nabla_X J)(Y)) \tag{2.11}$$

eşitliğini sağlar (Gray 1970).

Sonuç 2.3.1. Teorem 2.3.2.'den R eğrilik tensörünün $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için

$$g(R(X,Y)Z,W) = g(R(JX, JY)JZ, JW) \tag{2.12}$$

ifadesini sağladığı görülür (Gray 1970).

Teorem 2.3.3. Eğer n-boyutlu bir M yaklaşık Kähler manifoldu $\forall p \in M$ noktasında, c sabit kesitsel eğriliğine sahip ise bu durumda M'nin R Riemann eğrilik tensörü $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} g(R(X,Y)Z,W) &= \frac{c}{4}\{g(X,W)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,W) \\ &+ g(X, J(W))g(Y, J(Z)) - g(X, J(Z))g(Y, J(W)) \\ &- 2g(X, J(Y))g(Z, J(W))\} + \frac{1}{4}\{g((\nabla_X J)W, (\nabla_Y J)Z) \\ &- g((\nabla_X J)Z, (\nabla_Y J)W) - 2g((\nabla_X J)Y, (\nabla_Z J)W)\} \end{aligned} \tag{2.13}$$

şeklindedir (Gray 1970).

Teorem 2.3.4. M, Kähler olmayan sabit holomorfik kesitsel eğriliğe sahip n-boyutlu yaklaşık Kähler manifold olsun. Bu durumda

$$\|R\|^2 = g(R,R) = \frac{6n+4}{25n(n+2)} r^2 \tag{2.14}$$

olup bu değer sabittir (Gray 1970).

2.4. HEMEN HEMEN DEĞME MANİFOLDLAR

Tanım 2.4.1. M $(2n+1)$-boyutlu bir manifold, φ,ξ,η da M üzerinde sırasıyla $(1,1)$ tipinde bir tensör alanı, bir vektör alanı ve bir 1-form olsun. X, M üzerinde bir vektör alanı olmak üzere eğer φ,ξ,η

$$\eta(\xi)=1 \tag{2.15}$$

$$\varphi^2 X=-X+\eta(X)\xi \tag{2.16}$$

özelliklerini sağlıyorsa bu (φ,ξ,η) üçlüsüne M üzerinde bir hemen hemen değme yapı ve bu yapı ile birlikte M 'ye hemen hemen değme manifold denir (Sasaki 1960).

Önerme 2.4.1. Bir (φ,ξ,η) hemen hemen değme yapısı için

$$\varphi\xi=0 \tag{2.17}$$

$$\eta\circ\varphi=0 \tag{2.18}$$

$$rank\varphi=2n \tag{2.19}$$

ifadeleri sağlanır (Sasaki 1960).

Tanım 2.4.2. M, $(2n+1)$-boyutlu hemen hemen değme manifold ve g de M üzerinde bir Riemann metriği olsun. Eğer g metriği

$$\eta(X)=g(X,\xi) \tag{2.20}$$

$$g(\varphi X,\varphi Y)=g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y) \tag{2.21}$$

şartlarını sağlarsa g 'ye M üzerinde bir hemen hemen değme metrik, (φ,ξ,η,g) yapısına hemen hemen değme metrik yapı ve M 'ye de bu yapı ile birlikte hemen hemen değme metrik manifold denir (Sasaki 1960).

Sonuç 2.4.1. M manifoldu (φ,ξ,η,g) hemen hemen değme metrik yapısı ile verilsin. Bu durumda g metriği $\forall X,Y\in\chi(M)$ vektör alanı için

$$g(\varphi X,Y)=-g(X,\varphi Y) \tag{2.22}$$

eşitliğini sağlar (Sasaki 1960).

Tanım 2.4.3. (φ,ξ,η,g) bir M manifoldu üzerinde hemen hemen değme metrik yapı olmak üzere $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$\Phi(X,Y)=g(X,\varphi Y) \tag{2.23}$$

şeklinde tanımlanan Φ dönüşümüne hemen hemen değme metrik yapının temel 2-formu denir (Sasaki 1960).

Tanım 2.4.4. M $2n$-boyutlu hemen hemen kompleks bir manifold ve J de bu manifold üzerindeki hemen hemen kompleks yapı olsun. Eğer bu J hemen hemen kompleks yapısı $M \times \Re$ $(2n+1)$-boyutlu manifold üzerinde integrallenebilir ise bu tek boyutlu manifold üzerindeki (φ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı normaldir denir (Sasaki ve Hatakeyama 1961).

Önerme 2.4.2. M $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme manifold olsun. M üzerindeki, (φ, ξ, η) hemen hemen değme yapısının normal olması için gerekli ve yeterli koşul

$$N_{\varphi} + 2d\eta \otimes \xi = 0 \tag{2.24}$$

olmasıdır. Burada N_{φ}, φ tensör alanına göre Nijenhuis tensörüdür (Sasaki ve Hsu 1962).

Tanım 2.4.5. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ $(2n+1)$-boyutlu hemen hemen değme metrik manifold ve Φ de M üzerinde bir 2-form olsun.

1) Eğer $d\eta = \Phi$ ve $d\Phi = 0$ ise M manifolduna değme metrik manifold denir. Ayrıca eğer M manifoldu normal ise M'ye normal değme metrik manifold denir (Sasaki 1960).

2) Eğer $d\eta = 0$ ve $d\Phi = 0$ ise M manifolduna hemen hemen kosimplektik manifold denir. Normal bir hemen hemen kosimplektik manifolda kosimplektik manifold denir (Goldberg ve Yano 1969).

(3) Eğer $d\eta = 0$ ve $d\Phi = 2\eta \wedge \Phi$ ise M manifolduna hemen hemen Kenmotsu manifold denir. M hemen hemen Kenmotsu manifoldu normal ise M Kenmotsu manifold olarak adlandırılır (Kenmotsu 1972).

(4) Eğer $d\eta = 0$ ve $d\Phi = 2\alpha\eta \wedge \Phi$ ise M manifolduna hemen hemen α-kosimplektik manifold denir. Burada $\alpha \in R$'dir. Hemen hemen α-kosimplektik manifold normal olduğunda α-kosimplektik manifolda dönüşür (Kim ve Pak 2005).

2.5. GLOBAL ÇATILI f -MANİFOLDLAR

Tanım 2.5.1. M $(2n+s)$-boyutlu bir manifold olsun. M üzerinde tanımlı null olmayan ve

$$\varphi^3 + \varphi = 0 \tag{2.25}$$

şartını sağlayan $(1,1)$ tipindeki φ tensör alanına bir f -yapı denir. Bu f -yapı ile birlikte M 'ye f -manifold denir (Yano 1961).

Önerme 2.5.1. M $(2n+s)$-boyutlu bir manifold ve φ de M üzerinde tanımlı bir f -yapı olsun. Bu durumda, φ 'nin rankı sabittir (Stong 1977).

Tanım 2.5.2. M $(2n+s)$-boyutlu manifold ve φ de M üzerinde tanımlı bir f -yapı olsun. Eğer $rank\varphi = 2n$ ise yani $s = 0$ ise φ f -yapısına bir hemen hemen kompleks yapı denir. Eğer $rank\varphi = 2n+1$ ise yani $s = 1$ ise φ f -yapısı bir hemen hemen değme yapıya dönüşür (Goldberg ve Yano 1971).

Yukarıdaki tanımdan da görüleceği üzere f -yapı, hemen hemen değme yapı ile hemen hemen kompleks yapının bir genelleştirilmesidir.

Tanım 2.5.3. M $(2n+s)$-boyutlu manifold olsun. I birim dönüşüm olmak üzere M üzerinde P_1 ve P_2 operatörleri

$$P_1 = -\varphi^2 , \; P_2 = \varphi^2 + I \tag{2.26}$$

şeklinde tanımlansın. Bu operatörler

$$\begin{gathered} P_1 + P_2 = I, \quad P_1^{\;2} = P_1, \quad P_2^{\;2} = P_2 \\ \varphi P_1 = P_1\varphi = \varphi, \quad P_2\varphi = \varphi P_2 = 0 \end{gathered} \tag{2.27}$$

denklemlerini sağlar. Bu denklemler, M manifoldunun her noktasındaki tanjant uzayına uygulanan P_1 ve P_2 operatörlerinin birer bütünleyen izdüşüm operatörü olduğunu gösterir (Yano 1963).

Teorem 2.5.1. Tanım 2.5.3.'de verilen P_1 ve P_2 operatörleri için

$$\varphi^2 P_1 = -P_1, \quad \varphi^2 P_2 = 0 \tag{2.28}$$

eşitlikleri sağlanır (Yano 1963).

Önerme 2.5.2. M $(2n+s)$-boyutlu bir manifold ve P_1 ve P_2 operatörleri de birer bütünleyen izdüşüm operatörü olsun. Bu durumda, M üzerinde, P_1 ve P_2 operatörlerine karşılık gelen sırasıyla D ve $D^{\perp}$ dağılımları vardır. Ayrıca bu dağılımların boyutu $boy(D)=2n$ ve $boy(D^{\perp})=s$ olur (Yano 1963).

Önerme 2.5.3. D ve $D^{\perp}$ dağılımlarının integrallenebilir olması için gerekli ve yeterli koşul $\forall X,Y$ vektör alanı için

$$N_{\varphi}(X,Y)=P_1N_{\varphi}(P_1X,P_1Y)+N_{\varphi}(P_1X,P_2Y)+N_{\varphi}(P_2X,P_1Y) \tag{2.29}$$

olmasıdır (Ishihara ve Yano 1964).

Teorem 2.5.2. M $(2n+s)$-boyutlu bir manifold olsun. M 'nin bir f -yapıya sahip olması için gerekli ve yeterli koşul M manifoldunun tanjant demetinin yapısal grubunun, $U(2n)\times O(s)$ grubuna indirgenebilir olmasıdır (Yano 1963).

Tanım 2.5.4. M , φ f -yapısına sahip $(2n+s)$-boyutlu bir manifold olsun. Eğer M manifoldunun her noktasında $D^{\perp}$ dağılımını geren s tane ξ_i vektör alanı ve $i,j=1,\dots,s$ için

$$\eta^i(\xi_j)=\delta^i_j \tag{2.30}$$

şartını sağlayan s tane η^i 1-formu varsa ve I birim dönüşüm olmak üzere

$$\varphi^2=-I+\sum_{i=1}^{s}\eta^i\otimes\xi_i \tag{2.31}$$

şartı sağlanıyorsa, $(\varphi,\xi_{i,}\,\eta^i)$ üçlüsüne M üzerinde global çatılı f -yapı veya kısaca çatılı f -yapı denir. M manifolduna da bu yapı ile birlikte global çatılı f -manifold veya çatılı f -manifold denir ve $M(\varphi,\xi_{i,}\,\eta^i)$ ile gösterilir (Nakagawa 1966).

Önerme 2.5.4. $M(\varphi,\xi_{i,}\,\eta^i)$ çatılı bir f -manifold olsun. Bu durumda ifadeleri

$$i)\,\varphi\xi_i=0,\quad ii)\,\eta^i\circ\varphi=0 \tag{2.32}$$

sağlanır (Nakagawa 1966).

Tanım 2.5.5. $M(\varphi,\xi_{i,}\,\eta^i)$ çatılı f -manifold olsun. Eğer M üzerinde $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$i)\,\eta^i(X)=g(X,\xi_i),\quad ii)\,g(\varphi X,\varphi Y)=g(X,Y)-\sum_{i=1}^{s}\eta^i(X)\eta^i(Y) \tag{2.33}$$

şartlarını sağlayan bir g Riemann metriği varsa $M(\varphi,\xi_{i,}\,\eta^i)$'ye çatılı metrik f-manifold denir ve $M(\varphi,\xi_{i,}\,\eta^i,g)$ ile gösterilir (Goldberg ve Yano 1971).

Şimdi hemen hemen değme metrik yapıdakine benzer olarak, çatılı metrik f-yapı için aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 2.5.1. $M(\varphi,\xi_{i,}\,\eta^i,g)$ çatılı metrik f-manifold olsun. Bu durumda $(1,1)$ tipindeki φ tensör alanı, g Riemann metriğine göre ters simetriktir. Yani $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$g(\varphi X,Y)=-g(X,\varphi Y)$$

olur (Goldberg ve Yano 1971).

Yine hemen hemen değme metrik yapısına benzer olarak metrik f-manifold üzerindeki temel 2-form tanımı aşağıdaki gibi yapılabilir.

Tanım 2.5.6. $M(\varphi,\xi_{i,}\,\eta^i,g)$ çatılı metrik f-manifold olsun. Bu durumda $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$\Phi(X,Y)=g(X,\varphi Y)$$

şeklinde tanımlanan Φ'ye $M(\varphi,\xi_{i,}\,\eta^i,g)$ metrik f-manifold üzerindeki temel 2-form denir (Goldberg ve Yano 1971).

Tanım 2.5.7. $M(\varphi,\xi_{i,}\,\eta^i,g)$ çatılı metrik f-manifold olsun. Eğer M manifoldunun yapı tensörlerinin ∇ Riemann konneksiyona göre kovaryant türevleri sıfır ise M'ye kovaryant sabit denir (Goldberg ve Yano 1971).

Tanım 2.5.8. $M(\varphi,\xi_{i,}\,\eta^i,g)$, çatılı metrik f-manifold üzerinde

$$N_\varphi+2\sum_{i=1}^{s}d\eta^i\otimes\xi_i=0 \tag{2.34}$$

şartı sağlanıyorsa M'ye normal çatılı metrik f-manifold denir (Ishihara 1966).

Teorem 2.5.3. $M(\varphi,\xi_{i,}\,\eta^i,g)$ çatılı metrik f-manifold olsun. Bu durumda Φ temel 2-form ve ∇ Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere M üzerinde $\forall X,Y\in\chi(M)$ vektör alanları için

$$2g\left(\left(\nabla_X \varphi\right)Y,Z\right)=3d\Phi\left(X,\varphi Y,\varphi Z\right)-3d\Phi\left(X,Y,Z\right)+g\left(N\left(Y,Z\right),\varphi X\right)$$
$$+\sum_{k=1}^{s}\left\{N_2^k\left(Y,Z\right)\eta^k\left(X\right)+2d\eta^k\left(\varphi Y,X\right)\eta^k\left(Z\right)-2d\eta^k\left(\varphi Z,X\right)\eta^k\left(Y\right)\right\} \tag{2.35}$$

formülü sağlanır. Burada N, φ tensör alanına göre Nijenhuis tensör alanıdır. Ayrıca $\forall X,Y\in\chi(M)$ ve $1\leq k\leq s$ için

$$N_2^k\left(X,Y\right)=\left(L_{\varphi X}\eta^k\right)Y-\left(L_{\varphi Y}\eta^k\right)X=2d\eta^k\left(\varphi X,Y\right)-2d\eta^k\left(\varphi Y,X\right)$$

şeklinde tanımlanır (Blair 1970).

Global çatılı metrik f-manifoldların geniş bir sınıflandırması 1970 yılında Blair tarafından aşağıdaki şekilde yapılmıştır.

Tanım 2.5.9. $M\left(\varphi,\xi_{i,}\eta^i,g\right)$ global çatılı metrik f-manifold ve Φ de M 'nin temel 2-formu olsun.

1) Eğer Φ temel 2-formu kapalı ise yani $d\Phi=0$ ise M manifolduna hemen hemen K-manifold denir. Bir hemen hemen K-manifold normal ise K-manifold olarak adlandırılır (Blair 1970).

2) Eğer her $i=1,\ldots,s$ için, $d\eta^i=\Phi$ ve $d\Phi=0$ ise M 'ye hemen hemen S-manifold denir. Bir M hemen hemen S-manifoldu üzerinde Nijenhuis tensör alanı sıfır ise M 'ye S-manifold denir (Blair 1970).

3) Eğer her $i=1,\ldots,s$ için, η^i 1-formları ve Φ temel 2-formu kapalı ise, yani $d\eta^i=0$ ve $d\Phi=0$ oluyorsa M 'ye hemen hemen C-manifold denir ve eğer bu manifold normal ise M C-manifolda dönüşür (Blair 1970).

Teorem 2.5.4. K-manifold üzerinde $\xi_1,\ldots,\xi_s$ vektör alanları Killing vektör alanlarıdır (Blair 1970).

Sonuç 2.5.2. C-manifold üzerinde de $\xi_1,\ldots,\xi_s$ vektör alanları Killing vektör alanlarıdır (Blair 1970).

Yardımcı Teorem 2.5.1. $M\left(\varphi,\xi_{i,}\eta^i,g\right)$, C-manifold olsun. Bu durumda $\forall X$ vektör alanı için

$$\nabla_X\xi_i=0 \tag{2.36}$$

olur (Blair 1970).

Teorem 2.5.5. K-manifoldun C-manifold olması için gerekli ve yeterli koşul $\nabla\Phi = 0$ olmasıdır (Blair, 1970).

Teorem 2.5.6. M C-manifoldu, M_1^{2n} Kähler manifoldu ile M_2^s değişmeli Lie grubun yerel olarak çarpımı olan yerel olarak ayrıştırılabilen bir Riemann manifolddur (Blair 1970).

Teorem 2.5.7. M C-manifoldun $\forall X,Y \in D^{\perp}$ olmak üzere tüm $K(X,Y)$ kesitsel eğrilikleri sıfırdır, yani $D^{\perp}$ dağılımı düzdür. Ayrıca $X \in D$ ve $\xi_i \in D^{\perp}$ olmak üzere $K(X,\xi_i)$ kesitsel eğrilikleri de sıfır olur (Blair 1970).

Yardımcı Teorem 2.5.2. Bir C-manifoldu üzerinde R Riemann eğrilik tensörü

1) $\forall X,Y,Z,W$ vektör alanı için, $g(R(X,Y)Z,\varphi W)+g(R(X,Y)\varphi Z,W)=0$

2) $\forall X,Y,Z,W \in D$ için, $g(R(\varphi X,\varphi Y)\varphi Z,\varphi W)=g(R(X,Y)Z,W)$

3) $\forall X,Y \in D$ için, $g(R(X,\varphi X)Y,\varphi Y)=g(R(X,Y)X,Y)+g(R(X,\varphi Y)X,\varphi Y)$

4) $\forall X,Y \in D$ için, $g(R(\varphi X,Y)\varphi X,Y)=g(R(X,\varphi Y)X,\varphi Y)$

özelliklerini sağlar (Blair 1970).

Teorem 2.5.8. $M(\varphi,\xi_{i,}\eta^i,g)$ sabit c φ-kesitsel eğriliğine sahip C-manifold olsun. Bu durumda, $\forall X,Y \in D$ olmak üzere tüm $K(X,Y)$ kesitsel eğrilikleri, $c>0$ için $\frac{c}{4} \leq K(X,Y) \leq c$ ve $c<0$ için $c \leq K(X,Y) \leq \frac{c}{4}$ şeklindedir. Eğer $c=0$ olursa manifold yerel olarak düz olur (Blair 1970).

2.6. ALT MANİFOLDLAR

Tanım 2.6.1. M ve $\overline{M}$ C^{∞} sınıfından birer manifold ve

$$\psi : M \to \overline{M}$$

de C^{∞} sınıfından bir fonksiyon olsun. Eğer $rank\psi = boyM$ oluyorsa, ψ dönüşümüne bir immersiyon (daldırma) denir. Ayrıca, M 'ye $\overline{M}$ 'nin bir immersed alt manifoldu denir (Hacısalihoğlu 1993).

Tanım 2.6.2. M n-boyutlu bir manifold ve $\overline{M}$ de $(n+d)$-boyutlu bir manifold olsun. $\forall p \in M$ noktası için M ve $\overline{M}$ üzerinde sırasıyla

$$U = \{u \in \overline{U} : \overline{x}_{n+1}(u) = \ldots = \overline{x}_{n+d}(u) = 0\}$$

şartını sağlayan, sırasıyla U ve $\overline{U}$ komşulukları varsa M 'ye $\overline{M}$ 'nin bir alt manifoldu denir. Burada $\{\overline{x}_1, \ldots \overline{x}_{n+d}\}$ ve $\{x_1, \ldots x_n\}$ koordinat sistemleri sırasıyla U ve $\overline{U}$ üzerindeki koordinat sistemleridir (Kobayashi ve Nomizu 1969).

Tanım 2.6.3. $\overline{M}$ C^{∞} sınıfından bir manifold ve M de $\overline{M}$ 'nin bir alt manifoldu olsun. $\forall p \in M$ noktası için $TM^{\perp}$ kümesi

$$TM^{\perp} = \{V \in T_p\overline{M} : \overline{g}(X_p, V) = 0, \forall X_p \in T_pM\}$$

şeklinde tanımlansın. $\forall p \in M$ noktasında $\forall X_p \in T_pM$ için $\overline{g}(X_p, V) = 0$ koşulunu sağlayan V vektörüne M 'nin normal vektörü ve V 'nin birim vektör olması halinde de M 'nin birim normal vektörü denir. Birim normal vektör alanı bazen normal kesit olarak da adlandırılır. M 'nin tüm normal vektörlerini içeren $TM^{\perp}$ kümesine M 'nin normal demeti adı verilir (Kobayashi ve Nomizu 1969).

Tanım 2.6.4. M ve $\overline{M}$, sırasıyla n ve $(n+d)$-boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere M, $\overline{M}$ 'nin bir alt manifoldu ve ∇ ve $\overline{\nabla}$ de sırasıyla M ve $\overline{M}$ üzerinde birer kovaryant türev olsun. Böylece $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} h &: \chi(M) \times \chi(M) \to \chi^{\perp}(M) \\ \overline{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + h(X, Y) \end{aligned} \tag{2.37}$$

şeklinde tanımlanan bağıntıya Gauss formülü denir. Burada $\nabla_X Y$ ve $h(X,Y)$ sırasıyla $\overline{\nabla}_X Y$ teğet ve normal bileşenleridir. (2.37) ile tanımlanan h 'ya M 'nin ikinci temel formu denir. Eğer $h = 0$ ise M manifolduna total geodeziktir denir (Chen 1973).

Tanım 2.6.5. $\overline{M}$ $(n+d)$-boyutlu bir manifold ve M de $\overline{M}$ 'nin n-boyutlu bir alt manifoldu olsun. M 'nin V normal birim vektör alanı için, $\overline{\nabla}_X V$ ifadesinin teğet ve normal bileşenleri sırasıyla, $-A_V X$ ve $\nabla^{\perp}_X V$ olmak üzere

$$\begin{aligned} A &: \chi(M) \times \chi^{\perp}(M) \to \chi(M) \\ \overline{\nabla}_X V &= -A_V X + \nabla^{\perp}_X V \end{aligned} \tag{2.38}$$

biçiminde tanımlanan dönüşüme Weingarten formülü denir. Burada A_V 'ye M 'nin şekil operatörü ve $\nabla^{\perp}$ konneksiyonuna da M 'nin $TM^{\perp}$ normal demetindeki konneksiyonu denir. M 'nin A_V şekil operatörü ile h ikinci temel formu arasında

$$g(A_V X, Y) = g(h(X,Y), V) \tag{2.39}$$

bağıntısı vardır. Burada g M üzerinde indirgenmiş skaler çarpımdır (Chen 1973).

Tanım 2.6.6. $(\overline{M}, \overline{g})$ $(n+d)$-boyutlu bir Riemann manifold ve bu manifoldun n-boyutlu bir Riemann alt manifoldu (M, g) olsun. M 'nin h ikinci temel formunun kovaryant türevi $\overline{\nabla} h$, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$(\overline{\nabla}_X h)(Y,Z) = \nabla_X^{\perp} h(Y,Z) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z) \tag{2.40}$$

şeklinde tanımlanır. h ikinci temel formunun kovaryant türevi $\overline{\nabla} h$ 'ya M 'nin üçüncü temel formu denir (Chen 1973). Eğer

$$\overline{\nabla} h = 0 \tag{2.41}$$

ise M 'ye paralel ikinci temel forma sahiptir veya 1-paraleldir denir. Buradaki $\overline{\nabla}$ M 'nin $TM^{\perp}$ normal demeti üzerinde tanımlanan normal konneksiyon olup buna Van der Waerden-Bortolotti konneksiyonu denir (Chen 1973).

Tanım 2.6.7. $(\overline{M}, \overline{g})$, $(n+d)$-boyutlu bir Riemann manifold ve (M, g) de bu manifoldun n-boyutlu bir Riemann alt manifoldu olsun. h, M 'nin ikinci temel formu olmak üzere $\forall X_p \in T_p M$ için

$$k_n(X_p) = \| h(X_p, X_p) \|$$

ile tanımlanan reel sayıya M 'nin X_p doğrultusundaki normal eğriliği denir (Hicks 1965).

Tanım 2.6.8. $(\overline{M}, \overline{g})$ $(n+d)$-boyutlu bir Riemann manifold ve bu manifoldun n-boyutlu bir Riemann alt manifoldu (M, g) olsun. $\overline{M}$ 'nin $\overline{R}$ eğrilik tensörü $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için

$$\overline{R}(X,Y)Z = \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z - \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_{[X,Y]} Z$$

şeklinde tanımlanır. R ve h (M, g)'nin sırasıyla Riemann eğrilik tensörü ve ikinci temel formu olmak üzere

$$\bar{g}\left(\bar{R}(X,Y)Z,W\right)=g\left(R(X,Y)Z,W\right)-\bar{g}\left(h(Y,Z),h(X,W)\right)+\bar{g}\left(h(X,Z),h(Y,W)\right) \quad (2.42)$$

ile tanımlanan denkleme Gauss denklemi denir (Chen 1973). Gauss denkleminin teğet ve normal bileşenleri sırasıyla

$$\left(\bar{R}(X,Y)Z\right)^T = R(X,Y)Z + A_{h(X,Z)}Y - A_{h(Y,Z)}X \quad (2.43)$$

ve

$$\left(\bar{R}(X,Y)Z\right)^{\perp} = \left(\bar{\nabla}_X h\right)(Y,Z)-\left(\bar{\nabla}_Y h\right)(X,Z) \quad (2.44)$$

şeklinde olup (2.44) denklemine Codazzi denklemi denir (Chen 1973). Burada $\bar{\nabla}$, M üzerinde tanımlı olan Van der Waerden-Bortolotti konneksiyonudur. Ayrıca $\mu,\nu \in \chi^{\perp}(M)$ olmak üzere

$$\bar{g}\left(\bar{R}(X,Y)\mu,\nu\right)=g\left(R^{\perp}(X,Y)\mu,\nu\right)-g\left(\left[A_\mu,A_\nu\right]X,Y\right) \quad (2.45)$$

ile tanımlanan denkleme Ricci denklemi denir. Burada

$$\left[A_\mu,A_\nu\right]=A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu \quad (2.46)$$

şeklinde tanımlıdır ve $R^{\perp}$ de $\nabla^{\perp}$ normal konneksiyona göre Riemann eğrilik tensörüdür (Chen 1973).

Tanım 2.6.9. $\left(\bar{M},\bar{g}\right)$ $(n+d)$-boyutlu bir Riemann manifold ve (M,g) de bu manifoldun n-boyutlu bir Riemann alt manifoldu olsun. $\{e_1,\ldots,e_n\}$ kümesi bir $p \in M$ noktasındaki T_pM tanjant uzayının ortonormal bazı olmak üzere, M üzerinde

$$H=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}h(e_i,e_i) \quad (2.47)$$

şeklinde tanımlanan vektöre M 'nin ortalama eğrilik vektörü denir (Chen 1973). Eğer M üzerinde

$$H=0 \quad (2.48)$$

ise M 'ye minimaldir denir (Chen 1973). Ayrıca, eğer M üzerinde

$$\bar{\nabla}H=0 \quad (2.49)$$

oluyorsa M 'ye paralel ortalama eğriliğe sahiptir denir (Chen 1973).

Bu temel tanımlar ve temel özellikler verildikten sonra alt manifoldların farklı araştırmacılar tarafından çeşitli şartlara bağlı olarak birçok sınıflandırılması yapılmıştır. Şimdi bunlardan bazılarına değinilecektir.

Tanım 2.6.10. $(\overline{M},\overline{g})$ $(n+d)$-boyutlu bir Riemann manifold, (M,g) bu manifoldun n-boyutlu bir Riemann alt manifoldu ve h da M'nin ikinci temel formu olsun. $\psi : M \to \overline{M}$ bir izometrik immersiyon olmak üzere, $p \in M$ noktasındaki $\forall X$ birim vektörü için eğer $h(X,X)$ aynı değere sahip ise ψ'ye, $p \in M$ noktasında umbiliktir denir. Eğer ψ, M'nin her noktasında umbilik ise ψ'ye M üzerinde umbiliktir denir (Ogiue 1968).

Tanım 2.6.11. $(\overline{M},\overline{g})$ $(n+d)$-boyutlu bir Riemann manifold, (M,g) bu manifoldun n-boyutlu bir Riemann alt manifoldu ve R ve $\overline{R}$ de sırasıyla M ve $\overline{M}$'nin Riemann eğrilik tensörleri olsun. $\psi : M \to \overline{M}$ bir izometrik immersiyon olmak üzere $\forall X,Y \in \chi(M)$ ve $\forall \overline{X},\overline{Y} \in \chi(\overline{M})$ için $R(X,Y)$ ve $\overline{R}(\overline{X},\overline{Y})$ sırasıyla M ve $\overline{M}$'nin her noktasında bu manifoldlara teğet olan uzayın bir lineer dönüşümünü tanımlar. Bu dönüşümlere sırasıyla ∇ ve $\overline{\nabla}$'nin eğrilik dönüşümleri denir. Eğer $\forall X,Y \in \chi(M)$ için $\overline{R}(\psi X,\psi Y)$ eğrilik dönüşümü, sabit her noktada $\psi(M)$ tanjant olan uzaydan ayrılırsa ψ'ye invaryant immersiyon denir. M de $\overline{M}$'nin invaryant alt manifoldu olarak adlandırılır. Eğer $\forall \overline{X},\overline{Y} \in \chi(\overline{M})$ için $\overline{R}(\overline{X},\overline{Y})$ eğrilik dönüşümü, sabit her noktada $\psi(M)$ tanjant olan uzaydan ayrılırsa ψ'ye güçlü invaryant immersiyon denir. M de $\overline{M}$'nin güçlü invaryant alt manifoldu olarak isimlendirilir (Ogiue 1968).

Teorem 2.6.1. Bir manifoldun sabit eğriliğe sahip bir manifold içine izometrik immersiyonu, bir invaryant immersiyondur (Ogiue 1968).

Teorem 2.6.2. $(\overline{M},\overline{g})$'nin her izometrik immersed alt manifoldu bir invaryant alt manifold ise bu durumda $(\overline{M},\overline{g})$ sabit eğriliğe sahip bir uzaydır (Ogiue 1968).

Önerme 2.6.1. Her total geodezik alt manifold bir invaryant alt manifolddur (Ogiue 1968).

Teorem 2.6.3. Bir manifoldun sıfırdan farklı sabit eğriliğe sahip olan bir manifold içine güçlü invaryant immersiyonu hiç yoktur (Ogiue 1968).

Teorem 2.6.4. $(\overline{M},\overline{g})$'nin her izometrik immersed alt manifoldu güçlü invaryant alt manifold ise, bu durumda $(\overline{M},\overline{g})$ düz olur. Ayrıca düz bir manifoldun her alt manifoldu güçlü invaryant alt manifolddur (Ogiue 1968).

Tanım 2.6.12. M n-boyutlu bir Riemann manifold ve $\overline{M}$ de J hemen hemen kompleks yapısına ve g Hermite metriğine sahip olan hemen hemen Hermite manifold olsun. $\psi : M \to \overline{M}$ bir immersiyon olmak üzere, eğer $\forall p \in M$ noktasındaki T_pM tanjant uzayı için $J(T_pM) = T_pM$ oluyorsa ψ holomorfik olarak adlandırılır. Eğer $J(T_pM) \subseteq T_p^{\perp}M$ ise ψ 'ye total reel denir. Burada $T_p^{\perp}M$, M 'nin $\overline{M}$ içerisinde bulanan $p \in M$ noktasındaki normal uzayıdır. Ayrıca M 'ye $\overline{M}$ 'nin total reel alt manifoldu denir (Chen ve Ogiue 1974).

Tanım 2.6.13. M n-boyutlu bir Riemann manifold ve $\overline{M}$ de J hemen hemen kompleks yapısına ve g Hermite metriğine sahip olan hemen hemen Hermite manifold olsun. Bir tanjant uzayının 2-boyutlu lineer τ alt uzayına kesit düzlemi denir. Eğer τ kesit düzlemi için $J\tau$, τ 'ya dik oluyorsa τ kesit düzlemi anti-holomorfiktir (Chen ve Ogiue 1974).

Önerme 2.6.1. M, $\overline{M}$ hemen hemen Hermite manifoldun immersed alt manifoldu olsun. Bu durumda M 'nin $\overline{M}$ manifoldunun bir total reel alt manifoldu olması için gerekli ve yeterli koşul M 'nin her kesit düzleminin anti-holomorfik olmasıdır (Chen ve Ogiue 1974).

Tanım 2.6.14. M n-boyutlu bir Riemann manifold, $\overline{M}$ de J hemen hemen kompleks yapısına ve g Hermite metriğine sahip olan bir hemen hemen Hermite manifold ve $\psi : M \to \overline{M}$ de bir immersiyon olsun. M 'ye tanjant olan $\forall X$ vektör alanı için

$$JX = PX + P'X \qquad (2.50)$$

olsun. Burada, PX ve $P'X$ sırasıyla JX 'in teğet ve normal bileşenleridir. Bu durumda P, TM tanjant demetinin bir endomorfizmi ve P' de TM üzerinde normal demet değerli 1-form olur. $p \in M$ noktasında M 'ye teğet olan sıfırdan farklı $\forall X$ vektörü için JX ile T_pM arasındaki $\theta(X)$ açısına Wirtinger açısı denir. Eğer bu Wirtinger açısı sabit ise ψ 'ye bir genel slant immersiyonu denir. Holomorfik ve total reel immersiyonları, θ Wirtinger açısı sırasıyla 0 ve $\frac{\pi}{2}$ olan genel slant immersiyonlardır (Chen 1990). Holomorfik olmayan bir genel slant immersiyon kısaca bir slant immersiyon olarak adalandırılır. Bu durumda, θ Wirtinger açısına slant immersiyonun slant açısı denir. Ayrıca M 'ye de $\overline{M}$ 'nin slant alt manifoldu denir. Bir slant alt manifold total reel değilse, öz slant alt manifold olarak adlandırılır. Eğer bir öz slant alt manifold için P endomorfizmi paralel ise yani $\nabla P = 0$ ise bu öz slant alt manifolda Kähler slant denir (Chen 1990).

Şimdi, alt manifoldların önemli bir sınıfı olan CR-alt manifoldlara değinilecektir. Bu alt manifold sınıfı 1978 yılında Bejancu tarafından tanımlanmıştır (Bejancu 1978).

Tanım 2.6.15. $\left(\overline{M}, \overline{g}\right)$ J hemen hemen kompleks yapısına sahip n-boyutlu bir Kähler manifold ve $\left(M, g\right)$ de $\overline{M}$ 'nin d-boyutlu bir immersed alt manifoldu olsun. $\psi : M \to \overline{M}$ bir izometrik immersiyon olmak üzere $\forall p \in M$ noktasındaki T_pM tanjant uzayı için

$$\psi_*\left(T_pM\right) \subset T_{\psi(p)}\overline{M} \tag{2.51}$$

olur. Şimdi diferensiyellenebilir D dağılımı ve bütünleyen ortogonal $D^\perp$ dağılımı sırasıyla

$$\begin{aligned} D &: M \to TM \\ & p \to D_p \subset T_pM \end{aligned} \tag{2.52}$$

ve

$$\begin{aligned} D^\perp &: M \to TM \\ & p \to D_p^\perp \subset T_pM \end{aligned} \tag{2.53}$$

biçimlerinde tanımlansın. Burada D dağılımı çift boyutludur ve $\forall p \in M$ noktasındaki D_p dağılımı için $J\left(D_p\right) = D_p$ koşulunu sağlar. Öte yandan $D^\perp$ dağılımı total reeldir yani $\forall p \in M$ noktasında M 'ye normal olan uzay V_p olmak üzere $J\left(D_p^\perp\right) \subset V_p$ koşulunu sağlar. Bu D ve $D^\perp$ sırasıyla (2.26) ifadesini sağlayan P_1 ve P_2 operatörleri yardımıyla tanımlanır. Bu dağılımlar sırasıyla M üzerindeki yatay ve dikey dağılımlar olarak adlandırılırlar. Bu D ve $D^\perp$ dağılımlarına sahip M alt manifolduna $\overline{M}$ 'nin CR-alt manifoldu denir (Bejancu 1978).

Yorum 2.6.1. 1) $\overline{M}$ 'nin reel bir eğrisi ya da reel bir hiperyüzeyi bir CR-alt manifolddur (Bejancu 1978).

2) Eğer $\forall p \in M$ noktasındaki $boyD_p^{\perp} = 0$ ise M CR-alt manifoldu bir kompleks manifolda dönüşür. Eğer $boyD_p = 0$ ise M, $\overline{M}$ 'nin total reel bir alt manifoldu olur (Bejancu 1978).

Tanım 2.6.16. $(\overline{M}, \overline{g})$ J hemen hemen kompleks yapısına sahip n-boyutlu Kähler manifold ve (M, g) de $\overline{M}$ 'nin d-boyutlu CR-alt manifoldu olsun. Eğer ζ M 'nin normal demeti üzerinde bir vektör alanı ise

$$J\zeta = A\zeta + B\zeta + C\zeta \tag{2.54}$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $A\zeta$, $B\zeta$ ve $C\zeta$ sırasıyla $J\zeta$ nin yatay, dikey ve normal parçasıdır. Eğer X, M üzerinde bir vektör alanı ise $J\Omega X$, M 'nin normal demetinin bir kesitidir (Bejancu 1978).

Önerme 2.6.2. $(\overline{M}, \overline{g})$ J hemen hemen kompleks yapısına sahip n-boyutlu Kähler manifold ve (M, g) de $\overline{M}$ 'nin d-boyutlu CR-alt manifoldu olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır (Bejancu 1978).

$$BJP_2X + P_2X = 0 \tag{2.55}$$

$$AJP_2X = CJP_2X = 0 \tag{2.56}$$

$$C^2\zeta + JB\zeta + \zeta = 0 \tag{2.57}$$

$$JA\zeta + AC\zeta = 0 \tag{2.58}$$

$$BC\zeta = 0 \tag{2.59}$$

$$P_1(\nabla_X JP_1Y) - P_1(A_{JP_2Y}X) = JP_1(\nabla_X Y) + Ah(X,Y) \tag{2.60}$$

$$P_2(\nabla_X JP_1Y) - P_2(A_{JP_2Y}X) = Bh(X,Y) \tag{2.61}$$

$$h(X, JP_1Y) + \nabla_X^{\perp} JP_2Y = JP_2(\nabla_X Y) + Ch(X,Y) \tag{2.62}$$

$$P_1(\nabla_X A\zeta) + P_1(\nabla_X B\zeta) + JP_1(A_\zeta X) = P_1(A_{C\zeta}X) + A(\nabla_X^{\perp}\zeta) \tag{2.63}$$

$$P_2(\nabla_X A\zeta) + P_2(\nabla_X B\zeta) = P_1(A_\zeta X) + B(\nabla_X^{\perp}\zeta) \tag{2.64}$$

$$h(X, A\zeta) + h(X, B\zeta) + \nabla_X^{\perp} C\zeta + J(P_2A_\zeta X) = C(\nabla_X^{\perp}\zeta) \tag{2.65}$$

Burada ∇, $\nabla^{\perp}$, A_ζ ve h sırasıyla Riemann konneksiyonu, normal konneksiyon, Weingarten operatörü ve ikinci temel formdur. Ayrıca (2.56) ve (2.57) denklemlerinden normal demet üzerinde $C^2 + C = 0$ olduğu bulunur. Bu eşitlik ise Yano tarafından tanımlanan bir f -yapıdır (Yano 1963).

2.7. D-KONFORMAL DÖNÜŞÜMLER

D-konformal dönüşümler M kompakt regüler K-değme Riemann manifoldu üzerinde M'nin topolojik bir özelliği olan Betti sayıları elde etmek ve harmonik formlar üzerinde bazı sonuçlara ulaşmak için 1967 yılında Tanno tarafından tanımlanmıştır (Tanno 1967).

Tanım 2.7.1. (φ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapı olsun. α bir pozitif sabit olmak üzere

$$\begin{aligned} &\varphi^* = \varphi, \quad \xi^* = \frac{1}{\alpha}\xi, \quad \eta^* = \alpha\eta \\ &g^* = \alpha g + (\alpha^2 - \alpha)\eta \otimes \eta \end{aligned} \tag{2.66}$$

şeklinde tanımlanan yapı tensörlerin bir değişimine D-konformal dönüşüm denir (Tanno 1968).

Teorem 2.7.1. D-konformal dönüşümler üzerinde tanımlandığı yapının özelliğini korur (Tanno 1968).

Tanno tarafından yapılan bu tanım daha sonraları Cappelletti-Montano ve Di Terlizzi tarafından 2007 yılında, global çatılı metrik f -yapıya aşağıdaki şekilde genişletilmiştir.

Tanım 2.7.2. . $(\varphi, \xi_i, \eta^i, g)$, global çatılı metrik f -yapı olsun. α bir pozitif sabit olmak üzere

$$\begin{aligned} &\tilde{\varphi} = \varphi, \quad \tilde{\xi}_i = \frac{1}{\alpha}\xi_i, \quad \tilde{\eta}^i = \alpha\eta^i \\ &\tilde{g} = \alpha g + (\alpha^2 - \alpha)\sum_{i=1}^{s}\eta^i \otimes \eta^i \end{aligned} \tag{2.67}$$

şeklinde tanımlanan yapı tensörlerin bir değişimine D-konformal dönüşüm denir (Cappelletti-Montano ve Di Terlizzi 2007).

Teorem 2.7.2. $(\tilde{\varphi}, \tilde{\xi}_i, \tilde{\eta}^i, \tilde{g})$ global çatılı metrik f -yapının bir S-yapı olması için gerekli ve yeterli koşul $(\varphi, \xi_i, \eta^i, g)$'nin bir S-yapı olmasıdır (Cappelletti-Montano ve Di Terlizzi 2007).

Öte yandan, D-konformal dönüşümlerin aşağıdaki şekilde uygun şekillerde tanımlanmasıyla var olan bazı Riemann manifoldlardan yeni manifold sınıfları elde edilmiştir.

Tanım 2.7.3. (M,φ,ξ,η,g) bir hemen hemen Kenmotsu manifold olsun. Bu manifold, α sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere

$$\varphi' = \varphi, \quad \xi' = \alpha\xi, \quad \eta' = \frac{1}{\alpha}\eta, \quad g' = \frac{1}{\alpha^2}g \tag{2.68}$$

şeklinde tanımlanan D-konformal dönüşümlerine tabi tutulduğunda bir hemen hemen α-Kenmotsu manifold elde edilir (Janssens ve Vanhecke 1981). Tanım 2.7.3.'de α 'nın sıfır olma durumu da hesaba katılarak hemen hemen α-kosimplektik manifold tanımlanır (Kim ve Pak 2005).
Ayrıca 2009 yılında Öztürk tarafından (2.66) eşitliği ile verilen D-konformal dönüşümler M hemen hemen α-kosimplektik manifold üzerinde ele alınmıştır. Bu çalışmada α, M üzerinde $d\alpha \wedge \eta = 0$ şartını sağlayan düzgün bir fonsiyon olarak alınıp (2.66) denklemi ile verilen D-konformal dönüşümler genelleştirilerek aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır (Öztürk 2009).

Tanım 2.7.4. M bir hemen hemen α-kosimplektik manifold ve (φ,ξ,η,g) de bir hemen hemen α-kosimplektik yapı olsun. $\lambda \in \Re$ ve β da M üzerinde $d\beta \wedge \eta = 0$ şartını sağlayan sıfırdan farklı düzgün bir fonsiyon olmak üzere (φ,ξ,η,g) yapısının M üzerindeki D-konformal dönüşümleri

$$\tilde{\varphi} = \varphi, \quad \tilde{\xi} = \frac{1}{\beta}\xi, \quad \tilde{\eta} = \beta\eta, \quad \tilde{g} = \lambda g + \left(\beta^2 - \lambda\right)\eta \otimes \eta \tag{2.69}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda, bu D-konformal dönüşümler ile (φ,ξ,η,g) hemen hemen α-kosimplektik yapısından yeni bir $\left(\tilde{\varphi},\tilde{\xi}_i,\tilde{\eta}^i,\tilde{g}\right)$ hemen hemen $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$-kosimplektik yapısı elde edilir (Öztürk 2009).

Tanım 2.7.4. ile verilen D-konformal dönüşümler, (2.67) ile verilen dönüşümlere benzer şekilde genişletilip, Bölüm 3.4.'de yaklaşık C-manifoldlar üzerinde ele alınacaktır.

2.8. RİCCİ SOLİTONLAR

Bu bölümde Einstein manifoldların bir genelleştirilmesi olan Ricci solitonlar göz önüne alınacaktır.

Tanım 2.8.1. (M,g), $n \geq 2$ olmak üzere n-boyutlu Riemann (ya da yarı Riemann) manifold olsun. Eğer M üzerinde

$$S = \frac{r}{n} g \tag{2.70}$$

şartı sağlanıyorsa, M'ye bir Einstein manifold denir. Burada S ve r sırasıyla (M,g)'nin Ricci tensör alanı ve skaler eğriliğidir (Besse 1987).

Önerme 2.8.1. (M,g), $n \geq 2$ olmak üzere n-boyutlu Riemann (ya da yarı Riemann) manifold olsun. (M,g)'nin bir Einstein manifold olması için gerek ve yeter koşul sabit kesitsel veya skaler eğriliğe sahip olmasıdır (Besse 1987).

Tanım 2.8.2. (M,g) n-boyutlu Riemann (veya yarı Riemann) manifold olsun. Eğer M üzerinde $\forall X,Y \in \chi(M)$ vektör alanı ve λ sabiti için

$$(L_{\tilde{\xi}} g)(X,Y) + 2S(X,Y) = 2\lambda g(X,Y) \tag{2.71}$$

şartı sağlanıyorsa M'ye bir Ricci soliton denir ve $(M,g,\tilde{\xi},\lambda)$ ile gösterilir. $\tilde{\xi}$ vektör alanına Ricci solitonun potansiyel alanı denir (Hamilton 1986).

Tanım 2.8.3. $(M,g,\tilde{\xi},\lambda)$ bir Ricci soliton olsun. Bu durumda $(M,g,\tilde{\xi},\lambda)$'ye, $\lambda > 0$ ise büzülen, $\lambda = 0$ ise sabit ve $\lambda < 0$ ise genişleyen denir (Hamilton 1986).

Tanım 2.8.4. $(M,g,\tilde{\xi},\lambda)$ bir Ricci soliton olsun. Eğer (M,g) bir Einstein manifold ise $(M,g,\tilde{\xi},\lambda)$'ye aşikardır denir (Hamilton 1986).

Tanım 2.8.5. $(M,g,\tilde{\xi},\lambda)$ Ricci soliton üzerinde, eğer λ düzgün bir fonksiyon ise bu Ricci solitona, Ricci hemen hemen soliton denir (Pigola ve diğ. 2011).

Tanım 2.8.6. $(M,g,\tilde{\xi},\lambda)$ bir Ricci soliton olsun. Eğer $\tilde{\xi}$ potansiyel alanı, M üzerindeki bir f düzgün fonksiyonun gradyantı ise $(M,g,\tilde{\xi},\lambda)$'ye gradyant Ricci soliton denir ve (M,g,f,λ) ile gösterilir. Ayrıca f düzgün fonksiyonuna potansiyel fonksiyon denir. Bu durumda (2.71) denklemi,

$$S + \nabla^2 f = \lambda g \tag{2.72}$$

denklemine indirgenir. Burada $\nabla^2 f$ ifadesine f fonksiyonun Hessian'i denir (Hamilton 1986).

Tanım 2.8.7. (M, g, f, λ) gradyant Ricci soliton üzerinde, eğer f potansiyel fonksiyonu sabit ise (M, g, f, λ) aşikardır denir (Hamilton 1986).

Teorem 2.8.1. Bir kompakt manifold üzerindeki Ricci solitonlar her zaman gradyant Ricci soliton olur. Böylece, potansiyel vektör alanı, bir fonksiyonun gradyantı ile bir Killing vektör alanın toplamı olarak ifade edilebilir (Hamilton 1986).

Teorem 2.8.2. Bir kompakt manifold sabit skaler eğriliğe sahip ise bu manifold üzerindeki Ricci hemen hemen solitonlar, daima gradyant Ricci soliton olur (Barros ve Ribeiro 2012).

Tanım 2.8.8. (M, g), n-boyutlu Riemann (ya da yarı Riemann) manifold olsun. Eğer M üzerinde $\forall X, Y \in \chi(M)$ vektör alanı ve λ ve σ sabitleri için

$$(L_{\tilde{\xi}} g)(X, Y) + 2S(X, Y) - 2\lambda g(X, Y) - 2\sigma\eta(X)\eta(Y) = 0 \tag{2.73}$$

şartı sağlanıyorsa, M 'ye η-Ricci soliton denir. Eğer $\sigma = 0$ ise η-Ricci soliton, Ricci solitona indirgenir (Cho 2009).

2.9. BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ UZAY FORMLAR

Bu bölümde Tanım 2.1.9. verilen uzay formların, kompleks manifold, değme manifold ve global çatılı manifoldlar üzerinde bazı genelleştirilmelerine yer verilecektir.

Tanım 2.9.1. (M, J, g) hemen hemen Hermit manifold olsun. R M 'nin eğrilik tensörü ve f_1 ve f_2 de M üzerinde diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z = {} & f_1\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\} \\ & + f_2\{g(X, JZ)JY - g(Y, JZ)JX + 2g(X, JY)JZ\} \end{aligned} \tag{2.74}$$

oluyorsa M 'ye bir kompleks uzay-form denir. Eğer burada $f_1 = f_2 = \dfrac{c}{4}$ ise M

kompleks uzay-formu sabit c holomorfik eğriliğe sahip Kähler manifolda dönüşür (Tricerri ve Vanhecke 1981).

Buna benzer olarak, 2004 yılında Alegre ve diğ. tarafından genelleştirilmiş Sasaki uzay-formlar tanımlanmıştır.

Tanım 2.9.2. (M,φ,ξ,η,g) hemen hemen değme metrik manifold olsun. R M 'nin eğrilik tensörü ve f_1, f_2 ve f_3 de M üzerinde diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= f_1\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\} \\ &+ f_2\{g(X,\varphi Z)\varphi Y - g(Y,\varphi Z)\varphi X + 2g(X,\varphi Y)\varphi Z\} \\ &+ f_3\{\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X + g(X,Z)\eta(Y)\xi - g(Y,Z)\eta(X)\xi\} \end{aligned} \tag{2.75}$$

oluyorsa, M 'ye bir Sasaki uzay-form denir. Eğer burada $f_1 = \frac{1}{4}(c+3)$ ve $f_2 = f_3 = \frac{1}{4}(c-1)$ ise M Sasaki uzay-formu sabit c φ-kesitsel eğriliğe sahip Sasaki manifolda dönüşür (Alegre ve diğ. 2004).

Örnek 2.9.1. Sabit c φ-kesitsel eğriliğe sahip bir kosimplektik manifold $f_1 = f_2 = f_3 = \frac{c}{4}$ olan genelleştirilmiş bir Sasaki uzay-formdur (Ludden 1970).

Örnek 2.9.2. Sabit c φ-kesitsel eğriliğe sahip bir Kenmotsu manifold $f_1 = \frac{c-3}{4}$ ve $f_2 = f_3 = \frac{c+1}{4}$ olan genelleştirilmiş bir Sasaki uzay-formdur (Kenmotsu 1972).

Teorem 2.9.1. M genelleştirilmiş Sasaki uzay-form olsun. Eğer $f_3 = f_1 - 1$ olan bir değme metrik manifold ise bu durumda M bir Sasaki manifold olur (Alegre ve diğ. 2004).

Tanım 2.9.3. $(M,\varphi,\xi_i,\eta^j,g)$ S-manifold olsun. Eğer M sabit c φ-kesitsel eğriliğe sahipse M 'ye bir S uzay-form denir. R M 'nin eğrilik tensörü olmak üzere $\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için

$$
\begin{aligned}
R(X,Y,Z,W) = & \sum_{i,j=1}^{s'}\{g(\varphi X,\varphi W)\eta^i(Y)\eta^j(Z) - g(\varphi X,\varphi Z)\eta^i(Y)\eta^j(W) \\
& + g(\varphi Y,\varphi Z)\eta^i(X)\eta^j(W) - g(\varphi Y,\varphi W)\eta^i(X)\eta^j(Z)\} \\
& + \frac{c+3s'}{4}\{g(\varphi X,\varphi W)g(\varphi Y,\varphi Z) - g(\varphi X,\varphi Z)g(\varphi Y,\varphi W)\} \\
& - \frac{c-s'}{4}\{\Phi(X,W)\Phi(Y,Z) - \Phi(X,Z)\Phi(Y,W) - 2\Phi(X,Y)\Phi(Z,W)\}
\end{aligned}
\tag{2.76}
$$

şeklinde tanımlıdır (Kobayashi ve Tsuchiya 1972).

Tanım 2.9.4. $(M,\varphi,\xi_i,\eta^j,g)$ C-manifold olsun. Eğer M sabit c φ-kesitsel eğriliğe sahipse M'ye bir C uzay-form denir. R, M'nin eğrilik tensörü olmak üzere $\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için

$$
\begin{aligned}
R(X,Y,Z,W) = & \frac{c}{4}\{g(\varphi X,\varphi W)g(\varphi Y,\varphi Z) - g(\varphi X,\varphi Z)g(\varphi Y,\varphi W) \\
& + \Phi(X,W)\Phi(Y,Z) - \Phi(X,Z)\Phi(Y,W) - 2\Phi(X,Y)\Phi(Z,W)\}
\end{aligned}
\tag{2.77}
$$

şeklinde tanımlıdır (Kobayashi ve Tsuchiya 1972).

2013 yılına gelindiğinde ise Prieto-Martin ve diğ. tarafından S-uzay-formlar global çatılı metrik manifoldlar üzerinde ele alınarak genelleştirilmiş S-uzay-formlar tanımlanmıştır.

Tanım 2.9.5. $(M,\varphi,\xi_i,\eta^j,g)$ metrik f-manifold olsun. Eğer M üzerinde

$$
R = F_1R_1 + F_2R_2 + \sum_{i,j=1}^{s'} F_{ij}R_{ij} + \sum_{1\le i<j\le s'} G_{ij}R'_{ij} + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i\ne j\ne k\ne i}}^{s} H_{ijk}R_{ijk}
\tag{2.78}
$$

şartını sağlayan

$$
\{F_1,F_2,F_{ij},G_{ij},H_{ijk}\}
$$

diferensiyellenebilir fonksiyonlar ailesi varsa M'ye bir genelleştirilmiş S-uzay-form denir. Burada R_1,R_2,R_{ij},R'_{ij} ve R_{ijk} ifadeleri $\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için sırasıyla

$$
R_1(X,Y,Z,W) = g(X,W)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,W)
\tag{2.79}
$$

$$
R_2(X,Y,Z,W) = \Phi(X,W)\Phi(Y,Z) - \Phi(X,Z)\Phi(Y,W) - 2\Phi(X,Y)\Phi(Z,W)
\tag{2.80}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{ij}(X,Y,Z,W) = & g(Y,W)\eta^i(X)\eta^i(Z) - g(X,W)\eta^i(Y)\eta^i(Z) \\
& + g(X,Z)\eta^i(Y)\eta^i(W) - g(Y,Z)\eta^i(X)\eta^i(W)
\end{aligned}
\tag{2.81}
$$

$$
\begin{aligned}
R'_{ij}(X,Y,Z,W) &= \eta^i(X)\eta^j(Y)\eta^j(Z)\eta^i(W) - \eta^j(X)\eta^i(Y)\eta^j(Z)\eta^i(W) \\
&+ \eta^j(X)\eta^i(Y)\eta^i(Z)\eta^j(W) - \eta^i(X)\eta^j(Y)\eta^i(Z)\eta^j(W)
\end{aligned} \tag{2.82}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{ijk}(X,Y,Z,W) &= \eta^i(X)\eta^j(Y)\eta^k(Z)\eta^i(W) - \eta^j(X)\eta^i(Y)\eta^k(Z)\eta^i(W) \\
&+ \eta^j(X)\eta^i(Y)\eta^i(Z)\eta^k(W) - \eta^i(X)\eta^j(Y)\eta^i(Z)\eta^k(W)
\end{aligned} \tag{2.83}
$$

şeklinde tanımlıdır (Prieto-Martin ve diğ. 2013).

Sonuç 2.9.1. M S uzay-form, bir genelleştirilmiş S uzay-formdur (Prieto-Martin ve diğ. 2013).

Sonuç 2.9.2. M C uzay-form, bir genelleştirilmiş S uzay-formdur (Prieto-Martin ve diğ. 2013).

Önerme 2.9.1. M, $(2n+s')$-boyutlu genelleştirilmiş bir S uzay-form olsun. Eğer $n \geq 2$ ise bu durumda M 'nin R eğrilik tensörünün fonksiyonlar ailesine göre yazılışı bir tektir (Prieto-Martin ve diğ. 2013).

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

3.1. YAKLAŞIK C-MANİFOLDLAR

Tanım 3.1.1. $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ global çatılı metrik f-manifold olsun. ∇ Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere M üzerindeki $\forall X,Y$ vektör alanları için

$$(\nabla_X\varphi)Y+(\nabla_Y\varphi)X=0 \tag{3.1}$$

koşulu sağlanıyorsa M yaklaşık C-manifold olarak adlandırılır.

Yardımcı Teorem 3.1.1. H_i ve H^i tensor alanları

$$H_iX=\nabla_X\xi_i \tag{3.2}$$

ve

$$H^iX=\nabla_{\xi_i}X \tag{3.3}$$

şeklinde tanımlansın. Bu iki tensor alanı arasında

$$H_iX=-\varphi H^i\varphi X+\varphi^2H^iX \tag{3.4}$$

şeklinde bir bağıntı söz konusudur.

İspat. (3.1) eşitliğinde $Y=\xi_i$ seçilip, (2.32) denkleminin i) şıkkı göz önüne alınırsa

$$-\varphi(\nabla_X\xi_i)+\nabla_{\xi_i}\varphi X-\varphi(\nabla_{\xi_i}X)=0 \tag{3.5}$$

eşitliği elde edilir. Eşitliğin her iki tarafına φ uygulanır ve (2.31) ifadesi dikkate alınırsa istenen sonuca ulaşılır.

Önerme 3.1.1. $\forall i\in\{1,...,s\}$ olmak üzere H_i ve H^i tensör alanları için

1. $H_i(\xi_i)=0,\ H^i(\xi_i)=0$
2. $H_i\varphi X+\varphi H_iX=-\sum\varphi H^i(\eta^j(X)\xi_j)$
3. $tr(H_i)=0$
4. $(\nabla_X\varphi)\xi_i=-\varphi H_iX$

özellikleri sağlanır.

İspat. 1. (3.4) eşitliğinde $X=\xi_i$ seçilirse $H_i(\xi_i)=0$ ve $H^i(\xi_i)=0$ olduğu görülür.

2. (3.4) ifadesinde $X = \varphi X$ alınırsa, $H_i \varphi X = -\varphi H^i \varphi^2 X + \varphi^2 H^i \varphi X$ olur. Yine (3.4) ifadesinde eşitliğin her iki tarafına φ uygulanırsa $\varphi H_i X = -\varphi^2 H^i \varphi X + \varphi^3 H^i X$ elde edilir. Elde edilen son iki eşitlik toplandığında, (2.25) eşitliğinden ispat tamamlanmış olur.

3. (1) numaralı ifadeden ispat açıktır.

4. $\varphi \xi_i = 0$ ifadesinin X vektör alanı yönünde kovaryant türevi alınırsa $(\nabla_X \varphi)\xi_i = -\varphi H_i X$ bulunur.

Yardımcı Teorem 3.1.2. $(M, \varphi, \xi_i, \eta^i, g)$ yaklaşık C-manifoldu üzerinde

$$g(H_i X, Y) + g(X, H_i Y) = -\sum_{k=1}^{s} \{\eta_k(Y) g(X, H_k \xi_i) + \eta_k(X) g(Y, H_k \xi_i)\} \tag{3.6}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. (2.33) denkleminin $ii)$ şıkkındaki ifadenin ξ_i vektör alanı yönünde kovaryant türevi alınıp gerekli işlemler yapılırsa (3.6) elde edilir.

Sonuç 3.1.1. M yaklaşık C-manifoldu üzerinde $1 \le i \le s$ olmak üzere ξ_i vektör alanları Killing değildir.

3. 2 . TEMEL EĞRİLİK ÖZELLİKLERİ

Bundan sonraki hesaplamalarda

$$\nabla^2_{X,Y} \varphi := \nabla_X (\nabla_Y \varphi) - (\nabla_{\nabla_X Y} \varphi)$$

eşitliği kullanılacaktır.

Bu durumda R, M üzerinde eğrilik tensörü olmak üzere Ricci eşitliği

$$g((\nabla^2_{X,Y}\varphi)W, Z) - g((\nabla^2_{Y,X}\varphi)W, Z) = g(R(X,Y)\varphi W, Z) + g(R(X,Y)W, \varphi Z) \tag{3.7}$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca basit bir hesaplama ile

$$W(g((\nabla_Z \varphi)X, Y)) = -W(g(X, (\nabla_Z \varphi)Y)) \tag{3.8}$$

olduğu görülür. Bu ise $\nabla^2_{X,Y}\varphi$ 'nin ters simetrik olduğu anlamına gelir.

Yardımcı Teorem 3.2.1. M yaklaşık C-manifoldu üzerinde R Riemann eğrilik tensörü için

$$g(R(\varphi X,Y)Z,W)+g(R(X,\varphi Y)Z,W)+g(R(X,Y)\varphi Z,W)+g(R(\varphi X,Y)Z,\varphi W)=0 \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} g(R(\varphi X,\varphi Y)\varphi Z,\varphi W) &= g(R(X,Y)Z,W) \\ &-\sum_{i=1}^{s}\{\eta_i(X)g(R(\xi_i,Y)Z,W)+\eta_i(Y)g(R(X,\xi_i)Z,W)\} \end{aligned} \quad (3.10)$$

ve

$$g(R(\varphi X,\varphi Y)Z,W)=g(R(X,Y)\varphi Z,\varphi W) \quad (3.11)$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. (3.9): M manifoldu yaklaşık C-manifold olduğundan $\forall Y,Z$ vektör alanı için

$$(\nabla_Y\varphi)Z+(\nabla_Z\varphi)Y=0$$

ifadesi sağlanır. Bu denklemin X vektör alanı yönünde kovaryant türevi alınırsa

$$(\nabla^2{}_{X,Y}\varphi)Z+(\nabla^2{}_{X,Z}\varphi)Y=0$$

elde edilir. Ricci özdeşliği uygulandığında, yukarıdaki denklemden ve $(\nabla^2_{X,Y}\varphi)$'nin ters simetri özelliğinden

$$g(R(X,Y)Z,\varphi W)-g(R(X,Y)W,\varphi Z)+g((\nabla^2_{X,Z}\varphi)Y,W)-g((\nabla^2_{Y,Z}\varphi)X,W)=0 \quad (3.12)$$

olduğu görülür. Buradan Bianchi ve Ricci özdeşlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} &g(R(X,Y)Z,\varphi W)=-g(R(Y,Z)X,\varphi W)-g(R(Z,X)Y,\varphi W) \\ &=g((\nabla^2_{Y,Z}\varphi)W,X)-g((\nabla^2_{Z,Y}\varphi)W,X)-g(R(Y,Z)X,\varphi W) \\ &-g(R(Z,X)Y,\varphi W), \end{aligned} \quad (3.13)$$

bulunur. (3.13)'de elde edilen ifade (3.12)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} &g(R(X,Z)Y,\varphi W)-g(R(X,Y)W,\varphi Z)-g(R(Y,Z)W,\varphi X) \\ &-g((\nabla^2_{Z,Y}\varphi)W,X)-g((\nabla^2_{X,Z}\varphi)W,Y)=2g((\nabla^2_{Y,Z}\varphi)X,W) \end{aligned} \quad (3.14)$$

olduğu görülür. Öte yandan Ricci özdeşliği göz önüne alınırsa

$$g(R(X,Z)Y,\varphi W)-g(R(X,Z)W,\varphi Y)-g((\nabla^2_{X,Z}\varphi)Y,W)+g((\nabla^2_{Z,X}\varphi)Y,W)=0 \quad (3.15)$$

ifadesine ulaşılır. (3.14) ile (3.15) toplanırsa $(\nabla^2_{X,Y}\varphi)$'nin ters simetri özelliğinden

$$\begin{aligned} &2g(R(X,Z)Y,\varphi W)-g(R(X,Z)W,\varphi Y)-g(R(X,Y)W,\varphi Z) \\ &-g(R(Y,Z)W,\varphi X)=2g((\nabla^2_{Y,W}\varphi)Z,X) \end{aligned} \quad (3.16)$$

elde edilir. Son eşitlikte Y ile W yer değiştirildiğinde

$$\begin{aligned} &2g(R(X,Z)W,\varphi Y)-g(R(X,Z)Y,\varphi W)-g(R(X,W)Y,\varphi Z) \\ &-g(R(W,Z)Y,\varphi X)=2g((\nabla^2_{W,Y}\varphi)Z,X) \end{aligned} \quad (3.17)$$

eşitliği bulunur. (3.17) ifadesi (3.16)'dan çıkartıldığında Bianchi ve Ricci özdeşlikleri kullanılırsa

$$3g(R(\varphi X,Y)Z,W)+3g(R(X,\varphi Y)Z,W)+3g(R(X,Y)\varphi Z,W)+3g(R(X,Y)Z,\varphi W)=0$$

olur. Bu ise (3.9)'un ispatını tamamlar.

(3.10): (3.9) ifadesinde X yerine φX alınırsa

$$\begin{aligned}&-g(R(X,Y)Z,W)+\sum_{i=1}^{s}\eta_i(X)g(R(\xi_i,Y)Z,W)+g(R(\varphi X,\varphi Y)Z,W)\\&+g(R(\varphi X,Y)\varphi Z,W)+g(R(\varphi X,Y)Z,\varphi W)=0\end{aligned}\tag{3.18}$$

olduğu görülür. Bu son eşitlikte X ile Y yer değiştirilirse

$$\begin{aligned}&g(R(X,Y)Z,W)+\sum_{i=1}^{s}\eta_i(Y)g(R(\xi_i,X)Z,W)-g(R(\varphi X,\varphi Y)Z,W)\\&+g(R(\varphi Y,X)\varphi Z,W)+g(R(\varphi Y,X)Z,\varphi W)=0\end{aligned}\tag{3.19}$$

olur. (3.18)'den (3.19) ifadesi çıkarılırsa

$$\begin{aligned}&2g(R(\varphi X,\varphi Y)Z,W)-2g(R(X,Y)Z,W)+g(R(\varphi X,Y)\varphi Z,W)\\&+\sum_{i=1}^{s}\{\eta_i(X)g(R(\xi_i,Y)Z,W)-\eta_i(Y)g(R(\xi_i,X)Z,W)\}\\&-g(R(\varphi Y,X)\varphi Z,W)+g(R(\varphi X,Y)Z,\varphi W)-g(R(\varphi Y,X)Z,\varphi W)=0\end{aligned}\tag{3.20}$$

bulunur. Öte yandan (3.9) ifadesinde Z yerine φZ ve W yerine φW alınırsa sırasıyla

$$\begin{aligned}&-g(R(X,Y)Z,W)=-\sum_{i=}^{s}\eta_i(Z)g(R(X,Y)\xi_i,W)-g(R(X,Y)\varphi Z,\varphi W)\\&-g(R(X,\varphi Y)\varphi Z,W)-g(R(\varphi X,Y)\varphi Z,W)\end{aligned}\tag{3.21}$$

ve

$$\begin{aligned}&-g(R(X,Y)Z,W)=-\sum_{i=}^{s}\eta_i(W)g(R(X,Y)Z,\xi_i)-g(R(X,Y)\varphi Z,\varphi W)\\&-g(R(X,\varphi Y)Z,\varphi W)-g(R(\varphi X,Y)Z,\varphi W)\end{aligned}\tag{3.22}$$

denklemleri elde edilir. Elde edilen bu son iki denklem toplandıktan sonra (3.20) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}&2g(R(\varphi X,\varphi Y)Z,W)-2g(R(X,Y)\varphi Z,\varphi W)-\sum_{i=}^{s}\{\eta_i(Z)g(R(\xi_i,W)X,Y)\\&+\eta_i(W)g(R(\xi_i,Z)Y,X)-\eta_i(X)g(R(\xi_i,Y)Z,W)+\eta_i(Y)g(R(\xi_i,X)Z,W)\}=0\end{aligned}\tag{3.23}$$

olduğu bulunur. (3.23) denkleminde X yerine φX ve Y yerine de φY alınırsa

$$
\begin{aligned}
&2g(R(X,Y)Z,W)-2g(R(\varphi X,\varphi Y)\varphi Z,\varphi W)+\sum_{i=}^{s}\{\eta_i(W)g(R(\xi_i,Z)\varphi X,\varphi Y)\\
&-\eta_i(Z)g(R(\xi_i,W)\varphi X,\varphi Y)-2\eta_i(X)g(R(\xi_i,Y)Z,W)-2\eta_i(Y)g(R(X,\xi_i)Z,W)\}=0
\end{aligned} \tag{3.24}
$$

olur. Şimdi bu son denklemde $W=\xi_j$ seçilirse

$$
\begin{aligned}
&2g(R(X,Y)Z,\xi_j)+g(R(\xi_j,Z)\varphi X,\varphi Y)\\
&-2\sum_{i=1}^{s}\{\eta_i(X)g(R(\xi_i,Y)Z,\xi_j)+\eta_i(Y)g(R(X,\xi_i)Z,\xi_j)\}=0
\end{aligned} \tag{3.25}
$$

elde edilir. Şimdi (3.25)'de X yerine φX ve Y yerine de φY yazılırsa

$$
\begin{aligned}
&4g(R(\varphi X,\varphi Y)Z,\xi_j)+2g(R(\xi_j,Z)X,Y)\\
&-2\sum_{i=1}^{s}\{\eta_i(X)g(R(\xi_j,Z)\xi_i,Y)+\eta_i(Y)g(R(\xi_j,Z)X,\xi_i)\}=0
\end{aligned} \tag{3.26}
$$

olduğu görülür. Buradan (3.25) ve (3.26) toplanırsa

$$
g(R(\xi_j,Z)\varphi X,\varphi Y)=0 \tag{3.27}
$$

bulunur. Eğer (3.27), (3.24) denkleminde kullanılırsa (3.10) elde edilir.

(3.11): (3.10) ifadesinde Z yerine φZ ve W yerine de φW seçilip (3.27) eşitliği göz önüne alınırsa (3.11) elde edilir.

Yardımcı Teorem 3.2.2. M yaklaşık C-manifoldu üzerinde aşağıdaki eşitlikler sağlanır;

$$
(\nabla_X H_i)\xi_i=-H_i^2X \tag{3.28}
$$

$$
\begin{aligned}
&g(R(\xi_i,X)Y,Z)=-g((\nabla_X H_i)Y,Z)\\
&=\sum_{k=1}^{s}\{\eta_k(Y)g((H_i\circ H_k)X,Z)-\eta_k(Z)g((H_i\circ H_k)X,Y)\}
\end{aligned} \tag{3.29}
$$

$$
g(Q\xi_i,Z)=Ric(\xi_i,Z)=-\sum_{k=1}^{s}\eta_k(Z)Tr(H_i\circ H_k) \tag{3.30}
$$

$$
Ric(\varphi Y,Z)=-Ric(Y,\varphi Z),\ \varphi Q=-Q\varphi \tag{3.31}
$$

$$
Ric(\varphi Y,\varphi Z)=Ric(Y,Z)+\sum_{k=1}^{s}\eta_k(Y)\eta_k(Z)TrH_k^2 \tag{3.32}
$$

Özel olarak, TrH_i^2 sabit olur. Burada, Ric Ricci tensörünü ve Q da Ricci operatörünü simgelemektedir.

İspat. (3.28): $H_i\xi_i=0$ ifadesinin X vektör alanı yönünde kovaryant türevi alınırsa

(3.28) elde edilir.

(3.29): $g(R(\xi_i, X)Y, Z) = g(R(Y,Z)\xi_i, X)$ olduğu bilinmektedir. Riemann eğrilik tensörünün tanımından,

$$g(R(Y,Z)\xi_i, X) = g(\nabla_Y \nabla_Z \xi_i - \nabla_Y \nabla_Z \xi_i - \nabla_{[Y,Z]}\xi_i, X)$$

olur. Burada H_i tensör alanının tanımı göz önüne alınırsa

$$g(R(\xi_i, X)Y, Z) = g(R(Y,Z)\xi_i, X) = g((\nabla_Y H_i)Z, X) - g((\nabla_Z H_i)Y, X) \qquad (3.33)$$

olduğu görülür. Öte yandan birinci Bianchi özdeşliğinden

$$g(R(\xi_i, X)Y, Z) + g(R(X,Y)\xi_i, Z) + g(R(Y,\xi_i)X, Z) = 0 \qquad (3.34)$$

olur. Bu son eşitlikten

$$g((\nabla_X H_i)Y, Z) + g((\nabla_Y H_i)Z, X) - g((\nabla_Z H_i)Y, X) = 0 \qquad (3.35)$$

elde edilir. Bu ise $g(R(\xi_i, X)Y, Z) = -g((\nabla_X H_i)Y, Z)$ olduğunu verir. Şimdi son denklemde Y yerine de φY ve Z yerine de φZ yazılırsa, (3.27) ifadesinden

$$g((\nabla_X H_i)\varphi Y, \varphi Z) = 0 \qquad (3.36)$$

olduğu görülür. Yeniden (3.36) denkleminde Y yerine de φY ve Z yerine de φZ alındığında (3.28) ifadesi dikkate alınırsa

$$g(R(\xi_i, X)Y, Z) = -g((\nabla_X H_i)Y, Z) = \sum_{k=1}^{s} \{\eta_k(Y) g((\nabla_X H)\xi_k, Z)$$

$$\eta_k(Z) g((\nabla_X H)Y, \xi_k)\} = \sum_{k=1}^{s} \{\eta_k(Y) g((H_i \circ H_k)X, Z) - \eta_k(Z) g((H_i \circ H_k)X, Y)\}$$

elde edilir.

(3.30): (3.29) denkleminde $X = Y = E_i$ seçilip $i = 1, 2, \ldots, 2n+s$ için toplam alınırsa istenen denkleme ulaşılır. Öte yandan, (3.29) ifadesinde Y yerine $H_i Y$ alındıktan sonra elde edilen denklemde $Y = Z = E_i$ seçilip $i = 1, 2, \ldots, 2n+s$ üzerinden toplam alınırsa

$$Tr(\nabla_X H_i)H_i = 0$$

olduğu görülür. Bu ise, TrH_i^2'nin bir sabit olduğu anlamına gelir.

(3.31): $\{E_1, \ldots, E_n, E_{n+1} = \varphi E_1, \ldots, E_{2n} = \varphi E_n, E_{2n+1} = \xi_1, \ldots, E_{2n+s} = \xi_s\}$ kümesi bir $p \in M$ noktasındaki $T_p M$ tanjant uzayının bir φ-bazı olsun. Şimdi (3.9) denkleminde $X = W = E_i$ alındığında $i = 1, 2, \ldots, 2n+s$ için toplam hesaplanırsa, istenen eşitlik bulunur.

(3.32): (3.31)'de Z yerine de φZ yazılıp, (3.30) göz önüne alınırsa (3.32) elde edilir.

Yardımcı Teorem 3.2.3. M yaklaşık C-manifoldu üzerinde

$$g((\nabla_X \varphi)\varphi Y, Z) = g((\nabla_X \varphi)Y, \varphi Z) + \sum_{k=1}^{s}\{\eta_k(Z)g(Y, H_k X) + \eta_k(Y)g(Z, H_k X)\} \quad (3.37)$$

$$g((\nabla_{\varphi X} \varphi)Y, Z) = g((\nabla_X \varphi)Y, \varphi Z) + \sum_{k=1}^{s}\{\eta_k(Z)g(Y, H_k X) + \eta_k(X)g(H_k Z, Y)\} \quad (3.38)$$

$$g((\nabla_{\varphi X} \varphi)\varphi Y, Z) = -g((\nabla_X \varphi)Y, Z) + \sum_{k=1}^{s}\{\eta_k(Y)g(\varphi Z, H_k X) + \eta_k(X)g(H_k Z, \varphi Y)\} \quad (3.39)$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. (3.37): $g(\varphi Y, \varphi Z) = g(Y, Z) - \sum_{k=1}^{s}\eta_k(Y)\eta_k(Z)$ eşitliğinin X vektör alanı yönünde kovaryant türevi alınıp, Önerme 3.1.1.'in 2. şıkkı göz önüne alınırsa ispat tamamlanır.
(3.38): M manifoldunun yaklaşık C-manifold olması göz önüne alınırsa (3.37) ifadesinden (3.38) denklemi elde edilir.
(3.39): (3.38)'de Y yerine de φY yazıldığında (3.37) ifadesi dikkate alınırsa hedeflenen eşitliğe ulaşılır.

Önerme 3.2.1. M yaklaşık C-manifoldu

$$g(R(\varphi W, \varphi X)Y, Z) = g(R(W, X)Y, Z) + g((\nabla_W \varphi)X, (\nabla_Y \varphi)Z) + \sum_{k=1}^{s} g(H_k W, X)g(H_k Y, Z)$$

denklemini sağlar.

İspat. (3.37) denkleminin W vektör alanı yönünde kovaryant türevi alınırsa

$$\begin{aligned} & g(\nabla_W(\nabla_X \varphi)\varphi Y, Z) + g((\nabla_X \varphi)(\nabla_W \varphi)Y, Z) = g(\nabla_W(\nabla_X \varphi)Y, \varphi Z) \\ & + g((\nabla_X \varphi)Y, (\nabla_W \varphi)Z) + \sum_{k=1}^{s}\{g(H_k W, Z)g(H_k X, Y) \\ & + \eta_k(Z)g((\nabla_W H)X, Y) + g(H_k W, Y)g(H_k X, Z) + \eta_k(Y)g((\nabla_W H)X, Z)\} \end{aligned} \quad (3.40)$$

elde edilir. Öte yandan (3.11), (3.17) ve (3.29) denklemleri uygulanırsa (3.40) eşitliğinin sağ tarafındaki birinci ve ikinci terimlerinin toplamının

$$\begin{aligned} & g(\nabla_W(\nabla_X \varphi)Y, \varphi Z) + g((\nabla_X \varphi)Y, (\nabla_W \varphi)Z) = g((\nabla_X \varphi)Y, (\nabla_W \varphi)Z) \\ & + g(R(X, Y)W, Z) + \sum_{k=1}^{s}\{\eta^k(X)\eta^k(Z)g(H_k W, H_k Y) - \eta^k(Y)\eta^k(Z)g(H_k W, H_k X)\} \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}\{g(R(W,Z)\varphi X,\varphi Y)+g(R(X,Z)\varphi W,\varphi Y)-g(R(W,X)\varphi Z,\varphi Y)\} \tag{3.41}$$

ifadesine eşit olduğu görülür. (3.41)’de Y ve Z ’nin rolleri değiştirildiğinde elde edilen denklem eksi ile çarpılıp (3.40) eşitliğinin sol tarafındaki terimleri dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} &g((\nabla_X\varphi)Z,(\nabla_W\varphi)Y)+g((\nabla_X\varphi)Y,(\nabla_W\varphi)Z)+g(R(X,Z)W,Y)\\ &-g(R(W,Z)\varphi X,\varphi Y)+g(R(X,Y)W,Z)-g(R(X,Z)\varphi W,\varphi Y)\\ &+\sum_{k=1}^{s}\{g(H_kX,Z)g(H_kW,Y)-g(H_kW,Z)g(H_kX,Y)\}=0 \end{aligned} \tag{3.42}$$

elde edilir. (3.42)’de Z ve W yerine sırasıyla φZ ve φW alınırsa

$$\begin{aligned} &g((\nabla_X\varphi)\varphi Z,(\nabla_{\varphi W}\varphi)Y)+g((\nabla_X\varphi)Y,(\nabla_{\varphi W}\varphi)\varphi Z)+g(R(X,\varphi Z)\varphi W,Y)\\ &-g(R(\varphi W,\varphi Z)\varphi X,\varphi Y)+g(R(X,Y)\varphi W,\varphi Z)-g(R(X,\varphi Z)\varphi^2W,\varphi Y)\\ &+\sum_{k=1}^{s}\{g(H_kX,\varphi Z)g(H_k\varphi W,Y)-g(H_k\varphi W,\varphi Z)g(H_kX,Y)\}=0 \end{aligned} \tag{3.43}$$

olduğu bulunur. Burada (3.37), (3.38) ve Yardımcı Teorem 3.2.1 kullanılarak

$$\begin{aligned} &g((\nabla_X\varphi)\varphi Z,(\nabla_{\varphi W}\varphi)Y)=g((\nabla_X\varphi)Z,(\nabla_W\varphi)Y)\\ &+\sum_{k=1}^{s}\{g(H_kX,Z)g(H_kW,Y)-g(W,H_k\varphi Y)g(X,H_k\varphi Z)\\ &+\eta^k(W)g(\varphi(\nabla_X\varphi)Z,H_kY)-\eta^k(Z)g(\varphi(\nabla_W\varphi)Y,H_kX)\\ &-\eta^k(Z)\eta^k(W)g(H_kX,H_kY)\} \end{aligned} \tag{3.44}$$

ve

$$\begin{aligned} &g((\nabla_X\varphi)Y,(\nabla_{\varphi W}\varphi)\varphi Z)=-g((\nabla_X\varphi)Y,(\nabla_W\varphi)Z)\\ &+\sum_{k=1}^{s}\{g(\varphi H_kX,Y)g(H_kW,\varphi Z)-g(\varphi H_kW,Z)g(\varphi H_kX,Y)\\ &-\eta^k(W)g((\nabla_X\varphi)Y,H_k\varphi Z)-\eta^k(Z)g(\varphi(\nabla_X\varphi)Y,H_kW)\} \end{aligned} \tag{3.45}$$

denklemleri elde edilir. (3.29) eşitliğinden ve Yardımcı Teorem 3.2.1.’den

$$\begin{aligned} &g(R(X,\varphi Z)\varphi W,Y)-g(R(X,\varphi Z)\varphi^2W,\varphi Y)\\ &=g(R(X,\varphi Z)\varphi W,Y)+g(R(X,\varphi Z)W,\varphi Y)\\ &\sum_{k=1}^{s}\eta^k(X)\eta^k(W)g(H_k^2Z,Y) \end{aligned} \tag{3.46}$$

olduğu görülür. Öte yandan (3.9) ve (3.11) denklemlerinden

$$\begin{aligned} &g(R(X,Z)\varphi W,\varphi Y)+g(R(X,Z)\varphi^2W,\varphi Y)\\ &+g(R(X,\varphi Z)\varphi W,Y)+g(R(\varphi X,Z)\varphi W,Y)=0 \end{aligned} \tag{3.47}$$

bulunur.

$$g\left(R(\varphi X,Z)\varphi W,\varphi^2 Y\right)=g\left(R\left(\varphi^2 X,\varphi Z\right)W,\varphi Y\right) \tag{3.48}$$

eşitliğinden

$$-g\left(R(\varphi X,Z)\varphi W,Y\right)+\sum_{k=1}^{s}\eta^k(Y)g\left(R(\varphi X,Z)\varphi W,\xi_k\right)$$
$$=-g\left(R(X,\varphi Z)W,\varphi Y\right)+\sum_{k=1}^{s}\eta^k(X)g\left(R(\xi_k,\varphi Z)W,\varphi Y\right)$$

olur. (3.29), (3.47), (3.48) denklemleri ve Yardımcı Teorem 3.2.1. göz önüne alındığında

$$\begin{aligned}
&g\left(R(X,\varphi Z)\varphi W,Y\right)+g\left(R(X,\varphi Z)W,\varphi Y\right)\\
&=-\sum_{k=1}^{s}\eta^k(W)\eta^k(X)g\left(H_kY,H_kZ\right)+g\left(R(X,Z)W,Y\right)\\
&+\sum_{k=1}^{s}\eta^k(Z)\eta^k(Y)g\left(H_kX,H_kW\right)-g\left(R(X,Z)\varphi W,\varphi Y\right)\\
&+\sum_{k=1}^{s}\eta^k(W)g\left(R(\xi_k,Y)Z,X\right)
\end{aligned} \tag{3.49}$$

ifadesine ulaşılır. (3.49), (3.46) yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&g\left(R(X,\varphi Z)\varphi W,Y\right)-g\left(R(X,\varphi Z)\varphi^2 W,\varphi Y\right)\\
&=-\sum_{k=1}^{s}\eta^k(W)\eta^k(X)g\left(Y,H_k^2Z\right)+g\left(R(X,Z)W,Y\right)\\
&-\sum_{k=1}^{s}\eta^k(Z)\eta^k(Y)g\left(H_k^2X,W\right)-g\left(R(X,Z)\varphi W,\varphi Y\right)\\
&+\sum_{k=1}^{s}\eta^k(W)\eta^k(Z)g\left(X,H_k^2Y\right)
\end{aligned} \tag{3.50}$$

elde edilir. (3.29) ve (3.10) denklemleri kullanıldığında

$$\begin{aligned}
&g\left(R(X,Y)\varphi W,\varphi Z\right)-g\left(R(\varphi W,\varphi Z)\varphi X,\varphi Y\right)\\
&=g\left(R(W,Z)\varphi X,\varphi Y\right)-g\left(R(W,Z)X,Y\right)\\
&+\sum_{k=1}^{s}\left\{\eta^k(W)\eta^k(X)g\left(Y,\varphi H_kZ\right)-\eta^k(W)\eta^k(Y)g\left(X,\varphi H_kZ\right)\right.\\
&+\eta^k(X)\eta^k(W)g\left(H_k^2Z,Y\right)-\eta^k(Y)\eta^k(W)g\left(H_k^2Z,X\right)\\
&+\eta^k(Z)\eta^k(Y)g\left(X,\varphi H_kW\right)-\eta^k(Z)\eta^k(X)g\left(Y,\varphi H_kW\right)\\
&\left.+\eta^k(Y)\eta^k(Z)g\left(H_k^2W,X\right)-\eta^k(X)\eta^k(Z)g\left(H_k^2W,Y\right)\right\},
\end{aligned} \tag{3.51}$$

denklemi bulunur. Burada (3.44), (3.45), (3.50) ve (3.51) eşitlikleri (3.43)'te yerine yazılıp Yardımcı Teorem 3.2.1. göz önünde bulundurulduğunda

$$g\left((\nabla_X\varphi)Z,(\nabla_W\varphi)Y\right)-g\left((\nabla_X\varphi)Y,(\nabla_W\varphi)Z\right)+g\left(R(X,Z)W,Y\right)$$
$$-g\left(R(X,Z)\varphi W,\varphi Y\right)+g\left(R(W,Z)\varphi X,\varphi Y\right)-g\left(R(W,Z)X,Y\right)$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{k=1}^{s}\{\eta^k(W)g((\nabla_X\varphi)Y,\varphi H_k Z)-\eta^k(W)g((\nabla_X\varphi)Z,\varphi H_k Y)\\
&+\eta^k(Z)g((\nabla_W\varphi)Y,\varphi H_k X)-\eta^k(Z)g((\nabla_X\varphi)Y,\varphi H_k W)\\
&-\eta^k(W)\eta^k(Y)g(X,H_k^2 Z)-\eta^k(Z)\eta^k(X)g(Y,H_k^2 W)\\
&+\eta^k(W)\eta^k(Z)g(X,H_k^2 Y)+\eta^k(Z)\eta^k(W)g(X,H_k^2 Y)\\
&-g(H_k X,Y)g(H_k W,Z)+g(H_k X,Z)g(H_k W,Y)\}=0
\end{aligned}
\tag{3.52}
$$

elde edilir. (3.52) ile (3.42) toplandığında ise

$$
\begin{aligned}
&2\{g((\nabla_X\varphi)Z,(\nabla_W\varphi)Y)+g(R(X,Z)W,Y)-g(R(X,Z)\varphi W,\varphi Y)\}\\
&+\sum_{k=1}^{s}\{\eta^k(W)g((\nabla_X\varphi)Y,\varphi H_k Z)-\eta^k(W)g((\nabla_X\varphi)Z,\varphi H_k Y)\\
&+\eta^k(Z)g((\nabla_W\varphi)Y,\varphi H_k X)-\eta^k(Z)g((\nabla_X\varphi)Y,\varphi H_k W)\\
&+\eta^k(W)\eta^k(Y)g(H_k X,H_k Z)+\eta^k(Z)\eta^k(X)g(H_k Y,H_k W)\\
&-2\eta^k(W)\eta^k(Z)g(H_k X,H_k Y)+2g(H_k X,Z)g(H_k W,Y)\}=0
\end{aligned}
\tag{3.53}
$$

olduğu görülür. (3.53) denkleminde X ile Z ve W ile Y yer değiştirdiğinde elde edilen denklem (3.53) denkleminden çıkarılırsa

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{s}\{\eta^k(W)g((\nabla_X\varphi)Y,\varphi H_k Z)-\eta^k(W)g((\nabla_X\varphi)Z,\varphi H_k Y)\\
&+\eta^k(Z)g((\nabla_W\varphi)Y,\varphi H_k X)-\eta^k(Z)g((\nabla_X\varphi)Y,\varphi H_k W)\\
&+\eta^k(Y)g((\nabla_W\varphi)Z,\varphi H_k X)-\eta^k(Y)g((\nabla_X\varphi)Z,\varphi H_k W)\\
&+\eta^k(X)g((\nabla_W\varphi)Y,\varphi H_k Z)-\eta^k(X)g((\nabla_W\varphi)Z,\varphi H_k Y)\\
&+2\eta^k(X)\eta^k(Y)g(H_k Z,H_k W)-2\eta^k(Z)\eta^k(W)g(H_k Y,H_k X)\}=0
\end{aligned}
\tag{3.54}
$$

bulunur. (3.54) de $W=\xi_i$ alınıp, Yardımcı Teorem 3.1.2. ve Önerme 3.1.1. dikkate alınırsa

$$
\begin{aligned}
&g((\nabla_X\varphi)Y,\varphi H_i Z)=g((\nabla_X\varphi)Z,\varphi H_i Y)\\
&+\eta^i(Z)g(H_i Y,H_i X)-\eta^i(Y)g(H_i Z,H_i X)
\end{aligned}
\tag{3.55}
$$

olup elde edilen bu son denklemden

$$
\begin{aligned}
&g((\nabla_Y\varphi)X,\varphi H_i Z)=-g((\nabla_X\varphi)Z,\varphi H_i Y)\\
&-\eta^i(Z)g(H_i Y,H_i X)+\eta^i(Y)g(H_i Z,H_i X)
\end{aligned}
\tag{3.56}
$$

ifadesine ulaşılır. (3.56)'da X ile Y yer değiştirilip elde edilen denklemde (3.56) yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
&g((\nabla_Z\varphi)Y,\varphi H_i X)+g((\nabla_Z\varphi)X,\varphi H_i Y)\\
&=2\eta^i(Z)g(H_i Y,H_i X)-\eta^i(X)g(H_i Y,H_i Z)\\
&-\eta^i(Y)g(H_i Z,H_i X)
\end{aligned}
\tag{3.57}
$$

olduğu görülür. Bu defa (3.57) denkleminde Z ile X yer değiştirilip (3.55) ifadesi ile birlikte düşünüldüğünde

$$g((\nabla_X \varphi)Y, \varphi H_i Z) = \eta^i(X) g(H_i Y, H_i Z) - \eta^i(Y) g(H_i Z, H_i X) \tag{3.58}$$

elde edilir. Son olarak (3.58), (3.53)'te yerine yazıldığında ispat tamamlanmış olur.

Yardımcı Teorem 3.2.4. Yaklaşık C-manifold üzerinde

$$g((\nabla_X \varphi)Y, H_i Z) = \sum_{k=1}^{s} \{\eta^k(Y) g((H_i \circ H_k)X, \varphi Z) - \eta^k(X) g((H_i \circ H_k)Y, \varphi Z)\} \tag{3.59}$$

ve

$$g((\nabla_X H_i)Y, H_i Z) = -\sum_{k=1}^{s} \eta^k(Y) g((H_i \circ H_k)X, H_i Z) \tag{3.60}$$

denklemleri sağlanır.

İspat. (3.59): (3.58)'de Z yerine φZ alınıp Yardımcı Teorem 3.2.1. kullanıldığında (3.59) elde edilir.

(3.60): (3.29) denkleminde Z yerine $H_i Z$ alındığında Yardımcı Teorem 3.2.1. kullanılırsa (3.60) elde edilir.

3.3. SABİT φ-KESİTSEL EĞRİLİĞİ

Tanım 3.3.1. M yaklaşık C-manifold olsun. Eğer K_p ile gösterilen $\forall p \in M$ noktasındaki $K(X, \varphi X)$ kesitsel eğriliği sıfırdan farklı ve $\forall 1 \le i \le s$ için $X \perp \xi_i$ olan $X \in T_p M$ tanjant vektörünün seçiminden bağımsız ise yani her noktasındaki kesitsel eğriliği aynı ise M manifolduna nokta tabanlı K_p sabit φ-kesitsel eğriliğe sahiptir denir.

Teorem 3.3.1. M nokta tabanlı K sabit φ-kesitsel eğriliğe sahip yaklaşık C-manifold olsun. Bu durumda eğrilik tensörü

$$\begin{aligned}
4g(R(W,X)Y,Z) &= g((\nabla_W \varphi)Z, (\nabla_X \varphi)Y) - g((\nabla_W \varphi)Y, (\nabla_X \varphi)Z) \\
&- 2g((\nabla_W \varphi)X, (\nabla_Y \varphi)Z) + \sum_{k=1}^{s} \{g(\nabla_W \xi_k, Z) g(\nabla_X \xi_k, Y) - g(\nabla_W \xi_k, Y) g(\nabla_X \xi_k, Z) \\
&- 2g(\nabla_W \xi_k, X) g(\nabla_Y \xi_k, Z) - \eta_k(W)\eta_k(Y) g(\nabla_X \xi_k, \nabla_Z \xi_k) \\
&+ \eta_k(W)\eta_k(Z) g(\nabla_X \xi_k, \nabla_Y \xi_k) + \eta_k(X)\eta_k(Y) g(\nabla_W \xi_k, \nabla_Z \xi_k)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\eta_k(X)\eta_k(Z)g(\nabla_W\xi_k,\nabla_Y\xi_k)\}+K\{g(X,Y)g(Z,W)-g(Z,X)g(Y,W)\\
&+\sum_{k=1}^{s}[\eta_k(X)\eta_k(Z)g(Y,W)-\eta_k(X)\eta_k(Y)g(Z,W)+\eta_k(Y)\eta_k(W)g(Z,X)\\
&\eta_k(Z)\eta_k(W)g(Y,X)]+g(X,\varphi Y)g(\varphi Z,W)\\
&-g(W,\varphi Y)g(\varphi Z,X)-2g(W,\varphi X)g(\varphi Z,Y)\}
\end{aligned}
$$

şeklindedir.

İspat. Hipotezden, $\forall p\in M$ noktasında $1\leq i\leq s$ için $X\perp\xi_i$ olacak şekildeki $\forall X\in T_pM$ tanjant vektörü için

$$g(R(\varphi X,X)\varphi X,X)+K_p\|X\|^4=0$$

olur. Bu ise $\forall p\in M$ noktasında keyfi $X\in T_pM$ için

$$g\left(R\left(\varphi^2X,\varphi X\right)\varphi^2X,\varphi X\right)+K_pg(\varphi X,\varphi X)g(\varphi X,\varphi X)=0 \tag{3.61}$$

olduğu anlamına gelir. Şimdi

$$A(W,X,Y,Z)=g\left(R\left(\varphi^2W,\varphi X\right)\varphi^2Y,\varphi Z\right)+K_pg(\varphi W,\varphi Y)g(\varphi X,\varphi Z) \tag{3.62}$$

olarak tanımlansın. Burada $H_i\xi_i=0$ olması ve (3.10) denklemi göz önüne alınırsa

$$g\left(R\left(\varphi^2W,-X+\sum_{k=1}^{s}\eta_k(X)\xi_k\right)\varphi^2Y,-Z+\sum_{k=1}^{s}\eta_k(Z)\xi_k\right)=g(R(\varphi W,\varphi X)\varphi Y,\varphi Z)$$

olduğu görülür. Son denklemde $X=\varphi S$ ve $Z=\varphi T$ alınırsa

$$g\left(R\left(\varphi^2W,\varphi S\right)\varphi^2Y,\varphi T\right)=g\left(R\left(\varphi W,\varphi^2S\right)\varphi Y,\varphi^2T\right) \tag{3.63}$$

olduğu elde edilir. (3.63) kullanılarak

$$A(X,W,Z,Y)=A(W,X,Y,Z) \tag{3.64}$$

bulunur. Ayrıca, (3.62) eşitliğinden

$$A(W,X,Y,Z)=A(Y,Z,W,X) \tag{3.65}$$

ifadesine ulaşılır. (3.64) ve (3.65) eşitliklerinden (3.61)'in

$$
\begin{aligned}
&A(U,X,V,Z)+A(U,V,Z,X)+A(U,Z,X,V)\\
&+A(U,X,Z,V)+A(U,Z,V,X)+A(U,V,X,V)=0
\end{aligned} \tag{3.66}
$$

ifadesine denk olduğu görülür. U ve V yerine sırasıyla φW ve φY alındığında, (3.62) ile birlikte, Önerme 3.1.1.'in 1. ve 2. şıkları, (3.10), (3.11), (3.29) ve (3.36) denklemleri dikkate alınırsa

$$
\begin{aligned}
& g(R(W,X)Y,Z)+g(R(W,Z)Y,X)-g(R(W,\varphi Y)\varphi Z,X) \\
& -g(R(W,\varphi Y)\varphi X,Z)-g(R(W,Z)\varphi X,\varphi Y)-g(R(W,X)\varphi Z,\varphi Y) \\
& -\sum_{k=1}^{S}\{\eta_k(Y)\eta_k(Z)g(H_kW,H_kX)+\eta_k(X)\eta_k(Y)g(H_kW,H_kZ) \\
& -2\eta_k(Y)\eta_k(W)g(H_kX,H_kZ)-2\eta_k(X)\eta_k(Z)g(H_kW,H_kY)\} \\
& +2K_P\left\{\sum_{k=1}^{S}(g(W,Y)-\eta_k(Y)\eta_k(W))(g(X,Z)-\eta_k(X)\eta_k(Z))\right. \\
& \left.+g(\varphi W,X)g(\varphi Y,Z)-g(\varphi W,Z)g(\varphi X,Y)\right\}=0
\end{aligned}
\tag{3.67}
$$

elde edilir. (3.67) denkleminde W ile X yer değiştirilirse

$$
\begin{aligned}
& g(R(X,W)Y,Z)+g(R(X,Z)Y,W)-g(R(X,\varphi Y)\varphi Z,W) \\
& -g(R(X,\varphi Y)\varphi W,Z)-g(R(X,Z)\varphi W,\varphi Y)-g(R(X,W)\varphi Z,\varphi Y) \\
& -\sum_{k=1}^{S}\{\eta_k(Y)\eta_k(Z)g(H_kX,H_kW)+\eta_k(W)\eta_k(Y)g(H_kX,H_kZ) \\
& -2\eta_k(Y)\eta_k(X)g(H_kW,H_kZ)-2\eta_k(W)\eta_k(Z)g(H_kX,H_kY)\} \\
& +2K_P\left\{\sum_{k=1}^{S}(g(X,Y)-\eta_k(Y)\eta_k(X))(g(W,Z)-\eta_k(W)\eta_k(Z))\right. \\
& \left.+g(\varphi X,W)g(\varphi Y,Z)-g(\varphi X,Z)g(\varphi W,Y)\right\}=0
\end{aligned}
\tag{3.68}
$$

olur. (3.67)'den (3.68) denklemi çıkarılırsa

$$
\begin{aligned}
& 2g(R(W,X)Y,Z)+2g(R(W,X)\varphi Y,\varphi Z)-g(R(W,\varphi Y)\varphi Z,X) \\
& +g(R(W,Z)Y,X)-g(R(X,Z)Y,W)-g(R(W,\varphi Y)\varphi X,Z) \\
& -g(R(W,Z)\varphi X,\varphi Y)+g(R(X,\varphi Y)\varphi Z,W)+g(R(X,\varphi Y)\varphi W,Z) \\
& +g(R(X,Z)\varphi W,\varphi Y)-\sum_{k=1}^{S}\{\eta_k(Y)\eta_k(Z)g(H_kW,H_kX) \\
& +\eta_k(X)\eta_k(Y)g(H_kW,H_kZ)-2\eta_k(Y)\eta_k(W)g(H_kX,H_kZ) \\
& -2\eta_k(X)\eta_k(Z)g(H_kW,H_kY)\} \\
& +2K_P\left\{\sum_{k=1}^{S}(g(W,Y)-\eta_k(Y)\eta_k(W))(g(X,Z)-\eta_k(X)\eta_k(Z))\right. \\
& \left.+g(\varphi W,X)g(\varphi Y,Z)-g(\varphi W,Z)g(\varphi X,Y)\right\}=0
\end{aligned}
\tag{3.69}
$$

elde edilir. Öte yandan (3.9) ve (3.29) denklemleri göz önüne alınırsa

$$
\begin{aligned}
& g(R(W,Z)Y,X)=g(R(\varphi W,Z)Y,\varphi X) \\
& +g(R(W,\varphi Z)Y,\varphi X)+g(R(W,Z)\varphi Y,\varphi X) \\
& +\sum_{k=1}^{s}\{\eta^k(X)\eta^k(Z)g(H_k^2(Y),W)-\eta^k(X)\eta^k(W)g(H_k^2Y,Z)\}
\end{aligned}
\tag{3.70}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&-g(R(X,Z)Y,W)=-g(R(\varphi X,Z)Y,\varphi W)\\
&-g(R(X,\varphi Z)Y,\varphi W)-g(R(X,Z)\varphi Y,\varphi W)\\
&+\sum_{k=1}^{s}\left\{\eta^k(X)\eta^k(W)g\left(H_k^2Y,Z\right)-\eta^k(Z)\eta^k(W)g\left(H_k^2Y,X\right)\right\}
\end{aligned}
\tag{3.71}
$$

eşitlikleri elde edilir. Burada, (3.11) ve (3.30) ifadelerinden

$$
\begin{aligned}
&g(R(\varphi X,Y)\varphi Z,W)=g(R(X,\varphi Y)Z,\varphi W)\\
&+\sum_{k=1}^{s}\left\{\eta^k(X)\eta^k(Z)g(H_kW,H_kY)-\eta^k(Y)\eta^k(W)g(H_kX,H_kZ)\right\}
\end{aligned}
\tag{3.72}
$$

olduğu görülür. (3.70), (3.72) ve (3.11) denklemlerinin sağ tarafındaki birinci terimler için birinci Bianchi özdeşliği uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
&g(R(\varphi W,Z)Y,\varphi X)=g(R(X,W)\varphi Z,\varphi Y)-g(R(\varphi Y,W)\varphi Z,X)\\
&+\sum_{k=1}^{s}\left\{\eta^k(Y)\eta^k(Z)g(H_kW,H_kX)-\eta^k(X)\eta^k(W)g(H_kZ,H_kY)\right\}
\end{aligned}
\tag{3.73}
$$

elde edilir. (3.73) ifadesi (3.70) denkleminde yerine yazıldıktan sonra elde edilen denklem ve (3.71) ifadesi (3.69)'da yerine yazılıp (3.72) denklemi kullanıldığında ve (3.69)'un üçüncü terimi için birinci Bianchi özdeşliği uygulandığında

$$
\begin{aligned}
&g(R(W,X)Y,Z)+2g(R(W,X)\varphi Y,\varphi Z)-g(R(W,Z)\varphi X,\varphi Y)\\
&+g(R(X,Z)\varphi W,\varphi Y)+\sum_{k=1}^{S}\left\{\eta^k(Y)\eta^k(W)g(H_kZ,H_kX)\right.\\
&+\eta^k(X)\eta^k(Z)g(H_kW,H_kY)-\eta^k(Y)\eta^k(X)g(H_kZ,H_kW)\\
&\left.-\eta^k(Z)\eta^k(W)g(H_kY,H_kX)\right\}+K_P\{g(W,Y)g(X,Z)-g(X,Y)g(W,Z)\\
&+\sum_{k=1}^{S}\left\{\eta^k(Y)\eta^k(X)g(Z,W)-\eta^k(W)\eta^k(Y)g(X,Z)\right.\\
&\left.+\eta^k(Z)\eta^k(W)g(Y,X)-\eta^k(X)\eta^k(Z)g(W,Y)\right\}\\
&+2K_p\{g(\varphi W,X)g(\varphi Y,Z)-g(\varphi W,Z)g(\varphi X,Y)\\
&+g(\varphi X,Z)g(\varphi W,Y)-g(\varphi X,W)g(\varphi Y,Z)\}=0
\end{aligned}
\tag{3.74}
$$

denklemine ulaşılır. Önerme 3.2.1. göz önüne alınırsa

$$
\begin{aligned}
&g(R(W,X)Y,Z)+2g(R(W,X)Y,Z)-g(R(W,Z)X,Y)\\
&+g(R(X,Z)W,Y)+2g((\nabla_W\varphi)X,(\nabla_Y\varphi)Z)-g((\nabla_W\varphi)Z,(\nabla_X\varphi)Y)\\
&+g((\nabla_X\varphi)Z,(\nabla_W\varphi)Y)+\sum_{k=1}^{S}\left\{\eta^k(Y)\eta^k(W)g(H_kZ,H_kX)\right.\\
&+\eta^k(X)\eta^k(Z)g(H_kW,H_kY)-\eta^k(Y)\eta^k(X)g(H_kZ,H_kW)\\
&-\eta^k(Z)\eta^k(W)g(H_kY,H_kX)+2g(H_kW,X)g(Z,H_kY)\\
&\left.-g(H_kW,Z)g(Y,H_kX)+g(H_kW,Y)g(Z,H_kX)\right\}\\
&+K_P\{g(W,Y)g(X,Z)-g(X,Y)g(W,Z)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{k=1}^{S}\{\eta^k(Y)\eta^k(X)g(Z,W)-\eta^k(W)\eta^k(Y)g(X,Z)\\
&+\eta^k(Z)\eta^k(W)g(Y,X)-\eta^k(X)\eta^k(Z)g(W,Y)\}\}\\
&+2K_p\{g(\varphi W,X)g(\varphi Y,Z)-g(\varphi W,Z)g(\varphi X,Y)\\
&+g(\varphi X,Z)g(\varphi W,Y)-g(\varphi X,W)g(\varphi Y,Z)\}=0
\end{aligned} \tag{3.75}
$$

olup, birinci Bianchi özdeşliğinden

$$
\begin{aligned}
&4g(R(W,X)Y,Z)=g((\nabla_W\varphi)Z,(\nabla_X\varphi)Y)-g((\nabla_W\varphi)Y,(\nabla_X\varphi)Z)\\
&-2g((\nabla_Y\varphi)Z,(\nabla_W\varphi)X)+\sum_{k=1}^{S}\{g(H_kW,Z)g(Y,H_kX)\\
&-g(H_kW,Y)g(Z,H_kX)-2g(H_kW,X)g(Z,H_kY)\\
&-\eta^k(Y)\eta^k(W)g(H_kZ,H_kX)+\eta^k(X)\eta^k(Y)g(H_kW,H_kZ)\\
&-\eta^k(Z)\eta^k(X)g(H_kY,H_kW)+\eta^k(Z)\eta^k(W)g(H_kY,H_kX)\}\\
&+K_P\{g(X,Y)g(W,Z)-g(W,Y)g(X,Z)\\
&+\sum_{k=1}^{S}\{\eta^k(Z)\eta^k(X)g(Y,W)-\eta^k(X)\eta^k(Y)g(W,Z)\\
&+\eta^k(Y)\eta^k(W)g(Z,X)-\eta^k(W)\eta^k(Z)g(X,Y)\}\\
&+g(\varphi Y,X)g(\varphi Z,W)-g(\varphi Z,X)g(\varphi Y,W)\\
&-2g(\varphi X,W)g(Y,\varphi Z)\}=0
\end{aligned} \tag{3.76}
$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

(3.76) denkleminden, M üzerindeki, S Ricci eğriliği ve r skaler eğriliği sırasıyla,

$$
\begin{aligned}
S(X,Y)&=-\frac{3}{4}Tr(\nabla_X\varphi)(\nabla_Y\varphi)+\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{s}g((\nabla_X\xi_k),(\nabla_Y\xi_k))\\
&+\sum_{k=1}^{s}\eta^k(X)\eta^k(Y)|\nabla\xi_k|^2+\frac{(2n+s+1)}{4}K_p\left(g(X,Y)-\sum_{k=1}^{s}\eta^k(X)\eta^k(Y)\right)
\end{aligned} \tag{3.77}
$$

$$
r=\frac{3}{4}|\nabla\varphi|^2+\sum_{k=1}^{s}|\nabla\xi_k|^2+\frac{n(2n+s+1)}{2}K \tag{3.78}
$$

şeklinde hesaplanır.

Eğer $K\geq 0$ ise, (3.77) denkleminden, (2.33) denkleminin ii) şıkkından ve $\nabla\varphi$'nin ters simetri özelliğinden $\forall X$ vektör alanı için, $S(X,X)\geq 0$ olur. Böylece Bochner'in teoreminden yararlanılarak aşağıdaki teorem verilebilir (Yano 1970).

Teorem 3.3.2. Sabit bir $K\geq 0$ noktasal φ-kesitsel eğriliğine sahip kompakt yaklaşık M C-manifoldu üzerinde harmonik bir X vektör alanının kovaryant türevi sıfırdır.

(3.78) denklemi göz önüne alınırsa aşağıdaki teorem doğrulanır.

Teorem 3.3.3. M, sabit bir $K \geq 0$ noktasal φ-kesitsel eğriliğine sahip yaklaşık C-manifold olsun. Bu durumda, M'nin r skaler eğriliği için

$$r \geq \frac{n(2n+s+1)}{2} K \tag{3.79}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 3.3.4. Eğer M sabit bir $K \geq 0$ noktasal φ-kesitsel eğriliğine sahip bir C-manifold ise $\nabla\varphi = 0$ ve $\forall k = 1,\ldots,s$ için $\nabla\xi_k = 0$ olur. Böylece eğrilik tensörü

$$\begin{aligned} &4g(R(W,X)Y,Z) = +K_P\{g(X,Y)g(W,Z) - g(W,Y)g(X,Z) \\ &+\sum_{k=1}^{S}\{\eta^k(Z)\eta^k(X)g(Y,W) - \eta^k(X)\eta^k(Y)g(W,Z) \\ &+\eta^k(Y)\eta^k(W)g(Z,X) - \eta^k(W)\eta^k(Z)g(X,Y)\} \\ &+g(\varphi Y,X)g(\varphi Z,W) - g(\varphi Z,X)g(\varphi Y,W) \\ &-2g(\varphi X,W)g(Y,\varphi Z)\} = 0 \end{aligned} \tag{3.80}$$

denklemi ile verilir.

3.4. BAZI ÖZEL D-KONFORMAL DÖNÜŞÜMLER

Tanım 3.4.1. M, C-manifold ve (φ,ξ_i,η^i,g) de bir C-yapı olsun. $\lambda \in \Re$ ve β da M üzerinde $\forall 1 \leq i \leq s$ için $d\beta \wedge \eta^i = 0$ şartını sağlayan sıfırdan farklı düzgün bir fonsiyon olmak üzere (φ,ξ_i,η^i,g) yapısının M üzerindeki D- konformal dönüşümleri

$$\tilde{\varphi} = \varphi, \quad \tilde{\xi}_i = \frac{1}{\beta}\xi_i, \quad \tilde{\eta}^i = \beta\eta^i, \quad \tilde{g} = \lambda g + (\beta^2 - \lambda)\sum_{i=1}^{s}\eta^i \otimes \eta^i \tag{3.81}$$

şeklinde tanımlansın. Φ, M üzerindeki temel 2-form ve $\tilde{\Phi}(X,Y) = \tilde{g}(X,\tilde{\varphi}Y)$ olmak üzere

$$\tilde{\Phi}(X,Y) = \tilde{g}(X,\tilde{\varphi}Y) = \lambda g(X,\varphi Y) = \Phi(X,Y) \tag{3.82}$$

elde edilir ve böylece $\tilde{\Phi} = \lambda\Phi$ olduğu görülür. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} d\tilde{\eta}^i &= d\beta \wedge \eta^i + \beta d\eta^i \\ d\tilde{\Phi} &= d(\lambda\Phi) = d\lambda \wedge \Phi + \lambda d\Phi \end{aligned} \tag{3.83}$$

şeklinde hesaplanır. M'nin C-manifold olması göz önüne alınırsa, $\forall 1 \leq i \leq s$ için $d\eta^i = 0$ ve $d\Phi = 0$ olup (3.83)'ten $d\tilde{\eta}^i = 0$ ve $d\tilde{\Phi} = 0$ olduğu elde edilir. Bu durumda, bu D- konformal dönüşümler ile (φ,ξ_i,η^i,g) C-yapısından yeni bir $(\tilde{\varphi},\tilde{\xi}_i,\tilde{\eta}^i,\tilde{g})$ C-yapı elde edilir. Elde edilen bu yapı ile birlikte $\tilde{M}$ bir C-manifold olur.

Önerme 3.4.1. $(\tilde{M},\tilde{\varphi},\tilde{\xi}_i,\tilde{\eta}^i,\tilde{g})$, bir $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ manifoldundan D-konformal dönüşümler yardımıyla elde edilen bir manifold olsun. Bu durumda $(\tilde{M},\tilde{\varphi},\tilde{\xi}_i,\tilde{\eta}^i,\tilde{g})$'nın bir C-manifold olması için gerekli ve yeterli koşul $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$'nin bir C-manifold olmasıdır.

Önerme 3.4.2. $(\tilde{M},\tilde{\varphi},\tilde{\xi}_i,\tilde{\eta}^i,\tilde{g})$, $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ C-manifoldundan D-konformal dönüşümler yardımıyla elde edilen bir C-manifold olsun. Bu durumda, $\tilde{M}$ üzerinde

$$\tilde{\nabla}_X\tilde{\xi}_i = X\left(\frac{1}{\beta}\right)\xi_i + \nabla_X\xi_i + \frac{\varepsilon_i}{\beta}\eta^i(X)\xi_i \tag{3.84}$$

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{\xi}_i}X = \nabla_{\xi_i}X + \frac{\varepsilon_i}{\beta}\eta^i(X)\xi_i \tag{3.85}$$

$$\sum_{k=1}^{s}\eta^k\left(\tilde{\nabla}_XY\right) = \sum_{k=1}^{s}\left\{\eta^k(\nabla_XY) + \varepsilon_k\eta^k(X)\eta^k(Y)\right\} \tag{3.86}$$

$$\tilde{\nabla}_XY = \nabla_XY + \sum_{k=}^{s}\varepsilon_k\eta^k(X)\eta^k(Y)\xi_k \tag{3.87}$$

ifadeleri sağlanır. Burada ∇ ve $\tilde{\nabla}$ sırasıyla M ve $\tilde{M}$ üzerindeki Levi-Civita konneksiyonlarıdır. Ayrıca sadelik olması açısından $\varepsilon_k := \dfrac{d\beta(\xi_k)}{\beta}$ seçilmiştir

İspat. Koszul formülünden

$$\begin{aligned} 2\tilde{g}\left(\tilde{\nabla}_XY,Z\right) &= 2\lambda g(\nabla_XY,Z) + 2\left(\beta^2-\lambda\right)\sum_{k=1}^{s}\eta^k(\nabla_XY)\eta^k(Z) \\ &\quad + 2\sum_{k=1}^{s}d\beta(\xi_k)\eta^k(X)\eta^k(Y)\eta^k(Z) \end{aligned} \tag{3.88}$$

olduğu elde edilir. Ayrıca, (3.81)'den

$$2\tilde{g}\left(\tilde{\nabla}_XY,Z\right) = 2\lambda g\left(\tilde{\nabla}_XY,Z\right) + 2\left(\beta^2-\lambda\right)\sum_{k=1}^{s}\eta^k\left(\tilde{\nabla}_XY\right)\eta^k(Z) \tag{3.89}$$

elde edilir. (3.88) ve (3.89) birlikte düşünüldüğünde (3.86) ve (3.87) denklemlerine ulaşılır. Son olarak (3.87) denkleminde $Y = \tilde{\xi}_i$ seçilirse (3.84) ve $X = \tilde{\xi}_i$ ve $Y = X$

alınırsa da (3.85) elde edilir.

Teorem 3.4.1. $(\widetilde{M},\widetilde{\varphi},\widetilde{\xi}_i,\widetilde{\eta}^i,\widetilde{g})$, $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ global çatılı metrik f-manifoldundan D-konformal dönüşümler yardımıyla elde edilen global çatılı metrik f-manifold olsun. $\widetilde{M}$'nın yaklaşık C-manifold olması için gerekli ve yeterli koşul M'nin yaklaşık C-manifold olmasıdır.

İspat. (3.87) denkleminde Y yerine $\widetilde{\varphi}Y$ yazılırsa

$$\left(\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\varphi}\right)Y+\left(\widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\varphi}\right)X=(\nabla_X\varphi)Y+(\nabla_Y\varphi)X \tag{3.90}$$

denklemi elde edilir. Hipotezden $(\nabla_X\varphi)Y+(\nabla_Y\varphi)X=0$ olduğundan

$$\left(\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\varphi}\right)Y+\left(\widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\varphi}\right)X=0 \tag{3.91}$$

olduğu sonucuna ulaşılır. Bu ise $\widetilde{M}$'nın bir yaklaşık C-manifold olduğu anlamına gelir.

Tersine $\widetilde{M}$ yaklaşık C-manifold olsun. Bu durumda (3.91) sağlanır. (3.87) ifadesi dikkate alınırsa, $(\nabla_X\widetilde{\varphi})Y+(\nabla_Y\widetilde{\varphi})X=0$ bulunur. D-konformal dönüşümlerin tanımı gereği $\widetilde{\varphi}=\varphi$ olduğundan $(\nabla_X\varphi)Y+(\nabla_Y\varphi)X=0$ olur. Bu ise, M'nin de yaklaşık C-manifold olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

$(\widetilde{M},\widetilde{\varphi},\widetilde{\xi}_i,\widetilde{\eta}^i,\widetilde{g})$, $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ yaklaşık C-manifoldundan D- konformal dönüşümler yardımıyla elde edilen bir yaklaşık C-manifold olsun. $\widetilde{M}$ üzerinde, $\widetilde{H}_i$ ve $\widetilde{H}^i$ tensör alanları $\widetilde{H}_i=\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\xi}_i$ ve $\widetilde{H}^i=\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\xi}_i}X$ şeklinde tanımlanır. Buradan, H_i ve H^i tensörlerinin tanımları göz önüne alındığında

$$\widetilde{H}_iX=\frac{1}{\beta}H_iX+X\left(\frac{1}{\beta}\right)\xi_i+\frac{\varepsilon_i}{\beta}\eta^i(X)\xi_i \tag{3.92}$$

ve

$$\widetilde{H}^iX=\frac{1}{\beta}H^iX+\frac{\varepsilon_i}{\beta}\eta^i(X)\xi_i \tag{3.93}$$

şeklinde bir bağıntı olduğu görülür. Böylece, Yardımcı Teorem 3.3.1.'e benzer olarak aşağıdaki yardımcı teorem verilebilir.

Yardımcı Teorem 3.4.1. $\widetilde{H}_i$ ve $\widetilde{H}^i$ tensör alanları arasında

$$\widetilde{H}_i X = -\widetilde{\varphi}\widetilde{H}^i\widetilde{\varphi}X + \widetilde{\varphi}^2\widetilde{H}^i X + \frac{\varepsilon_i}{\beta}\eta^i(X)\xi_i \tag{3.94}$$

bir bağıntı söz konudur.

İspat. (3.81) denkleminden $\forall 1 \le i \le s$ için

$$\widetilde{\varphi}\widetilde{\xi}_i = \frac{1}{\beta}\varphi\xi_i = 0$$

olur. Eğer bu ifadenin X vektör alanı yönündeki kovaryant türevi alınırsa

$$\widetilde{H}_i X = -\widetilde{\varphi}\widetilde{H}^i\widetilde{\varphi}X + \widetilde{\varphi}^2\widetilde{H}^i X + \sum_{k=1}^{s}\eta^k\left(\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\xi}_i\right)\xi_k \tag{3.95}$$

şeklinde elde edilir. (3.86) ve (3.84) göz önüne alınırsa iddia edilen sonuca ulaşılır.

Teorem 3.4.2. $\left(\widetilde{M},\widetilde{\varphi},\widetilde{\xi}_i,\widetilde{\eta}^i,\widetilde{g}\right)$, $\left(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g\right)$ yaklaşık C-manifoldundan D-konformal dönüşümler yardımıyla elde edilen yaklaşık C-manifold olsun. R ve $\widetilde{R}$ sırasıyla M ve $\widetilde{M}$ yaklaşık C-manifoldlarının Riemann eğrilik tensörleri olmak üzere $\forall X,Y,Z$ vektör alanları için bu eğrilik tensörleri arasında

$$\widetilde{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z + \sum_{k=1}^{s}\{A_k(X,Y,Z) - A_k(Y,X,Z)\} \tag{3.96}$$

şeklinde bir bağıntı vardır. Burada A_k tensörleri $\forall 1 \le k \le s$ için

$$\begin{aligned}A_k(X,Y,Z) &= X(\varepsilon_k)\eta^k(Y)\eta^k(Z)\xi_k + \varepsilon_k X\left(\frac{1}{\beta}\right)\eta^i(Y)\eta^k(Z)\xi_k \\ &+ \varepsilon_k g(Y,H_k X)\eta^k(Z)\xi_k + \varepsilon_k X\left(\frac{1}{\beta}\right)\eta^i(Z)\eta^k(Y)\xi_k + \varepsilon_k g(Z,H_k X)\eta^k(Y)\xi_k \\ &+ \varepsilon_k X\left(\frac{1}{\beta}\right)\eta^k(Z)\eta^k(Y)\xi_k + \varepsilon_k\eta^k(Z)\eta^k(Y)H_k X\end{aligned} \tag{3.97}$$

ve

$$\begin{aligned}A_k(Y,X,Z) &= Y(\varepsilon_k)\eta^k(X)\eta^k(Z)\xi_k + \varepsilon_k Y\left(\frac{1}{\beta}\right)\eta^i(X)\eta^k(Z)\xi_k \\ &+ \varepsilon_k g(X,H_k Y)\eta^k(Z)\xi_k + \varepsilon_k Y\left(\frac{1}{\beta}\right)\eta^i(Z)\eta^k(X)\xi_k + \varepsilon_k g(Z,H_k Y)\eta^k(X)\xi_k \\ &+ \varepsilon_k Y\left(\frac{1}{\beta}\right)\eta^k(Z)\eta^k(X)\xi_k + \varepsilon_k\eta^k(Z)\eta^k(X)H_k Y\end{aligned} \tag{3.98}$$

şeklinde tanımlıdır.

İspat. ∇ ve $\tilde{\nabla}$ sırasıyla M ve $\tilde{M}$ üzerindeki Levi-Civita konneksiyonları olmak üzere $\forall X, Y, Z$ vektör alanları için

$$\tilde{R}(X,Y)Z = \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_{[X,Y]} Z \tag{3.99}$$

biçiminde tanımlı olduğu bilinmektedir. Burada, (3.87) denklemi göz önüne alınıp gerekli hesaplamaların yapılmasıyla ispat tamamlanır.

Yardımcı Teorem 3.4.2. $\left(\tilde{M}, \tilde{\varphi}, \tilde{\xi}_i, \tilde{\eta}^i, \tilde{g}\right)$, bir $\left(M, \varphi, \xi_i, \eta^i, g\right)$ yaklaşık C-manifoldundan D-konformal dönüşümler yardımıyla elde edilen bir yaklaşık C-manifold olsun. Bu durumda $\forall 1 \leq k \leq s$ ve $\forall X, Y, Z$ vektör alanları için

$$\sum_{k=1}^{s} A_k\left(X, \tilde{\varphi}Y, Z\right) = \sum_{k=1}^{s} \varepsilon_k g\left(\tilde{\varphi}Y, H_k X\right)\eta^k(Z)\xi_k \tag{3.100}$$

$$\sum_{k=1}^{s} A_k\left(X, Y, \tilde{\varphi}Z\right) = \sum_{k=1}^{s} \varepsilon_k g\left(\tilde{\varphi}Z, H_k X\right)\eta^k(Y)\xi_k \tag{3.101}$$

denklemleri elde edilir.

İspat. (3.97) denkleminde Y yerine $\tilde{\varphi}Y$ alındığında, (2.32) denkleminin $ii)$ şıkkı göz önüne alınırsa, (3.100) denklemi elde edilir. Benzer şekilde (3.97) denkleminde Z yerine $\tilde{\varphi}Z$ alındığında ise (3.101) ifadesine ulaşılır.

Teorem 3.4.3. $\left(\tilde{M}, \tilde{\varphi}, \tilde{\xi}_i, \tilde{\eta}^i, \tilde{g}\right)$, $\left(M, \varphi, \xi_i, \eta^i, g\right)$ yaklaşık C-manifoldundan D-konformal dönüşümler yardımıyla elde edilen bir yaklaşık C-manifold olsun. R ve $\tilde{R}$ sırasıyla M ve $\tilde{M}$ yaklaşık C-manifoldlarının Riemann eğrilik tensörleri olmak üzere $\forall X, Y, Z$ vektör alanları için bu eğrilik tensörleri

$$\begin{aligned}\tilde{g}\left(\tilde{R}(X,Y)Z, W\right) &= \lambda\Bigg[g\left(R(X,Y)Z, W\right) + \sum_{k=1}^{s}\{g\left(A_k(X,Y,Z), W\right) \\ &- g\left(A_k(Y,X,Z), W\right)\}\Bigg] + \left(\beta^2 - \lambda\right)\sum_{k=1}^{s}\{\eta^k\left(R(X,Y)Z\right) \\ &+ \eta^k\left(A_k(X,Y,Z)\right) - \eta^k\left(A_k(Y,X,Z)\right)\}\eta^k(W)\end{aligned} \tag{3.102}$$

$$\begin{aligned}&\tilde{g}\left(\tilde{R}(\tilde{\varphi}X, Y)Z, W\right) + \tilde{g}\left(\tilde{R}(X, \tilde{\varphi}Y)Z, W\right) + \tilde{g}\left(\tilde{R}(X,Y)\tilde{\varphi}Z, W\right) \\ &+ \tilde{g}\left(\tilde{R}(X,Y)Z, \tilde{\varphi}W\right) = \sum_{k=}^{s}\{B_k(X,Y,Z,W) - B_k(Y,X,Z,W)\}\end{aligned} \tag{3.103}$$

$$\tilde{g}\left(\tilde{R}(\tilde{\varphi}X,\tilde{\varphi}Y)\tilde{\varphi}Z,\tilde{\varphi}W\right)=\lambda\Big\{g\left(R(X,Y)Z,W\right) \\ -\sum_{k=1}^{s}\left\{\eta^k(X)g\left(R(\xi_k,Y)Z,W\right)-\eta^k(Y)g\left(R(X,\xi_k)Z,W\right)\right\}\Big\} \tag{3.104}$$

$$\tilde{g}\left(\tilde{R}(\tilde{\varphi}X,\tilde{\varphi}Y)Z,W\right)=\lambda g\left(R(X,Y)\tilde{\varphi}Z,\tilde{\varphi}W\right) \\ +\left[\lambda+s\left(\beta^2-\lambda\right)\right]\sum_{k=1}^{s}\varepsilon_k\left\{g\left(\tilde{\varphi}Y,H_k\tilde{\varphi}X\right)\eta^k(Z)\eta^k(W)\right. \\ \left.-g\left(\tilde{\varphi}x,H_k\tilde{\varphi}Y\right)\eta^k(Z)\eta^k(W)\right\} \tag{3.105}$$

$$\tilde{g}\left(\tilde{R}(\xi_i,X)Y,Z\right)=\sum_{k=1}^{s}\left\{C_k(\xi_i,X,Y,Z)-C_k(X,\xi_i,Y,Z)\right\} \\ +\sum_{k=1}^{s}\left\{\lambda\eta^k(Y)g\left((H_i\circ H_k)X,Z\right)-\left[\lambda+s\left(\beta^2-\lambda\right)\right]\eta^k(Z)g\left((H_i\circ H_k)X,Y\right)\right\} \tag{3.106}$$

ve

$$\tilde{g}\left(\tilde{R}(\tilde{\varphi}X,\tilde{\varphi}Y)Z,W\right)=\lambda\Big\{g\left(R(X,Y)Z,W\right)+g\left((\nabla_X\tilde{\varphi})Y,(\nabla_Z\tilde{\varphi})W\right) \\ +\sum_{k=1}^{s}g\left(H_kX,Y\right)g\left(H_kZ,W\right)\Big\}+\left[\lambda+s\left(\beta^2-\lambda\right)\right]\sum_{k=1}^{s}\left\{g\left(\tilde{\varphi}Y,H_k\tilde{\varphi}X\right)\eta^k(Z)\right. \\ \left.-g\left(\tilde{\varphi}X,H_k\tilde{\varphi}Y\right)\eta^k(Z)\right\}+\left(\beta^2-\lambda\right)\sum_{k=1}^{s}\left\{g\left((\nabla_X\tilde{\varphi})Y,H_k\tilde{\varphi}Z\right)\eta^k(W)\right. \\ \left.-\eta^k\left(R(X,Y)Z\right)\eta^k(W)\right\} \tag{3.107}$$

denklemlerini sağlar. Burada B_k ve C_k tensörleri $\forall 1\leq k\leq s$ için

$$B_k(X,Y,Z,W)=\lambda g\left(A_k(\tilde{\varphi}X,Y,Z),W\right)+\left(\beta^2-\lambda\right)\eta^k\left(A_k(\tilde{\varphi}X,Y,Z)\right)\eta^k(W) \\ +\left[\lambda+s\left(\beta^2-\lambda\right)\right]\varepsilon_k\left\{g\left(\tilde{\varphi}Y,H_kX\right)\eta^k(W)\eta^k(Z)+g\left(\tilde{\varphi}Z,H_kX\right)\eta^k(W)\eta^k(Y)\right\} \\ +\varepsilon_k\lambda\eta^k(Z)\eta^k(Y)g\left(\tilde{\varphi}W,H_kX\right) \tag{3.108}$$

$$B_k(Y,X,Z,W)=\lambda g\left(A_k(\tilde{\varphi}Y,X,Z),W\right)+\left(\beta^2-\lambda\right)\eta^k\left(A_k(\tilde{\varphi}Y,X,Z)\right)\eta^k(W) \\ +\left[\lambda+s\left(\beta^2-\lambda\right)\right]\varepsilon_k\left\{g\left(\tilde{\varphi}X,H_kY\right)\eta^k(W)\eta^k(Z)+g\left(\tilde{\varphi}Z,H_kY\right)\eta^k(W)\eta^k(X)\right\} \\ +\varepsilon_k\lambda\eta^k(Z)\eta^k(X)g\left(\tilde{\varphi}W,H_kY\right) \tag{3.109}$$

ve

$$C_k(\xi_i,X,Y,Z)=\lambda g\left(A_k(\xi_i,X,Y),Z\right)+\left(\beta^2-\lambda\right)\eta^k\left(A_k(\xi_i,X,Y)\right)\eta^k(Z) \tag{3.110}$$

$$C_k(X,\xi_i,Y,Z)=\lambda g\left(A_k(X,\xi_i,Y),Z\right)+\left(\beta^2-\lambda\right)\eta^k\left(A_k(X,\xi_i,Y)\right)\eta^k(Z) \tag{3.111}$$

şeklinde tanımlıdır.

İspat. (3.102): (3.96) denkleminden direk görülür.

(3.103): (3.102) ifadesinde X yerine $\tilde{\varphi}X$ alındığında (3.97) ve (3.100) denklemleri hesaba katılırsa

$$\tilde{g}\left(\tilde{R}(\tilde{\varphi}X,Y)Z,W\right)=\lambda\left\{g\left(R(\tilde{\varphi}X,Y)Z,W\right)+\sum_{k=1}^{s}g\left(A_k(\tilde{\varphi}X,Y,Z),W\right)\right.$$
$$-\varepsilon_k g(\tilde{\varphi}X,H_kY)\eta^k(Z)\eta^k(W)\Big\}+\left(\beta^2-\lambda\right)\sum_{k=1}^{s}\left\{\eta^k\left(R(\tilde{\varphi}X,Y)Z\right)\right. \quad (3.112)$$
$$\left.+\eta^k\left(A_k(\tilde{\varphi}X,Y,Z)\right)-s\varepsilon_k g(\tilde{\varphi}X,H_kY)\eta^k(Z)\right\}\eta^k(W)$$

ifadesi elde edilir. (3.102) denkleminin geriye kalan terimleri de benzer şekilde elde edildikten sonra taraf tarafa toplanırsa sonuca ulaşılır.

(3.104): (3.102) ifadesinde X, Y, Z, W yerine sırasıyla $\tilde{\varphi}X$, $\tilde{\varphi}Y$, $\tilde{\varphi}Z$, $\tilde{\varphi}W$ yazıldığında (3.100) ve (3.101) denklemleri göz önüne alınırsa

$$\tilde{g}\left(\tilde{R}(\tilde{\varphi}X,\tilde{\varphi}Y)\tilde{\varphi}Z,\tilde{\varphi}W\right)=\lambda g\left(R(\tilde{\varphi}X,\tilde{\varphi}Y)\tilde{\varphi}Z,\tilde{\varphi}W\right) \quad (3.113)$$

olduğu görülür. (3.10) denklemi (3.113) te yerine yazılırsa (3.104) elde edilir.

(3.105): Benzer şekilde (3.102)'de X yerine $\tilde{\varphi}X$ ve Y yerine $\tilde{\varphi}Y$ alınırsa, (3.100) ve (3.101) denklemlerinden kolayca elde edilir.

(3.106): (3.102) ve (3.29) denklemlerinden direk görülür.

(3.107): Son olarak, (3.102) denkleminde, Önerme 3.2.1. hesaba katılırsa (3.108) elde edilir.

Teorem 3.4.4. $\left(\tilde{M},\tilde{\varphi},\tilde{\xi}_i,\tilde{\eta}^i,\tilde{g}\right)$, $\left(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g\right)$ yaklaşık C-manifoldundan D-konformal dönüşümler yardımıyla elde edilen bir yaklaşık C-manifold olsun. $\tilde{M}$ nokta tabanlı K sabit φ-kesitsel eğriliğe sahip olması için gerekli ve yeterli koşul M'nin nokta tabanlı K sabit φ-kesitsel eğriliğe sahip olmasıdır.

İspat. M nokta tabanlı K sabit φ-kesitsel eğriliğe sahip olsun. Bu durumda, herhangi bir $p\in M$ noktasında, $1\leq k\leq s$ olmak üzere $\forall X\perp\xi_k$ olacak şekildeki $\forall X\in T_pM$ için

$$g\left(R(\varphi X,X)\varphi X,X\right)+K_p g(X,X)g(X,X)=0 \quad (3.114)$$

olur. Şimdi burada, (3.81) denklemi kullanılarak elde edilen ifadede (3.102) denklemi dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}&\tilde{g}\left(\tilde{R}(\tilde{\varphi}X,X)\tilde{\varphi}X,X\right)+K_p\tilde{g}(X,X)\tilde{g}(X,X)\\&=\lambda^2\left\{g\left(R(\tilde{\varphi}X,X)\tilde{\varphi}X,X\right)+K_p g(X,X)g(X,X)\right\}\end{aligned} \quad (3.115)$$

olduğu görülür. (3.114)'ten

$$\tilde{g}\left(\tilde{R}(\tilde{\varphi}X,X)\tilde{\varphi}X,X\right)+K_p\tilde{g}(X,X)\tilde{g}(X,X)=0 \quad (3.116)$$

eşitliği elde edilir. Bu ise $\widetilde{M}$ sabit K_p φ-kesitsel eğriliğine sahip olduğunu gösterir. Tersine $\widetilde{M}$ sabit K_p φ-kesitsel eğriliğine sahip olsun. Bu durumda, (3.116) eşitliği sağlanır. Bu eşitlikte (3.81) ve (3.102)'den (3.114) denkleminin sağladığı görülür. Böylece M 'de sabit K_p φ-kesitsel eğriliğine sahip olur.

3.5. RİCCİ SOLİTONLARIN GENEL BİR SINIFLANDIRILMASI

Bu bölümde yaklaşık C-manifoldlar üzerinde bazı Ricci solitonlar ele alınacaktır. Ayrıca Ricci solitonların bazı yeni sınıflandırmaları yapılacaktır.

Tanım 3.5.1. $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ yaklaşık C-manifold olsun. Eğer M üzerinde $\forall X,Y \in \chi(M)$ vektör alanı ve λ sabiti için

$$(L_{\tilde{\xi}}g)(X,Y)+2S(X,Y)+2\lambda g(X,Y)=0$$

şartı sağlanıyorsa M 'ye bir Ricci soliton denir ve $(M,g,\tilde{\xi},\lambda)$ ile gösterilir. $\tilde{\xi}$ vektör alanına Ricci solitonun potansiyel alanı denir. Burada eğer $\tilde{\xi}$ potansiyel alanı $\forall 1 \le i \le s$ için ξ_i karakteristik vektör alanlarına eşit ise M yaklaşık C-manifoldu bir Ricci soliton olarak düşünülebilir.

Tanım 3.5.2. M yaklaşık C-manifold olmak üzere, $(M,g,\tilde{\xi},\lambda)$ bir Ricci soliton olsun. Bu durumda $(M,g,\tilde{\xi},\lambda)$'ye, $\lambda > 0$ ise büzülen, $\lambda = 0$ ise sabit ve $\lambda < 0$ ise genişleyen denir.

Tanım 3.5.3. M yaklaşık C-manifold olmak üzere, $(M,g,\tilde{\xi},\lambda)$ bir Ricci soliton olsun. Eğer λ düzgün bir fonksiyon ise bu Ricci solitona, Ricci hemen hemen soliton denir.

Tanım 3.5.4. $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ yaklaşık C-manifold olsun. Eğer M üzerinde $\forall X,Y \in \chi(M)$ vektör alanı ve λ ve γ sabitleri için

$$(L_{\tilde{\xi}}g)(X,Y)+2S(X,Y)-2\lambda g(X,Y)-2\gamma\sum_{k=1}^{s}\eta^k(X)\eta^k(Y)=0 \qquad (3.117)$$

şartı sağlanıyorsa M 'ye η^k-Ricci soliton denir ve $(M,g,\tilde{\xi},\lambda,\gamma)$ ile gösterilir. Eğer λ

ve γ birer düzgün fonksiyon ise M 'ye η^k-Ricci hemen hemen soliton denir. Ayrıca $\gamma = 0$ ise η^k-Ricci hemen hemen soliton, Ricci hemen hemen soliton olarak adlandırılır.

Tanım 3.5.5. $(M, \varphi, \xi_i, \eta^i, g)$ yaklaşık C-manifold ve $(M, g, \tilde{\xi}, \lambda, \gamma)$ η^k-Ricci hemen hemen soliton olsun. Burada $\forall X \in \chi(M)$ vektör alanı için eğer $\tilde{\xi}$ potansiyel alanının X vektör alanı yönündeki kovaryant türevi

$$\nabla_X \tilde{\xi} = a(X)\tilde{\xi} + \theta X \tag{3.118}$$

formunda ise $(M, g, \tilde{\xi}, \lambda, \gamma)$'ye yapı şekillendirici η^k-Ricci hemen hemen soliton denir. Burada a bir lineer form, θ bir fonksiyon ve ∇ bir Levi-Civita konneksiyonudur. Eğer $\theta = 0$ ise $(M, g, \tilde{\xi}, \lambda, \gamma)$ ye rekurrent η^k-Ricci hemen hemen soliton, $a = 0$ ise konsirkular η^k-Ricci hemen hemen soliton ve $a = 0$ iken θ fonksiyonu sabit bir fonksiyon olursa $(M, g, \tilde{\xi}, \lambda, \gamma)$ ye konvergent η^k-Ricci hemen hemen soliton denir.

Teorem 3.5.1. $(M, \varphi, \xi_i, \eta^i, g)$ yaklaşık C-manifold ve $(M, g, \tilde{\xi}, \lambda, \gamma)$ η^k-Ricci hemen hemen soliton olsun. Bu durumda $\tilde{\xi}$ potansiyel alanı $\forall 1 \le k \le s$ için ξ_k karakteristik vektör alanlarına eşit olmak üzere $\forall X, Y \in \chi(M)$ vektör alanı için S Ricci tensör alanı

$$S(X,Y) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{s}\{g(H_k X, Y) + g(X, H_k Y)\} + \lambda g(X,Y) + \gamma \sum_{k=1}^{s} \eta^k(X)\eta^k(Y) \tag{3.119}$$

şeklinde elde edilir.

İspat. $\forall 1 \le k \le s$ ve $\forall X, Y \in \chi(M)$ için g Riemann vektörünün ξ_k vektör alanları yönündeki Lie türevleri alındığında

$$\sum_{k=1}^{s}(L_{\xi_k} g)(X,Y) = \sum_{k=1}^{s}\{g(\nabla_X \xi_k, Y) + g(\nabla_Y \xi_k, X)\} \tag{3.120}$$

elde edilir. (3.2) ifadesi göz önüne alınırsa (3.119) elde edilir.

Teorem 3.5.2. $(M, \varphi, \xi_i, \eta^i, g)$ yaklaşık C-manifold ve $(M, g, \tilde{\xi}, \lambda, \gamma)$ yapı şekillendirici η^k-Ricci hemen hemen soliton olsun. Bu durumda $\tilde{\xi}$ potansiyel alanı $\forall 1 \le k \le s$ için ξ_k karakteristik vektör alanlarına eşit olmak üzere, $\forall X, Y \in \chi(M)$ vektör alanı için S Ricci tensör alanı

$$S(X,Y)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{s}\{a(X)\eta^{k}(Y)+a(Y)\eta^{k}(X)\}$$
$$+(\lambda+\theta)g(X,Y)+\gamma\sum_{k=1}^{s}\eta^{k}(X)\eta^{k}(Y) \tag{3.121}$$

şeklinde elde edilir.

İspat. ξ_k potansiyel alanları $\forall 1\le k\le s$ için birer yapı şekillendirici vektör alanı olduklarından $\forall X,Y\in\chi(M)$ için (3.118) ve (3.120) denklemlerinden

$$\sum_{k=1}^{s}(L_{\xi_k}g)(X,Y)=\sum_{k=1}^{s}\{g((\nabla_X\xi_k),Y)+g((\nabla_Y\xi_k),X)\}$$
$$=\sum_{k=1}^{s}\{a(X)\eta^{k}(Y)+a(Y)\eta^{k}(X)\}+2\theta g(X,Y) \tag{3.122}$$

olduğu görülür. Elde edilen bu son denklem (3.119)'da yerine yazılırsa istenen elde edilir.

Sonuç 3.5.1. $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ C-manifold ve $(M,g,\tilde{\xi},\lambda,\gamma)$ η^k-Ricci hemen hemen soliton olsun. Bu durumda $\tilde{\xi}$ potansiyel alanı $\forall 1\le k\le s$ için ξ_k karakteristik vektör alanlarına eşit olmak üzere $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ genelleştirilmiş η^k-Einstein C-manifold olur.

İspat. C-manifold üzerinde $\forall 1\le k\le s$ için H_k tensör alanları sıfır olduğundan (3.119)'dan direk görülür.

Sonuç 3.5.2. $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ yaklaşık bir C-manifold ve $(M,g,\tilde{\xi},\lambda,\gamma)$ konsirkular veya konvergent η^k-Ricci hemen hemen soliton olsun. Bu durumda $\tilde{\xi}$ potansiyel alanı $\forall 1\le k\le s$ için ξ_k karakteristik vektör alanlarına eşit olmak üzere $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ genelleştirilmiş η^k-Einstein C-manifold olur.

İspat. (3.121)'den direk görülür.

Sonuç 3.5.3. $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ yaklaşık bir C-manifold ve $(M,g,\tilde{\xi},\lambda,\gamma)$ yapı şekillendirici η^k-Ricci hemen hemen soliton olsun. Eğer $\forall 1\le k\le s$ için, a lineer formu η^k 1-formların bir lineer katı ise $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ genelleştirilmiş η^k-Einstein C-

manifolddur.

İspat. (3.121) denkleminden direk elde edilir.

3.6. YAKLAŞIK C -MANİFOLDLARIN BAZI ALT MANİFOLDLARI

3.6.1. Slant Alt Manifoldlar

Tanım 3.6.1.1. $\overline{M}$ yaklaşık C-manifold ve M de bu manifoldun bir alt manifoldu olsun. Bu durumda $\forall X \in \Gamma(TM)$ için

$$\varphi X = PX + P'X \tag{3.123}$$

yazılabilir. Burada PX ve $P'X$, φX 'in sırasıyla teğet ve normal bileşenleridir. Benzer olarak pV ve $p'V$, φV 'nin sırasıyla teğet ve normal bileşenleri olmak üzere $\forall V \in \Gamma(T^{\perp}M)$ için

$$\varphi V = pV + p'V \tag{3.124}$$

yazılabilir.

Sonuç 3.6.1.1. $\overline{M}$ yaklaşık C-manifold ve M de bu manifoldun bir alt manifoldu olsun. Bu durumda

$$P^2 = -I + \sum_{k=1}^{s} \eta^k \otimes \xi_k - pP', \quad P'P + p'P' = 0 \tag{3.125}$$

ve

$$Pp + pp' = 0, \quad P'p + p'^2 = -I \tag{3.126}$$

ifadeleri sağlanır.

İspat. (3.123) denkleminin her iki tarafına φ uygulanırsa $\forall X \in \Gamma(TM)$ için

$$\varphi^2 X = \varphi PX + \varphi P'X \tag{3.127}$$

olur. Burada PX ve $P'X$ sırasıyla teğet ve normal bileşenler olduğundan sırasıyla (3.123) ve (3.124) denklemlerinde yerine yazıldığında (2.31) denklemi göz önüne alınırsa

$$\varphi PX = P^2 X + P'PX, \quad \varphi P'X = pP'X + p'P'X \tag{3.128}$$

elde edilir. (3.128) ifadesi (3.127) denkleminde yerine yazılırsa (3.125) denklemine ulaşılır. Benzer şekilde (3.124) ifadesinin her tarafına φ uygulanıp benzer hesaplamalar yapılırsa (3.126) ifadesi elde edilir.

Önerme 3.6.1.1. $\overline{M}$ yaklaşık C-manifold ve M de bu manifoldun alt manifoldu olsun. Bu durumda P ve p' tensör alanları ters simetriktir.

İspat. $X,Y \in \Gamma(TM)$ ve $V,U \in \Gamma(T^{\perp}M)$ olsun. g M üzerindeki Riemann metriği olmak üzere, (3.123) denkleminin Y ile iç çarpımı alınırsa

$$g(\varphi X,Y) = g(PX,Y) \tag{3.129}$$

elde edilir. Burada $Y \in \Gamma(TM)$ ve $P'X \in \Gamma(T^{\perp}M)$ olduğundan $g(P'X,Y) = 0$ olur. Öte yandan (3.123) denkleminde X yerine Y yazılıp elde edilen denklem X ile iç çarpımı alınırsa

$$g(\varphi Y, X) = g(PY, X) \tag{3.130}$$

olduğu görülür. φ tensör alanın ters simetrik olduğu göz önüne alınırsa, (3.129) ve (3.130) denklemlerinden

$$g(PX,Y) = -g(X,PY) \tag{3.131}$$

bulunur. Bu ise P tensör alanının ters simetrik olduğunu gösterir. Benzer şekilde $\forall V,U \in \Gamma(T^{\perp}M)$ için

$$g(U, p'V) = -g(p'U,V) \tag{3.132}$$

olduğu elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Önerme 3.6.1.2. $\overline{M}$ yaklaşık bir C-manifold ve M de bu manifoldun bir alt manifoldu olsun. Bu durumda P' ve p tensör alanları arasında $\forall X \in \Gamma(TM)$ ve $\forall V \in \Gamma(T^{\perp}M)$ için

$$g(P'X,V) = -g(X, pV) \tag{3.133}$$

şeklinde bir bağıntı vardır.

İspat. (3.123) denkleminin V ile iç çarpımı alınırsa

$$g(\varphi X,V) = g(P'X,V) \tag{3.134}$$

olur. Diğer taraftan (3.124) ifadesinin X ile iç çarpımı alındığında ise

$$g(\varphi V, X) = g(pV, X) \tag{3.135}$$

olduğu görülür. φ tensör alanın ters simetrik olduğu göz önüne alınırsa, (3.134) ve (3.135) denklemlerinden (3.133) elde edilir.

Önerme 3.6.1.3. $\overline{M}$ yaklaşık C-manifold ve M de bu manifoldun bir alt manifoldu olsun. Bu durumda $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ ve $\forall V \in \Gamma(T^{\perp}M)$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

$$(\nabla_X P)Y = \nabla_X PY - P\nabla_X Y \tag{3.136}$$

$$(\nabla_X P')Y = \nabla_X^{\perp} P'Y - P'\nabla_X Y \tag{3.137}$$

$$(\nabla_X p)V = \nabla_X pV - p\nabla_X^{\perp} V \tag{3.138}$$

$$(\nabla_X p')V = \nabla_X^{\perp} p'V - p'\nabla_X^{\perp} V \tag{3.139}$$

$$(\nabla_X P)Y + (\nabla_Y P)X = A_{P'X}Y + A_{P'Y}X + 2ph(X,Y) \tag{3.140}$$

$$(\nabla_X P')Y + (\nabla_Y P')X = 2p'h(X,Y) - h(X,PY) - h(Y,PX) \tag{3.141}$$

$$(\nabla_X p)V = A_{p'V}X - PA_V X \tag{3.142}$$

$$(\nabla_X p')V = -h(pV,X) - P'A_V X \tag{3.143}$$

Burada h ikinci temel form, ∇ Levi-Civita konneksiyonu ve A_V şekil operatörüdür.

İspat. (3.136)-(3.139) denklemleri, (2.2), (2.37), (2.38) ve (2.40) ifadeleri kullanılarak kolayca elde edilir. (3.136) denkleminde X ile Y yer değiştirilip elde edilen denklem (3.136) ile toplandığında, (2.37) ve (2.38) ifadeleri göz önüne alınırsa (3.140) denklemi elde edilir. Benzer bir şekilde (3.137) den (3.141) denklemine ulaşılır. (3.142) ve (3.143) denklemleri de (2.37) ve (2.38)'den direk görülür.

Tanım 3.6.1.2. $\overline{M}$ yaklaşık C-manifold ve M de bu manifoldun alt manifoldu olsun. Bu durumda M 'nin TM tanjant demeti

$$TM = \sum_{k=1}^{s} D_\theta \oplus \xi_k \tag{3.144}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\forall 1 \le k \le s$ için ξ_k karakteristik vektör alanı ve D_θ slant dağılım olarak bilinen ξ_k 'nın TM içindeki tümleyen dağılımıdır.

Teorem 3.6.1.1. $\overline{M}$ yaklaşık C-manifold ve M de bu manifoldun bir alt manifoldu olsun. Bu durumda M 'nin bir slant alt manifold olması için gerekli ve yeterli koşul

$$P^2 = -\mu\left(I - \sum_{k=1}^{s} \eta^k \otimes \xi_k\right) \tag{3.145}$$

olacak şekilde bir $\mu \in [0,1]$ sabitinin olmasıdır. Ayrıca, eğer θ, M 'nin bir slant açısı ise $\mu = \cos^2\theta$ olur.

İspat. $P^2 = -\mu\left(I - \sum_{k=1}^{s}\eta^k \otimes \xi_k\right)$ olacak şekilde bir $\mu \in [0,1]$ sabiti olsun. Bu durumda $\forall X \in TM - \langle \xi_k \rangle$ için

$$\cos\theta(X) = \frac{g(\varphi X, PX)}{|\varphi X||PX|} = -\frac{g(X, P^2X)}{|\varphi X||PX|} = -\mu\frac{g(X, \varphi^2 X)}{|\varphi X||PX|} = \mu\frac{|\varphi X|}{|PX|} \tag{3.146}$$

olur. Öte yandan, $\cos\theta(X) = \frac{|PX|}{|\varphi X|}$ olduğundan, (3.146) kullanılarak, $\mu = \cos^2\theta$ olduğu görülür. Bu ise $\theta(X)$'in sabit olduğu anlamına gelir. Buradan M'nin bir slant alt manifold olduğu sonucuna varılır.

Sonuç 3.6.1.2. $\overline{M}$ yaklaşık C-manifold ve M de bu manifoldun θ slant açısına sahip bir slant alt manifoldu olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$g(PX, PX) = \cos^2\theta\left\{g(X,Y) - \sum_{k=1}^{s}\eta^k(X)\eta^k(Y)\right\} \tag{3.147}$$

ve

$$g(P'X, P'X) = \sin^2\theta\left\{g(X,Y) - \sum_{k=1}^{s}\eta^k(X)\eta^k(Y)\right\} \tag{3.148}$$

ifadeleri sağlanır.

İspat. P tensör alanının ters simetrik olması ve $\mu = \cos^2\theta$ olduğu göz önüne alınırsa (3.145) denkleminden (3.147) denklemi elde edilir. Benzer şekilde, (3.123) ve (3.145) ifadelerinden

$$\begin{aligned} g(P'X, P'X) &= g(\varphi X - PX, \varphi Y - PY) = g(\varphi X, \varphi Y) + g(PX, PY) \\ &= g(X,Y) - \sum_{k=}^{s}\eta^k(X)\eta^k(Y) - \cos^2\theta\left\{g(X,Y) - \sum_{k=}^{s}\eta^k(X)\eta^k(Y)\right\} \end{aligned} \tag{3.149}$$

elde edilir. $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ olması hesaba katılırsa (3.148) denklemine ulaşılır.

Tanım 3.6.1.3. $\overline{M}$ yaklaşık C-manifold ve M de bu manifoldun bir alt manifoldu olsun. Eğer M üzerinde aşağıdaki şartları sağlayan D_θ ve $D^\perp$ dağılımları varsa M'ye $\overline{M}$'nin bir yarı slant alt manifoldu denir.

1) $\forall 1 \le k \le s$ için $\xi_k \in \Gamma(D_\theta)$ olmak üzere $TM = D^\perp \oplus D_\theta$ şeklinde yazılabilir.

2) $D^\perp$ dağılımı anti-invaryant olur, yani $\varphi(D^\perp) \subset (T^\perp M)$ koşulu sağlanır.

3) $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ olmak üzere D_θ dağılımı θ slant açısına sahip bir slant dağılım olur, yani D_θ ile $\varphi(D_\theta)$ arasındaki açı sabittir.

Burada eğer $\theta = 0$ ise M yarı slant alt manifoldu yarı invaryant alt manifolda dönüşür. Öte yandan eğer $\theta = \frac{\pi}{2}$ ise, M anti-invaryant alt manifold olur.

Tanım 3.6.1.4. $\overline{M}$ yaklaşık C-manifold ve M de bu manifoldun bir yarı slant alt manifoldu olsun. M üzerindeki D_θ ve $D^\perp$ dağılımlarının boyutları sırasıyla n_1 ve n_2 olsun. Buradan aşağıdaki durumlar elde edilir.

1) Eğer $n_2 = 0$ ise M bir anti-invaryant alt manifold olur.

2) Eğer $n_1 = 0$ ve $\theta = 0$ ise M bir invaryant alt manifolddur.

3) Eğer $n_1 = 0$ ve $\theta \neq 0$ ise M θ slant açısına sahip bir öz slant alt manifolddur.

4) Eğer $n_1.n_2 \neq 0$ ve $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ise M bir öz yarı slant alt manifold olur.

Tanım 3.6.1.5. $\overline{M}$ yaklaşık C-manifold ve M de bu manifoldun bir öz yarı slant alt manifoldu olsun. M üzerindeki D_θ ve $D^\perp$ dağılımlarına sırasıyla karşılık gelen izdüşüm operatörleri P_1 ve P_2 olmak üzere $\forall X \in \Gamma(TM)$ için

$$X = P_1 X + P_2 X + \sum_{k=1}^{s} \eta^k(X)\xi_k \tag{3.150}$$

şeklinde yazılabilir.

Sonuç 3.6.1. $\overline{M}$ yaklaşık C-manifold ve M de bu manifoldun bir öz yarı slant alt manifoldu olsun. M üzerindeki D_θ ve $D^\perp$ dağılımlarına sırasıyla karşılık gelen izdüşüm operatörleri P_1 ve P_2 olmak üzere $\forall X \in \Gamma(TM)$ için

$$\varphi X = \varphi P_1 X + \varphi P_2 X \tag{3.151}$$

$$PX + P'X = P'P_2 X + PP_1 X + P'P_1 X \tag{3.152}$$

$$PX = PP_1 X, \quad P'X = P'P_2 X + P'P_1 X \tag{3.153}$$

$$\varphi P_2 X = P'P_2 X, \quad PP_2 X = 0, \quad \varphi P_1 X = PP_1 X + P'P_1 X \tag{3.154}$$

özellikleri sağlanır. Burada $PP_1 X \in \Gamma(D_\theta)$ olur.

İspat. (3.150) denkleminin her iki tarafına φ uygulanıp (2.32)'nin $i)$ şıkkı dikkate alınırsa (3.151) elde edilir. (3.151) denkleminde (3.123) ve (3.127) göz önüne alınırsa, (3.152), (3.153) ve (3.154) ifadelerinin sağlandığı görülür.

Tanım 3.6.1.6. $\overline{M}$ yaklaşık bir C-manifold ve M de bu manifoldun bir öz yarı slant alt manifoldu olsun. Eğer φTM 'nin $T^{\perp}M$ üzerindeki ortogonal tümleyeni $(\varphi TM)^{\perp}$ ile gösterilirse $T^{\perp}M$ normal demeti

$$T^{\perp}M = P'(D^{\perp}) \oplus P'(D_{\theta}) \oplus (\varphi TM)^{\perp} \tag{3.155}$$

şeklinde direk toplam olarak yazılabilir. Burada $(\varphi TM)^{\perp}$, $T^{\perp}M$ normal demetinin invaryant bir alt demetidir. Öte yandan $P'(D^{\perp})$ ve $P'(D_{\theta})$, M üzerinde ortogonal dağılımlardır. $\forall Z \in \Gamma(D^{\perp})$ ve $\forall X \in \Gamma(D_{\theta})$ için $g(Z,X)=0$ olacağı açıktır. Böylece (3.123) ve (2.33) denkleminin $ii)$ şıkkından

$$g(P'Z, P'X) = g(\varphi Z, \varphi X) = g(Z, X) = 0$$

elde edilir. Bu ise $P'(D^{\perp})$ ve $P'(D_{\theta})$ dağılımlarının birbirine dik olduğunu gösterir.

Yardımcı Teorem 3.6.1.1. $\overline{M}$ yaklaşık C-manifold ve M de bu manifoldun bir öz yarı slant alt manifoldu olsun. Bu durumda D_{θ} dağılımının bir slant dağılım olması için gerekli ve yeterli koşul $\forall X \in \Gamma(D_{\theta})$ için

$$(PP_1)^2 X = -\mu X$$

olacak şekilde bir $\mu \in [0,1]$ olmasıdır. Ayrıca eğer θ, M 'nin bir slant açısı ise, bu durumda $\mu = \cos^2\theta$ olur.

İspat. $\forall X \in \Gamma(D_{\theta})$ için (3.153) ifadesi dikkate alınırsa

$$(PP_1)^2 X = (PP_1 \circ PP_1)X = PP_1(PP_1 X) = PP_1(PX) = P^2 X$$

olduğu görülür. Bu son denklemde (3.125) ile birlikte $\Gamma(D^{\perp})$ ve $\Gamma(D_{\theta})$ dağılımlarının birbirine dik olması göz önüne alınarak ispat tamamlanır.

Önerme 3.6.1.4. $\overline{M}$ yaklaşık C-manifold ve M de bu manifoldun bir yarı slant alt manifoldu olsun. Bu durumda $\forall X \in \Gamma(TM)$ için

$$h(X, \xi_k) = 0 \tag{3.156}$$

$$h(PX, \xi_k) = 0 \tag{3.157}$$

$$\nabla_{\xi_k} \xi_k = 0 \tag{3.158}$$

özellikleri sağlanır. Burada h ikinci temel form, $\overline{\nabla}$ ve ∇ da sırasıyla M ve $\overline{M}$ üzerindeki Levi-Civita konneksiyonlarıdır.

İspat. $\forall 1 \le k \le s$ için ξ_k vektör alanları T_pM 'ye teğet olduklarından (2.37) denkleminden

$$\overline{\nabla}_X \xi_k = \nabla_X \xi_k + h(X, \xi_k)$$

olduğu bulunur. Buradan $h(X, \xi_k) = 0$ ve $\nabla_{\xi_k} \xi_k = 0$ elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.6.1.2. $\overline{M}$ yaklaşık C-manifold ve M de bu manifoldun bir yarı slant alt manifoldu olsun. O halde anti-invaryant olan $D^{\perp}$ dağılımının integrallenebilir olması için gerekli ve yeterli koşul $\forall X, Y \in \Gamma(D^{\perp})$ için

$$A_{P'Y}X + A_{P'X}Y + 2P\nabla_X Y + 2ph(Y, X) = 0 \tag{3.159}$$

olmasıdır.

İspat. $\overline{\nabla}$ ve ∇ sırasıyla M ve $\overline{M}$ üzerindeki Levi-Civita konneksiyonları olsun. Hipotezden $\forall X, Y \in \Gamma(D^{\perp})$ için

$$(\overline{\nabla}_X \varphi)Y + (\overline{\nabla}_Y \varphi)X = 0 \tag{3.160}$$

sağlanır. Bu ise

$$\overline{\nabla}_X \varphi Y - \varphi(\overline{\nabla}_X Y) + \overline{\nabla}_Y \varphi X - \varphi(\overline{\nabla}_Y X) = 0 \tag{3.161}$$

ifadesine denktir. Elde edilen bu son denklemde (2.37), (2.38), (3.123) ve (3.124) ifadeleri dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} &\overline{\nabla}_X P'Y - P\nabla_X Y - P'\nabla_X Y - ph(Y, X) - p'h(Y, X) \\ &+ \overline{\nabla}_Y P'X - P\nabla_Y X - P'\nabla_Y X - ph(Y, X) - p'h(Y, X) = 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylece

$$\begin{aligned} &-A_{P'Y}X + \nabla_X^{\perp} P'Y - P\nabla_X Y - P'\nabla_X Y - 2ph(Y, X) \\ &-A_{P'X}Y + \nabla_Y^{\perp} P'X - P\nabla_Y X - P'\nabla_Y X - 2p'h(Y, X) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Son denklemin tanjant bileşenleri göz önüne alınırsa

$$A_{P'Y}X + A_{P'X}Y + P\nabla_X Y + P\nabla_Y X + 2ph(Y, X) = 0$$

bulunur. Elde edilen bu son denklemden

$$A_{P'Y}X + A_{P'X}Y + 2P\nabla_X Y - P(\nabla_X Y - \nabla_Y X) + 2ph(Y,X) = 0$$

ve dolayısıyla

$$P[X,Y] = A_{P'Y}X + A_{P'X}Y + 2P\nabla_X Y + 2ph(Y,X)$$

olduğu sonucuna varılır. Buradan $[X,Y] \in \Gamma(D^{\perp})$ olması için gerekli ve yeterli koşulun (3.159) denkleminin sağlanması gerektiği sonucuna ulaşılır.

Teorem 3.6.1.3. $\overline{M}$ yaklaşık C-manifold ve M de bu manifoldun bir yarı slant alt manifoldu olsun. D_θ slant dağılımının integrallenebilir olması için gerekli ve yeterli koşul $\forall X,Y \in \Gamma(D_\theta)$ için

$$P_2\{\nabla_X PY - P\nabla_Y X + (\nabla_Y P)X - A_{P'X}Y - A_{P'Y}X - 2ph(X,Y)\} = 0 \qquad (3.162)$$

olmasıdır.

İspat. D_θ ve $D^{\perp}$ dağılımlarına sırasıyla karşılık gelen izdüşüm operatörleri P_1 ve P_2 olmak üzere $\forall X,Y \in \Gamma(D_\theta)$ için (3.161) denkleminde (2.37), (3.123) ve (3.124) ifadeleri kullanıldığında

$$\begin{aligned} &\overline{\nabla}_X PY + \overline{\nabla}_X P'Y - \varphi(\nabla_X Y + h(X,Y)) \\ &+ \overline{\nabla}_Y PX + \overline{\nabla}_Y P'X - \varphi(\nabla_Y X + h(X,Y)) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} &\nabla_X PY + h(X,PY) - A_{P'Y}X + \nabla^{\perp}_X P'Y - P\nabla_X Y - P'\nabla_X Y \\ &- ph(X,Y) - p'h(X,Y) + \nabla_Y PX + h(Y,PX) - A_{P'X}Y \\ &+ \nabla^{\perp}_Y P'X - P\nabla_Y X - P'\nabla_Y X - ph(X,Y) - p'h(X,Y) = 0 \end{aligned} \qquad (3.163)$$

sonucuna varılır. (3.163) denkleminin tanjant bileşenleri dikkate alındığında

$$\nabla_X PY - P\nabla_X Y + (\nabla_Y P)X - A_{P'X}Y - A_{P'Y}X - 2ph(X,Y) = 0 \qquad (3.164)$$

denklemine ulaşılır. Bu ise

$$P[X,Y] = \nabla_X PY - P\nabla_Y X + (\nabla_Y P)X - A_{P'X}Y - A_{P'Y}X - 2ph(X,Y) \qquad (3.165)$$

olduğu anlamına gelir. (3.165)'e P_2 uygulandığında (3.162) elde edilir.

Teorem 3.6.1.4. $\overline{M}$ yaklaşık C-manifold ve M de bu manifoldun bir yarı slant alt manifoldu olsun. $D^{\perp} \oplus \xi_k$ dağılımının integrallenebilir olması için gerekli ve yeterli koşul $\forall X,Y \in \Gamma(D^{\perp} \oplus \xi_k)$ için

$$A_{\varphi X}Y = A_{\varphi Y}X$$

ifadesinin sağlanmasıdır.

İspat. (2.39) denkleminden $\forall X, Y \in \Gamma\left(D^{\perp} \oplus \xi_k\right)$ ve $\forall U \in \Gamma(TM)$ için

$$2g\left(A_{\varphi X} Y, U\right) = g(h(U,Y), \varphi X) + g(h(U,Y), \varphi X)$$

elde edilir. Burada (2.37) eşitliği dikkate alınırsa

$$2g\left(A_{\varphi X} Y, U\right) = g\left(\overline{\nabla}_Y U, \varphi X\right) + g\left(\overline{\nabla}_U Y, \varphi X\right) = -g\left(\varphi \overline{\nabla}_Y U, X\right) - g\left(\varphi \overline{\nabla}_U Y, X\right)$$

olur. Buradan

$$2g\left(A_{\varphi X} Y, U\right) = g\left(\left(\overline{\nabla}_Y \varphi\right)U + \left(\overline{\nabla}_U \varphi\right)Y, X\right) - g\left(\overline{\nabla}_U \varphi Y, X\right) - g\left(\overline{\nabla}_Y \varphi U, X\right)$$

bulunur. (3.160) denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned}
&2g\left(A_{\varphi X} Y, U\right) = -g\left(\overline{\nabla}_U \varphi Y, X\right) - g\left(\overline{\nabla}_Y \varphi U, X\right) \\
&= g\left(\overline{\nabla}_Y X, \varphi U\right) - g\left(-A_{\varphi Y} U, X\right) = -g\left(\varphi \overline{\nabla}_Y X, U\right) \\
&+ g\left(A_{\varphi Y} U, X\right) = -g\left(\varphi \overline{\nabla}_Y X, U\right) + g\left(A_{\varphi Y} X, U\right) \\
&= -g\left(P\nabla_Y X + ph(X,Y), U\right) + g\left(A_{\varphi Y} X, U\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise

$$2A_{\varphi X} Y = A_{\varphi Y} X - P\nabla_Y X - ph(X,Y) \tag{3.166}$$

denklemine denktir. (3.166) ifadesinde Y ile X 'in rolleri değiştirilirse

$$2A_{\varphi Y} X = A_{\varphi X} Y - P\nabla_X Y - ph(Y,X) \tag{3.167}$$

olur. (3.166)'dan (3.167) çıkarılırsa

$$3\left(A_{\varphi X} Y - A_{\varphi Y} X\right) = P[X,Y] \tag{3.168}$$

ifadesi elde edilir. Buradan $D^{\perp} \oplus \xi_k$ dağılımının integrallenebilir olması için gerekli ve yeterli koşulun $P[X,Y] = 0$ olması sonucuna varılır. Bu ise $A_{\varphi X} Y - A_{\varphi Y} X = 0$ şartını gerektirir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.6.1.5. $\overline{M}$ yaklaşık C-manifold ve M de bu manifoldun bir total umbilik yarı slant alt manifoldu olsun. Bu durumda

1) $boy\left(D^{\perp}\right) = s$

2) $H \in \Gamma\left((\varphi TM)^{\perp}\right)$

3) M bir öz yarı slant alt manifold

koşullarından en az bir tanesi sağlanır.

İspat. (3.160) denklemi kullanılarak $\forall X \in \Gamma\left(D^{\perp}\right)$ için

$$\left(\overline{\nabla}_X \varphi\right)X = 0$$
$$\overline{\nabla}_X P'X - \varphi\left(\nabla_X X + h(X,X)\right) = 0$$

eşitliklerinin sağlandığı görülür. Buradaki son denklemden

$$-A_{P'X}X + \nabla_X^{\perp} P'X - P'\nabla_X X - ph(X,X) - p'h(X,X) = 0 \qquad (3.169)$$

ifadesi elde edilir. (3.137) ve (3.169) eşitliklerinin tanjant bileşenleri göz önüne alındığında

$$A_{P'X}X + ph(X,X) = 0 \qquad (3.170)$$

eşitliğine ulaşılır. (3.170) ifadesinin $Y \in \Gamma(D^{\perp})$ ile iç çarpımı alındığında

$$g\left(A_{P'X}X + ph(X,X), Y\right) = 0$$

olur. Bu ise

$$g\left(h(X,Y), P'X\right) + g\left(ph(X,X), Y\right) = 0 \qquad (3.171)$$

olduğu anlamına gelir. M total umbilik alt manifold olduğundan

$$g(X,Y)g(H,P'X) + g(X,X)g(pH,Y) = 0 \qquad (3.172)$$

elde edilir. Buradan da

$$g(pH,Y)X - g(pH,X)Y = 0 \qquad (3.173)$$

ifadesine ulaşılır. Burada ya $pH = 0$'dır ya da X ve Y lineer bağımlı vektör alanlarıdır. Eğer $pH \neq 0$ ise, $boy(D^{\perp}) = 1$ olur. Aksi halde $H \in \Gamma\left((\varphi TM)^{\perp}\right)$ olmak zorundadır. $D_\theta \neq 0$ olduğundan M yarı slant alt manifold olur. $\theta \neq 0$ ve $n_1.n_2 \neq 0$ olduğundan da M bir öz yarı slant alt manifolda dönüşür.

Teorem 3.6.1.6. $\overline{M}$ yaklaşık bir C-manifold ve M de bu manifoldun bir total umbilik öz yarı slant alt manifoldu olsun. O halde M, ya total geodezik alt manifolddur ya da eğer H için $\nabla_X^{\perp} H \in \Gamma\left((\varphi TM)^{\perp}\right)$ oluyorsa bir anti-invaryant alt manifold olur.

İspat. Esas uzay yaklaşık C-manifold olduğundan (3.160) denkleminden $\forall X \in \Gamma(TM)$ için

$$\left(\overline{\nabla}_X \varphi\right)X = 0$$

olur. Böylece

$$\overline{\nabla}_X \varphi X = \varphi \overline{\nabla}_X X \qquad (3.174)$$

elde edilir. (2.37), (2.38), (3.123) ve (3.174) eşitliklerinden ve M'nin total umbilik alt manifold olmasından dolayı

$$\begin{aligned}&\nabla_X PX + g(X,PX)H - A_{P'X}X \\ &+\nabla_X^{\perp} P'X = \varphi\nabla_X X + g(X,X)\varphi H\end{aligned} \tag{3.175}$$

ifadesine ulaşılır. Burada φH ile iç çarpım alındığında

$$g\left(\nabla_X^{\perp} P'X, \varphi H\right) = g\left(P'\nabla_X X, \varphi H\right) + g(X,X)\|H\|^2 \tag{3.176}$$

olduğu görülür. (2.38) dikkate alınırsa

$$g\left(\overline{\nabla}_X P'X, \varphi H\right) = g(X,X)\|H\|^2 \tag{3.177}$$

eşitliği elde edilir. $\forall X \in \Gamma(TM)$ için

$$\overline{\nabla}_X \varphi H = \left(\overline{\nabla}_X \varphi\right)H + \varphi\overline{\nabla}_X H \tag{3.178}$$

ifadesi sağlandığından, (2.38), (3.123), (3.124) ve (3.178) eşitlikleri ve M 'nin total umbilik alt manifold olması göz önüne alındığında

$$-A_{\varphi H}X + \nabla_X^{\perp}\varphi H = \left(\overline{\nabla}_X \varphi\right)H - PA_H X - P'A_H X + p\nabla_X^{\perp} H + p'\nabla_X^{\perp} H \tag{3.179}$$

elde edilir. (3.179) ifadesinin $P'X$ ile iç çarpımı alındığında $p'\nabla_X^{\perp} H \in \Gamma\left((\varphi TM)^{\perp}\right)$ olması dikkate alınırsa bu denklem

$$g\left(\nabla_X^{\perp}\varphi H, P'X\right) = g\left(\left(\overline{\nabla}_X \varphi\right)H, P'X\right) - g\left(P'A_H X, P'X\right)$$

veya

$$g\left(\overline{\nabla}_X \varphi H, P'X\right) = g\left(\left(\nabla_X p'\right)H + h(pH, X) + P'A_H X, P'X\right) - g\left(P'A_H X, P'X\right)$$

denklemine indirgenir. (2.39) ve (3.149) eşitlikleri kullanıldığında

$$g\left(\overline{\nabla}_X \varphi H, P'X\right) = -\sin^2\theta\left\{g(X,X)\|H\|^2 - \sum_{k=}^{s} g\left(h(X,\xi_k), H\right)\eta^k(X)\right\}$$

olur. (3.156) ifadesinden

$$g\left(\overline{\nabla}_X \varphi H, P'X\right) = -\sin^2\theta g(X,X)\|H\|^2$$

ya da

$$g\left(\overline{\nabla}_X P'X, \varphi H\right) = \sin^2\theta g(X,X)\|H\|^2 \tag{3.180}$$

elde edilir. Böylece (3.177) ve (3.180)'den

$$g(X,X)\|H\|^2 = \sin^2\theta g(X,X)\|H\|^2$$

olur. Buradan

$$\cos^2\theta g(X,X)\|H\|^2 = 0 \tag{3.181}$$

bulunur. Bu ise $g(X,X)\|H\|^2 = 0$ olduğunu gösterir. M bir öz yarı slant alt manifold olduğundan $H=0$ elde edilir. Böylece M , $\overline{M}$ 'nin total geodezik alt manifoldu olur.

Teorem 3.6.1.6. $\overline{M}$ yaklaşık C-manifold ve M de bu manifoldun bir total umbilik öz yarı slant alt manifoldu olsun. Bu durumda

1) $H \in \Gamma\left((\varphi TM)^{\perp}\right)$

2) $g(\nabla_{PX}\xi_k, X)=0$

3) $\eta^k((\nabla_X T)X)=0$

4) M bir anti-invaryant alt manifold

5) Eğer M bir öz slant alt manifold ise $\forall X \in \Gamma(TM)$ için $boy(M)\geq 3$

koşullarından en az birisi sağlanır.

İspat. (3.160) denkleminden ve $\overline{M}$ 'nin yaklaşık bir C-manifold olmasından dolayı $\forall X \in \Gamma(TM)$ için

$$\overline{\nabla}_X \varphi X - \varphi\overline{\nabla}_X X = 0$$

ifadesi sağlanır. (2.37), (2.38), (3.123) ve (3.124) eşitlikleri kullanıldığında

$$\begin{aligned}&\nabla_X PX + h(X,PX) - A_{P'X}X + \nabla^{\perp}_X P'X - P\nabla_X X\\&- P'\nabla_X X - ph(X,X) - p'h(X,X) = 0\end{aligned} \tag{3.182}$$

elde edilir. (3.182)'nin tanjant bileşenleri dikkate alınırsa

$$\nabla_X PX - P\nabla_X X - ph(X,X) - A_{P'X}X = 0 \tag{3.183}$$

olduğu görülür. M bir total umbilik yarı slant alt manifold olduğundan, (2.39) denklemi ve $h(X,Y)=g(X,Y)H$ ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned}g(A_{P'X}X, X) &= g(h(X,X), P'X) = g(g(X,X)H, P'X)\\&= g(H,P'X)g(X,X) = g(g(H,P'X)X, X) = 0\end{aligned}$$

bulunur. Eğer $H \in \Gamma\left((\varphi TM)^{\perp}\right)$ ise (3.183)'ten

$$\nabla_X PX - P\nabla_X X = 0 \tag{3.184}$$

olur. (3.184) denkleminin ξ_k ile iç çarpımı alındığında

$$g(\nabla_X PX, \xi_k) - \eta^k(P\nabla_X X) = 0$$

elde edilir. Buradan

$$g(\nabla_X PX, \xi_k) = 0 \tag{3.185}$$

bulunur. (3.185) ifadesinde X yerine PX yazılırsa

$$g\left(\nabla_{PX} P^2 X, \xi_k\right) = 0$$

veya

$$g\left(\nabla_{PX} \xi_k, P^2 X\right) = 0$$

olduğu görülür. (3.145) kullanılarak

$$\sum_{k=1}^{s} g\left(\nabla_{PX} \xi_k, -\cos^2\theta\left(X - \eta^k(X)\xi_k\right)\right) = 0$$

$$\cos^2\theta \sum_{k=1}^{s} g\left(\nabla_{PX} \xi_k, \left(X - \eta^k(X)\xi_k\right)\right) = 0$$

denklemleri elde edilir. M bir öz yarı slant alt manifold olduğundan

$$\sum_{k=1}^{s} g\left(\nabla_{PX} \xi_k, \left(X - \eta^k(X)\xi_k\right)\right) = 0$$

bulunur. Buradan

$$\sum_{k=1}^{s} g(\nabla_{PX} \xi_k, X) = \sum_{k=1}^{s} \eta^k(X) g(\nabla_{PX} \xi_k, \xi_k) \tag{3.186}$$

olduğu görülür. $\forall 1 \leq k \leq s$ için $g(\xi_k, \xi_k) = 1$ olduğu bilinmektedir. Bu ifadenin $\forall X \in \Gamma(TM)$ için PX yönündeki kovaryant türevi alındığında $g(\nabla_{PX} \xi_k, \xi_k) + g(\xi_k, \nabla_{PX} \xi_k) = 0$ olur. Bu ise $g(\nabla_{PX} \xi_k, \xi_k) = 0$ olduğu anlamına gelir. Buradan (3.186) denklemi göz önüne alınırsa

$$\sum_{k=1}^{s} g(\nabla_{PX} \xi_k, X) = 0 \tag{3.187}$$

elde edilir. Bu ise teoremin ikinci şıkkını ispatlar. (3.187) ifadesinde X yerine PX alınırsa

$$\sum_{k=1}^{s} g\left(\nabla_{P^2 X} \xi_k, PX\right) = g\left(\nabla_{\cos^2\theta\left(-X + \sum_{k=1}^{s} \eta^k(X)\xi_k\right)} \xi_k, PX\right) = 0$$

olur. Buradan

$$-\cos^2\theta g\left(\nabla_{\left(X - \sum_{k=1}^{s} \eta^k(X)\xi_k\right)} \xi_k, PX\right) = 0$$

veya

$$-\cos^2\theta \sum_{k=1}^{s} g(\nabla_X \xi_k, PX) + \cos^2\theta \sum_{k=1}^{s} \eta^k(X) g\left(\nabla_{\xi_k} \xi_k, PX\right) = 0$$

bulunur. $\nabla_{\xi_k}\xi_k = 0$ olduğundan

$$\cos^2\theta\sum_{k=1}^{s} g\left(\nabla_X \xi_k , PX\right) = 0 \tag{3.188}$$

elde edilir. (3.188)'den eğer $\cos\theta = 0$ ise $\theta = \frac{\pi}{2}$ olup M bir anti-invaryant alt manifold olur. Diğer taraftan, $g\left(\nabla_X \xi_k , PX\right) = 0$ yani $\nabla_X \xi_k = 0$ olsun. Bu durumda $\forall 1 \leq k \leq s$ için ξ_k vektör alanları M üzerinde birer Killing vektör alanı olur. Eğer ξ_k vektör alanları, Killing vektör alanı değilse bu durumda D_θ slant dağılımını geren X ve PX şeklinde en az iki tane lineer bağımsız vektör alanları bulunabilir. Bu ise $boyM \geq 3$ olduğu anlamına gelir.

3.6.2. Global Çatılı CR-Alt Manifoldlar

Tanım 3.6.2.1. $\overline{M}$ yaklaşık C-manifold ve M bu manifoldun izometrik immersed alt manifoldu olsun. Eğer M üzerinde aşağıdaki koşulları sağlayan diferensiyellenebilir bir $D : p \to D_p \subseteq T_p M$ dağılımı varsa M'ye $\overline{M}$'nin global çatılı CR-alt manifoldu denir.

1) $\forall 1 \leq k \leq s$ için $\xi_k \in D$ dir.

2) D, φ tensör alanı altında invaryant kalır. Yani $\forall p \in M$ için $\varphi\left(D_p\right) \subset T_p M$ olur.

3) $D^\perp : p \to D_p^\perp \subseteq T_p M$ ortogonal tümleyen dağılımı $\forall p \in M$ için $\varphi\left(D_p^\perp\right) \subseteq T_p^\perp M$ ifadesini sağlar.

Yardımcı Teorem 3.6.2.1. $\overline{M}$ yaklaşık C-manifold ve M bu manifoldun global çatılı CR-alt manifoldu olsun. Bu durumda $\forall 1 \leq k \leq s$ için $\xi_k \in \Gamma(D) \subseteq \Gamma(TM)$ olmak üzere

$$\varphi\xi_k = P\xi_k + P'\xi_k = 0 \tag{3.189}$$

$$P\xi_k = 0 \quad P'\xi_k = 0 \tag{3.190}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. (2.32) ve (3.123) denklemleri birlikte düşünüldüğünde (3.189) direk elde edilir. Teğet bileşen, normal bileşenin bir lineer katı olamayacağından dolayı $P\xi_k = 0$, $P'\xi_k = 0$ koşulları sağlanmak zorundadır. Bu ise ispatı tamamlar.

Tanım 3.6.2.2. $\overline{M}$ yaklaşık C-manifold ve M bu manifoldun global çatılı CR-alt manifoldu olsun. $\varphi(D^{\perp})$ dağılımının $T^{\perp}M$ içindeki ortogonal dağılımı $(\varphi(D^{\perp}))^{\perp}$ olmak üzere

$$T^{\perp}M = \varphi(D^{\perp}) \oplus (\varphi(D^{\perp}))^{\perp}, \quad (\varphi(D^{\perp}))^{\perp} \perp \varphi(D^{\perp}) \tag{3.191}$$

olur. Burada $(\varphi(D^{\perp}))^{\perp}$ invaryant bir alt demet olduğundan boyutu çifttir.

Teorem 3.6.2.1. $\overline{M}$ yaklaşık C-manifold ve M bu manifoldun izometrik immersed alt manifoldu olsun. M'nin global çatılı CR-alt manifoldu olması için gerekli ve yeterli koşul $P'P = 0$ olmasıdır. Burada P ve P', φ'nin sırasıyla teğet ve normal bileşenleridir.

İspat. M, $\overline{M}$'nin global çatılı CR-alt manifoldu olsun. M üzerindeki D ve $D^{\perp}$ dağılımlarına karşılık gelen ortogonal izdüşüm operatörleri sırasıyla P_1 ve P_2 olmak üzere (2.26) denkleminden

$$P_1P_2 = P_2P_1 = 0 \tag{3.192}$$

olduğu görülür. (2.27) ifadesinden $\forall X \in \Gamma(TM)$ için

$$X = P_1X + P_2X \tag{3.193}$$

elde edilir. (3.193) her iki tarafına φ uygulanıp (3.123) eşitliği dikkate alınırsa

$$\varphi X = \varphi P_1X + \varphi P_2X = PP_1X + P'P_1X + PP_2X + P'P_2X \tag{3.194}$$

denkleminin sağlandığı görülür. D dağılımı invaryant olduğundan

$$P'P_1 = 0 \text{ ve } P_2P'P_1 = 0 \tag{3.195}$$

olduğu açıktır. Öte yandan

$$P_1P = P = PP_1 \tag{3.196}$$

olur. (3.125)'in ikinci kısmından

$$P'PP_1 + p'P'P_1 = 0 \tag{3.197}$$

eşitliğine ulaşılır. Burada $P'P_1 = 0$ olduğundan (3.197) denklemi

$$P'P = 0 \tag{3.198}$$

denklemine indirgenir. (3.125) ve (3.198) ifadelerinin ışığında

$$p'P' = 0 \tag{3.199}$$

elde edilir.

Tersine M , $\overline{M}$ yaklaşık C -manifoldun (3.198) denklemini sağlayan bir alt manifoldu olsun. O halde $\forall X \in \Gamma(TM)$ ve $\forall V \in \Gamma(T^{\perp}M)$ için

$$g(X,\varphi^2 V) = g(\varphi^2 X, V)$$
$$g(X,\varphi p V) = g(\varphi P' X, V)$$
$$g(X, PpV) = g(p'P'X, V) = 0$$

olduğu açıktır. Böylece

$$Pp = 0 \tag{3.200}$$

elde edilir. (3.125), (3.126) ve (3.200) denklemleri kullanıldığında

$$P^3 + P = 0 \text{ ve } p'^3 + p' = 0 \tag{3.201}$$

olduğu görülür. Bu ise P ve p' 'nün sırasıyla TM ve $T^{\perp}M$ üzerinde birer f -yapı olduğunu anlamına gelir. Eğer burada $P_1 = -P^2 + \sum_{k=1}^{s} \eta^k \otimes \xi_k$ ve $P_2 = I + P^2 - \sum_{k=1}^{s} \eta^k \otimes \xi_k$ seçilirse, P_1 ve P_2 'nin (2.27) ve (3.192) denklemlerini sağladığı görülür. Bu ise P_1 ve P_2 'nin birer ortogonal izdüşüm operatörleri olduğunu gösterir. O halde P_1 ve P_2 sırasıyla D ve $D^{\perp}$ ortogonal bütünleyen dağılımlarını tanımlar. $P_1 = -P^2 + \sum_{k=1}^{s} \eta^k \otimes \xi_k$ ve $P^3 + P = 0$ olduğundan $PP_1 = P$ ve $PP_2 = 0$ elde edilir. P 'nin ters simetrik ve P_2 'nin de simetrik olduğu dikkate alınırsa $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$g(P_2 PX, Y) = g(PX, P_2 Y) = -g(X, PP_2 Y) = 0$$

olduğu sonucuna varılır. Buradan

$$P_2 P = 0$$

bulunur. Bu ise

$$P_2 P P_1 = 0$$

olduğu anlamına gelir. $P_1 = -P^2 + \sum_{k=1}^{s} \eta^k \otimes \xi_k$ olduğundan dolayı $\forall 1 \le k \le s$ için $P\xi_k = P'\xi_k = 0$ olur. Böylece (3.198) denkleminden de

$$P'P_1 = 0 \tag{3.202}$$

olduğu açıktır. (2.27), (3.192) ve (3.202) ifadelerinden D ve $D^{\perp}$ dağılımlarının sırasıyla invaryant ve anti-invaryant dağılım oldukları görülür. Öte yandan P_1 ve P_2 nin tanımları göz önüne alındığında $\forall 1 \leq k \leq s$ için

$$P_1\xi_k = \xi_k \text{ ve } P_2\xi_k = 0$$

ifadelerinin sağlandığı görülür. Bu ise D dağılımının $\forall 1 \leq k \leq s$ için ξ_k vektör alanlarını içerdiğini vurgular. Ayrıca I birim dönüşüm olmak üzere

$$P_1 = -P^2 \text{ ve } P_2 = I + P^2$$

şeklinde seçildiğinde P_1 ve P_2 izdüşüm operatörlerinin sırasıyla D ve $D^\perp$ ortogonal dağılımlarını meydana getirdiği kolayca görülebilir. Buradan

$$PP_1 = P\,,\ P_2P = 0\,,\ P'P_1 = 0 \text{ ve } PP_2 = 0$$

elde edilir. Bu ifadeler ise D dağılımının bir invaryant dağılımı ve $D^\perp$ dağılımının da anti-invaryant bir dağılım olduğunu gösterir. Ayrıca daha önceki sonuca benzer olarak $\forall 1 \leq k \leq s$ için

$$P_1\xi_k = \xi_k \text{ ve } P_2\xi_k = 0$$

olduğu bulunur. Buradan $\forall 1 \leq k \leq s$ için ξ_k vektör alanlarının $D^\perp$ dağılımına ait olduğu soucuna varılır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.6.2.1. $\overline{M}$ yaklaşık C-manifold ve M bu manifoldun global çatılı CR-alt manifoldu olsun. Bu durumda invaryant D dağılımı üzerinde global çatılı bir metrik f-yapı bulundurur. Tersi de doğrudur.

İspat. Teorem 3.6.2.1. den direk görülür.

Teorem 3.6.2.2. $\overline{M}$ yaklaşık C-manifold ve M bu manifoldun global çatılı CR-alt manifoldu olsun. Eğer M 'nin ikinci temel formu paralel ise, M bir total geodezik alt manifold olur.

İspat. M 'nin ikinci temel formu paralel olsun. Bu durumda (2.40) denkleminden $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\nabla_X^\perp h(Y,Z) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z) = 0$$

olur. Burada $Y = \xi_k$ seçildiğinde (3.156) denklemi dikkate alınırsa $h(X,Z) = 0$ bulunur. Bu ise M 'nin bir total geodezik alt manifold olduğu anlamına gelir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.6.2.3. $\overline{M}$ yaklaşık C-manifold ve M bu manifoldun bir alt manifoldu olsun. Bu durumda M 'nin global çatılı CR-alt manifold olması için gerekli ve yeterli koşul p' endomorfizmin $\left(\varphi\left(D^{\perp}\right)\right)^{\perp}$ üzerinde bir f-yapı yani $p'^{3}+p'=0$ olmasıdır.

İspat. Eğer M global çatılı CR-alt manifold ise Teorem 3.6.2.1.'den p', $\left(\varphi\left(D^{\perp}\right)\right)^{\perp}$ üzerinde bir f-yapı olur. Tersine p' $\left(\varphi\left(D^{\perp}\right)\right)^{\perp}$ üzerinde bir f-yapı ise (3.126)'dan $p'P'p=0$ olur. $\forall V\in\Gamma\left(T^{\perp}M\right)$ için (3.133) denkleminden

$$g\left(pp'V,pp'V\right)=g\left(\varphi p'V,pp'V\right)=-g\left(p'V,Ppp'V\right)=g\left(V,p'Ppp'V\right)=0$$

elde edilir. Buradan $pp'=0$ olduğu görülür. Bu ise $Pp=0$ olmasına denktir. Ayrıca Teorem 3.6.2.1. göz önüne alındığında M 'nin global çatılı CR-alt manifold olduğu sonucuna varılır.

3.7. YAKLAŞIK C-ALT MANİFOLDLAR

Tanım 3.7.1. $\overline{M}$ m-boyutlu c sabit kesitsel eğriliğine sahip genelleştirilmiş bir S-uzay-form ve M de $\overline{M}$ 'nin $(2n+s)$-boyutlu global çatılı bir alt manifoldu olsun. $\forall X\in\chi(M)$ için $\varphi X=PX+P'X$ yazılabilir. Burada PX ve $P'X$, φX 'in sırasıyla teğet ve normal kısımlarıdır. ∇, M üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere eğer $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$(\nabla_X P)Y+(\nabla_Y P)X+(\nabla_X P')Y+(\nabla_Y P')X=0 \qquad (3.203)$$

koşulu sağlanıyorsa M 'ye $\overline{M}$ 'nin yaklaşık C-alt manifoldu denir.

Sonuç 3.7.1. $\overline{M}$ S-uzay-form ve M, $\overline{M}$ 'nin yaklaşık bir C-alt manifoldu olsun. Bu durumda $\forall X,Y\in\chi(M)$

$$A_{P'X}Y+A_{P'Y}X+2(p+p')h(X,Y)=0 \qquad (3.204)$$

$$A_{p'\xi_k}X+A_{p'X}\xi_k+(p+p')\left\{H_k(X)+H^k(X)-A_{\xi_k}X-A_X\xi_k\right\}=0 \qquad (3.205)$$

sağlanır.

İspat. (3.203) denkleminde, (3.140) ve (3.141) ifadeleri göz önüne alınırsa (3.204) eşitliğinin sağlandığı kolayca görülür. Benzer şekilde (3.203) denkleminde, (3.142) ve (3.143) ifadeleri kullanılırsa (3.205) direk elde edilir.

Teorem 3.7.1. $\overline{M}$ S-uzay-form ve M, $\overline{M}$'nin yaklaşık bir C-alt manifoldu olsun. M'nin total geodezik yaklaşık bir C-alt manifold olması için gerekli ve yeterli koşul

$$A_{P'X}Y + A_{P'Y}X = 0 \tag{3.206}$$

olmasıdır.

İspat. M total geodezik yaklaşık bir C-alt manifold olsun. Bu durumda $h = 0$ olup (3.204)'den sonuç açıktır. Tersine (3.206) denklemi sağlansın. Bu durumda, (3.204)'den

$$(p + p')h(X,Y) = 0$$

bulunur. Teğet kısım normal kısmın lineer bir katı olamayacağından $p + p'$ ifadesi sıfır olamaz. Buradan $h = 0$ bulunur. Bu ise M'nin total geodezik yaklaşık bir C-alt manifold olduğunu verir.

Tanım 3.7.2. $\overline{M}$ S-uzay-form ve M, $\overline{M}$'nin yaklaşık C-alt manifoldu olsun. Eğer M aynı zamanda $\overline{M}$'nin bir slant alt manifoldu ise M'ye yaklaşık slant C-alt manifold denir. Benzer şekilde M aynı zamanda $\overline{M}$'nin global çatılı CR-alt manifoldu ise M global çatılı Cauchy-Riemann yaklaşık C-alt manifold olarak adlandırılır.

Teorem 3.7.2. $\overline{M}$ S-uzay-form ve M, $\overline{M}$'nin yaklaşık C-alt manifoldu olsun. Bu durumda, $\overline{R}$ ve R sırasıyla $\overline{M}$ ve M'nin Riemann eğrilik tensörleri olmak üzere $\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} R(X,Y,Z,W) &= F_1\overline{R}_1(X,Y,Z,W) + F_2\overline{R}_2(X,Y,Z,W) \\ &+ \sum_{i,j=1}^{s'} F_{ij}\overline{R}_{ij}(X,Y,Z,W) + \sum_{1\le i<j\le s'} G_{ij}\overline{R}_{ij}(X,Y,Z,W) \\ &+ \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i\ne j\ne k\ne i}}^{s'} H_{ijk}\overline{R}_{ijk}(X,Y,Z,W) + \overline{g}(h(Y,Z)h(X,W)) - \overline{g}(h(X,Z)h(Y,W)) \end{aligned} \tag{3.207}$$

dır.

İspat. (2.42) ve (2.78) denklemleri birlikte düşünüldüğünde (3.207) direk elde edilir.

Teorem 3.7.3. $\overline{M}$ S-uzay-form ve M, $\overline{M}$'nin yaklaşık slant C-alt manifoldu olsun. Bu durumda, $D^{\perp}$ integrallenebilir olması için gerekli ve yeterli koşul

$$P\nabla_X Y + p'h(X,Y) = 0 \tag{3.208}$$

olmasıdır.

İspat. (3.159) ve (3.204) ifadeleri göz önünde bulundurularak ispat tamamlanır.

Teorem 3.7.4. $\overline{M}$ S-uzay-form ve M, $\overline{M}$ nin yaklaşık slant C-alt manifoldu olsun. Bu durumda, $\forall 1 \leq k \leq s$ için $D^{\perp} \oplus \xi_k$ dağılımı integrallenebilir değildir.

İspat. (3.204) ifadesi Teorem 3.6.1.4.'de kullanılırsa ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.7.5. $\overline{M}$ S-uzay-form ve M, $\overline{M}$'nin yaklaşık slant C-alt manifoldu olsun. Bu durumda, D dağılımının integrallenebilir olması için gerekli ve yeterli koşul

$$P_2\left(\nabla_X PY - P(\nabla_Y X) - 2p'h(X,Y)\right) = 0 \tag{3.209}$$

denkleminin sağlanmasıdır.

İspat. (3.204) ifadesi (3.162)'de yerine yazılarak ispat tamamlanır.

3.8. ÖRNEKLER

Örnek 3.8.1. $\Re$ $(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n,z_1,\ldots,z_s)$ standart koordinatlara sahip $(2n+s)$-boyutlu reel vektör uzayı ve M de

$$M = \{(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n,z_1,\ldots,z_s) | 1 \leq k \leq s \text{ için } z_k \neq 0,\ n \in N,\ n \geq 1\}$$

şeklinde tanımlı $(2n+s)$-boyutlu bir manifold olsun. $\forall i = 1,\ldots,n$ ve $\forall k = 1,\ldots,s$ için X_i, Y_i ve ξ_k vektör alanları

$$X_i = -2\frac{\partial}{\partial x_i} + z_i^2 \frac{\partial}{\partial z_i}, \quad Y_i = 2\frac{\partial}{\partial y_i}, \quad \xi_k = \frac{\partial}{\partial z_k} \tag{3.210}$$

biçiminde verilsin. Bu vektör alanlarının lineer bağımsız oldukları ve M manifoldunu gerdikleri aşikardır. Böylece bu vektör alanları kümesi, bir $p \in M$ noktasındaki T_pM tanjant uzayının bir bazı olarak alınabilir. Bu durumda $\forall i, j = 1,\ldots,n$ ve $\forall k, k' = 1,\ldots,s$ için X_i, Y_i ve ξ_k vektör alanlarının Lie türevleri

$$\lfloor X_i, X_j \rfloor = 0, \quad \lfloor X_i, Y_j \rfloor = 0, \quad \lfloor Y_i, Y_j \rfloor = 0$$

$$[X_i, \xi_k] = -z_i^2 \frac{\partial}{\partial z_i}, \quad [Y_i, \xi_k] = 0, \quad [\xi_{k'}, \xi_k] = 0$$

şeklinde olduğu görülür. Eğer $\forall k = 1,\ldots,s$ için $\eta^k = dz_k$ şeklinde seçilirse M üzerindeki g Riemann metriği

$$g = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(-dx_i^2 + dy_i^2\right) + \sum_{k=1}^{s} dz_k^2$$

biçiminde hesaplanır. Ayrıca, φ M üzerinde $(1,1)$ tipinde bir tensör alanı olmak üzere,

$$\varphi\xi_k = 0, \quad \varphi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial y_i} \tag{3.211}$$

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{z_i^2}{2}\frac{\partial}{\partial z_i} \tag{3.212}$$

ifadelerini sağlasın. Böylece $\left(\varphi, \xi_k, \eta^{k'}, g\right)$ yapısı M üzerinde global çatılı bir metrik f-yapı olur. Bu metrik f-yapı ile birlikte M global çatılı bir metrik f-manifold olur. Şimdi elde edilen bu manifoldun yaklaşık C-manifold olup olmadığı, yani (3.1) şartınısağlayıp sağlamadığı araştırılacaktır. $i = 1,2$ olmak üzere $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \Re$ olsun.

$$Z = \alpha_1\sum_{i=1}^{n} X_i + \beta_1\sum_{i=1}^{n} Y_i + \gamma_1\sum_{k=1}^{s}\xi_k \tag{3.213}$$

ve

$$W = \alpha_2\sum_{i=1}^{n} X_i + \beta_2\sum_{i=1}^{n} Y_i + \gamma_2\sum_{k=1}^{s}\xi_k \tag{3.214}$$

vektör alanları göz önüne alınsın. Buradan (3.213) ve (3.214) denklemlerine φ uygulanırsa sırasıyla

$$\varphi Z = 2\sum_{i=1}^{n}\left(\beta_1\frac{\partial}{\partial x_i} - \alpha_1\frac{\partial}{\partial y_i}\right) - \beta_1\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial}{\partial z_k} \tag{3.215}$$

ve

$$\varphi W = 2\sum_{i=1}^{n}\left(\beta_2\frac{\partial}{\partial x_i} - \alpha_2\frac{\partial}{\partial y_i}\right) - \beta_2\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial}{\partial z_k} \tag{3.216}$$

denklemleri elde edilir. ∇ Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere

$$\nabla_Z W = 2\sum_{k=1}^{s}\left(\alpha_1\alpha_2 z_k^3 + \alpha_2\gamma_1 z_k\right)\frac{\partial}{\partial z_k} \tag{3.217}$$

ve

$$\nabla_W Z = 2\sum_{k=1}^{s}\left(\alpha_1\alpha_2 z_k^3 + \alpha_1\gamma_2 z_k\right)\frac{\partial}{\partial z_k} \tag{3.218}$$

kovaryant türevleri elde edilir. Buradan (3.1) denkleminin

$$(\nabla_Z\varphi)W + (\nabla_W\varphi)Z = \nabla_Z\varphi W - \varphi(\nabla_Z W) + \nabla_W\varphi Z - \varphi(\nabla_W Z) \tag{3.219}$$

ifadesine denk olduğu görülür. Burada (3.211), (3.212) ve (3.215)-(3.218) denklemleri (3.219)'da yerine yazılırsa (3.1) ifadesinin sağlandığı görülür. Bu ise M global çatılı metrik f-manifoldunun yaklaşık C-manifold olduğu anlamına gelir. Öte yandan bu manifold üzerinde $\forall X,Y \in \chi(M)$ için bir temel 2-form $\Phi(X,Y)=g(X,\varphi Y)$ şeklinde tanımlansın. Buradan bu Φ temel 2-formun ve $\forall k=1,\ldots,s$ için η^k 1-formlarının kapalı olduğu yani dış türevlerinin $d\eta^k=0$ ve $d\Phi=0$ olduğu görülür. Ayrıca N Nijenhuis tensör alanının sıfır olduğu elde edilir. Elde edilen tüm bu veriler ise, M yaklaşık C-manifoldunun aynı zamanda bir C-manifold olduğu anlamına gelir.

Örnek 3.8.2. Aşağıdaki örnekte, 2014 yılında Öztürk ve diğ. tarafından yapılan çalışmada inşa edilen örneğe benzer bir metot kullanılmıştır.

$\Re$ (x,y,z_1,z_2) standart koordinatlara sahip 4-boyutlu reel vektör uzayı ve M de

$$M=\{(x,y,z_1,z_2)|\ i=1,2\ için\ z_i\neq 0,\ n\in N,\ n=1,\ ve\ s=2\}$$

şeklinde tanımlı $(2+2)$-boyutlu bir manifold olsun. $\forall i=1,2$ ve $\forall k=1,2$ için X_i, Y_i ve ξ_k vektör alanları,

$$f_1(z_1,z_2)=\alpha_1\cos(z_1+z_2)-\alpha_2\sin(z_1+z_2)$$

ve

$$f_2(z_1,z_2)=\alpha_2\cos(z_1+z_2)+\alpha_1\sin(z_1+z_2)$$

olmak üzere,

$$X_1=f_1(z_1,z_2)\frac{\partial}{\partial x}+f_2(z_1,z_2)\frac{\partial}{\partial y}$$

$$X_2=-f_2(z_1,z_2)\frac{\partial}{\partial x}+f_1(z_1,z_2)\frac{\partial}{\partial y}$$

$$X_3:=\xi_1=\frac{\partial}{\partial z_1},\quad X_4:=\xi_2=\frac{\partial}{\partial z_2}$$

biçiminde tanımlansın. Burada, $\alpha_1,\alpha_2\in\Re$ dir. Bu vektör alanlarının lineer bağımsız oldukları ve M manifoldunu gerdikleri aşikardır. Böylece bu vektör alanları kümesi, bir $p\in M$ noktasındaki T_pM tanjant uzayının bir bazı olarak alınabilir. M üzerindeki g Riemann metriği $\forall i,j=1,2,3,4$ için

$$g(X_i,X_j)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

şeklinde olmak üzere

$$g = \frac{1}{\left(f_1^2 + f_2^2\right)}\left(dx \otimes dx + dy \otimes dy\right) + dz_1 \otimes dz_1 + dz_2 \otimes dz_2$$

tensörel çarpımı ile verilsin. $\forall X \in \chi(M)$ için η^1 ve η^2 1-formları sırasıyla $\eta^1(X) = g(X, \xi_1)$ ve $\eta^2(X) = g(X, \xi_2)$ şeklinde olsun. M üzerinde $(1,1)$ tipindeki φ tensör alanı

$$\varphi(X_1) = X_2, \quad \varphi(X_2) = -X_1, \quad \varphi\xi_1 = 0, \quad \varphi\xi_2 = 0$$

koşullarını sağlasın. Buradan, g metriğinin ve φ tensör alanının lineerlik özelliği kullanılarak $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\varphi^2 X = -X + \eta^1(X)\xi_1 + \eta^2(X)\xi_2$$

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta^1(X)\eta^1(Y) - \eta^2(X)\eta^2(Y)$$

$$\eta^1(\xi_1) = 1, \quad \eta^2(\xi_2) = 1$$

şeklinde oldukları hesaplanır. Buradan $(2+2)$-boyutlu M manifoldunun global çatılı metrik f-manifold olduğunu gösterir. Şimdi Örnek 3.8.1.2dekine benzer olarak, $i = 1, 2, 3, 4$ için a_i ve b_i ler birer sayı olmak üzere $\forall Z, W \in \chi(M)$ vektör alanları

$$Z = a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 \xi_1 + a_4 \xi_4$$

ve

$$W = b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 \xi_1 + b_4 \xi_4$$

şeklinde seçilsin. Buradan gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$(\nabla_Z \varphi)W + (\nabla_W \varphi)Z = 0$$

olduğu kolayca elde edilir. Bu ise M 'nin yaklaşık C-manifold olduğunu anlamına gelir. Öte yandan M üzerindeki $\Phi(X, Y) = g(X, \varphi Y)$ şeklinde tanımlı Φ temel 2-formu için $\Phi(X_1, X_2) = -1$ olup diğer terimler için sıfır olur. Bu yüzden Φ nin sıfırdan farklı temel bileşenleri

$$\Phi\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = -\frac{1}{\left(f_1^2 + f_2^2\right)} = -\frac{1}{\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2\right)}$$

Şeklinde hesaplanır. Buradan

$$\Phi = -\frac{1}{\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2\right)} dx \wedge dy$$

olduğu görülür. Şimdi, Φ 'nin dış türevi hesaplanırsa

$$d\Phi = 0$$

sonucuna ulaşılır. $\eta^1 = dz_1$ ve $\eta^2 = dz_2$ olduğundan $d\eta^1 = 0$ ve $d\eta^2 = 0$ elde edilir. ∇ g Riemann metriğine göre Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere, baz vektörlerinin Lie türevleri

$$[X_1, \xi_1] = [X_1, \xi_2] = -X_2, \quad [X_2, \xi_1] = [X_2, \xi_2] = X_1$$
$$[X_1, X_2] = 0, \quad [\xi_1, \xi_2] = 0$$

şeklinde oldukları elde edilir. Diğer taraftan, φ 2nin Nijenhuis tensörünün sıfıra eşit olduğu görülür. Böylece M aynı zamanda bir C-manifold olur.

Bu iki örnek göz önüne alınırsa aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.8.1. Yaklaşık bir C-manifold normal ise yani Nijenhuis tensör alanı sıfır oluyorsa bir C-manifold olur.

Örnek 3.8.3. $\Re$ $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_s)$ standart koordinatlara sahip $(2n+s)$-boyutlu reel vektör uzayı ve M de

$$M = \{(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_s) | 1 \le k \le s \text{ için } z_k \neq 0, n \in N, n \ge 1\}$$

şeklinde tanımlı $(2n+s)$-boyutlu bir manifold olsun. $\forall i = 1, \ldots, n$ ve $\forall k = 1, \ldots, s$ için X_i, Y_i ve ξ_k vektör alanları

$$X_i = -2(z_i + 1)\frac{\partial}{\partial x_i} + e^{z_i}\frac{\partial}{\partial z_i}, \quad Y_i = 2(z_i + 1)\frac{\partial}{\partial y_i}, \quad \xi_k = \frac{\partial}{\partial z_k}$$

şeklinde tanımlansın. Bu vektör alanlarının lineer bağımsız oldukları ve M manifoldunu gerdikleri açıktır. Böylece bu vektör alanları kümesi, bir $p \in M$ noktasındaki T_pM tanjant uzayının bir bazı olarak alınabilir. Bu durumda $\forall i, j = 1, \ldots, n$ ve $\forall k, k' = 1, \ldots, s$ için X_i, Y_i ve ξ_k vektör alanlarının Lie türevleri

$$[X_i, Y_j] = e^{z_i}(2z_i + 3)\frac{\partial}{\partial y_i}, \quad [Y_i, Y_j] = 0$$

$$[X_i, X_j] = -e^{z_i}(2z_i + 3)\frac{\partial}{\partial x_j} + e^{z_i}(2z_i + 3)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$[X_i, \xi_k] = (2z_i + 3)\frac{\partial}{\partial x_i} - e^{z_i}\frac{\partial}{\partial z_i}, \quad [Y_i, \xi_k] = (2z_i + 1)\frac{\partial}{\partial y_i}, \quad [\xi_{k'}, \xi_k] = 0$$

şeklinde olduğu görülür. Eğer $\forall k = 1, \ldots, s$ için $\eta^k = dz_k$ şeklinde seçilirse M

üzerindeki g Riemann metriği

$$g=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{-1}{z_i+1}dx_i^2+\frac{1}{z_i+1}dy_i^2\right)+\sum_{k=1}^{s}dz_k^2$$

biçiminde hesaplanır. Ayrıca, φ M üzerinde $(1,1)$ tipinde bir tensör alanı olmak üzere,

$$\varphi\xi_k=0,\quad \varphi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)=\frac{\partial}{\partial y_i}$$

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)=\frac{\partial}{\partial x_i}-\frac{e^{z_i}}{2(z_i+1)}\frac{\partial}{\partial z_i}$$

ifadelerini sağladığı görülür. Böylece $(\varphi,\xi_k,\eta^{k'},g)$ yapısı M üzerinde global çatılı metrik f-yapı olur. Bu metrik f-yapı ile birlikte M global çatılı bir metrik f-manifold olur. Şimdi Z ve W vektör alanları Örnek 3.8.1.'dekine benzer olarak

$$Z=\alpha_1\sum_{i=1}^{n}X_i+\alpha_2\sum_{i=1}^{n}Y_i+\alpha_3\sum_{k=1}^{s}\xi_k$$

ve

$$W=\beta_1\sum_{i=1}^{n}X_i+\beta_2\sum_{i=1}^{n}Y_i+\beta_3\sum_{k=1}^{s}\xi_k$$

şeklinde seçilip benzer hesaplamalar yapılırsa

$$(\nabla_Z\varphi)W+(\nabla_W\varphi)Z=\sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(1+e^{z_i}\right)\left[\left(\alpha_3+\alpha_1e^{z_i}\right)\beta_2+\left(\beta_3+\beta_1e^{z_i}\right)\alpha_2\right]\right)\frac{\partial}{\partial z_k}$$

olduğu görülür. Bu ise, tanımlanan manifoldun yaklaşık C-manifold olmadığını gösterir. Öte yandan bu manifold üzerinde $\forall X,Y\in\chi(M)$ için bir temel 2-form $\Phi(X,Y)=g(X,\varphi Y)$ şeklinde tanımlansın. Buradan bu Φ temel 2-formun ve $\forall k=1,\ldots,s$ için η^k 1-formlarının kapalı olduğu yani dış türevlerinin $d\eta^k=0$ ve $d\Phi=0$ olduğu görülür. Ayrıca N Nijenhuis tensör alanının sıfırdan farklı olduğu elde edilir. Elde edilen tüm bu veriler ise, M global çatılı metrik f-manifoldunun hemen hemen C-manifold olduğu anlamına gelir.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, manifold teoride önemli olan bazı kavramlar birlikte düşünülerek global çatılı f-manifoldların yeni bir sınıfı olan yaklaşık C-manifoldlar tanımlanmıştır. Bu yeni manifold sınıfının Riemann eğrilik özellikleri incelenmiştir. Bu manifold üzerinde farklı eğrilik tensörleri göz önüne alınarak daha genel sonuçlar elde edilebilir. Bu manifoldun tanımına benzer olarak global çatılı manifoldların yeni sınıfları tanımlanabilir. Yapılan bu sınıflandırmadaki manifoldların üzerinde tanımlı olan yapılar göz önüne alınarak manifoldun karakteri belirlenebilir. Ayrıca tanımlanan bu yapılar D-konformal dönüşümlere tabi tutulup bu dönüşümler altında invaryant kalıp kalmadığı incelenebilir. Elde edilen verilere göre farklı çıkarımlar yapılabilir. Tanımlanacak global çatılı yaklaşık manifoldların uzay formları elde edilip literatürde var olan bazı kavramların, eşitsizliklerin vb. daha genel versiyonlarına ulaşılabilir. Bu yeni manifoldlar üzerinde Ricci soliton kavramları ele alınıp elde edilen sonuçlar fizik için büyük öneme sahip olan Einstein alan denklemlerine uygulanarak yeni yorumlamalara gidilebilir. Bu çalışmadakine benzer olarak tanımlanacak olan manifoldlar, uzay formların birer alt manifoldu olarak düşünülürek Chen tarafından tanımlanan Riemann δ-değişmezler üzerinde daha farklı ve daha genel veriler elde edilip yeni yorumlamalara yer verilebilir. İfade edilen açık problemlere bakıldığında bu tez çalışmasının literatüre önemli bir katkı yapacağı görülmektedir. Çünkü genelleştirme ve sınıflandırma daha önce de ifade edildiği üzere her bilim dalı için büyük önem arz etmektedir. Yaklaşık C-manifoldların sağladığı özelliklerin uygulanan D-konformal dönüşümler altında değişmez kalması yapının kararlığını göstermiştir. Bu manifold sınıfının varlığı verilen örneklerle desteklenmiştir.

5. KAYNAKLAR

Alegre P., Blair D.E., Carriazo A., Generalized Sasakian-space-forms, *Israel Journal of Mathematics*, 141 (1) **(2004)** 157-183.

Barros A., Ribeiro E.J., Some characterizations for compact almost Ricci solitons, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 140 (3) **(2012)** 213-223.

Bejancu A., *Geometry of CR-submanifolds*, D. Reidel Publishing Company, **(1978)**.

Besse A.L., *Einstein Manifolds*, Springer-Verlag, **(1987)**.

Blair D.E., Geometry of manifolds with structural group $U(n)\times O(s)$, *Journal of Differential Geometry*, 4 (2) **(1970)** 155-167.

Boothby W.M., Wang H.C., On contact manifolds, *Annals of Mathematics*, 68 (3)

Cappelletti Montano B., Di Terlizzi L., D-homothetic transformations for a generalization of contact metric manifolds, *Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin*, 14 (2) (**2007**) 277-289.

Chen B.Y., *Geometry of Submanifolds*, Marcel Dekker. INC, **(1973)**.

Chen B.Y., *Geometry of Slant Submanifolds*, Katholieke Universiteit Leuven, **(1990)**.

Chen B.Y., Slant immersions, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 41 (1) **(1990)** 135-147.

Chen B.Y., Ogiue K., On totally real submanifolds, *Transactions of the American Mathematical Society*, 193 **(1974)** 257-266.

Cho J.T., Kimura M., Ricci solitons and real hypersurfaces in a complex space form, *Tohoku Mathematical Journal*, 61 (2) **(2009)** 205-212.

Ehresmann C., Sur les variétés presque complexes, *Proceedings of International Congress of Mathematicians*, 2 **(1950)** 412-419.

Falcitelli M., Pastore A.M., Almost Kenmotsu f-manifolds, *Balkan Journal of Geometry and Its Applications*, 12 (1) **(2007)** 32-43.

Goldberg S.I., Yano K., Integrability of almost cosymplectic structures, *Pasific Journal of Mathematics*, 31 (2) **(1969)** 373-382.

Goldberg S.I., Yano K., Globally framed f-manifolds, *Illinois Journal of Mathematics*, 15 (3) **(1971)** 456-474.

Gray J.W., Some global properties of contact structures, *Annals of Mathematics*, 69 (2) **(1959)** 421-450.

Gray A., Nearly Kähler manifolds, *Journal of Differential Geometry*, 4 (3) **(1970)** 283-309.

Hacısalihoğlu H.H., *Diferansiyel Geometri, Cilt I*, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, **(1993)**.

Hamilton R.S., The Ricci flow on surfaces, *Contemporary Mathematics*, 71 **(1986)** 237-262.

Hicks N.J., *Notes on Differential Geometry*, D. Van Nostrand Company INC, **(1965)**.

Ishihara S., Normal structure f satisfying $f^3 + f = 0$, *Kodai Mathematical Seminar Reports*, 18 (1) **(1966)** 36-47.

Ishihara S., Yano K., On integrability conditions of a structure f satisfying $f^3 + f = 0$, *Quarterly Journal of Mathematics: Oxford Science*, 15 (1) **(1964)** 217-222.

Kähler E., Über eine bemerkenswerte Hermitische metrik, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 9 (1) **(1933)** 173-186.

Kenmotsu K., A class of almost contact Riemannian manifolds, *Tohoku Mathematical Journal*, 24 (1) **(1972)** 93-103.

Kim T.W., Pak H.K., Canonical foliations of certain classes of almost contact metric structures, *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 21 (4) **(2005)**, 841-846.

Kobayashi S., Nomizu K., *Foundations of Differential Geometry I*, Interscience Publishers, **(1963)**.

Kobayashi S., Nomizu K., *Foundations of Differential Geometry II*, Interscience Publishers, **(1969)**.

Kobayashi M., Tsuchiya S., Invariant submanifolds of an f-manifold with complemented frames, *Kodai Mathematical Seminar Reports*, 24 (4) **(1972)** 430-450.

Ludden G.D., Submanifolds of cosymplectic manifolds, *Journal of Differential Geometry*, 4 (2) **(1970)** 237-244.

Janssens D.,Vanhecke L., Almost contact structures and curvature tensors, Kodai

Mathematical Journal, 4 (1) **(1981)** 1-27.

Nakagawa H., On framed f-manifolds, *Kodai Mathematical Seminar Reports*, 18 (4) **(1966)** 293-306.

Nijenhuis A., Woolf W.B., Some integration problems in almost-complex and complex manifolds, *Annals of Mathematics*, 77 (3) **(1963)** 424-489.

Ogiue K., On invariant immersions, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 80 (1) **(1968)** 387-397.

O'Neill B., *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, **(1983)**.

Öztürk H., Hemen hemen α-kosimplektik (κ,μ,ν)-uzayları, *Doktora Tezi*, Afyon Kocatepe Üniversitesi, **(2009)**.

Öztürk H., Murathan C., Aktan N., Turgut Vanlı A., Almost α-cosymplectic f-manifolds, *Annals of the Alexandru Ioan Cuza University-Mathematics*, 60 (1) **(2014)** 211-226.

Pigola S., Rigoli M., Rimoldi M., Setti A., Ricci almost solitons, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*, X (4) **(2011)** 757-799.

Prieto-Martin A., Fernández L.M., Fuentes A.M., Generalized S-space-forms, *Publications De L'Institut Mathématique*, 94 (108) **(2013)** 151-161.

Sasaki S., On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure I, *Tohoku Mathematical Journal*, 12 (3) **(1960)** 459-476.

Sasaki S., Hatakeyama Y., On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure II, *Tohoku Mathematical Journal*, 13 (2) **(1961)** 281-294.

Sasaki S., Hsu C.J., On the integrability of almost contact structures, *Tohoku Mathematical Journal*, 14 (2) **(1962)** 167-176.

Schouten J.A., van Dantzig D., Über unitäre geometrie, *Mathematische Annalen*, 103 (1) **(1930)** 319-346.

Stong R.E., The rank of f-structure, *Kodai Mathematical Seminar Reports*, 29 (1-2) **(1977)** 207-209.

Tanno S., Harmonic forms and Betti numbers of certain contact Riemannian manifolds, *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 19 (3) **(1967)** 308-316.

Tanno S., The topology of contact Riemannian manifolds, *Illinois Journal of Mathematics*, 12 (4) **(1968)** 700-717.

Tricerri F., Vanhecke L., Curvature tensors on almost Hermitian manifolds, *Transactions of the American Mathematical Society*, 267 (2) **(1981)** 365-398.

Yano K., On a structure f satisfying $f^3 + f = 0$, *Technical Report No. 12*, University of Washington, Washington-USA, **(1961)**.

Yano K., On a structure defined by a tensor field of f of type $(1,1)$ satisfying $f^3 + f = 0$, *Tensor*, 14 **(1963)** 99-109.

Yano K., *Integral Formulas in Riemannian Geometry*, Marcel Dekker Inc., **(1970).**

Yano K., Kon M., *Strcutures on Manifolds*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., **(1984)**.

Weil A., Sur la théorie des formes différentielles attachées á une variété analytique complexe, *Commentarii Mathematici Helvetici*, 20 (1) **(1947)** 110-116.

Willmore T.J., *An Introduction to Differential Geometry*, Oxford University Press, **(1959)**.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: BALKAN Yavuz Selim
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 01.07.1989-Akhisar
Telefon	: 05075189750
Faks	: 03805412403
E-posta	: y.selimbalkan@gmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Yüksek Lisans	Düzce Üniversitesi	2013
Lisans	Balıkesir Üniversitesi	2011
Lise	Akhisar Anadolu Lisesi	2007

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2011-Devam ediyor	Düzce Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce (ÜDS: 87.5/KPDS:83)

Yayınlar

1. SCI-E (Science Citation Index-Expanded), SSCI (Social Science Citation Index), AHCI (Arts and Humanites Citation Index) tarafından taranan dergilerde yapılan yayınlar

Aktan N., **Balkan S.**, Yıldırım M., On weak symmetries of almost Kenmotsu (κ,μ,ν)-spaces, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 42 (4) **(2013)** 447-453.

2. Diğer indeksler (EI, ECONLIT, CCI, CMCI, IM, CIJE, EI vb) tarafından taranan dergilerde yapılan yayınlar

Balkan Y.S., Aktan N., Almost Kenmotsu f-manifolds, *Carpathian Mathematical Publications*, 7 (1) **(2015)** 6-21.

Aktan N., **Balkan Y.S.**, Almost cosymplectic (κ,μ)-spaces with cyclic-parallel ricci tensor, *International Electronic Journal of Geometry*, 4 (2) **(2013)** 57-62.

Balkan Y.S., Aktan N., Some results on pseudo Ricci symmetric almost α-cosymplectic f-manifolds, *Konuralp Journal of Mathematics*, 1 (2) **(2013)** 57-66.

Aktan N., **Balkan Y.S.**, Özüsağlam E., Cyclic-parallel Ricci tensor of almost S-manifolds, *Konuralp Journal of Mathematics*, 1 (1) **(2013)** 1-7.

3. Uluslararası bilimsel etkinliklere ait kitaplarda yayınlanan bildiri özeti

Balkan Y.S., Aktan N., Yıldırım M., A new type of framed manifolds, *Workshop on Integral Geometry and Inverse Problems In Honour of Prof. Yurii E. Anikonov*, Zonguldak, **(2015)** 22.

Yıldırım M., Aktan N., **Balkan Y.S.**, A new type of contact manifolds, *Workshop on Integral Geometry and Inverse Problems In Honour of Prof. Yurii E. Anikonov*, Zonguldak, **(2015)** 14.

Balkan Y.S., A new class of Riemannian manifolds, *International Congress in Honour of Professor Ravi P. Agarwal*, Bursa, **(2014)** 35.

Balkan Y.S., Some curvature properties of almost α-cosymplectic f-manifolds, *XVIII Geometrical Seminar*, Vrnjacka Banja-Serbia, **(2014)** 18.

Balkan Y.S., Some symmetry conditions of almost S-manifolds, *13th Serbian Mathematical Congress*, Vrnjacka Banja-Serbia, **(2014)** 77.

Balkan Y.S., τ-curvature tensor of α-cosymplectic f-manifolds, *Conference on Geometry*, İstanbul, **(2014)** 1.

Balkan Y.S., On a new type of almost contact metric manifolds, *Riemannian Geometry and Applications to Engineering and Economics*, Bucharest-Romania, **(2014)** 3.

Aktan N., **Balkan Y.S.**, On φ-conformally flat almost cosymplectic (κ,μ)-spaces, *International Congress in Honour of Professor Hari M. Srivastava*, Bursa, **(2012)** 51.

4. Uluslararası bilimsel etkinliklere ait kitaplarda yayınlanan bildiri özeti

Balkan Y.S., Zayıf τ-simetrik Sasakian manifoldlar, *9. Ankara Matematik Günleri*, Ankara, **(2014)** 29.

Balkan Y.S., Aktan N., Hemen hemen C-manifoldlar üzerine, *8. Ankara Matematik Günleri*, Ankara, **(2013)** 18.

Balkan Y.S., Aktan N., A generalization of almost Kenmotsu f-manifolds, *XI. Geometri Sempozyumu*, Ordu, **(2013)** 13.

Aktan N., **Balkan S.**, Almost cosymplectic (κ,μ)-spaces with cyclic-parallel Ricci tensor, *X. Geometri Sempozyumu*, Balıkesir, **(2012)** 31.

Aktan N., **Balkan S.**, Yıldırım M., Hemen hemen Kenmotsu (κ,μ,ν)-uzaylarının zayıf simetrileri üzerine, *7. Ankara Matematik Günleri*, Ankara, **(2012)** 59.