T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

GLOBAL ÇATILI HEMEN HEMEN $f-$KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLAR

DOKTORA TEZİ

MUSTAFA YILDIRIM

MART 2016

DÜZCE

KABUL VE ONAY BELGESİ

Mustafa YILDIRIM tarafından hazırlanan Global Çatılı Hemen Hemen f-kosimplektik Manifoldlar isimli lisansüstü tez çalışması, Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 14.03.2016 tarih ve 2016340 sayılı kararı ile oluşturulan jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Üye
(Tez Danışmanı)
Prof. Dr. Nesip AKTAN
Necmettin Erbakan Üniversitesi

Üye
Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Düzce Üniversitesi

Üye
Doç. Dr. Erdal ÖZÜSAĞLAM
Aksaray Üniversitesi

Üye
Doç. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Üye
Yrd. Doç. Dr. Arzu ÖZKOÇ
Düzce Üniversitesi

Tezin Savunulduğu Tarih: 31.03.2016

ONAY

Bu tez ile Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Mustafa YILDIRIM'ın Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora derecesini almasını onamıştır.

Doç. Dr. Resul Kara
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

31 Mart 2016

Mustafa YILDIRIM

Emektar Babama, Fedakâr Anneme…

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamı hazırlarken her konuda yardımını esirgemeyen, bana ilham kaynağı olan ve yol gösteren Danışman Hocam Sayın Prof. Dr. Nesip AKTAN'a, tesvikleriyle tavsiyeleriyle Sayın Doç. Dr. M. Zeki Sarıkaya'ya, sabır ve zaman alan bu zorlu süreçte maddi manevi desteğiyle aileme ve birbirimize her konuda destek olmaya çalıştığımız çalışma arkadaşlarıma sonsuz teşekkür ediyorum.

31 Mart 2016 **Mustafa YILDIRIM**

İÇİNDEKİLER **Sayfa**

SİMGELER VE KISALTMALAR

D	Değme dağılımı
div	Divergens operatörü
J	Hemen hemen kompleks yapı
B	İkinci temel form
$M^n(c)$	c sabit eğrilikli uzay form
$\nabla, \tilde{\nabla}$	Levi-Civita konneksiyonu
L	Lie türev operatörü
$\chi(M)$	M üzerindeki C^∞ vektör alanları uzayı
TM	M üzerindeki tanjant demeti
$TM^\perp$	M üzerindeki tanjant demetlerinin ortogonal tümleyeni
N	Nijenhuis tensör alanı
$O(s)$	Ortogonal grup
R	Riemann eğrilik tensörü
$U(n)$	Üniter grup
$[,]$	Lie parantez operatörü
Q	Ricci operatörü
S	Ricci tensor alanı

ÖZET

GLOBAL ÇATILI HEMEN HEMEN f – KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLAR

Mustafa YILDIRIM
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi
Danışman: Prof. Dr. Nesip AKTAN
Mart 2016, 72 sayfa

Bu çalışma, çatılı manifoldların yeni bir sınıfı olan global çatılı hemen hemen f – kosimplektik manifoldları tanımlamayı amaçlamıştır. f ve s 'nin bazı özel durumları için, (hemen hemen) f – kosimplektik, (hemen hemen) C-manifoldlar ve (hemen hemen) Kenmotsu f – manifoldlar elde edilmiştir. Ayrıca, bazı tensor koşulları çalışılmıştır. Yapılan çalışma global çatılı hemen hemen f – kosimplektik manifoldlara iki genel örnek verilerek sonuçlandırılmıştır.

Anahtar sözcükler: Hemen hemen Kenmotsu f – manifold, hemen hemen f – kosimplektik manifold, hemen hemen C-Manifold, çatılı manifoldlar

ABSTRACT

GLOBALLY FRAMED ALMOST f – COSYMPLECTIC MANIFOLDS

Mustafa Yıldırım
Duzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Departmant of Mathematics
Doctoral Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Nesip Aktan
March 2016, 72 pages

The purpose of this thesis is to study a new class of framed manifolds. Such manifolds are called globally framed almost f – cosymplectic manifolds. For some special cases of f and s, one obtains (almost) f – cosymplectic, (almost) C-manifolds, and (almost) Kenmotsu f – manifolds. Moreover, several tensor conditions are studied. We conclude our results with two general examples on globally framed almost f – cosymplectic manifolds.

Keywords: (Almost) Kenmotsu f – manifolds, (Almost) f – Cosymplectic manifolds, Almost C-Manifolds, framed manifolds

EXTENDED ABSTRACT

GLOBALLY FRAMED ALMOST $f-$COSYMPLECTIC MANIFOLDS

Mustafa YILDIRIM
Duzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Departmant of Mathematics
Doctoral Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Nesip Aktan
March 2016, 72 pages

1. INTRODUCTION:

In the manifold theory, almost contact manifolds are so important. A differentiable (C^∞) $(2n+1)$-dimensional manifold M is called an almost contact manifold if the structural group of its tangent boundle is reducible to $U(n)\times 1.$ Firstly, in 1959, Gray defined almost contact structure on odd dimensional manifold. According to this definition, $(2n+1)$-dimensional almost contact structure is constructed by (φ,ξ,η)-triple such that φ is type of $(1,1)$ tensor field, ξ is a vector field and η is a 1-form and this triple satisfies the following properties:

$$\varphi^2=-I+\eta\otimes\xi,\ \eta(\xi)=1,$$

where I denotes the identity map. In 1960, Sasaki, defining a smooth metric on (φ,ξ,η) almost contact structure, which is satisfies the following properties,

$$g(\varphi X,\varphi Y)=g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y),$$

$$\eta(X)=g(X,\xi)$$

exactly defined almost contact metric structure. In 1961, Sasaki and Hatakeyama prove the normality condition, for almost contact manifolds, which J comlex structure $J^2=-I$ is integrable.

In 1972, Kenmotsu defined a new class of almost contact metric manifolds. He studied the scalar curvature tensor, the Ricci curvature tensor and some basic properties about this new class manifold. Later, this new maifold was called Kenmotsu manifold.

In 1963, Yano defined $f-$structure which is a generalization of almost contact structures and almost complex structures.

In 1971, Goldberg and Yano defined that global framed structures are f-structures and global framed manifolds are $f-$manifolds.

In 2006, Falcitelli and Pastore defined $(2n+s)$-dimensional almost Kenmotsu f-manifolds. In 2009, Hakan Öztürk defined almost α-cosymplectic $f-$manifolds in Ph.D thesis.

In 2014, Aktan, Yıldırım and Murathan defined almost $f-$cosymplectic manifolds and several tensor conditions.

In this thesis, we have studied a new class of framed manifolds. Such manifolds are called globally framed almost $f-$cosymplectic manifolds. For some special cases of f f and s, one obtains (almost) $f-$cosymplectic, (almost) C-manifolds, and (almost) Kenmotsu $f-$manifolds. Moreover, several tensor conditions are studied. We conclude our results with two general examples on globally framed almost $f-$cosymplectic manifolds.

2. MATERIAL AND METHODS:

We give some basic concept of manifolds. This chapter includes six parts. In first part of this chapter we introduce some fundamental concept of manifold theory. First part includes two subsection. In the first subsection, we give Riemannian manifolds and some basic properties. In the second subsection, we introduce some fundamental concept of almost contact metric manifolds. In the second and third part, we give some basic properties of framed manifolds. In the fifth part and last part we give some basic properties and almost Kenmotsu $f-$manifolds and almost $f-$cosymplectic manifolds.

3. RESULTS AND DISCUSSIONS:

We recall definition globally framed almost $f-$cosymplectic manifolds and we obtain some curvature properties. In first part of this chapter, we introduce globally framed almost $f-$cosypmlectic manifolds. In the second part, we get some basic properties of specific tensor fields. In third part, we give Riemannian properties and we obtain some equalities related with Riemannian tensor properties. In the fourt part we give ricci solitons. In the five part we definition globally framed f-cosymplectic $(\kappa,\mu,\nu)-$spaces and some curvature properties.

4. CONCLUSION AND OUTLOOK:

In this study, we have a globally framed and some curvature properties also we have study globally framed almost f-cosymplectic $(\kappa,\mu,\nu)-$spaces. A general classification problem for globally framed almost $f-$cosymplectic $(\kappa,\mu,\nu)-$spaces made as a result of this study is still open. Also, under special tensor condition such as Ricci symetric, Ricci semi-symetric, Pseudo symetric and Pseudo semi-symetric, one can obtain interesting results for $(\kappa,\mu,\nu)-$spaces.

1. GİRİŞ

Manifold teorisinde hemen hemen değme manifoldlar çok önemli bir yere sahiptir. $(2n+1)$ -boyutlu bir C^{∞} sınıfından diferensiyellenebilir M manifoldunun tanjant demetlerinin grup yapısı $U(n)\times 1$ tipine indirgenebiliyorsa M 'ye hemen hemen değme manifold denir. İlk olarak, 1959 yılında J.Gray tek boyutlu manifoldlar üzerinde yaptığı çalışmada $U(n)\times 1$ yapısal grubunun bir indirgenmesiyle hemen hemen değme yapıları tanımlamıştır. Buna göre, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme yapısı

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi, \quad \eta(\xi) = 1$$

denklemlerini sağlayan $(1,1)$-tipli bir tensör alanı φ, bir vektör alanı ξ ve bir $1-$form olan η ile oluşturulan $(\varphi,\xi,\eta)-$üçlüsüyle ifade edilir. Daha sonra 1960 yılında Sasaki (φ,ξ,η) hemen hemen değme yapısı üzerinde

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

$$\eta(X) = g(X,\xi)$$

eşitlikleriyle verilen uygun bir g metriği tanımlayarak hemen hemen değme metrik yapıyı tam olarak ifade etmiştir. 1961 yılında Sasaki ve Hatakeyama hemen hemen değme manifoldlar için normallik şartının J kompleks yapısının $J^2 = -I$ integrallenebilmesi olduğunu ispatlamışlardır.

1972 yılında Kenmotsu hemen hemen değme metrik manifoldların yeni bir sınıfını tanımlamıştır. Eğrilik tensörü ve ricci eğrilik tensörü başta olmak üzere manifoldla ilgili bazı temel kavramlar üzerinde çalışmıştır. Tanımlanan bu manifold daha sonra Kenmotsu manifold olarak isimlendirilmiştir.

1963 de Yano, hemen hemen kompleks ve hemen hemen değme yapıların bir genellemesi olan f-yapıyı tanımladı.1971 de Golberg ve Yano, global çatılandırılan yapıların f-yapı, global çatılandırılan manifoldların f-manifold olduğunu tanımladılar.

2006 yılında Falcitelli ve Pastore almost Kenmotsu manifoldları (2n+s) boyuta taşıyıp hemen hemen Kenmotsu f-manifoldları tanımlamışlardır. 2009 tarihinde Hakan Öztürk doktora tezinde hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldları tanımlamıştır.

2014 yılında Nesip Aktan, Mustafa Yıldırım ve Cengizhan Murathan hemen hemen $\alpha-$kosimplektik manifoldları genelleştirerek hemen hemen $f-$kosimplektik manifoldları tanımlamışlardır. Bu çalışmada ise hemen hemen $f-$kosimplektik manifoldlar ve çatılı manifoldlar genelleştirilerek global çatılı hemen hemen $f-$kosimplektik manifoldlar tanımlanmıştır.

İkinci bölümde, manifoldlar ile ilgili temel kavramlar tanıtılacaktır. Bu bölümün ilk kısmında, manifold teorisi ile ilgili temel kavramlar verilmiştir. İlk kısım iki alt kısımdan oluşmaktadır. Birinci alt kısımda, Riemann manifoldlar ve bazı temel özellikleri tanıtılmıştır. İkinci alt kısımda, hemen hemen değme metrik manifoldlar ile ilgili temel kavramlar verilmiştir. İkinci kısımda, hemen hemen Kenmotsu manifoldlar ve hemen hemen f-kosimplektik manifoldlar hakkında temel kavramlar tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde, global çatılı hemen hemen f-kosimplektik manifoldların tanımı verilerek bazı tensör şartları çalışılmıştır. Devamında global çatılı hemen hemen $f-$kosimplektik $(\kappa,\mu,\nu)-$uzaylar ve bunlarla ilgili bazı sonuçlara yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise global çatılı hemen hemen $f-$kosimplektik manifoldlarla ilgili bazı açık uçlu problemlere yer verilmiştir.

Bu çalışmamızda global çatılı hemen hemen $f-$kosimplektik manifoldlar ve global çatılı hemen hemen $f-$kosimplektik $(\kappa,\mu,\nu)-$uzaylar göz önüne alınıp bazı eğrilik özellikleri elde edilmiştir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, diğer bölümlerde çalışmamız için gerekli olan manifoldlar ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

2.1. RİEMANN MANİFOLDLAR

Bu kısımda, Riemann manifoldların temel kavramlar tanıtılacaktır.

Tanım 2.1.1. M, n-boyutlu bir C^∞ manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonlarının halkası $C^\infty(M,\Re)$ olmak üzere,

$$g:\chi(M)\times\chi(M)\rightarrow C^\infty(M,\Re)$$

simetrik, 2-lineer ve pozitif tanımlı bir g dönüşümüne M üzerinde bir Riemann metrik tensörü ve (M,g) ikilisiyle verilen manifolda bir Riemann manifoldu denir (O'neill 1983). M manifoldunun herhangi iki p ve q noktası için M üzerinde bu noktalar birleştiren bir eğri bulunabiliyorsa, M 'ye bağlantılı manifold adı verilir (O'neill 1983).

Tanım 2.1.2. M bir C^∞ manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\nabla:\chi(M)\times\chi(M)&\rightarrow\chi(M)\\ (X,Y)&\rightarrow\nabla(X,Y)=\nabla_X Y\end{aligned}$$

dönüşümü, $\forall f,g\in C^\infty(M,\Re)$ ve $\forall X,Y\in\chi(M)$ için,

(1) $\nabla_X(Y+Z)=\nabla_X Y+\nabla_X Z$,

(2) $\nabla_{(fX+gY)}Z=f\nabla_X Z+g\nabla_Y Z$,

(3) $\nabla_X(fY)=X(f)Y+f\nabla_X Y$

özellikleri sağlanıyorsa ∇ 'ya M üzerinde bir afin konneksiyon denir (O'neill 1983).

Tanım 2.1.3. (M,g), n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde bir afin konneksiyon olsun. O zaman, ∇ dönüşümü; $\forall X,Y \in \chi(M)$ için,

(1) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$ (Konneksiyonun sıfır torsiyon özeliği),

(2) $Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y,Z) + g(Y,\nabla_X Z)$ (Konneksiyonun metrikle bağdaşma özeliği),

şartlarını sağlıyorsa ∇ 'ya M üzerinde sıfır torsiyonlu bir Riemann konneksiyonu veya M nin Levi-Civita konneksiyonu denir (O'neill 1983).

Tanım 2.1.4. (M,g) bir Riemann manifoldu ve ∇ 'da M üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu olsun. O zaman

$$\begin{aligned} R: \chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M) &\to \chi(M) \\ (X,Y,Z) &\to R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \end{aligned} \tag{2.1}$$

ile tanımlanan (1.3)-tipli tensör alanı R 'ye M 'nin Riemann eğrilik tensörü denir.

Ayrıca, $\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ olmak üzere, R Riemann eğrilik tensörü,

(1) $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$,

(2) $g(R(X,Y)Z,W) = -g(R(X,Y)W,Z)$,

(3) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$,

(4) $g(R(X,Y)Z,W) = g(R(Z,W)X,Y)$

özelliklerini sağlar (O'neill 1983).

Önerme 2.1.1. (M,g) bir Riemann manifoldu, ∇ da M üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu ve φ, $(1,1)$-tipli bir tensör alanı olsun. O zaman,

$$(\nabla_X \varphi)Y = \nabla_X(\varphi Y) - \varphi(\nabla_X Y)$$

dır (O'neill 1983).

Önerme 2.1.2. (M,g) bir Riemann manifoldu olsun. F simetrik bir tensör alan olmak üzere, her X,Y,Z vektör alanları için,

$$g((\nabla_X F)Y,Z) = g(Y,(\nabla_X F)Z)$$

eşitliği geçerlidir (O'neill 1983).

Önerme 2.1.3. (M,g) bir Riemann manifoldu olsun. G ters simetrik bir tensör alanı olmak üzere, her X,Y,Z vektör alanları için,

$$g((\nabla_X G)Y,Z) = -g(Y,(\nabla_X G)Z)$$

dır (O'neill 1983).

Tanım 2.1.5. (M,g) bir Riemann manifoldu olsun. T_pM tanjant uzayının iki boyutlu alt uzay $\prod$ ve $V,W \in \prod$ vektörleri üzerine kurulan paralel kenarın alanı,

$$g(V,V)g(W,W)-(g(V,W))^2 \neq 0$$

olsun. O zaman,

$$K(V,W) = \frac{g(R(V,W)W,V)}{g(V,V)g(W,W)-(g(V,W))^2}$$

eşitliğine $\prod$ 'nin kesit eğriliği denir ve $K(\prod)$ ile gösterilir (O'neill 1983).

Tanım 2.1.6. (M,g) bir Riemann manifoldu ve $\{e_1,...,e_n\}$ lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere,

$$\begin{aligned} S : \chi(M)\times\chi(M) &\rightarrow \Re \\ (X,Y) \rightarrow S(X,Y) &= \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i,X)Y,e_i) \end{aligned} \qquad (2.2)$$

şeklinde tanımlı $(0,2)$-tipindeki S tensör alanına M üzerinde Ricci eğrilik tensörü denir. Ayrca, $(0,2)$-tipli Q Ricci operatörü,

$$S(X,Y) = g(QX,Y)$$

eşitliği ile tanımlıdır (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.7. (M,g) bir Riemann manifoldu ve $\{e_1,...,e_n\}$ lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere,

$$r=\sum_{i=1}^{n}S(e_i,e_i)$$

değerine M 'nin skaler eğriliği denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.9. (M,g) bir Riemann manifoldu ve M üzerinde bir pozitif fonksiyon ρ olsun. Bu durumda, $g^*=\rho^2 g$ eşitliği M üzerinde metrik değişimini tanımlar. Burada her bir noktadaki iki vektör arasındaki açı değişmezdir. Bu nedenle, bu şekilde tanımlanan metrik değişimine metriğin bir konformal değişimi denir. Eğer ρ fonksiyonu sabit ise konformal dönüşüm homotetik olarak adlandırılır. Eğer ρ fonksiyonu özdeş olarak 1'e eşit ise bu dönüşüm bir izometri olarak adlandırılır.

Ayrıca, eğer bir g Riemann metriği lokal düzlemsel olan bir g^* Riemann metriği ile konformal olarak ilişkili ise o zaman, M , Riemann manifolduna konformal düzlemsel denir (Yano ve Kon 1984).

Teorem 2.1.1. (M,g) bir Riemann manifoldu olsun. M 'nin konformal düzlemsel olması için gerekli ve yeterli koşul $n>3$ için $C=0$ ve $n=3$ için $C=0$ olmasıdır (Yano ve Kon 1984).

Teorem 2.1.2. (M,g) bir sabit κ eğriliğine sahip olan bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda, M üzerindeki herhangi X,Y,Z vektör alanlar için,

$$R(X,Y)Z=\kappa[g(Y,Z)X-g(X,Z)Y]$$

dır. (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.11. κ sabit eğrilikli, tam ve bağlantılı manifoldlara uzay form denir. n -boyutlu bir M uzay formu $M(\kappa)$ ile gösterilir (Yano ve Kon 1984).

Sonuç 2.1.1. (M,g) bir sabit κ eğrilikli bir uzay form olsun. Bu durumda, $n\geq 2$ için,

$$M(\kappa)=\begin{cases} \kappa=0 & ise \quad M(\kappa)=E^n \text{ Euclid uzayı} \\ \kappa=\dfrac{1}{r^2} & ise \quad M(\kappa)=S^n(r) \text{ küresi} \\ \kappa=-\dfrac{1}{r^2} & ise \quad M(\kappa)=H^n(r) \text{ hiperbolik uzay} \end{cases}$$

dır (O'neill 1983).

Tanım 2.1.12. M bir C^∞ manifold olmak üzere,

$$\begin{aligned} \phi : I\times M &\to M \\ (t,p) &\to \phi_t(p) \end{aligned}$$

dönüşümü

(1) $\forall t\in I$ ve $\forall P\in M$ için, $\phi_t : P\to\phi_t(P)$ diffeomorfizm,

(2) $\forall t,s\in I$ ve $\forall P\in M$ için, $\phi_{t+s}(P)=\phi_t(\phi_s(P))$

şartlarını sağlıyorsa ϕ 'ye M 'nin diferensiyellenebilir bir 1-parametreli grubu denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.13. M bir C^∞ manifold ve M üzerindeki bir vektör alanı X olmak üzere, X ile gerilmiş lokal dönüşümlü bir 1-parametreli grup ϕ_t olsun. O zaman, K bir tensör alanı ve $p\in M$ için,

$$(L_X K)_p=\lim_{t\to o}\frac{1}{t}\left[K_p-(\phi_t K)_p\right]$$

şeklinde tanımlanan $(L_X K)$ dönüşümüne X yönünde K 'nın Lie türevi denir ve $L_X K$ ile gösterilir (Yano ve Kon 1984).

Önerme 2.1.4. M bir C^∞ manifold ve M üzerindeki bir X vektör alanı yönündeki Lie türevi için,

(1) $L_X(Y\otimes Z)=(L_X Y)\otimes Z+Y\otimes(L_X Z)$ (Y,Z keyfi tensör alanları),

(2) $L_X f=X(f)$ (f,K cismi üzerinde bir fonksiyon),

$(3) \quad L_X V = [X,V] \quad V \in \chi(M)$,

özellikleri geçerlidir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.14. (M,g) bir Riemann manifoldu olsun. Her X vektör alanı için, $L_X g = 0$ ise X vektör alanına bir Killing vektör alanı denir (Yano ve Kon 1984).

2.2. HEMEN HEMEN DEĞME MANİFOLDLAR

Bu kısımda, hemen hemen değme manifoldları ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

Tanım 2.2.1. M, $(2n+1)$-boyutlu bir manifold, φ,ξ,η da M üzerinde, sırasıyla, $(1,1)$ -tipinde bir tensör alanı, bir vektör alan ve 1 -form olsunlar. Eğer φ,ξ,η için, M üzerinde herhangi bir vektör alanı X olmak üzer

$$\begin{aligned} &\eta(\xi) = 1 \\ &\varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi \end{aligned} \tag{2.3}$$

eşitlikleri sağlanıyorsa o zaman, (φ,ξ,η) üçlüsüne M üzerinde bir hemen hemen değme yapı ve bu yapı ile birlikte M 'ye bir hemen hemen değme manifold denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.2. $(2n+1)$-boyutlu M manifoldu (φ,ξ,η) hemen hemen değme yapısı ile verilsin. M üzerinde bir g Riemann metriği,

$$\begin{aligned} &\eta(X) = g(X,\xi) \\ &g(\varphi X,\varphi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y) \end{aligned} \tag{2.4}$$

şartlarını sağlıyorsa g metriğine M üzerinde hemen hemen değme metrik, (φ,ξ,η,g) yapısına hemen hemen değme metrik yapı ve (φ,ξ,η,g) yapısı ile M 'ye de hemen hemen değme metrik manifold denir (Yano ve Kon 1984).

Sonuç 2.2.1. M , (φ,ξ,η,g) hemen hemen değme metrik yapsı ile verilsin. Bu durumda,

$$g(\varphi X,Y)=-g(X,\varphi Y) \tag{2.5}$$

dır (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.3. M üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı (φ,ξ,η,g) olmak üzere,

$$\Phi(X,Y)=g(X,\varphi Y) \tag{2.6}$$

şeklinde tanımlı Φ dönüşümüne hemen hemen değme metrik yapısının temel 2 -formu denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.4. (M,ξ,η,g), $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. Eğer η kapalı yani $d\eta=0$ ve $d\Phi=2d\eta\wedge\Phi$ ise (M,ξ,η,g)'ye bir hemen hemen Kenmotsu manifold denir (1972 Kenmotsu).

Teorem 2.2.1. (M,ξ,η,g), $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. M 'nin bir hemen hemen Kenmotsu manifold olması için gerekli ve yeterli koşul

$$(\nabla_X\varphi)Y=-g(\varphi X+hX,Y)\xi-\eta(Y)(\varphi X+hX)$$

olmasıdır (1972 Kenmotsu).

Teorem 2.2.2. (M,ξ,η,g), $(2n+1)$ -boyutlu bir hemen hemen Kenmotsu manifold olsun. O halde

$$\nabla_X\xi=-\varphi^2X-\varphi hX$$

dır (1972 Kenmotsu).

Tanım 2.2.5. (M,g) n -boyutlu bir Riemann manifoldu ve $x_1,...,x_n$ M 'nin lokal koordinatları olsun. $w=\sqrt{|g|}dx_1\wedge dx_2\wedge...\wedge dx_n$ ve $g(x)>0$ ise w ye M üzerindeki bir hacim form denir. Burada dx_i , M üzerindeki kotanjant uzayda 1-formlar ve $|g|$ M üzerinde metrik tensörün determinantıdır (Spivak 1965).

Tanım 2.2.6. (M,g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. M üzerinde bir hacim form mevcut ise M 'ye yönlendirilebilirdir denir (Gallot, Hulin, Lafontaine 2004).

Sonuç 2.2.2. Φ temel 2-formu ters simetrik ve Tanım 2.2.3. yardımıyla $\eta \wedge \Phi^n \neq 0$ dır. Böylece Tanım 2.2.5. gereğince (M,φ,ξ,η,g) hemen hemen değme metrik manifoldu yönlendirilebilirdir (Chinea, Gonzalez 1990).

Tanım 2.2.7. M, n-boyutlu bir C^∞ manifold olsun. Eğer w 1-form ise, keyfi X,Y vektör alanları için,

$$2dw(X,Y) = X(w(Y)) - Y(w(X)) - w([X,Y])$$

dır. Eğer w, 2 -form ise,

$$3dw(X,Y,Z) = X(w(Y,Z)) + Y(w(Z,X)) + Z(w(X,Y))$$
$$- w([X,Y],Z) - w([Y,Z],X) - w([Z,X],Y)$$

dır (Yano ve Kon 1984).

Önerme 2.2.1. (M,φ,ξ,η,g), $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifold ve ∇ bir Riemann konneksiyonu olsun. Keyfi X,Y,Z vektör alanları için,

(i) $(\nabla_X \Phi)(Y,Z) = g(Y,(\nabla_X \varphi)Z)$,

(ii) $(\nabla_X \Phi)(Y,Z) + (\nabla_X \Phi)(\varphi Y,\varphi Z) = \eta(Z)(\nabla_X \eta)\varphi Y - \eta(Y)(\nabla_X \eta)\varphi Z$,

(iii) $(\nabla_X \eta)Y = g(Y,\nabla_X \xi) = (\nabla_X \Phi)(\xi,\varphi Y)$,

(iv) $2d\eta(X,Y) = (\nabla_X \eta)Y - (\nabla_Y \eta)X$,

(v) $3d\Phi(X,Y,Z) = \underset{X,Y,Z}{\oplus} (\nabla_X \Phi)(Y,Z)$

eşitlikleri geçerlidir. Burada $\underset{X,Y,Z}{\oplus}$, X,Y,Z vektör alanları üzerinden alınan devirli toplam göstermektedir.

Ayrıca, $\{X_i, \varphi X_i, \xi\}$ $i=1,2,...,n$ olmak üzere, M 'nin açık bir alt cümlesi üzerinde tanımlanan bir lokal ortonormal baz olsun. O zaman, δ operatörü

$$\delta n = -\sum_{i=1}^{n} \{(\nabla_{X_i}\eta)X_i + (\nabla_{\varphi X_i}\eta)\varphi X_i\}$$

şeklinde elde edilir (Gonzalez 1990).

Tanım 2.2.8. M, n-boyutlu bir reel differensiyellenebilir manifold olsun. Eğer M 'nin her p noktası için $J^2 = -I$ olacak şekilde T_pM tanjant uzayının bir J endomorfizması mevcut ise, o zaman M üzerindeki J tensör alanına bir hemen hemen kompleks yapı adı verilir. Bir J hemen hemen kompleks yapısı ile verilen manifoldda bir hemen hemen kompleks manifold denir (Yano ve Kon 1984).

M üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı (φ, ξ, η, g) ile verilsin. O zaman, $M \times \Re$ üzerinde herhangi bir vektör alanı

$$\left(X, f\frac{d}{dt}\right)$$

şeklinde tanımlanır. Burada X, M manifolduna teğet bir vektör alan; t, $\Re$ nin bir koordinatı ve f, $M \times \Re$ üzerinde bir C^∞ fonksiyondur.

M üzerinde (φ, ξ, η, g) bir hemen hemen değme metrik yapı olsun. Böylece $M \times \Re$ üzerindeki bir hemen hemen kompleks yapı

$$J\left(X, f\frac{d}{dt}\right) = \left(\varphi X - f\xi, \eta(X)\frac{d}{dt}\right)$$

biçiminde tanımlanır. Kolayca $J^2 = -I$ elde edilir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.9. M, n-boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere, M üzerinde $(1,1)$-tipli bir tensör alanı φ olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$N_\varphi(X,Y) = \varphi^2[X,Y] + [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y]$$

şeklinde tanımlı N_φ tensör alana φ tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörü denir (Yano ve Kon 1984).

J, M üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı olsun. Tanım 2.2.8 yardımıyla M üzerinde J tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörü

$$N_J(X,Y)=J^2[X,Y]+[JX,JY]-J[JX,Y]-J[X,JY]$$

$$=-[X,Y]+[JX,JY]-J[JX,Y]-J[X,JY]$$

şeklindedir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.10. (M,J) $2n$-boyutlu hemen hemen kompleks manifold olsun. O zaman, $N_J=0$ ise J dönüşümüne integrallenebilirdir denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.11. M, $2n$-boyutlu bir manifold olmak üzere, eğer $M\times\Re$ üzerindeki bir J hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir ise (φ,ξ,η) hemen hemen değme yapısına normaldir denir (Yano ve Kon 1984).

Önerme 2.2.2. $(2n+1)$-boyutlu M, üzerinde (φ,ξ,η) hemen hemen değme yapısının normal olması için gerek ve yeter koşul

$$N_\varphi+2d\eta\otimes\xi=0$$

eşitliğinin sağlamasıdır. Burada N_φ, φ tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörüdür (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.12. (M,J) $2n$-boyutlu bir hemen hemen kompleks manifold olsun. M üzerinde $\forall X,Y\in\chi(M)$ için,

$$g(JX,JY)=g(X,Y)$$

şeklinde verilen g Riemann metriğine Hermit metriği denir. Hermit metriği ile verilen bir hemen hemen kompleks manifolda bir hemen hemen Hermit manifoldu denir. Hermit metriği ile verilen kompleks manifolda ise Hermit manifoldu denir (Blair 2002).

Tanım 2.2.13. (M,J,g) $2n$-boyutlu bir hemen hemen Hermit manifoldu olsun. Her X,Y vektör alanları için,

$$\Omega(X,Y)=g(X,JY)$$

eşitliği ile tanımlanan Ω 2-formuna hemen hemen Hermit yapısının temel 2-formu denir. Eğer $d\Omega=0$ ise (J,g) yapısına hemen hemen Kaehler yapı denir. Bu yapı ile elde edilen manifolda ise hemen hemen Kaehler manifoldu denir. Bir Kaehler yapı ile verilen kompleks manifolda Kaehler manifoldu denir. Bir Hermit manifoldunun bir Kaehler manifold olması için gerekli ve yeterli koşul $\nabla J=0$ eşitliğinin sağlamasıdır (Blair 2002).

Örnek 2.2.1. E^4 Kaehler manifoldunun 3-boyutlu bir reel hiperküresi S^3 olsun. E^4 de S^3 bir birim normali C olmak üzere E^4 ün hemen hemen kompleks tensör alanı J

$$J\ :\ E^4\to E^4$$

$$JC=-\xi$$

biçiminde tanımlansın. O zaman ξ , S^3 üzerinde bir birim vektör alanı olur. Yani $\xi\in\chi\left(S^3\right)$ dir. S^3'e teğet her bir X vektör alanı için $\eta(X)=g(X,\xi)$ olmak üzere η $1-$formu iyi tanımlıdır. Üstelik $\eta(\xi)=1$ dir. Diğer yandan,

$$JX=\phi X+\eta(X)C$$

eşitliği ile ϕ lineer dönüşümü tanımlansın. Buna göre $\forall p=(p_1,p_2,p_3,p_4)\in S^3$ için;

$$J=\begin{bmatrix}0 & -I_2\\ I_2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$

yapısı yardımı ile;

$$J(C(p))=J(p_1,p_2,p_3,p_4)=(-p_3,-p_4,\ p_1,p_2)=-\xi$$

elde edilir. Burada;

$$\xi = \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

dir.

Şimdi $g(X,\xi)\xi$ için;

$$g(X,\xi)\xi = < \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

olduğundan,

$$g(X,\xi)\xi = (x_1 p_3 + x_2 p_4 - x_3 p_1 - x_4 p_2) \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece;

$$\lambda = (x_1 p_3 + x_2 p_4 - x_3 p_1 - x_4 p_2)$$

olmak üzere;

$$g(X,\xi) = \lambda\xi$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca,

$$\phi(\phi X) = J(\phi X) - \eta(\phi X)C$$

$$\phi(\phi X) = J(JX - \eta(X)C) - \eta(JX - \eta(X)C)C$$

$$= J(\begin{bmatrix} -x_3 \\ -x_4 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}) - g(JX - \eta(X)C, \xi)C$$

$$= \begin{bmatrix} -x_1 + \lambda p_3 \\ -x_2 + \lambda p_4 \\ -x_3 - \lambda p_1 \\ -x_4 - \lambda p_2 \end{bmatrix} - < \begin{bmatrix} -x_3 - \lambda p_1 \\ -x_4 - \lambda p_2 \\ -x_1 - \lambda p_3 \\ -x_2 - \lambda p_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \\ -x_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\lambda p_3 - \left[(x_3 - \lambda p_1)p_3 + (x_4 - \lambda p_2)p_4 + (x_1 + \lambda p_3)p_1 + (x_2 + \lambda p_4)p_2\right]p_1 \\ -\lambda p_4 - \left[(x_3 - \lambda p_1)p_3 + (x_4 - \lambda p_2)p_4 + (x_1 + \lambda p_3)p_1 + (x_2 + \lambda p_4)p_2\right]p_2 \\ -\lambda p_1 - \left[(x_3 - \lambda p_1)p_3 + (x_4 - \lambda p_2)p_4 + (x_1 + \lambda p_3)p_1 + (x_2 + \lambda p_4)p_2\right]p_3 \\ -\lambda p_2 - \left[(x_3 - \lambda p_1)p_3 + (x_4 - \lambda p_2)p_4 + (x_1 + \lambda p_3)p_1 + (x_2 + \lambda p_4)p_2\right]p_4 \end{bmatrix}$$

dir. O zaman

$$\phi(\phi X) = -\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi$$

elde edilir. Bununla birlikte,

$$\phi\xi = J\xi - \eta(\xi)C$$

olduğundan,

$$\phi\xi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = 0$$

bulunur. Böylece;

$$\eta(\phi X) = g(\phi X, \xi)$$

$$= g(JX - \eta(X)C, \xi) = 0$$

olduğu da açıkça görülür.

Sonuç olarak (ϕ, ξ, η, g) yapısı S^3 üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı oluşturur (Blair 2002).

2.3. ÇATILI MANİFOLDLAR

Tanım 2.3.1. M , $(2n+s)$-boyutlu bir manifold olsun. M 'nin tanjant demeti TM olmak üzere, TM üzerinde

$$\varphi^3 + \varphi = 0$$

ve

$$rank\varphi = 2n$$

şartını sağlayan $(1,1)$ tipindeki φ tensör alanına f -yapı denir (Yano ve Kon, 1984). $s = 0$ ise f -yapı bir hemen hemen kompleks yapı eğer $s = 1$ ise f -yapı hemen hemen değme yapıdır.

$$i) P = -\varphi^2 \qquad ii) Q = \varphi^2 + I \tag{2.7}$$

ile tanımlanan iki bütünleyen projeksiyon operatörlere karşılık $boyD = 2n$ ve $boyD^{\perp} = s$ olacak şekilde D ve $D^{\perp}$ bütünleyen dağılımları vardır.

Teorem 2.3.1. M , $(2n+s)$-boyutlu bir manifold olsun. φ, M üzerinde bir f -yapı, P ve Q yukarıda tanımlanan bütünleyen projeksiyonlar olmak üzere

$$i)\ \varphi P = P\varphi = \varphi \quad ii)\ \varphi Q = Q\varphi = 0 \quad iii)\ \varphi^2 P = -P \quad iv)\ \varphi^2 Q = 0 \tag{2.8}$$

eşitlikleri vardır (Ishihara ve Yano 1964).

(2.8) koşulunu sağlayan P ve Q projeksiyonları yardımı ile TM , biri $2n$ diğeri s boyutlu olan iki dağılımın toplamı olarak,

$$TM = D \oplus D^{\perp}, \quad D \cap D^{\perp} = \{0\} \tag{2.9}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $D = \operatorname{Im}\varphi$ ve $D^{\perp} = çek\varphi$ dir (Ishihara ve Yano 1964).

Tanım 2.3.2. M , $(2n+s)$-boyutlu bir manifold ve φ de M üzerinde bir f -yapı olsun. M üzerinde s -tane vektör alanı ξ_i ve s -tane η_i 1-formları olmak üzere

$$\varphi^2 = -I + \sum_{i=1}^{s} \eta_i \otimes \xi_i , \quad \eta_i(\xi_j) = \delta_i^{\,j} \tag{2.10}$$

olacak şekilde $(1,1)$ tipinde bir φ tensör alanı varsa M 'ye global çatılandırılan manifold ya da kısaca çatılı manifold denir ve $M(\varphi, \xi_i, \eta^i)$ şeklinde gösterilir (Goldberg ve Yano 1970).

Teorem 2.3.2. $M(\varphi, \xi_i, \eta^i)$ çatılandırılan manifold olsun. Bu durumda

$$i)\ \varphi\xi_i = 0 \quad ii)\ \eta_i \circ \varphi = 0, \quad iii)\ rank\varphi = 2n \tag{2.11}$$

dir (Goldberg ve Yano 1970).

Goldberg ve Yano global çatılandırılan manifoldu $f.pk$ -manifold olarak isimlendirmişlerdir. Bu tanıma denk olarak yaptıkları $f.pk$ -manifold tanımı verilecektir.

Tanım 2.3.3., M, $(2n+s)$-boyutlu bir manifold ve φ de M üzerinde bir f -yapı olsun. Eğer $çek\varphi$ paralelleştirilebilirse (yani $1 \le i \le s$ için ξ_i ler paralel ise) M' ye çekirdeği paralelleştirilebilen bir f -manifold veya kısaca $f.pk$ -manifold denir (Goldberg ve Yano 1970).

Tanım 2.3.4. $M(\varphi, \xi_i, \eta^i)$**,** $(2n+s)$-boyutlu bir çatılandırılan manifold olsun.

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X,Y) - \sum_{i=1}^{s} \eta_i(X)\eta_i(Y) \tag{2.12}$$

$$\eta_i(X)=g(X,\xi_i) \tag{2.13}$$

olacak şekilde bir g Riemann metriği varsa $M(\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ ye bir çatılandırılan metrik manifold veya kısaca metrik $f.pk$ -manifold denir (Ishihara ve Yano 1964).

Sonuç 2.3.1. $M(\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ çatılandırılan metrik manifold olsun. Bu durumda

$$g(\varphi X,Y)=-g(X,\varphi Y) \tag{2.14}$$

dir (Ishihara ve Yano 1964).

Tanım 2.3.5. $M(\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ bir çatılandırılan metrik manifold olsun. $\forall X,Y\in\chi(M)$ için,

$$\Phi(X,Y)=g(X,\varphi Y)$$

ise Φ ye $M(\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ çatılandırılan metrik manifold üzerinde temel 2 -formu denir (Yano ve Kon 1984).

2.4. ÇATILI MANİFOLDLARIN TORSİYON TENSÖRÜ

$M(\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$, $(2n+s)$ -boyutlu bir çatılandırılan metrik manifold olsun. $M\times R^s$, $(2n+s)$-boyutlu bir çarpım manifoldudur. R^s üzerindeki vektör alanları

$$\chi(R^s)=\left\{\sum_{i=1}^{s} f_i\frac{\partial}{\partial t_i} : f_i\in C^\infty(R^s,R),\, 1\le i\le s\right\} \tag{2.15}$$

şeklindedir.

$\left(X, f_1\frac{\partial}{\partial t_1},..., f_s\frac{\partial}{\partial t_{s1}}\right)$ ile $M\times R^s$ deki vektör alanları gösterilmektedir. Burada X , M^{2n+s} de bir vektör alanı, $(t_1,..., t_s)$ ile R^s de koordinat sistemi, $f_i\in C^\infty(R^s,R)$ dir. Ayrıca $M\times R^s$ üzerinde hemen hemen kompleks yapı J 'yi

$J:\chi(M\times R^s)\times\chi(M\times R^s)$

$$\left(X,\sum_{i=1}^{s} f_i \frac{\partial}{\partial t_i}\right) \to J\left(X,\sum_{i=1}^{s} f_i \frac{\partial}{\partial t_i}\right) = \left(\varphi X - \sum_{i=1}^{s} f_i \xi_i, \sum_{i=1}^{s} \eta_i(X) \frac{\partial}{\partial t_i}\right)$$

olarak tanımlanır (Sağbaş 2010).

Lemma 2.4.1. J dönüşümü lineerdir ve $J^2 = -I$ dır (Sağbaş 2010).

Lemma 2.4.2. $M(\varphi, \xi_i, \eta^i, g)$, $(2n+s)$-boyutlu bir çatılandırılan metrik manifold olsun. Bu durumda $(M \times R^s, J)$ bir hemen hemen kompleks manifolddur (Sağbaş 2010).

Tanım 2.4.1. $M(\varphi, \xi_i, \eta^i, g)$, $(2n+s)$-boyutlu bir çatılandırılan metrik manifold ve $(M \times R^s, J)$ bir hemen hemen kompleks manifold olsun. Hemen hemen kompleks yapı J nin Nijenhuis tensörü;

$$\begin{aligned} N_J\left(\left(X,\sum_{i=1}^{s} f_i \frac{\partial}{\partial t_i}\right),\left(Y,\sum_{i=1}^{s} g_i \frac{\partial}{\partial t_i}\right)\right) = {} & J^2\left(\left(X,\sum_{i=1}^{s} f_i \frac{\partial}{\partial t_i}\right),\left(Y,\sum_{i=1}^{s} g_i \frac{\partial}{\partial t_i}\right)\right) \\ & + \left(J\left(X,\sum_{i=1}^{s} f_i \frac{\partial}{\partial t_i}\right),J\left(Y,\sum_{i=1}^{s} g_i \frac{\partial}{\partial t_i}\right)\right) \\ & - J\left(J\left(X,\sum_{i=1}^{s} f_i \frac{\partial}{\partial t_i}\right),\left(Y,\sum_{i=1}^{s} g_i \frac{\partial}{\partial t_i}\right)\right) \\ & - J\left(\left(X,\sum_{i=1}^{s} f_i \frac{\partial}{\partial t_i}\right),J\left(Y,\sum_{i=1}^{s} g_i \frac{\partial}{\partial t_i}\right)\right) \end{aligned}$$

dir (Sağbaş 2010).

Tanım 2.4.2. $(M \times R^s, J)$ bir hemen hemen kompleks manifold olsun. $M \times R^s$ üzerinde

$$[,]: \chi(M \times R^s) \times \chi(M \times R^s) \to \chi(M \times R^s)$$

olmak üzere

$$\left[\left(X,\sum_{i=1}^{s} f_i \frac{\partial}{\partial t_i}\right),\left(Y,\sum_{i=1}^{s} g_i \frac{\partial}{\partial t_i}\right)\right] = \left([X,Y],\sum_{i=1}^{s}\left(X(g_i) - Y(f_i)\right)\frac{\partial}{\partial t_i}\right) \quad (2.16)$$

şeklinde tanımlanan operatöre braklet operatörü denir (Sağbaş 2010).

Lemma 2.4.3. $(M \times R^s, J)$ bir hemen hemen kompleks manifold ve J hemen hemen kompleks yapının Nijenhuis torsiyon N_J olmak üzere

$$N_J((X,0,...,0),(Y,0,...,0)) = \left\{ N^{(1)}(X,Y), N^{(2)}(X,Y)\frac{\partial}{\partial t_i} \right\}$$

ve

$$N_J((X,0,...,0),(0,0,...,0)) = \{N^{(3)}(X), N^{(4)}(X)\}$$

dir. Burada

$$N^{(1)}(X,Y) = [\varphi,\varphi](X,Y) + 2\sum_{i=1}^{s} d\eta_i(X,Y)\xi_i$$

$$N^{(2)}(X,Y) = (L_{\varphi X}\eta_i)Y - (L_{\varphi Y}\eta_i)X$$

$$N^{(3)}(X) = (L_{\xi_i}\varphi)X$$

$$N^{(4)}(X) = (L_{\xi_i}\eta_i)X$$

dir (Sağbaş 2010).

Tanım 2.4.3. $M(\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$**,** bir çatılandırılan metrik manifold ve $(M \times R^s, J)$ hemen hemen kompleks manifold olsun. J 'nin Nijenhuis tensör alanı $N_J = 0$ ise $M(\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ çatılandırılan metrik manifolduna normaldir denir (Yano ve Kon 1984).

Teorem 2.4.1. $M(\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$**,** bir çatılandırılan metrik manifold olsun. Bu yapının normal olabilmesi için gerek ve yeter koşul $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, $N^{(3)}$ ve $N^{(4)}$ tensörlerinin sıfır olmasıdır (Sağbaş 2010).

Teorem 2.4.2. $M(\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$**,** bir çatılandırılan metrik manifold olsun. Eğer $N^{(1)} = 0$ ise $N^{(2)} = N^{(3)} = N^{(4)} = 0$ dır (Sağbaş 2010).

Teorem 2.4.3. $M\left(\varphi,\xi_i,\eta^i,g\right)$, bir çatılandırılan metrik manifold olsun. $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$2g\left((\nabla_X\varphi)Y,Z\right)=3d\Phi\left(X,\varphi Y,\varphi Z\right)-3d\Phi\left(X,Y,Z\right)+g\left(N^{(1)}(Y,Z),\varphi X\right)$$

$$+\sum_{i=1}^{s}\left\{N^{(2)}(Y,Z)\eta_i(X)+2d\eta_i(\varphi Y,X)\eta_i(Z)-2d\eta_i(\varphi Z,X)\eta_i(Y)\right\}$$

dir (Sağbaş 2010).

Teorem 2.4.4. $M\left(\varphi,\xi_i,\eta^i,g\right)$, $(2n+s)$-boyutlu bir f -manifold olsun. $M\left(\varphi,\xi_i,\eta^i,g\right)$ normal ise aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

i) $L_{\xi_i}\eta_i=0$

ii) $L_{\xi_i}\varphi=0$

iii) $d\eta_i(X,\varphi Y)=-d\eta_i(\varphi X,Y)$

iv) $\nabla_{\xi_i}\xi_j\in D$

dir (Yano ve Kon 1984).

2.5. HEMEN HEMEN KENMOTSU f -MANİFOLDLAR

Bu kısımda öncelikle hemen hemen Kenmotsu f -yapılar tanıtılarak, gerekli literatür bilgisi verilmiştir. Bundan sonraki kısımlarda $\bar{\xi}:=\xi_1+...+\xi_s$, $\bar{\eta}:=\eta_1+...+\eta_s$ ve $\bar{\delta}:=\delta_i^1+...+\delta_i^s$ alınacaktır.

Tanım 2.5.1. $M\left(\varphi,\xi_i,\eta^i,g\right)$, $(2n+s)$-boyutlu bir metrik f -manifold olsun. $(1\leq i\leq s)$ olmak üzere her η^i 1-formları ve Φ formu için eğer η^i 1-formları kapalı yani $d\eta^i=0$ ve $d\Phi=2\bar{\eta}\wedge\Phi$ eşitlikleri sağlanıyorsa M 'ye hemen hemen Kenmotsu f -manifold denir (Öztürk H. 2009).

M bir hemen hemen Kenmotsu f -manifold olsun. D dağılımı integrallenebilir olduğundan herhangi bir $X\in\Gamma(\mathrm{D})$ için $L_{\xi_i}\eta^j=0,\ [\xi_i,\xi_j]\in D$ ve $[X,\xi_i]\in D$ olur. ∇ Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere, her $X,Y,Z\in\Gamma(TM)$ için

$$2g\left(\left(\nabla_X\varphi\right)Y,Z\right)=2\left(\sum_{j=1}^{s}\left(g\left(\varphi X,Y\right)\xi_j-\eta^j\left(Y\right)\varphi X,Z\right)\right)+g\left(N\left(Y,Z\right),\varphi X\right) \tag{2.17}$$

özelliği sağlanır. Bu denklemde X yerine ξ_i alırsak $\nabla_{\xi_i}\varphi=0$ elde edilir. Bu ise $\nabla_{\xi_i}\xi_j\in D^{\perp}$ olduğunu vurgular. $\left[\xi_i,\xi_j\right]=0$ olduğundan $\nabla_{\xi_i}\xi_j=\nabla_{\xi_j}\xi_i$ bulunur. L, Lie türev operatörünü göstermek üzere $A_iX=-\nabla_X\xi_i$ ve $h_i=\frac{1}{2}\left(L_{\xi_i}\varphi\right)$ operatörleri tanımlansın.

Önerme 2.5.1. Her $i\in\{1,...,s\}$ için A_i tensor alanı simetrik bir operatordür ve aşağıdaki özellikleri sağlar (Öztürk H. 2009).

i) Her $i\in\{1,...,s\}$ için $A_i\left(\xi_j\right)=0$ dır.

ii) $A_i\circ\varphi+\varphi\circ A_i=-2\varphi.$

iii) $tr\left(A_i\right)=-2n.$

Önerme 2.5.2. Her $i\in\{1,...,s\}$ için h_i tensör alanı simetrik bir operatördür ve aşağıdaki özellikleri sağlar.

i) Her $j\in\{1,...,s\}$ için $h_i\xi_j=0$ dir.

ii) $h_i\circ\varphi+\varphi\circ h_i=0.$

iii) $izh_i=0.$

iv) $iz\varphi h_i=0.$

(Blair 1970).

Önerme 2.5.3. $\nabla\varphi$ operatörü,

$$\left(\nabla_X\varphi\right)Y+\left(\nabla_{\varphi X}\varphi\right)\varphi Y=-\sum_{i=1}^{s}\left[\eta^i\left(Y\right)\varphi X+2g\left(X,\varphi Y\right)\xi_i+\eta^i\left(Y\right)h_iX\right] \tag{2.18}$$

bağıntısını sağlar (Öztürk H. 2009).

Önerme 2.5.4. $\left(M,\xi_i,\eta^j,g\right)$, $\left(2n+s\right)$-boyutlu bir hemen hemen Kenmotsu f-manifold olsun. O zaman, her $i\in\{1,...,s\}$

$$h_i = 0 \Leftrightarrow \nabla \xi_i = 0$$

eşitliği sağlanır (Pastore ve Dileo 2007) (Kim ve Pak 2005).

Tanım 2.5.2. M^n bir C^∞ manifold olsun. Keyfi bir $p \in M^n$ noktası için $T_p M^n$ nin $r-$ boyutlu altuzayı $(r \leq n)$ nin bir koleksiyonu $D = \{D_p\}$ olmak üzere, p noktasını ihtiva eden M^n nin bir U açık altcümlesi üzerinde C^∞ sınıfından lineer bağımsız $\{X_1, \ldots, X_r\}$ vektör alanları U nun her $q \in M^n$ noktasında hala D_p nin bir bazı oluyorsa D ye M^n üzerinde bir $r-$boyutlu dağılım ve $\{X_1, \ldots, X_r\}$ cümlesine U üzerinde D için bir lokal baz denir (Sharpe 1997).

Tanım 2.5.3. M^n bir C^∞ manifold ve M^n nin bir $r-$boyutlu dağılmı D olsun. M^n nin bir haritası $x = (x_1, x_2 \ldots, x_n)$ olmak üzere, $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_r}\right\}$ cümlesi D dağılımı için bir baz oluşturuyorsa x haritasına D dağılımına göre düzlemseldir denir. Eğer M^n nin her noktasında tanımlı olan D dağılmı için bir düzlemsel harita bulunabiliyorsa D dağılımına integrallenebilirdir denir (Sharpe 1997).

Tanım 2.5.4. M^n bir C^∞ manifold, M^n nin $r-$boyutlu bağlantılı alt manifoldu N ve M^n nin bir $r-$ boyutlu dağlımı D olsun. Her $p \in N$ için, $D_p = T_p N$ ise N'ye M^n' nin $r-$boyutlu integral alt manifoldu denir (Sharpe 1997).

Önerme 2.5.5. M^n bir C^∞ manifold ve w M^n üzerinde C^∞ bir $1-$form olsun. M^n' nin her $p \in M^n$ noktası için $n = boy(\ker w_p) = r$ sabit ise $\ker w_p$ M^n üzerinde bir $r-$ boyutlu dağlımdır (Sharpe 1997).

Teorem 2.5.1. (Frobenius Teoremi) M^n bir C^∞ manifold ve M^n nin bir $r-$boyutlu dağılımı D olsun. D dağılımının integrallenebilmesi için gerek ve yeter koşul her $X, Y \in D$ için $[X, Y] \in D$ olmasıdır (Sharpe 1997).

Önerme 2.5.6. M^n bir C^∞ manifold, w M^n üzerinde C^∞ bir $1-$form ve her $p \in M^n$ noktası için $n = boy(\ker w_p) = r$ sabit olsun. Böylece $D = \{\ker w_p : p \in M\}$ dağılımının integrallenebilmesi için gerek ve yeter koşul her $X, Y \in \ker w$ için $dw(X, Y) = 0$ olmasıdır (Sharpe 1997).

2.6. HEMEN HEMEN $f-$ KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLAR

Bu kısımda hemen hemen $f-$kosimplektik yapılar tanıtılıp, gerekli literatür bilgisi verilmiştir.

Tanım 2.6.1. (M,φ,ξ,η,g), $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. Herhangi vektör alanları ve $f\in R_n(M)$ için, M^{2n+1} üzerinde,

$$d\eta=0,\ d\phi=2f\eta\wedge\varphi$$

eşitlikleri sağlanıyorsa M^{2n+1}'ye hemen hemen $f-$kosimplektik manifold denir. Özel olarak, $f=0$ için hemen hemen kosimplektik, $f\neq 0$ için hemen hemen Kenmotsu manifoldu elde edilir (Aktan, Yıldırım ve Murathan 2013).

Yardımcı Teorem 2.6.1. M^{2n+1} manifoldunun bir (φ,ξ,η,g) hemen hemen değme metrik yapısı için,

$$\begin{aligned}2g((\nabla_X\varphi)Y,Z)&=3d\Phi(X,\varphi Y,\varphi Z)-3d\Phi(X,Y,Z)\\&\quad+g(N^{(1)}(Y,Z),\varphi X)+N^{(2)}(Y,Z)\eta(X)\\&\quad+2d\eta(\varphi Y,X)\eta(Z)-2d\eta(\varphi Z,X)\eta(Y)\end{aligned}$$

dir. Burada;

$$\begin{aligned}N^{(1)}(X,Y)&=N_\varphi(X,Y)+2d\eta(X,Y)\xi\\N^{(2)}(X,Y)&=(L_{\varphi X}\eta)Y-(L_{\varphi Y}\eta)X\end{aligned}$$

dir (Blair 2002).

Önerme 2.6.1. $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ bir hemen hemen $f-$kosimplektik manifold olsun. O zaman, her X, Y vektör alanları için,

$$hX=\frac{1}{2}(L_\xi\varphi)X,\quad h(\xi)=0$$

$$\nabla_\xi\xi=0,\ \nabla_\xi\varphi=\varphi$$

$$(\varphi\circ h)X+(h\circ\varphi)X=0$$

$$iz(h)=0$$

$$h = 0 \Leftrightarrow \nabla\xi = -f\varphi^2$$

eşitlikleri sağlanır (Pastore ve Dileo 2007) (Kim ve Pak 2005).

Önerme 2.6.2. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen $f-$kosimplektik manifold olsun. O zaman, her X, Y vektör alanları için

$$\nabla_X \xi = -f\varphi^2 X - \varphi hX$$

$$(\nabla_X \eta)Y = f[g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)] + g(\varphi Y, hX)$$

$$h = 0 \Leftrightarrow \nabla\xi = -f\varphi^2$$

eşitlikleri sağlanır (Pastore ve Dileo 2007) (Kim ve Pak 2005).

Yardımcı Teorem 2.6.2. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen değme manifold olsun.

O zaman, her X vektör alanı için,

$$(\nabla_\xi h)\circ\varphi + \varphi\circ(\nabla_\xi h) = 0$$

eşitliği geçerlidir (Blair 2002).

Önerme 2.6.3. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen $f-$kosimplektik manifold olsun.

O zaman $\forall X, Y \in \chi(M)$ için Levi-Civita konneksiyonu

$$(\nabla_X \varphi)Y + (\nabla_{\varphi X}\varphi)\varphi Y = -f[\eta(Y)\varphi X + 2g(X,\varphi Y)\xi] - \eta(Y)hX$$

eşitliğini sağlar (Aktan, Yıldırım ve Murathan 2014).

Uyarı 2.6.1. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen $f-$kosimplektik manifold olsun. Her $p \in M^{2n+1}$ için,

$$D_p = \ker\eta_p = \{X \in T_pM : \eta(X_p) = 0\}$$

dir.

Önerme 2.6.4. Bir hemen hemen kosimplektik manifold bir hemen hemen Kaehler manifold ile R veya S^1'nin bir lokal aşikar çarpımı olması için gerek ve yeter koşul $h=0$ olmasıdır (Kim ve Pak 2007).

Teorem 2.6.1. $\left(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g\right)$, bir hemen hemen Kenmotsu manifoldu ve $h=0$ olsun. O zaman, M manifoldu $M^{'}\times_{f^2} N^{2n}$ olacak şekilde lokal bir katlı çarpımla ifade edilir. Burada N^{2n} bir hemen hemen Kaehler manifold, t koordinatı ile verilen açık aralık $M^{'}$ ve bazı c pozitif sabitleri için $f^2 = ce^{2t}$ dir (Pastore ve Dileo 2007).

Teorem 2.6.2. $\left(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g\right)$ bir hemen hemen $f-$kosimplektik manifold olsun. Bu durumda,

(1) D dağılımının integral altmanifoldu hemen hemen Kaehler yapıdadır,

(2) $f=0$ durumunda D dağılımının integral altmanifoldu total geodezik veya $f\neq 0$ durumunda D dağılımının integral altmanifoldunun total umbilik olması için gerek ve yeter koşul $f=0$ olmasıdır (Kim ve Pak 2005).

Önerme 2.6.5. $\left(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g\right)$ bir hemen hemen $f-$kosimplektik manifold olsun. O zaman, M^{2n+1}' nin $f-$kosimplektik manifold olması için gerek ve yeter koşul D dağılımının integral altmanifoldlarının Kaehler ve $h=0$ olmasıdır (Kim ve Pak 2005).

Önerme 2.6.6. $\left(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g\right)$, D değme dağılımının integral altmanifoldları Kaehler olacak şekilde bir hemen hemen $f-$kosimplektik manifold olsun. O zaman, M^{2n+1}'nin $f-$kosimplektik manifold olması için gerek ve yeter koşul $\nabla\xi=-f\phi^2$ olmasıdır (Aktan, Yıldırım ve Murathan).

Sonuç 2.6.1. $\left(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g\right)$ $3-$ boyutlu bir hemen hemen $f-$ kosimplektik manifoldu $\nabla\xi=-f\phi^2$ şartını sağlıyorsa bir $f-$kosimplektik manifolddur.

Uyarı 2.6.2. Yukarıda verilen sonuçlar (Pastore ve Dileo 2007) de $f=1$ durumu için elde edilmiştir.

Yardımcı Teorem 2.6.3. $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ bir hemen hemen $f-$kosimplektik manifold olsun. Üzerinde $(1,1)-$ tipli A ve h tensör alanları, sırasıyla $A=-\nabla\xi$ ve $h=\frac{1}{2}L_{\xi}\varphi h$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda, her X,Y vektör alanları için,

(i) A ve h simetriktir,

(ii) $A\varphi+\varphi A=-2f\varphi$,

(iii) $\eta\circ A=0,\eta\circ h=0$,

(iv) $h=A\circ\varphi+f\varphi$,

(v) $hA+Ah=-2fh$,

(vi) $izA=-2fn$,

(vii) $iz\varphi A=0$,

eşitlikleri sağlanır (Aktan, Yıldırım, Murathan 2014).

Önerme 2.6.7. Bir hemen hemen kosimplektik manifoldun D dağılımının integral altmanifoldlarının Kaehler yapıda olması için gerek ve yeter koşul her X,Y vektör alanları için,

$$(\nabla_X\varphi)Y=-g(\varphi AX,Y)\xi+\eta(Y)\varphi AX$$

dır. Burada her X vektör alanı için, $AX=\varphi hX$ olarak alınmıştır (Olszak ve Dacko 1998).

Önerme 2.6.8. Bir hemen hemen $f-$kosimplektik manifoldun D dağılımının integral altmanifoldlarının Kaehler yapıda olması için gerek ve yeter koşul her X,Y vektör alanları için,

$$(\nabla_X\varphi)Y=-g(\varphi AX,Y)\xi+\eta(Y)\varphi AX$$

dır. Burada her X vektör alanı için, $AX=f\varphi^2X+\varphi hX$ dır (Aktan, Yıldırım ve Murathan 2014).

Önerme 2.6.9. $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$, bir hemen hemen $f-$kosimplektik manifold olsun. O zaman, M^{2n+1} üzerinde herhangi vektör alanları X,Y için,

$$R(X,Y)\xi=[\xi(f)+f^2][\eta(X)Y-\eta(Y)X]-f[\eta(X)\varphi hY-\eta(Y)\varphi hX]$$

$$+\left(\nabla_Y \varphi h\right)X-\left(\nabla_X \varphi h\right)Y$$

$$=\left(\nabla_Y A\right)X-\left(\nabla_X A\right)Y$$

eşitliği sağlanır (Aktan, Yıldırım ve Murathan 2014).

Önerme 2.6.10. $\left(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g\right)$, bir hemen hemen $f-$kosimplektik manifold olsun. Bu durumda (Aktan, Yıldırım, Murathan 2014) ,

$$R(X,\xi)\xi=\left[\xi(f)+f^2\right]\varphi^2X+2f\varphi hX-h^2X+\varphi\left(\nabla_\xi h\right)X$$

$$\left(\nabla_\xi h\right)X=-\varphi R(X,\xi)\xi-\left[\xi(f)+f^2\right]\varphi X-2fhX-\varphi h^2X$$

$$R(X,\xi)\xi-\varphi R(\varphi X,\xi)\xi=\left[\left[\xi(f)+f^2\right]\varphi^2X-h^2X\right]$$

$$S(X,\xi)=-2n\left[\xi(f)+f^2\right]\eta(X)-iz(\varphi h)$$

$$S(\xi,\xi)=-\left(2n\left[\xi(f)+f^2\right]-iz(h^2)\right)$$

3.BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu kısımda öncelikle global çatılı hemen hemen $f-$kosimplektik manifoldlar tanıtılarak daha sonra bu tür manifoldların temel eğrilik özellikleri ve buna bağlı geometrik yapıları incelenmiştir.

3.1.GLOBAL ÇATILI HEMEN HEMEN $f-$KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLAR

Tanım 3.1.1. $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$, bir global çatılı manifoldu hemen hemen $f-$yapı olsun. $\forall X,Y\in\Gamma(TM)$ ve $f\in R_n(M)$ için

$$d\eta^i=0, d\Omega=2f\overline{\eta}\wedge\Omega$$

koşulları sağlanıyor ise M'ye global çatılı hemen hemen $f-$kosimplektik manifold denir. Burada $df\wedge\eta^i=0$ dır.

M , global çatılı hemen hemen $f-$ kosimplektik manifold olsun. D dağılımı integrallenebilir olduğundan herhangi bir $X\in\Gamma(D)$ için $L_{\xi_i}\eta^i=0$, $[\xi_i,\xi_i]\in D$ ve $[X,\xi_i]\in D$ dir. Her $X,Y,Z\in\Gamma(TM)$ için Levi-Civita konneksiyonu,

$$2g((\nabla_X\varphi)Y,Z)=2fg\left(\sum_{j=1}^{s}\left(g(\varphi X,Y)\xi_i-\eta^j(Y)\varphi X\right),Z\right)+g(N(Y,Z),\varphi X) \tag{3.1}$$

ile verilir. $X=\xi_i$ alınırsa $\nabla_{\xi_i}\xi_j\in D^{\perp}$ olduğunu gösteren $\nabla_{\xi_i}\varphi=0$ eşitliğini ve $[\xi_i,\xi_j]=0$ olduğundan dolayı $\nabla_{\xi_i}\xi_j=\nabla_{\xi_j}\xi_i$ eşitliği elde edilir.

Burada $A_iX=-\nabla_X\xi_i$ ve $h_i=\frac{1}{2}(L_{\xi_i}\varphi)$ olarak ifade edildi, L, burada Lie türev operatörüdür.

Önerme 3.1.1. Her $i \in \{1,2,...,s\}$ için A_i tensör alanı simetrik olup

1) $\forall$ j$\in${1,…,s} için $A_i(\xi_j)=0$

2) $A_i \circ \varphi + \varphi \circ A_i = -2f\varphi$

3) $iz(A_i) = -2f\eta$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. $d\eta^i = 0$ olduğundan A_i'nin simetrik olduğu açıktır.

1) $\forall i, j, k \in \{1,2,...,s\}$ için $g(\xi_i, \xi_j) = \delta_i^j$ ve $\nabla_{\xi_i}\xi_j = \nabla_{\xi_j}\xi_i$ eşitlikleri kullananılarak $2g(\xi_k, A_i(\xi_j)) = 0$ elde edilir. $\nabla_{\xi_i}\xi_j \in D^{\perp}$ olduğundan $A_i(\xi_j) = 0$ dır.

2) $\forall Z \in \Gamma(TM)$ için $\varphi(N(\xi_i, Z)) = (L_{\xi_i}\varphi)Z$ dir. Öte yandan $\nabla_{\xi_i}\varphi = 0$ olduğundan,

$$L_{\xi_i}\varphi = A_i \circ \varphi - \varphi \circ A_i \tag{3.2}$$

dir. (3.2) eşitliginden kolaylıkla

$$-A_i X = -f\varphi^2 X - \varphi h_i X \tag{3.3}$$

elde edilir. $Y = \xi_i$ alınır ve (3.1) eşitliği uygulanırsa,

$$2g(\varphi A_i X, Z) = -2fg(\varphi X, Z) - g(\varphi N(\xi_i, Z)X)$$

elde edilir ki bu istenilen sonuçtur.

3) $\{X_1,...,X_n,\varphi X_1,...,\varphi X_n,\xi_1,...,\xi_s\}$ lokal ortonormal çatı göz önünde bulundurularak 1) ve 2) yardımıyla

$$iz(A_i) = \sum_{j=1}^{n} g(A_i X_j, X_j) + g(A_i \phi X_j, \varphi X_j) = -2f\sum_{j=1}^{n} g(\phi X_j, \varphi X_j) = -2fn$$

ifadesi elde edilir.

Önerme 3.1.2. $\nabla\varphi$ aşağıdaki eşitliği sağlar:

$$(\nabla_X \varphi)Y + (\nabla_{\varphi X}\varphi)\varphi Y = \sum_{i=1}^{s}\left[-f\left(\eta^i(Y)\varphi X + 2g(X,\varphi Y)\xi_i\right) - \eta^i(Y)h_i X\right]$$

İspat. Direkt hesaplamalarla,

$$\varphi N(X,Y) + N(\varphi X, Y) = 2\sum_{i=1}^{s}\eta^i(X)h_i Y$$

ve

$$\eta^i(N(\varphi X, Y)) = 0$$

elde edilir. Bu iki denklem ve (3.1) yardımı ile ispat tamamlanır.

Önerme 3.1.3. M bir global çatılı hemen hemen $f-$kosimplektik manifold olsun. D dağılımının integral altmanifoldları $H = -f\bar{\xi}$ ortalama eğriliğine sahip hemen hemen Kaehler manifoldlardır.

İspat. $\tilde{M}$, D dağılımının integral alt manifoldu olsun. $(D, J = \varphi_{|D}, J^2 = -I)$ yapısının hemen hemen kompleks dağılım ve indirgenmiş $\tilde{g}$ metriğinin $\tilde{M}$ üzerinde Hermitian metrik olduğu bilinmektedir. Bu nedenle $\forall X,Y \in \Gamma(\tilde{M})$ için, $\tilde{M}$ üzerinde indirgenmiş 2-form $\tilde{\Omega} = \tilde{g}(X, JY) = g(X,\varphi Y) = \Omega(X,Y)$ve $d\tilde{\Omega} = 0$ dir. Dolayısıyla $\tilde{M}$, hemen hemen Kaehler manifoldtur. Temel iki form B ve ξ_i yönündeki Weingarten operatörü A_i olmak üzere, Önerme 2.5.2 ve (3.3) ifadesi kullanılarak , $j \in \{1,2,....,s\}$ için

$$B(X,Y) = g(AX,Y)\xi_j = -fg(X,Y)\xi_j + g(\varphi h_j X, Y)\xi_j \tag{3.4}$$

yazılabilir. $T\tilde{M}$ 'de $\ell = 1,2,....,n$ için $e_{\ell+n} = \varphi e_1$ $e_{\ell+n} = \varphi e_1$ olacak şekilde ortonormal çatı $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ olarak alınsın. (3.4) ifadesinde $X = Y = e_p$ alır ve $p = 1,2,...,2n$ için toplama geçilir ise

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}(izA_i)\xi_i = -f\bar{\xi}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Önerme 3.1.4. M bir global çatılı hemen hemen $f-$kosimplektik manifold ve D dağılımının integral manifoldu $\widetilde{M}$ olsun. Bu durumda,

1) $f=0$ durumunda, $\widetilde{M}$ 'nin total geodezik olması için gerek ve yeter koşul tüm h_i operatörlerinin sıfır olmasıdır.
2) $f\neq 0$ durumunda, $\widetilde{M}$ 'nin total umbilik olması için gerek ve yeter koşul tüm h_i operatörlerinin sıfır olmasıdır.

İspat. (3.4)' ten ispat açıktır.

Önerme 3.1.5. Önerme 3.1.4 koşulları altında, (φ,ξ_i,η^i,g) yapısıyla verilen M manifoldunun global çatılı hemen hemen $f-$kosimplektik manifold olması için gerek ve yeter koşul D dağılımının integral manifoldlarının Kaehler ve tüm h_i operatörlerinin sıfır olmasıdır.

İspat. Eğer yapı normal ise $\forall X\in\Gamma(TM)$ için,

$$0=N(X,\xi_j)=N_\varphi(X,\xi_j)+2\sum_{i=1}^{s}d\eta^i(X,\xi_j)\xi_j \tag{3.5}$$

$$=-\varphi[\varphi X,\xi_j]+\varphi^2[X,\xi_j]+2\sum_{i=1}^{s}d\eta^i(X,\xi_j)\xi_i=2\varphi h_j X$$

elde edilir. Bundan dolayı tüm h_i operatörleri sıfırdır. Öte yandan, $\forall X,Y\in\Gamma(D)$ için,

$$N_\varphi(X,Y)=[\varphi X,\varphi Y]-\varphi[\varphi X,Y]-\varphi[X,\varphi Y]-[X,Y]=N_{J=\phi|D}(X,Y) \tag{3.6}$$

dir. Buradan açıkça görülür ki $N_J=0$ olması için gerek ve yeter koşul hemen hemen kompleks J yapısının integrallenebilir olmasıdır. Dolayısıyla, (3.5) ve (3.6) kullanılarak ispat tamamlanır.

Önerme 3.1.6. M , global çatılı hemen hemen $f-$kosimplektik manifold olsun. M'nin integral alt manifoldlarının Kaehler yapıda olması için gerek ve yeter koşul M üzerindeki $\forall X,Y$ vektör alanı için,

$$(\nabla_X\varphi)Y=\sum_{i=1}^{s}\left[-g(\varphi A_i X,Y)\xi_i+\eta^i(Y)\varphi A_i X\right] \tag{3.7}$$

olmasıdır.

İspat. (Pastore ve Falcitelli 2007) de Önerme 2.2 den ispat açıktır.

3.2. EĞRİLİK ÖZELLİKLERİ

Önerme 3.2.1. M bir global çatılı hemen hemen $f-$kosimplektik manifold olsun.

$$\begin{aligned} R(X,Y)\xi_i &= \left[\xi_i(f)+f^2\right]\sum_{k=1}^{s}\left[\eta^k(Y)\varphi^2X-\eta^k(X)\varphi^2Y\right] \\ &\quad - f\sum_{k=1}^{s}\left[\eta^k(X)\varphi h_kY-\eta^k(Y)\varphi h_kX\right] \\ &\quad +(\nabla_Y\varphi h_i)X-(\nabla_X\varphi h_i)Y \end{aligned} \tag{3.8}$$

dir.

İspat. Riemann eğrilik tensörü ve (3.3) kullanılarak (3.8) elde edilir.

Aşağıdaki önermenin ispatını basit hesaplamalarla (3.3) ve (3.8) kullanılarak elde edilir.

Önerme 3.2.2. (φ,ξ_i,η^i,g), $f-$yapılı global çatılı hemen hemen $f-$kosimplektik manifoldlar aşağıdaki eşitliklikleri sağlar.

$$R(X,\xi_j)\xi_i=\left[\xi_i(f)+f^2\right]\varphi^2X+f\varphi h_jX+f\varphi h_iX-h_ih_jX+\varphi\left(\nabla_{\xi_j}h_i\right)X \tag{3.9}$$

$$R(\xi_j,X)\xi_i-\varphi R(\xi_j,\varphi X)\xi_i=2\left[-\left[\xi_i(f)+f^2\right]\varphi^2X+h_ih_jX\right] \tag{3.10}$$

$$\left(\nabla_{\xi_j}h_i\right)X=-\varphi R(X,\xi_j)\xi_i-\left[\xi_i(f)+f^2\right]\varphi X-fh_jX-fh_iX-\varphi h_ih_jX \tag{3.11}$$

$$S(X,\xi_i)=-2n\left[\xi_i(f)+f^2\right]\eta(X)-(div\varphi h_i)X \tag{3.12}$$

$$S(\xi_i,\xi_j)=-2n\left[\xi_i(f)+f^2\right]-iz(h_jh_i) \tag{3.13}$$

Önerme 3.2.3.İntegral altmanifoldları Kaehler yapıya sahip global çatılı hemen hemen $f-$kosimplektik M manifoldu için,

$$\begin{aligned} R(X,Y)\varphi Z-\varphi R(X,Y)Z &= \sum_{i=1}^{s}\{g(AiX,\varphi Z)A_iY-g(A_iY,\varphi Z)A_iX \\ &\quad -g(AiX,Z)\varphi A_iY+g(A_iY,Z)\varphi A_iX \\ &\quad +\eta^i(Z)\varphi((\nabla_XA_i)Y-(\nabla_YAi)X) \\ &\quad +g((\nabla_XA_i)Y-(\nabla_YAi)X,\varphi Z)\xi_i\} \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \{ g(AiX, \varphi Z) A_i Y - g(A_i Y, \varphi Z) A_i X$$
$$- g(AiX, Z) \varphi A_i Y + g(A_i Y, Z) \varphi A_i X$$
$$- \eta^i (Z) \varphi(R(X,Y)\xi_i) - g(R(X,Y)\xi_i, \varphi Z)\xi_i \}$$

dir.

İspat. Riemann eğrilik tensörü ve (3.7) kullanılarak direkt hesaplamalarla ispat tamamlanır.

Sonuç. 3.2.1. M, global çatılı hemen hemen $f-$kosimplektik manifold olsun. Ricci tensörü aşağıdaki koşulları sağlar :

i) $f \neq 0$ durumunda $S(\xi_i, \xi_i)$ her zaman negatif değer alır.

ii) Tüm $S(\xi_i, \xi_i)$ değerleri sıfır ise D'nin her lifi total geodeziktir.

iii) Tüm $S(\xi_i, \xi_i)$ değerleri sıfır ve M normal ise M, bir abelyen M_2^s Lie grubu ve M_1^{2n} Kaehler manifoldunun lokal olarak çarpımıdır.

İspat. (3.13) ten ispat açıktır.

Değme metrik yapılar üzerinde τ tensörü alanı, keyfi X, Y vektör alanları için ,

$$g(\tau X, Y) = (L_\xi g)(X, Y)$$

şeklinde tanımlıdır(Chern,Hamilton 1985). Şimdi bir global çatılı hemen hemen $f-$kosimplektik manifold için bu tensör alanını tanımlanıp incelenecektir.

Önerme 3.2.4. $(\varphi, \xi_i, \eta^i, g)$ $f-$ yapısıyla verilen global çatılı hemen hemen $f-$kosimplektik M manifoldu,

$$\tau_i X = -2A_i X$$

şeklinde bir τ_i tensörüne sahiptir ki burada τ_i, M üzerinde keyfi X, Y vektör alanları için $g(\tau_i X, Y) = (L_{\xi_i} g)(X, Y)$ ile tanımlıdır.

İspat. τ_i tensör alanı tanımı kullanılarak,

$$(L_\xi g)(X, Y) = g(\nabla_X \xi_i, Y) + g(X, \nabla_Y \xi_i)$$

$$= 2g(-f\varphi^2 X - \varphi h_i X, Y)$$

elde edilir. (3.3) eşitliği uygulanarak ispat tamamlanır.

3.3.BAZI TENSÖR KOŞULLARI

M üzerindeki herhangi X vektör alanı için,

$$X = X^T + \sum_{i=1}^{s} \eta^i(X)\xi_i$$

dır. Burada X^T, X vektör alanının teğeti ve $\sum_{i=1}^{s} \eta^i(X)\xi_i$, X vektör alanının normalidir. Her $(1,1)$ tipli B tensör alanının $\eta-$ paralel olması için gerek ve yeter koşul her $X^\perp, Y^\perp, Z^\perp \in D$ için $g((\nabla_{X^\perp} B)Y^\perp, Z^\perp) = 0$ olmasıdır. Şimdi, global çatılı hemen hemen $f-$kosimplektik manifoldları üzerinde tanımlı h_i ve φh_i tensör alanlarının $\eta-$paralel olma koşulları incelenecektir.

Önerme 3.3.1. M global çatılı hemen hemen $f-$kosimplektik manifold olsun. Eğer h_i tensör alanları $\eta-$paralel ise M üzerindeki her X,Y vektör alanı için

$$\begin{aligned}(\nabla_X h_i)Y = &-\sum_{k=1}^{s} \eta^k(X)\left[\varphi l_{ki}Y + \left[\xi_i(f) + f^2\right]\varphi Y + \alpha h_k Y + \varphi h_i h_k Y + f h_i Y\right] \\ &-\sum_{k=1}^{s} \eta^k(Y)\left[f h_i X + \varphi h_i h_k X\right] - \sum_{k=1}^{s} g\left(f h_i X + \varphi h_i h_k X, Y\right)\xi_k\end{aligned} \tag{3.14}$$

dir. Burada $l_{ki} = R(.,\xi_k)\xi_i$ tensörü vektör alanlarına göre Jakobi operatörü ve h_i ’ler $(1,1)$-tipli tensör alanıdır.

İspat. Kabul edelim ki her bir h_i, $\eta-$paralel olsun. $i \in \{1,2,...,s\}$ için ξ_i ye ortogonal X ’in bileşenleri $X^\perp$ le gösterilirse, M üzerindeki her X,Y,Z vektör alanları için,

$$\begin{aligned}0 &= g\left((\nabla_{X^\perp} h_i)Y^\perp, Z^\perp\right) \\ &= g\left(\left(\nabla_{X-\sum_{k=1}^{s}\eta^k(X)\xi_k} h_i\right)\left(Y - \sum_{k=1}^{s}\eta^k(Y)\xi_k\right), Z - \sum_{k=1}^{s}\eta^k(Z)\xi_k\right) \\ &= g((\nabla_X h_i)Y, Z) - \sum_{k=1}^{s}\eta^k(X) g\left((\nabla_{\xi_k} h_i)Y, Z\right) - \sum_{k=1}^{s}\eta^k(Y) g\left((\nabla_X h_i)\xi_k, Z\right) \\ &\quad -\sum_{k=1}^{s}\eta^k(Z) g\left((\nabla_X h_i)Y, \xi_k\right)\end{aligned}$$

$$= g\left(\left(\nabla_X h_i\right)Y, -\varphi^2 Z\right) - \sum_{k=1}^{s}\eta^k(X)g\left(\left(\nabla_{\xi_k} h_i\right)Y, Z\right) - \sum_{k=1}^{s}\eta^k(Y)g\left(\left(\nabla_X h_i\right)\xi_k, Z\right)$$

elde edilir. (3.3) ve (3.11) kullanılarak ispat tamamlanır.

Önerme 3.3.2. M, global çatılı hemen hemen $f-$kosimplektik manifold olsun. Eğer φh_i tensör alanları $\eta-$paralel ise

$$\left(\nabla_X \varphi h_i\right)Y = \sum_{k=1}^{s}\eta^k(X)\left[l_{ki}Y - \left[\xi_i(f) + f^2\right]\varphi^2 Y + f\varphi h_k Y + h_i h_k Y - f\varphi h_i Y\right]$$

$$-\sum_{k=1}^{s}\eta^k(Y)\left[f\varphi h_i X - h_i h_k X\right] - \sum_{k=1}^{s} g\left(f\varphi h_i X - h_i h_k X, Y\right)\xi_k \qquad (3.15)$$

dir.

İspat. φh_i tensör alanı $\eta-$paralel olsun. Dolayısıyla M üzerindeki her X, Y vektör alanları için,

$$0 = g\left(\left(\nabla_{X^\perp}\varphi h_i\right)Y^\perp, Z^\perp\right)$$

$$= g\left(\left(\nabla_{X-\sum_{k=1}^{s}\eta^k(X)\xi_k}\varphi h_i\right)\left(Y - \sum_{k=1}^{s}\eta^k(Y)\xi_k\right), Z - \sum_{k=1}^{s}\eta^k(Z)\xi_k\right)$$

$$= g\left(\left(\nabla_X \varphi h_i\right)Y, Z\right) - \sum_{k=1}^{s}\eta^k(X)g\left(\left(\nabla_{\xi_k}\varphi h_i\right)Y, Z\right) - \sum_{k=1}^{s}\eta^k(Y)g\left(\left(\nabla_X \varphi h_i\right)\xi_k, Z\right)$$

$$-\sum_{k=1}^{s}\eta^k(Z)g\left(\left(\nabla_{X^\perp}\varphi h_i\right)Y, \xi_k\right)$$

dir. Eğer yukarıdaki denklem sadeleştirilirse,

$$g\left(\left(\nabla_X \varphi h_i\right)Y, Z\right) = \sum_{k=1}^{s}\eta^k(X)g\left(\left(\nabla_{\xi_k}\varphi h_i\right)Y, Z\right) + \sum_{k=1}^{s}\eta^k(Y)g\left(\left(\nabla_X \varphi h_i\right)\xi_k, Z\right)$$

$$+\sum_{k=1}^{s}\eta^k(Z)g\left(\left(\nabla_{X^\perp}\varphi h_i\right)Y, \xi_k\right)$$

olur. (3.3) ve $\left(\nabla_{\xi_k}\varphi h_i\right)Y = \varphi\left(\nabla_{\xi_k} h_i\right)Y, \xi_k$ eşitliği kullanılarak ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.1. φh_i tensör alanları $\eta-$ paralel olan global çatılı hemen hemen $f-$kosimplektik manifoldları için

$$R(X,Y)\xi_i = \sum_{k=1}^{s}\eta^k(Y)l_{ki}X - \eta^k(X)l_{ki}Y \qquad (3.16)$$

dır. Burada $l_{ki} = R(.,\xi_k)\xi_i$, ξ_k ve ξ_i karakteristik vektör alanlarına göre Jakobi operatörüdür.

İspat. (3.8) ve (3.15) kullanılarak,

$$\begin{aligned}
R(X,Y)\xi_i &= \left[\xi_i(f) + f^2\right]\sum_{k=1}^{s}\left[\eta^k(Y)\varphi^2 X - \eta^k(X)\varphi^2 Y\right] \\
&\quad - f\sum_{k=1}^{s}\left[\eta^k(X)\varphi h_k Y - \eta^k(Y)\varphi h_k Y\right] \\
&\quad + \sum_{k=1}^{s}\eta^k(Y)\left[l_{ki}X - \left[\xi_i(f) + f^2\right]\varphi^2 X + \alpha\varphi h_k X + h_i h_k ; X - f\varphi h_i X\right] \\
&\quad - \sum_{k=1}^{s}\eta^k(X)\left[f\varphi h_i Y - h_i h_k Y\right] - \sum_{k=1}^{s} g\left(f\varphi h_i X - h_i h_k Y, X\right)\xi_k \\
&\quad - \sum_{k=1}^{s}\eta^k(X)\left[l_{ki}Y - \left[\xi_i(f) + f^2\right]\varphi^2 Y + f\varphi h_k Y + h_i h_k Y - f\varphi h_i Y\right] \\
&\quad + \sum_{k=1}^{s}\eta^k(Y)\left[f\varphi h_i X - h_i h_k X\right] - \sum_{k=1}^{s} g\left(f\varphi h_i X - h_i h_k X, Y\right)\xi_k
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklem sadeleştirilerek (3.16) kolaylıkla yazılabilir.

Teorem 3.3.2. Global çatılı hemen hemen $f-$kosimplektik manifold negatif noktasal sabit ξ_i-kesit eğriliğine sahiptir.

İspat. $p \in M$ noktasında noktasal sabit ξ_i-kesit eğriliği $K(p)$ olan global çatılı hemen hemen $f-$ kosimplektik manifold M olsun. $p \in M$ noktasında ξ_i 'ye ortogonal tüm X^T tanjant vektörleri için

$$g\left(R\left(X^T,\xi_i\right)\xi_i, X^T\right) = K_i(p)g\left(X^T, X^T\right)$$

olur. Yani $X^{\perp} \in D$ dir. $X^T = X - \sum_{k=1}^{s}\eta^k(X)\xi_k$ alınarak ve R eğrilik tensörünün simetrikliği kullanılarak yukarıdaki denklemin her X vektör alanı için,

$$\varphi l_{ii}X = K_i\varphi X$$

ile eşdeğer olduğu görülür. Burada K_i, M üzerinde bir düzgün fonksiyondur. (3.11) denkleminden

$$\left(\nabla_{\xi_i} h_i\right)X = -K_i\varphi X - \left[\xi_i(f) + f^2\right]\varphi X - 2\alpha h_i X - \varphi h_i^2 X$$

dır. Yukarıdaki ifade simetrik ve ters simetrik kısımlarına ayrılırsa,

$$\left(\nabla_{\xi_i} h_i\right)X = -2fh_i X$$

ve

$$-K_i\varphi X - \left[\xi_i(f) + f^2\right]\varphi X - \varphi h_i^2 X = 0 \qquad (3.17)$$

elde edilir. Bu son ifadeden

$$K_i = \left(\left[\xi_i(f) + f^2\right] + \frac{\|h_i\|^2}{2n}\right)$$

elde edilir.

Yorum 3.3.1.“ h_i , Kodazzi tensördür” ifadesiyle “ φh_i , Kodazzi tensördür” ifadesi eşdeğerdir.

Önerme 3.3.3. M global çatılı hemen hemen $f-$kosimplektik manifold olsun. Eğer φh_i (veya h_i) tensör alanı Kodazzi ise aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

1) Eğer $f = 0$ ise D dağılımının integral altmanifoldları total geodeziktir.
2) Eğer $f = 0$ ve M normal ise M abelyen M_2^s Lie grubu ve M_1^{2n} Kaehler manifoldunun lokal olarak çarpımıdır.
3) $f \neq 0$ olduğunda D dağılımının integral altmanifoldları total umbiliktir.

İspat. φh_i tensör alanı Kodazzi olsun. $X = \xi_j$ ve $Y \in D$ için,

$$\left(\nabla_{\xi_j} h_i\right)Y - \left(\nabla_Y h_i\right)\xi_j = 0$$

elde edilir. (3.11) kullanılarak,

$$l_{ji}Y = \left[\xi_i(f) + f^2\right]\varphi^2 Y + f\varphi h_j Y$$

bulunur. (3.10) dan, $\forall i, j$ için $h_i h_j Y = 0$ elde edilir ki bu $\forall i$ için $h_i = 0$ demektir. Önerme 3.1.4 den ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.3. M , global çatılı hemen hemen $f-$kosimplektik manifold olsun. Eğer τ_i tensör alanları paralel ve M normal ise M, abelyen M_2^s Lie grubu ve M_1^{2n} Kaehler manifoldunun lokal olarak çarpımıdır.

İspat. τ_i tensör alanları paralel tensör alanı olsun. Bu $\forall i \in \{1,2,...,s\}$ ve $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ için $(\nabla_X \tau_i)Y = 0$ anlamına gelir. $\forall j \in \{1,2,...,s\}$ için $Y = \xi_j$ alınırsa

$$-2nf^2 - iz(h_i h_j) = 0$$

elde edilir. Eğer tüm i ve j değerleri için son denklem incelenirse, $f = 0$ ve tüm $\xi \in \{1,2,...,s\}$için $h_\varsigma = 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla, Teorem 3.1.1 den ispat tamamlanır.

Önerme 3.3.4. M, global çatılı hemen hemen $f-$kosimplektik manifold olsun. Eğer τ_i tensör alanları $\eta-$paralel ise

$$(\nabla_X \varphi h_i)Y = \sum_{k=1}^{s}\left[\eta^k(X)(\nabla_{\xi_k}\varphi h_i)Y - \eta^k(Y)\varphi h_i \nabla_X \xi_k + g((\nabla_X \varphi h_i)\xi_k, Y)\xi_k\right] \tag{3.18}$$

dir.

İspat. Kabul edilsin ki τ_i paralel olsun. Dolayısıyla D üzerinde her X^T, Y^T, Z^T vektör alanı için,

$$g((\nabla_{X^T}\tau_i)Y^T, Z^T) = 0$$

sağlamış olur. Bu eşitlikten direkt hesaplamalarla,

$$(\nabla_X \tau_i)Y = \sum_{k=1}^{s}\left[g((\nabla_X \tau_i)Y, \xi_k)\xi_k + \eta^k(Y)(\nabla_X \tau_i)\xi_k + \eta^k(X)(\nabla_{\xi_k}\tau_i)Y\right] \tag{3.19}$$

elde edilir. Öte yandan,

$$(\nabla_X \tau_i)Y = \sum_{v=1}^{s}\left[-2f\eta^v(V)\nabla_X \xi_V - 2fg(\nabla_X \xi_v, Y)\xi_v\right] - 2(\nabla_X \varphi h_i)Y \tag{3.20}$$

eşitliği kolaylıkla elde edilebilir. (3.19) ve (3.20) dan istenen sonuç elde edilir.

Teorem 3.3.4. M , global çatılı hemen hemen $f-$kosimplektik manifold olsun. Eğer τ_i tensör alanları $\eta-$paralel ise,

$$R(X,Y)\xi_i = \sum_{k=1}^{s} \eta^k(Y) l_{ki} X - \eta^k(X) l_{ki} Y$$

dır.

İspat. (3.18) denkleminden,

$$\begin{aligned}(\nabla_Y \varphi h_i)X - (\nabla_X \varphi h_i)Y &= \sum_{k=1}^{s} \eta^k(Y)\left(\nabla_{\xi_k} \varphi h_i\right)X - \sum_{k=1}^{s} \eta^k(X)\left(\nabla_{\xi_k} \varphi h_i\right)Y \\ &+ \sum_{k=1}^{s} \eta^k(Y)\varphi h_i \nabla_X \xi_k - \sum_{k=1}^{s} \eta^k(X)\varphi h_i \nabla_Y \xi_k\end{aligned} \tag{3.21}$$

elde edilir. (3.11) ve (3.21) kullanılarak,

$$R(X,Y)\xi_i = \sum_{k=1}^{s} \eta^k(Y) l_{ki} X - \eta^k(X) l_{ki} Y$$

bulunur. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Önerme 3.3.5. M, global çatılı hemen hemen $f-$kosimplektik manifold olsun. Eğer φh_i tensör alanları çevrimsel paralel ise aşağıdaki koşulları sağlanır:

1) Eğer $f=0$ ise D dağılımının integral altmanifoldları total geodeziktir.
2) Eğer $f=0$ ve M normal ise M, bir abelyen M_2^s Lie grubu ve M_1^{2n} Kaehler manifoldunun lokal olarak çarpımıdır.
3) $f \neq 0$ olduğunda D dağılımının integral altmanifoldları total umbiliktir.

İspat. Hipotezden, M üzerindeki her X,Y vektör alanları için

$$g\left((\nabla_X \varphi h_i)Y, \xi_j\right) + g\left((\nabla_Y \varphi h_i)\xi_j, X\right) + g\left((\nabla_{\xi_j} \varphi h_i)X, Y\right) = 0$$

yazılabilir. Bu denklemden,

$$\left(\nabla_{\xi_j} h_i\right)X = 2 f h_i X + \varphi\left(h_i \circ h_j + h_j \circ h_i\right)X$$

elde edilir. (3.9) dan yararlanarak,

$$R(X,\xi_i)\xi_i = \left[\xi_i(f) + f^2\right]\varphi^2 X + f\varphi h_i X + 3 f\varphi h_i X - 3h_i^2 X$$

bulunur.

X yerine φX alarak ve (3.10) denklemi kullanılarak, son denkleme φ uygulanırsa

${h_i}^2 = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $i \in \{1,2,...,s\}$ için $h_i = 0$ dir. Önerme 3.1.4 den ispat tamamlanır.

3.4.RİCCİ SOLİTONLARI

Önerme 3.4.1. M, global çatılı hemen hemen $f-$kosimplektik manifold ve M' de Ricci solitonları (g,V,λ) olsun,

$$S(X,Y) = -fg(\varphi X,\varphi Y) + g(\varphi h_i X,Y) - \lambda g(X,Y) \tag{3.22}$$

$$S(\varphi X,Y) + S(X,\varphi Y) = 2g(h_i X,Y) \tag{3.23}$$

$$QX = f\varphi^2 X + \varphi h_i X - \lambda X \tag{3.24}$$

$$S(X,\xi_i) = -\lambda^i(X) \tag{3.25}$$

$$r = -2nf - (2n+1)\lambda \tag{3.26}$$

eşitlikleri sağlanır.

Teorem 3.4.1. Bir global çatılı hemen hemen $f-$kosimplektik manifoldda f sabit tutularsa Ricci solitonu genişletilebilirdir.

İspat. M, global çatılı hemen hemen $f-$kosimplektik manifold ve M' de Ricci çözümleri (g,V,λ) olsun, Önerme 3.4.1.' den ;

$$\lambda = 2n[\xi_i(f) + f^2] + iz({h_i}^2)$$

dir.

Teorem 3.4.2. Sabit eğrilikli global çatılı hemen hemen $f-$kosimplektik manifold genişletilebilirdir.

İspat. (3.14)'ün Lie türeviyle,

$$S(X,Y) = -fg(\varphi X,\varphi Y) + g(\varphi h_i X,Y) - \lambda g(X,Y) \tag{3.27}$$

Örnek 3.4.1. $n=1$ ve $s=2$ olsun. R^4 'de standart koordinatları (x, y, z_1, z_2) olan $4-$ boyutlu $M=\{(x, y, z_1, z_2)\in R^4\}$ manifoldu alınsın. Vektör alanları,

$$e_1 = e^{z^2}\frac{\partial}{\partial x},$$

$$e_2 = e^{z^2}\frac{\partial}{\partial y},$$

$$e_3 = \frac{\partial}{\partial z_1},$$

$$e_4 = \frac{\partial}{\partial z_2},$$

olsun. M 'nin her noktasında $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ vektör alanlarının lineer bağımsız olduğu açıktır.

Tüm $i, j\in\{1,2,3,4\}$ için

$$g(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$$

ile tanımlı ve

$$g = \frac{1}{e^{2z^2}}(dx\otimes dx + dy\otimes dy) + dz_1\otimes dz_1 + dz_2\otimes dz_2$$

tensör çarpımı ile verilen g, Riemann metrik olsun. M üzerindeki her X vektör alanı için η^1 ve η^2 sırasıyla $\eta^1(X)=g(X,e_3)$ ve $\eta^2(X)=g(X,e_4)$ ile tanımlı $1-$ *form* ve $\varphi(e_1)=e_2, \varphi(e_2)=-e_1,\ \varphi(e_3=\xi_1)=0,\ \varphi(e_4=\xi_2)=0$ ile tanımlı φ bir $(1,1)$ tensör alanı olsun. Aynı zamanda, $h_i(e_1)=-\lambda e_1\ \ h_i(e_2)=\lambda e_2, h_i(e_3)=0$ ve $h_i(e_4)=0$ ile tanımlı h_i 'ler $(1,1)$ tensör alanı olsun. Daha sonra g ve φ 'nin lineerliği kullanılarak M üzerindeki her vektör alanı için,

$$\varphi^2 X = -X + \eta^1(X)e_3 + \eta^2(X)e_4$$

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X,Y) - \eta^1(X)\eta^1(Y) - \eta^2(X)\eta^2(Y)$$

$$\eta^1(e_3) = 1 \text{ ve } \eta^2(e_4) = 1$$

elde edilir.

Geriye $d\Omega = 2\bar{\eta} \wedge \Omega$ ve φ, Nijenheus torsiyon tensörünün sıfır olduğunu ispatlamak kalır. $i \leq j$ için $\Omega(e_1, e_2) = -1$ aksi taktirde $\Omega(e_i, e_j) = 0$ dır. Bu nedenle, Ω' nin sıfır olmayan temel elemanı

$$\Omega\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = -\frac{1}{e^{2z^2}} \,,$$

ve bu yüzden

$$\Omega = -\frac{1}{e^{2z^2}} dx \wedge dy \tag{3.28}$$

dir. Sonuç olarak, $d\Omega$ dış türevi

$$d\Omega = -\frac{4\alpha e^{2\alpha(z_1+z_2)}}{{c_1}^2 + {c_2}^2} dx \wedge dy \wedge (dz_1 + dz_2) \tag{3.29}$$

dir. (3.28) ve (3.29) yoluyla $\eta^1 = dz_1$ ve $\eta^2 = dz_2$ için

$$d\Omega = 2\alpha(\eta^1 + \eta^2) \wedge \Omega$$

buluruz. ∇, g metriğine göre Levi-Civita konneksiyonu olsun. Bu durumda,

$$[e_1, e_3] = [e_1, e_4] = \alpha e_1 - e_2, [e_2, e_3] = [e_2, e_4] = e_1 + \alpha e_2,$$

$$[e_1, e_2] = 0, \; [e_3, e_4] = 0$$

elde ederiz.

Sonuç olarak, Nijenheus torsiyon tensörü φ sıfırdır denilebilir. Bu yüzden, manifold $\alpha-$ kosimplektik $f-$manifolddur.

3.5.GLOBAL ÇATILI HEMEN HEMEN $f-$KOSİMPLEKTİK $(\kappa,\mu,\nu)-$ UZAYLAR

Tanım 3.5.1. M bir global çatılı hemen hemen $f-$kosimplektik manifold ve κ,μ ve ν reel sabitler olsun. M bir global çatılı hemen hemen $f-$kosimplektik $(\kappa,\mu,\nu)-$ uzay olması için gerek ve yeter koşul her $i\in\{1,...,s\}$, $X,Y\in\Gamma(TM)$ için aşağıdaki özdeşlikleri sağlamasıdır:

$$\begin{aligned} R(X,Y)\xi_i &= \kappa\left(\bar{\eta}(X)\varphi^2 Y-\bar{\eta}(Y)\varphi^2 X\right)\\ &+\mu\left(\bar{\eta}(Y)h_i X-\bar{\eta}(X)h_i Y\right)\\ &+\nu\left(\bar{\eta}(Y)\varphi h_i X-\bar{\eta}(X)\varphi h_i Y\right)\end{aligned} \tag{3.30}$$

Yardımcı Teorem 3.5.1. M bir global çatılı hemen hemen $f-$ kosimplektik $(\kappa,\mu,\nu)-$ uzay olsun. O halde,

(i) Her $i,j\in\{1,2,...,s\}$ için $h_i\circ h_j=h_j\circ h_i$,

(ii) $\kappa\leq-\left[f^2+\xi_i(f)\right]$,

(iii) Eğer $\kappa<-\left[f^2+\xi_i(f)\right]$ ise her $i\in\{1,...,s\}$için h_i özdeğerleri 0 ve $\pm\sqrt{-\left(\kappa+f^2+\xi_i(f)\right)}$ dir.

İspat. Her $X\in\Gamma(TM)\,ve\; i,j\in\{1,2,...,s\}$ için (3.29) dan

$$R(\xi_j,X)\xi_i-\phi R(\xi_j,\phi X)\xi_i=2\kappa\phi^2 X$$

dir.

$$R(\xi_j,X)\xi_i-\phi R(\xi_j,\phi X)\xi_i=2\left[-\left(f^2+\xi_i(f)\right)\phi^2 X=\left(h_i\circ h_j\right)X\right]$$

kullanılarak

$$\left(h_i\circ h_j\right)X=\left(\kappa+f^2+\xi_i(f)\right)=\left(h_j\circ h_i\right)X \tag{3.31}$$

elde edilir ve (i) doğrulanır. Devamında (3.31)' den

$$h_i^2 X=\left(\kappa+f^2+\xi_i(f)\right)\phi^2 X \tag{3.32}$$

$$h_i^2 X = -\left(\kappa + f^2 + \xi_i(f)\right)X,\ X \in \Gamma(D) \tag{3.33}$$

elde edilir. Daha sonra Önerme 2.5.2. ve (3.33) kullanılarak h_i^2'nin özdeğerleri 0 ve $-\left(\kappa + f^2 + \xi_i(f)\right)$ bulunur. Aynı zamanda h_i simetrik ve

$$\|h_i X\|^2 = -\left(\kappa + f^2 + \xi_i(f)\right)\|X\|^2$$

dir. Dolayısıyla $\kappa \le -\left[f^2 + \xi_i(f)\right]$ dir. Son olarak t, h_i nin reel özdeğeri ve t ye karşılık gelen özvektörü X olsun. Sonra $t^2\|X\|^2 = -\left(\kappa + f^2 + \xi_i(f)\right)\|X\|^2$ ve

$t = \sqrt{-\left(\kappa + f^2 + \xi_i(f)\right)}$ dir.

Önerme 2.5.2. dikkate alınarak (iii) hesaplanır.

Önerme 3.5.1. M bir global çatılı hemen hemen $f-$kosimplektik$(\kappa,\mu,\nu)-$ uzay olsun.

$$h_1 = \dots = h_s \tag{3.34}$$

dir.

İspat. Eğer $\kappa = -\left[f^2 + \xi_i(f)\right]$ ise (3.31) her simetrik h_i için $h_1 = \dots = h_s = 0$ elde edilir. Şimdi $\kappa < -\left[f^2 + \xi_i(f)\right]$ olsun. $x \in M$ ve $i \in \{1,2,\dots,s\}$ olsun. h_i simetrik olduğundan $D_x = (D_+)_x \oplus (D_-)_x$ olur. Burada $\lambda = \sqrt{-(\kappa + f^2 + \xi_j(f))}$ özdeğerine karşılık h_i' nin özuzayı $(D_+)_x$ ve $-\lambda$ özdeğerine karşılık h_i' nin özuzayı $(D_-)_x$ dir. $X \in D_x$ ise $X_+ \in (D_+)_x, X_- \in (D_-)_x$ olmak üzere $X = X_+ + X_-$ yazılabilir.

Böylelikle $h_i X = \lambda(X_+ + X_-)$ olur. $j \ne i$ olacak şekilde $j \in \{1,2,\dots,s\}$ belirleyelim. Daha sonra (3.30)'dan

$$h_j X = h_j(X_+ + X_-) = h_j\left(\frac{1}{\lambda}h_i X_+ - \frac{1}{\lambda}h_i X_-\right) = \frac{1}{\lambda}(h_j \circ h_i)(X_+ + X_-) = \lambda(X_+ + X_-) = h_i X$$

elde edilir. Önerme 2.5.2. dikkate alınarak (3.34) elde edilir.

Yorum 3.5.1. Bu çalışma boyunca (3.30) eşitliğinin korunduğu her durumda $h := h_1 = \dots\dots\dots = h_s$ dir. O halde;

$$R(X,Y)\xi_i = \kappa(\overline{\eta}(X)\varphi^2 Y - \overline{\eta}(Y)\varphi^2 X)$$
$$+\mu(\overline{\eta}(Y)hX - \overline{\eta}(X)hY) \tag{3.35}$$
$$+\upsilon(\overline{\eta}(Y)\varphi hX - \overline{\eta}(X)\varphi hY).$$

Ayrıca φ^2 ve h tensör alanlarının simetrikliği, eğrilik tensörlerinin simetri özellikleri ve (3.35) kullanılarak

$$R(\xi_i, X)Y = \kappa(\overline{\eta}(Y)\varphi^2 X - g(X,\varphi^2 Y)\overline{\xi})$$
$$+\mu(g(X,hY)\overline{\xi} - \overline{\eta}(Y)hX) \tag{3.36}$$
$$+\upsilon(g(\varphi hX,Y)\overline{\xi} - \overline{\eta}(Y)\varphi hX)$$

elde edilir.

Yorum 3.5.2. $\kappa \neq -(\kappa + f^2 + \xi_j(f))$ ile M bir global çatılı hemen hemen $f-$kosimplektik $(\kappa,\mu,\nu)-$ uzay olsun. $\lambda = \sqrt{-(\kappa + f^2 + \xi_j(f))}$ ve $-\lambda$ öz uzaylarının $n-$ boyutlu dağılımlarını D_+ ve D_- ile ifade edilsin. D_+ ve D_- karşılıklı olarak ortogonaldir. Ayrıca, φ ile h ters değişen oldukları için $\varphi(D_+) = D_-$ ve $\varphi(D_-) = D_+$ elde ederiz. Başka bir deyişle, D_+ bir Legendre dağılımı ve D_- bu dağılımın eşleniğidir.

Yardımcı Teorem 3.5.2. M bir hemen hemen $\alpha-$kosimplektik $f-$manifold olsun. Eğrilik tensörü her $i, j \in \{1,2,....,s\}$ ve $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ için aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$g(R_{\xi_i X}Y,Z) - g(R_{\xi_i X}\varphi Y,\varphi Z) + g(R_{\xi_i \varphi X}Y,\varphi Z) + g(R_{\xi_i \varphi X}\varphi Y,Z)$$
$$= 2[g((\nabla_{h_i X}\varphi)Y,Z) + \left[f^2 + \xi_j(f)\right]\sum_{j=1}^{s}[\eta^j(Z)g(\varphi^2 Y,X) - \eta^j(Y)g(\varphi^2 Z,X)] \tag{3.37}$$
$$+ f\sum_{j=1}^{s}\eta^j(Z)g(\varphi Y,h_i X) - f\sum_{j=1}^{s}\eta^j(Y)g(\varphi Z,h_i X)]$$

İspat. İlk olarak, A ve B_i operatörleri uygulanırsa, her $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ için $i \in \{1,2,....,s\}$ olmak üzere,

$$A(X,Y,Z) := 2\left[f^2 + \xi_j(f)\right]\sum_{j=1}^{s}[\eta^j(Z)g(\varphi^2 Y,X) - \eta^j(Y)g(\varphi^2 Z,X)] \tag{3.38}$$

ve

$$B_i(X,Y,Z) := -g(\varphi X,(\nabla_Y(\varphi\circ h_i))(\varphi Z)) - g(\varphi X,(\nabla_{\varphi Y}(\varphi\circ h_i))Z)$$
$$- g(X,(\nabla_Y(\varphi\circ h_i))Z) + g(X,(\nabla_{\varphi Y}(\varphi\circ h_i))(\varphi Z)) \tag{3.39}$$

(3.8) kullanılarak ve direkt hesaplamalarla (3.37) denkleminin sol tarafı alınırsa $A(X,Y,Z)+B_i(X,Y,Z)-B_i(X,Z,Y)$ elde ederiz.

$$\eta_j((\nabla_{\varphi Y}h_i)Z)=\eta_j(\nabla_{\varphi Y}(h_iZ))$$

olduğundan

$$\begin{aligned}B_i(X,Y,Z)&=-g(X,(\nabla_Y(\varphi\circ h_i)Z))+-g(X,(\varphi\circ h_i)(\nabla_Y Z))\\&+g(X,(\nabla_{\varphi Y}(\varphi\circ h_i\circ\varphi)Z))+g(X,(\varphi\circ h_i)(\nabla_{\varphi Y}\varphi Z))\\&-g(\varphi X,(\nabla_Y(\varphi\circ h_i\circ\varphi)Z))+g(\varphi X,(\varphi\circ h_i)(\nabla_Y(\varphi Z)))\\&-g(\varphi X,(\nabla_{\varphi Y}(\varphi\circ h_i)Z))+g(\varphi X,(\varphi\circ h_i)(\nabla_{\varphi Y}(h_iZ)))\\&=-g(X,(\nabla_Y\varphi(h_iZ))+g(X,h_i((\nabla_Y\varphi)Z))\\&+g(X,(h_i\circ\varphi)((\nabla_{\varphi Y}\varphi)Z))+g(X,\varphi((\nabla_{\varphi Y}\varphi)(h_iZ))\\&+\sum_{j=1}^{s}\eta_j((\nabla_Y\varphi h_i)Z)\eta_j(X)\end{aligned}\tag{3.40}$$

yazılabilir. Ayrıca, bunu (3.3) denkleminden

$$\begin{aligned}&(\varphi\circ(\nabla_{\varphi X}\varphi))Y=(\nabla_{\varphi X}\varphi^2)Y-(\nabla_{\varphi X}\varphi)(\varphi Y)\\&=\sum_{j=1}^{s}((\nabla_{\varphi X}\eta_j)Y\xi_j)+\sum_{j=1}^{s}(\eta_j(Y)\nabla_{\varphi X}\xi_j)-(\nabla_{\varphi X}\varphi)(\varphi Y)\\&=\sum_{j=1}^{s}((\nabla_{\varphi X})(g(\xi_j,Y))\xi-g(\nabla_{\varphi X}Y,\xi_j)\xi_j+\sum_{j=1}^{s}\eta_j(Y)(\alpha\varphi X-h_jX)\\&\quad+\sum_{j=1}^{s}[\eta_j(Y)h_jX+f(\eta_j(Y)\varphi X+2g(X,\varphi Y)\xi_j)]+(\nabla_X\varphi)Y\end{aligned}$$

takip eder. Bundan dolayı

$$\begin{aligned}(\varphi\circ(\nabla_{\varphi X}\varphi))Y=&\,f\sum_{j=1}^{s}g(X,\varphi Y)\xi_j-\sum_{j=1}^{s}g(Y,\varphi X)\xi_j\\&+2f\sum_{j=1}^{s}\eta_j(Y)\varphi X+(\nabla_X\varphi)Y\end{aligned}$$

dir.

Ayrıca, Önerme 3.1.2'den, her $j\in\{1,2,....,s\}$ için

$$\begin{aligned}\eta_i((\nabla_{\varphi Y}h_j)Z)&=\eta_i(\nabla_{\varphi Y}(h_jZ))=(\nabla_{\varphi Y}\eta_i)(h_jZ)\\&=-g(h_jZ,\nabla_{\varphi Y}\xi_i)=g(h_iZ,h_jY-f\varphi Y)\end{aligned}\tag{3.41}$$

elde ederiz.

Daha sonra (3.40) ve (3.41) kullanılarak

$$B_i(X,Y,Z) = -g(X,(\nabla_Y\varphi)(h_iZ)) + g(X,h_i((\nabla_Y\varphi)Z)) + 2f\sum_{j=1}^{s}\eta_j(Z)g(h_iX,\varphi Y)$$
$$+ g(h_iX,(\nabla_Y\varphi)Z) + f\sum_{j=1}^{s}\eta_j(X)g(Y,\varphi h_iZ) - \sum_{j=1}^{s}\eta_j(X)g(h_iZ,h_jY)$$
$$+\sum_{j=1}^{s}\eta_j(X)g(h_iZ,h_iY) + g(X,(\nabla_Y\varphi)(h_iZ)) - f\sum_{j=1}^{s}\eta_j(X)g(\varphi Y,h_iZ)$$
$$= 2\left(g(h_iX,(\nabla_Y\varphi)Z) + f\sum_{j=1}^{s}\eta_j(Z)g(h_iX,\varphi Y) - f\sum_{j=1}^{s}\eta_j(X)g(\varphi Y,h_iZ)\right)$$

elde edilir. Bu nedenle,

$$A(X,Y,Z) + B_i(X,Y,Z) - B_i(X,Z,Y)$$
$$= 2g(h_iX,(\nabla_Y\varphi)Z) - 2g(h_iX,(\nabla_Z\varphi)Y)$$
$$+2\left[f^2+\xi_j(f)\right]\sum_{j=1}^{s}[\eta_j(Z)g(\varphi^2Y,X) - \eta_j(Y)g(\varphi^2Z,X)]$$
$$+2f\sum_{j=1}^{s}[\eta_j(Z)g(\varphi Y,h_iX) - \eta_j(Y)g(\varphi Z,h_iX)]$$

elde edilir.

Ve dolayısıyla (3.37) ispatlanmış olur.

Yorum3.5.3. M , bir global çatılı hemen hemen $f-$kosimplektik manifold olsun. (3.37) denklemi ve $(\nabla_{h_iX}\varphi)(Y,Z) = -g((\nabla_{h_iX}\varphi)Y,Z)$ kullanılarak her $X,Y,Z\in\Gamma(TM)$ için,

$$(\nabla_{h_iX}\varphi)Y = \frac{1}{2}\left(\varphi R_{\xi_i\varphi X}Y - R_{\xi_i\varphi X}\varphi Y - \varphi R_{\xi_iX}\kappa Y - R_{\xi_iX}Y\right)$$
$$+\left[f^2+\xi_j(f)\right]\sum_{j=1}^{s}[g(\varphi^2Y,X)\xi_j - \eta_j(Y)\varphi^2X] \qquad (3.42)$$
$$+ f\sum_{j=1}^{s}[g(\varphi Y,h_iX)\xi_j - \eta_j(Y)\varphi h_iX]$$

Yardımcı Teorem 3.5.3. M bir global çatılı hemen hemen $f-$ kosimplektik $(\kappa,\mu,\nu)-$ uzay olsun. Buna göre aşağıdaki özdeşlikler sağlanır:

$$(\nabla_X\varphi)Y = \sum_{j=1}^{s}\left[g(f\varphi X + hX,Y)\xi_j - \eta_j(Y)(f\varphi X + hX)\right] \qquad (3.43)$$

$$(\nabla_X h)Y - (\nabla_Y h)X = \sum_{j=1}^{s}\{(\kappa + f^2 + \xi_j(f))(\eta_j(Y)\varphi X - \eta_j(X)\varphi Y + 2g(\varphi X,Y)\xi_j)$$
$$+ \mu(\eta_j(Y)\varphi hX - \eta_j(X)\varphi hY) + (f-\nu)(\eta_j(Y)hX - \eta_j(X)hY)\} \qquad (3.44)$$

İspat. (3.42) den

$$(\nabla_{hX}\varphi)Y=\sum_{j=1}^{s}\{-(\kappa+f^{2}+\xi_{j}(f))g(X,Y)\xi_{j}+(\kappa+f^{2}+\xi_{j}(f))\eta_{j}(Y)X$$
$$+\eta_{j}(Y)\varphi hX+g(hX,\varphi Y)\xi_{j}\}$$

elde edilir.

Burada hX yerine X alınıp ve (3.3), (3.32) göz önünde bulunurularak direkt hesaplamalarla (3.43) elde edilir. (3.43)'den, h ve φ^2 özeşlenik olduğundan,

$$(\nabla_{X}(\varphi\circ h))Y-(\nabla_{Y}(\varphi\circ h))X=\varphi((\nabla_{X}h)Y-(\nabla_{Y}h)X)$$

bulunur.

Devamında her $Z\in\Gamma(TM)$ için (3.43) kullanılarak,

$$g(R_{XY}\xi_{j},Z)=\left[f^{2}+\xi_{j}(f)\right]\sum_{j=1}^{s}[\eta_{j}(Y)g(\varphi^{2}X,Z)-\eta_{j}(X)g(\varphi^{2}Y,Z)]$$
$$+\sum_{j=1}^{s}[\eta_{j}(Y)g(\varphi h_{j}X,Z)-\eta_{j}(X)g(\varphi h_{j}Y,Z)]+g(\varphi((\nabla_{Y}h)X-(\nabla_{X}h)Y),Z) \quad (3.45)$$

olur. (3.46)' dan ve h ve φ^2 ' nin simetrikliğinden

$$\varphi((\nabla_{Y}h)X-(\nabla_{X}h)Y)=R_{XY}\xi_{j}-\sum_{j=1}^{s}\{\eta_{j}(Y)(\left[f^{2}+\xi_{j}(f)\right]\varphi^{2}X+f\varphi hX)$$
$$+\eta_{j}(X)(\left[f^{2}+\xi_{j}(f)\right]\varphi^{2}Y+f\varphi hY)\}$$

olur.

Daha sonra son eşitliğin her iki tarafına φ uygulayarak (3.35) ve

$$\eta_{j}((\nabla_{Y}h)X-(\nabla_{X}h)Y)=-2(\kappa+f^{2}+\xi_{j}(f))g(\varphi X,Y),\ j\in\{1,2,....,s\}$$

kullanılarak (3.45) elde edilir.

Yardımcı Teorem 3.5.4. M bir global çatılı hemen hemen $f-$ kosimplektik $(\kappa,\mu,\nu)-$ uzay olsun.

$$X,Y\in\Gamma(D_{+})\Rightarrow\nabla_{X}Y\in\Gamma(D_{+}) \quad (3.46)$$

$$X,Y\in\Gamma(D_{-})\Rightarrow\nabla_{X}Y\in\Gamma(D_{-}) \quad (3.47)$$

$$X\in\Gamma(D_{+}),Y\in\Gamma(D_{-})\Rightarrow\nabla_{X}Y\in\Gamma(D_{-}\oplus\ker(\varphi)) \quad (3.48)$$

$$X\in\Gamma(D_{-}),Y\in\Gamma(D_{+})\Rightarrow\nabla_{X}Y\in\Gamma(D_{+}\oplus\ker(\varphi)) \quad (3.49)$$

dir.

İspat. (3.44)'den her $X,Y,Z \in \Gamma(D_+)$ için $g((\nabla_X h)\varphi Z - (\nabla_{\varphi Z} h)X, Y) = 0$ elde edilir. Öte yandan, h simetrik olduğundan, Yorum 3.5.2.'den;

$$g((\nabla_X h)\varphi Z - (\nabla_{\varphi Z} h)X, Y) = 2\lambda g(\nabla_X(\varphi Z), Y)$$

bulunur. Daha sonra

$$g(\varphi Z, \nabla_X Y) = -g(\nabla_X(\varphi Z), Y)$$

dir. Yani $\nabla_X Y$, D_-'ye normaldir. Ayrıca, (2.10) ve Yorum 3.5.2'den her $i \in \{1,2,....,s\}$ için, $g(\nabla_X Y, \xi_i) = -g(Y, \nabla_X \xi_i) = 0$ dır. O zaman (3.46) bulunur. (3.47)' nin ispatı benzerdir. Eğer $X \in \Gamma(D_+), Y \in \Gamma(D_-)$ ise (3.46) ve Yorum 3.5.2.'den her $Z \in \Gamma(D_+)$ için $g(\nabla_X Y, Z) = -g(Y, \nabla_X Z) = 0$ elde edilir ve (3.48) bulunur. Benzer şekilde (3.49) ispatlanır.

Yorum 3.5.4. (3.46) ve (3.47)'den $D_\pm$, M üzerinde $F_\pm$ gibi iki ortogonal total geodezik Legendre yapraklanmalar tanımlar.

Yardımcı Teorem 3.5.5. M bir global çatılı hemen hemen $f-$ kosimplektik $(\kappa,\mu,\nu)-$ uzay olsun. Her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}(\nabla_X h)Y = \sum_{j=1}^{s}\{&(\kappa + f^2 + \xi_j(f))g(\varphi X, Y)\xi_j - fg(hX,Y)\xi_j \\ &-\eta_j(Y)h(fX + h\varphi X) - \mu\eta_j(X)h\varphi Y + (\nu - 2f)\eta_j(X)hY.\end{aligned} \tag{3.50}$$

olur.

İspat. $X,Y \in \Gamma(D)$ olsun. Önerme 3.2.2. i) $g(hY,\xi_j) = 0$ elde ederiz. X yönünde bu eşitliğin türevini alarak

$$(\nabla_X h)Y = -g(Y, fhX + h^2\varphi X)\xi_j \tag{3.51}$$

elde edilir. Sonra, M üzerindeki herhangi X vektör alanını, D'de X vektör alanının pozitif bileşeni X_+ olmak üzere $X = X_+ + \eta_i(X)\xi_j$ olarak alınırsa ve

$$\nabla_{\xi_i} h_i = -\mu\varphi h + \nu h - 2fh$$

ve (3.33) kullanılarak

$$\begin{aligned}(\nabla_X h)Y &= (\nabla_{X_+} h)Y_+ + \overline{\eta}(Y)(\nabla_{X_+} h)\overline{\xi} + \overline{\eta}(X)(-\mu\varphi h + \nu h - 2fh)Y \\ &- g(Y, fhX + h^2\varphi X)\overline{\xi} - \overline{\eta}(Y)(fhX + h^2\varphi X) + \overline{\eta}(X)(-\mu\varphi hY + \nu hY - 2fhY)\end{aligned} \tag{3.52}$$

bulunur.

Yorum.3.5.5. M bir global çatılı hemen hemen $f-$kosimplektik $(\kappa,\mu,\nu)-$ uzay olsun. (3.43), (3.50) ve (3.33) kullanılarak her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için,

$$(\nabla_X \varphi h)Y = \sum_{j=1}^{s}\{(\kappa + f^2 + \xi_j(f))g(\varphi^2 X, Y)\bar{\xi} + fg(\varphi X, hY)\bar{\xi} - f\bar{\eta}(Y)\varphi hX$$
$$+(\kappa + f^2 + \xi_j(f))\bar{\eta}(Y)\varphi^2 X + \mu\bar{\eta}(X)hY + (\nu - 2f)\eta(X)\varphi hY\}. \tag{3.53}$$

olur.

Yardımcı Teorem 3.5.6. M bir global çatılı hemen hemen $f-$ kosimplektik $(\kappa,\mu,\nu)-$ uzay olsun. Her $X,Y,Z \in \Gamma(D)$ için,

$$\begin{aligned}
&R_{XY}hZ - hR_{XY}Z = \\
&s[\kappa\{g(Z,\varphi Y)fX - g(Z,\varphi Y)\varphi hX - g(Z,\varphi X)fY + g(Z,\varphi X)\varphi hY \\
&+ fg(Z,X)\varphi Y - g(Z,\varphi hX)\varphi Y - fg(Z,Y)\varphi X + g(Z,\varphi hY)\varphi X\} \\
&+ f^3 g(Z,\varphi Y)X - f^2 g(Z,\varphi Y)\varphi hX - f^3 g(Z,\varphi X)Y + f^2 g(Z,\varphi X)\varphi hY \\
&- f^2 g(Z,hY)X + fg(Z,hY)\varphi hX + f^2 g(Z,hX)Y - fg(Z,hX)\varphi hY \\
&- f^2 g(Z,X)hY + f^3 g(Z,X)\varphi Y + fg(Z,\varphi hX)hY - f^2 g(Z,\varphi hX)\varphi Y \\
&+ f^2 g(Z,Y)hX - f^3 g(Z,Y)\varphi X - fg(Z,\varphi hY)hX + f^2 g(Z,\varphi hY)\varphi X].
\end{aligned} \tag{3.54}$$

İspat. $X,Y,Z \in \Gamma(D)$ olsun. Direkt hesaplamalarla,

$$\begin{aligned}
&(\nabla_X \nabla h)Z = \\
&\Sigma_{j=1}^{s}\{(\kappa + f^2 + \xi_j(f))[g(\nabla_X Z, \varphi Y)\xi_j + g(Z,(\nabla_X\varphi)Y)\xi_j + g(Z,\varphi(\nabla_X Y))\xi_j \\
&+ g(Z,\varphi Y)(-f\varphi^2 X - \varphi hX)] - fg(\nabla_X Z, hY)\xi_j - fg(Z,(\nabla_X h)Y)\xi_j \\
&- fg(Z,h(\nabla_X Y))\xi_j + fg(Z,hY)(f\varphi^2 X + \varphi hX) - fg(\nabla_X Z, \xi_j)(hY + h^2\varphi Y) \\
&- fg(Z,\nabla_X \xi_j)(hY + h^2\varphi Y) - f\eta_j(Z)(\nabla_X h)Y - f\eta_j(Z)h(\nabla_X Y) \\
&(\kappa + f^2 + \xi_j(f))[\eta_j(Z)(\nabla_X\varphi)Y + \eta_j(Z)\varphi(\nabla_X Y)] - \mu[g(\nabla_X Y, \xi_j)\varphi hZ \\
&+ g(Y,\nabla_X \xi_j)\varphi hZ + \eta_j(Y)(\nabla_X \varphi h)Z + \eta_j(Y)ph(\nabla_X Z)] \\
&+(\upsilon - 2f)[g(\nabla_X Y, \xi_j)hZ + g(Y,\nabla_X \xi_j)hZ + \eta_j(Y)(\nabla_X h)Z + \eta_j(Y)h(\nabla_X Z)]
\end{aligned}$$

olur. Burada (3.50), (3.33) ve $\nabla_X \varphi$'nin antisimetrikliğini kullanıldı. Dolayısıyla, (3.3), (3.50), $\nabla_X \varphi$'nin simetrikliği ve

$$R_{XY}hZ - hR_{XY}Z = (\nabla_X \nabla_Y h)Z - (\nabla_Y \nabla_X h)Z - (\nabla_{[X,Y]}h)Z$$

Ricci özdeşliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
&R_{XY}hZ - hR_{XY}Z = \\
&\Sigma_{j=1}^{s}\{(\kappa + f^2 + \xi_j(f))[g(Z,(\nabla_X\varphi)Y - (\nabla_Y\varphi)X)\xi_j - g(Z,\varphi Y)(f\varphi^2 X + \varphi hX) \\
&+ g(Z,\varphi X)(f\varphi^2 Y + \varphi hY)] - fg(Z,(\nabla_X h)Y - (\nabla_Y h)X)\xi_j \\
&+ fg(Z,hY)(f\varphi^2 X + \varphi hX) - fg(Z,hX)(f\varphi^2 Y + \varphi hY)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-g\left(Z,\nabla_X\xi_j\right)\left(fhY+h^2\varphi Y\right)+g\left(Z,\nabla_Y\xi_j\right)\left(fhX+h^2\varphi X\right)\\
&-\eta_j(Z)\left((\nabla_X h)Y-(\nabla_Y h)X\right)+\left(\kappa+f^2+\xi_j(f)\right)\eta_j(Z)\left((\nabla_X\varphi)Y-(\nabla_Y\varphi)X\right)\\
&+\mu\left[\left(g\left(X,\nabla_Y\xi_j\right)-g\left(Y,\nabla_X\xi_j\right)\right)\varphi hZ-\eta_j(Y)(\nabla_X\varphi h)Z+\eta_j(X)(\nabla_Y\varphi h)Z\right]\\
&+(\upsilon-2f)[\left(g\left(Y,\nabla_X\xi_j\right)-g\left(X,\nabla_Y\xi_j\right)\right)hZ\\
&+\eta_j(Y)(\nabla_X h)Z-\eta_j(X)(\nabla_Y h)Z]\}.
\end{aligned}
\tag{3.55}
$$

elde edilir.

Eğer (3.55) eşitliğinden $X,Y,Z\in\Gamma(D)$ alırsak, (3.53), (3.43) ve (3.33) özdeşlikleri kullanılırsa (3.54) elde edilir.

Yardımcı Teorem 3.5.7. M bir global çatılı hemen hemen $f-$ kosimplektik $(\kappa,\mu,\nu)-$ uzay olsun. Her $X,Y,Z\in\Gamma(TM)$ için,

$$
\begin{aligned}
&R_{XY}\varphi Z-\varphi R_{XY}Z=\\
&\Sigma_{j=1}^{2}\{[2\left(\kappa+f^2+\xi_j(f)\right)g(\varphi X,Y)\eta_j(Z)+\kappa\left(\eta_j(Y)g(\varphi X,Z)-\eta_j(X)g(\varphi Y,Z)\right)\\
&-2f\left(\kappa+f^2+\xi_j(f)\right)\eta_j(Z)g(\varphi X,Y)+\mu\left(\eta_j(Y)g(\varphi hX,Z)-\eta_j(X)g(\varphi hY,Z)\right)\\
&+\upsilon\left(\eta_j(Y)g(hX,Z)-\eta_j(X)g(hY,Z)\right)]\xi_j+s[-g(f\varphi Y+hY,Z)\left(f\varphi^2X+\varphi hX\right)\\
&+g\left(f\varphi^2X+\varphi hX,Z\right)(f\varphi Y+hY)+g(f\varphi X+hX,Z)\left(f\varphi^2Y+\varphi hY\right)\\
&-g\left(f\varphi^2Y+\varphi hY,Z\right)(f\varphi X+hX)]+f\eta_j(Z)[\eta_j(Y)(f\varphi X+hX)\\
&-\eta_j(X)(f\varphi Y+hY)-\mu\left(\eta_j(Y)\varphi hX-\eta_j(X)\varphi hY\right)-(f-\upsilon)\left(\eta_j(Y)hX-\eta_j(X)hY\right)\\
&-\left(\kappa+f^2+\xi_j(f)\right)\left(\eta_j(Y)\varphi X-\eta_j(X)\varphi Y\right)]\}
\end{aligned}
$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Bir $x\in M$ noktası ve bu x noktasında sıfır olan $\nabla X,\nabla Y$ ve ∇Z gibi X,Y,Z lokal vektör alanlarını seçilsin. (3.43) eşitliğini birkaç kez uygulayarak ve (3.33) ve $\nabla\varphi^2$ 'nin simetrikliği kullanılarak, x noktasında,

$$
\begin{aligned}
&\nabla_X\left((\nabla_Y\varphi)Z\right)-\nabla_Y\left((\nabla_X\varphi)Z\right)=\\
&\left[fg\left((\nabla_X\varphi)Y-(\nabla_Y\varphi)X,Z\right)+g\left((\nabla_X h)Y-(\nabla_Y h)X,Z\right)\right]\xi\\
&s[g(Z,f\varphi X+hX)\left(f\varphi^2Y+\varphi hY\right)\\
&-g(Z,f\varphi Y+hY)\left(f\varphi^2X+\varphi hX\right)\\
&+g\left(Z,f\varphi^2X+\varphi hX\right)(f\varphi Y+hY)\\
&-g\left(Z,f\varphi^2Y+\varphi hY\right)(f\varphi X+hX)]\\
&-f\Sigma_{j=1}^{s}\eta_j(Z)\left[\left((\nabla_X\varphi)Y-(\nabla_Y\varphi)X\right)+\left((\nabla_X h)Y-(\nabla_Y h)X\right)\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Yorum 3.5.6. M bir global çatılı hemen hemen $f-$kosimplektik $(\kappa,\mu,\nu)-$ uzay olsun. Özellikle Yardımcı Teorem 3.5.7.'de her $X,Y,Z\in\Gamma(TM)$için aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$
\begin{aligned}
&R_{XY}\varphi Z-\varphi R_{XY}Z=\\
&\Sigma_{j=1}^{s}\{[-\left(f^2+\xi_j(f)\right)\left(\eta_j(Y)g(\varphi X,Z)-\eta_j(X)g(\varphi Y,Z)\right)+\mu\left(\eta_j(Y)g(\varphi hX,Z)-\eta_j(X)g(\varphi hY,Z)\right)\\
&+\upsilon\left(\eta_j(Y)g(hX,Z)-\eta_j(X)g(hY,Z)\right)]\xi_j+s[-g\left(f\varphi Y+hY,Z\right)\left(f\varphi^2X+\varphi hX\right)\\
&+g\left(f\varphi^2X+\varphi hX,Z\right)\left(f\varphi Y+hY\right)+g\left(f\varphi X+hX,Z\right)\left(f\varphi^2Y+\varphi hY\right)\\
&-g\left(f\varphi^2Y+\varphi hY,Z\right)\left(f\varphi X+hX\right)]+f\eta_j(Z)[\eta_j(Y)\left(f\varphi X+hX\right)\\
&-\eta_j(X)\left(f\varphi Y+hY\right)-\mu\left(\eta_j(Y)\varphi hX-\eta_j(X)\varphi hY\right)-\left(f-\upsilon\right)\left(\eta_j(Y)hX-\eta_j(X)hY\right)]\}.
\end{aligned}
$$

Yardımcı Teorem 3.5.8. $\kappa<-\left(f^2+\xi_j(f)\right)$ ile M bir global çatılı hemen hemen $f-$kosimplektik$(\kappa,\mu,\nu)-$uzay olsun. O halde aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$
\begin{aligned}
R_{X_+Y_+}Z_-=\ & f\lambda s\left(g(Z_-,\varphi Y_+)X_+-g(Z_-,\varphi X_+)Y_+\right)\\
& s\left(\kappa+f^2+\xi_j(f)\right)\left(g(\varphi Z_-,X_+)\varphi Y_+-g(\varphi Z_-,Y_+)\varphi X_+\right)
\end{aligned}
\tag{3.56}
$$

$$
\begin{aligned}
&R_{X_-Y_-}Z_+=s\left(\kappa+f^2+\varepsilon_j(f)\right)\left(g(\varphi Z_+,X_-)\varphi Y_- -g(\varphi Z_+,Y_-)\varphi X_-\right)\\
&+f\lambda s\left(g(Z_+,\varphi X_-)Y_- -g(Z_+,\varphi Y_-)X_-\right),
\end{aligned}
\tag{3.57}
$$

$$
\begin{aligned}
&R_{X_+Y_-}Z_-=s\left(\kappa+f^2+\varepsilon_j(f)\right)g(Z_-,\varphi X_+)\varphi Y_- -\left[f^2+\varepsilon_j(f)\right]sg(Z_-,Y_-)X_+\\
&+f\lambda s\left(g(Z_-,Y_-)\varphi X_+-g(Z_-,\varphi X_+)Y_-\right),
\end{aligned}
\tag{3.58}
$$

$$
\begin{aligned}
&R_{X_+Y_-}Z_+=s\left[f^2+\xi_j(f)\right]g(Z_+,X_+)Y_- -\left(\kappa+f^2+\xi_j(f)\right)sg(Z_+,\varphi Y_-)\varphi X_+\\
&+f\lambda s\left(g(Z_+,X_+)\varphi Y_- -g(Z_+,\varphi Y_-)X_+\right),
\end{aligned}
\tag{3.59}
$$

$$
\begin{aligned}
&R_{X_+Y_+}Z_+=s\left[f^2+\xi_j(f)\right]\left(g(Z_+,Y_+)X_+-g(Z_+,X_+)Y_+\right)\\
&+f\lambda s\left(g(Z_+,X_+)\varphi Y_+-g(Z_+,Y_+)\varphi X_+\right),
\end{aligned}
\tag{3.60}
$$

$$
\begin{aligned}
&R_{X_-Y_-}Z_-=s\left[f^2+\xi_j(f)\right]\left(g(Z_-,Y_-)X_- -g(Z_-,X_-)Y_-\right)\\
&+f\lambda s\left(g(Z_-,X_-)\varphi Y_- -g(Z_-,Y_-)\varphi X_-\right).
\end{aligned}
\tag{3.61}
$$

İspat. İlk olarak, her $X_+,Y_+,Z_+\in D_+$ için Yardımcı Teorem 3.5.7. uygulanarak,

$$\lambda R_{X_+Y_+}Z_+-hR_{X_+Y_+}Z_+=2fs\lambda^2\left(g(Z_+Y_+)\varphi X_+-g(Z_{+,}X_+)\varphi Y_+\right)$$

$W_- \in D_-$ ile skaler çarpım yoluyla, buradan

$$2\lambda\left(R_{X_+Y_+}Z_+,W_-\right)=2fs\lambda^2\left(g\left(Z_+,Y_+\right)g\left(\varphi X_+,W_-\right)-g\left(Z_+,X_+\right)g\left(\varphi Y_+,W_-\right)\right) \tag{3.62}$$

elde edilir, $\lambda \neq 0$ olmak üzere,

$$\left(R_{X_+Y_+}Z_+,W_-\right)=fs\lambda\left(g\left(Z_+,Y_+\right)g\left(\varphi X_+,W_-\right)-g\left(Z_+,X_+\right)g\left(\varphi Y_+,W_-\right)\right) \tag{3.63}$$

dır. Aynı zamanda benzer bir ispat ile herhangi $X_+,W_+ \in D_+$ ve $Y_-,Z_- \in D_-$ için,

$$\begin{aligned}\left(R_{X_+Y_-}Z_-,W_+\right)=&\left(\kappa+f^2+\xi_j(f)\right)s(g\left(Z_-,\varphi X_+\right)g\left(\varphi Y_-,W_+\right)\\&-\left[f^2+\xi_j(f)\right]g\left(Z_-,Y_-\right)g\left(X_+,W_+\right))\end{aligned} \tag{3.64}$$

elde edilir ve (3.64)'den ve R tensör alanının simetrikliği yoluyla, her $X_+,Y_+,W_+,\in D_+$ ve $Z_- \in D_-$ için,

$$\left(R_{X_+Y_+}Z_-,W_+\right)=fs\lambda\left(g\left(Z_-,\varphi Y_+\right)g\left(X_+,W_+\right)-g\left(Z_-,\varphi X_+\right)g\left(Y_+,W_+\right)\right) \tag{3.65}$$

Devamında, bir lokal $\{e_1,...,e_n,\varphi e_1,...,\varphi e_n,\xi_1,...,\xi_s\}$ φ bazı belirlenırse $e_i \in D_+$ ile $R_{X_+Y_+}Z_-$ hesaplanır. Birinci Bianchi özdeşliği kullanarak, $\left(R_{X_+Y_+}Z_-,\xi_i\right)=0$ nulluk koşulu, (3.64), (3.65) ile

$$\begin{aligned}&g\left(R_{X_+Y_+}Z_-,e_i\right)=f\lambda s\left(g\left(Z_-,\varphi Y_+\right)g\left(X_+,e_i\right)-g\left(Z_-,\varphi X_+\right)g\left(Y_+,e_i\right)\right),\\&g\left(R_{X_+Y_+}Z_-,\varphi e_i\right)=\left(\kappa+f^2+\xi_j(f)\right)s\left(g\left(\varphi Z_-,X_+\right)g\left(Y_+,e_i\right)-g\left(\varphi Z_-,Y_+\right)g\left(X_+,e_i\right)\right)\end{aligned}$$

elde edilir, böylece $R_{X_+Y_+}Z_-$ için ifade i üzerinden toplam alınarak devam eder. $R_{X_-Y_-}Z_+$ ve $R_{X_+Y_-}Z_-$ şartları benzer şekilde hesaplanır. Şimdi henüz ispatladığımız formül üzerindeki φ yoluyla ve Yardımcı Teorem 3.5. 8 kullanılarak,

$$\begin{aligned}&R_{X+Y+}\varphi Z_-=\left[f^2+\xi_j(f)\right]s\left(g\left(\varphi Y_+,Z_-\right)X_+-g\left(\varphi X_+,Z_-\right)Y_+\right)\\&-fs\lambda\left(g\left(\varphi Y_+,Z_-\right)\varphi X_+-g\left(\varphi X_+,Z_-\right)\varphi Y_+\right).\end{aligned}$$

elde edilir. Bu formül uygun koşullarda φZ_- için yazılarak, $R_{X_+Y_+}Z_+$ için sonuçlar bulunur. Benzer hesaplamalar $R_{X\_Y\_}Z_-$ için yapılır. Aynı şekilde, Yardımcı Teorem 3.5.8. ve üçüncü formülü kullanarak $R_{X_+Y_-}Z_+$ elde edilir.

Şimdi bazı kesit eğriliklerini hesaplamak mümkün olabilir.

Teorem 3.5.1. $\kappa < -\left(f^2 + \xi_j(f)\right)$ ile M bir global çatılı hemen hemen $f-$kosimplektik $(\kappa,\mu,\nu)-$ uzay olsun. M 'nin kesit eğriliği K,

$$K\left(X,\xi_j\right) = \kappa g(X,X) + \mu g(hX,X) + \upsilon g(\varphi hX,X) = \begin{cases} \kappa + \mu\lambda & if X \in D_+ \\ \kappa - \mu\lambda & if X \in D_- \end{cases} \qquad (3.66)$$

$$K(X,Y) = \begin{cases} s\left[f^2 + \xi_j(f)\right] & X,Y \in D_+ \\ s\left[f^2 + \xi_j(f)\right] & X,Y \in D_- \\ -s\left[f^2 + \xi_j(f)\right] - s\left(\kappa + f^2 + \xi_j(f)\right)\left(g(X,\varphi Y)\right) & X \in D_+, Y \in D_- \end{cases} \qquad (3.67)$$

ile belirlenir.

İspat. (3.67) ifadesi (3.58), (3.60) ve (3.61) ifadelerinin bir sonucu iken, (3.66) ise (3.35)'den direkt olarak çıkarılır.

Sonuç 3.5.1. $\kappa < -\left(f^2 + \xi_j(f)\right)$ ile M bir global çatılı hemen hemen $f-$kosimplektik $(\kappa,\mu,\nu)-$ uzay olsun. Ricci operatörü aşağıdaki özdeşlikleri sağlar.

$$Q = s\left[\left(-2\left[f^2 + \xi_j(f)\right]\right)\varphi^2 + \mu h + \left(2f(n-1) + \upsilon\right)(\varphi \circ h)\right] + 2n\kappa \sum_{j=1}^{s} \eta_j \otimes \xi \qquad (3.68)$$

$$Q \circ \varphi - \varphi \circ Q = 2s\left[\mu h \circ \varphi + \left(f(n-1) + \upsilon\right)\right] \qquad (3.69)$$

İspat. $\{e_1,...,e_n\}$, D_+ 'nın bir bazı olacak şekilde $\{e_1,...,e_n,\varphi e_1,...,\varphi e_n,\xi_1,...,\xi_s\}$ lokal bir φ bazı olsun ve $X = X_+ + X_- \in D_+ \oplus D_-$ olsun. (3.58), (3.60) ve (3.35) denklemlerinden;

$$QX_+ = s\left(-2\left[f^2 + \xi_j(f)\right] + \mu\lambda\right)X_+ + s\left(2f\lambda(n-1) + \upsilon\right)\varphi X_+ \qquad (3.70)$$

elde edilir. Öte yandan (3.59) ve (3.61)' den

$$QX_- = s\left(-2\left[f^2 + \xi_j(f)\right] - \mu\lambda\right)X_- - s\left(2f\lambda(n-1) + \upsilon\right)\varphi X_- \qquad (3.71)$$

elde edilir. (3.70), (3.71) alınarak ve $\varphi\xi_i = 2n\kappa\bar{\xi}$ göz önüne alınırsa (3.68) elde edilir. Son olarak, (3.69) özdeşliği (3.68)' den kolaylıkla elde edilir.

Sonuç 3.5.2. $\kappa < -\left(f^2 + \xi_j(f)\right)$ile M bir global çatılı hemen hemen $f-$kosimplektik $(\kappa, \mu, \nu)-$ uzay olsun. (M, g)'nin skaler eğriliği sabit ve aşağıdaki eşitlikle verilir:

$$S = 2ns\left(\kappa(2-n) - 2\left[f^2 + \xi_j(f)\right]n\right) \tag{3.72}$$

İspat. $\{e_1, ..., e_n\}$, D_+'nın bir bazı olacak şekilde $\{e_1, ..., e_n, \varphi e_1, ..., \varphi e_n, \xi_1, ..., \xi_s\}$ lokal bir φ bazı olsun. Daha sonra (3.58), (3.60) ve (3.35)'den

$$g(Qe_i, e_i) = ksn + \mu\lambda sn - s\left(\kappa + f^2 + \xi_j(f)\right)n^2 - s\left[f^2 + \xi_j(f)\right]n^2 \tag{3.73}$$

Ayrıca, (3.59), (3.61) ve (3.35)' den

$$g(Q\varphi e_i, e_i) = ksn - \mu\lambda sn - s\left(\kappa + f^2 + \xi_j(f)\right)n^2 - s\left[f^2 + \xi_j(f)\right]n^2 \tag{3.74}$$

Daha sonra (3.73), (3.74) ve $\varphi\xi_i = 2n\kappa\bar{\xi}$ ile (3.72) bulunur.

3.6.ÖRNEKLER

Örnek 3.6.1. R^{2n+s}' in standart koordinatları $(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n, z_1, ..., z_s)$ olarak tanımlansın.

$$M = \left\{ (x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n, z_1, ..., z_s) \middle| \sum_{j=''}^{s} z_j \neq 0 \right\}$$

ile tanımlanan $(2n+s)$ boyutlu $M \subset R^{2n+s}$ manifoldu verilsin. M 'nin bir global bazını,

$$x_i = \left(\sum_{j=1}^{s} z_j\right) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$y_i = -\frac{1}{\sum_{j=1}^{s} z_j} \frac{\partial}{\partial y_i}$$

$$\xi_j = \frac{\partial}{\partial z_j}, \ i = 1, 2, .., n, \ j = 1, 2, ..., s$$

şeklinde göz önüne alalım. Bu vektör alanlarının Lie parantez operatörleri

$$\left[\xi_j, x_i\right] = \frac{\delta_{ik}}{z_i} x_i$$

$$\left[\xi_j, y_i\right] = -\frac{3\delta_{ik}}{z_i} y_i$$

$$\left[x_i, x_l\right] = \left[y_i, y_l\right] = \left[x_i, y_l\right] = 0$$

dır. Burada $k \in \{1,2,....,s\}$, $i,l \in \{1,2,...,n\}$ dir.

M üzerinde yukarıdaki şekilde verilmiş bir $(\varphi, \xi_j, \eta^j, g)$ metrik $f-$yapı için

$$\eta_j = dz_j ,$$

$$g = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{s} z_j\right)^2} dx_i^{\ 2} + \left(\sum_{j=1}^{s} z_j\right)^6 dy_i^{\ 2} + \sum_{j=1}^{s} dz_j^{\ 2} \right)$$

$$\varphi(\xi_j) = 0$$

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = -\frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{s} z_j\right)^4} \frac{\partial}{\partial y_i}$$

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right) = \left(\sum_{j=1}^{s} z_j\right)^4 \frac{\partial}{\partial x_i}$$

olduğu açıktır.

Şimdi M 'nin global çatılı hemen hemen $f-$kosimplektik manifold olduğu gösterilecektir.

$d\eta_j = 0$ olduğu açıktır. Geriye $d\Omega = 2f\bar{\eta} \wedge \Omega$ olduğunu göstermek kalır.

$$\Omega_{ii} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, u\frac{\partial}{\partial y_i}\right) = \left(\sum_{j=1}^{s} z_j\right)^2$$

dışındaki tüm Ω_{ij} ’ler sıfırdır. Böylece

$$\Omega = \left(\sum_{j=1}^{s} z_j\right)^2 \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i$$

dir.

Ω' nin diferansiyeli

$$\Omega = 2\left(\sum_{j=1}^{s} z_j\right)\left(\sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i\right) \wedge \bar{\eta}$$

$$= 2\left(\frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{s} z_j\right)}\right)\bar{\eta} \wedge \Omega$$

olarak bulunur. Basit hesaplamalar ile φ ’nin Nijenheus torsiyon tensörünün sıfırdan farklı olduğu gösterilebilir.

Dolayısı ile manifold, $f = \dfrac{1}{\left(\sum_{j=1}^{s} z_j\right)}$ olacak şekilde bir global çatılı hemen hemen $f-$kosimplektik manifolddur.

Örnek 3.6.2. R^{2n+s} ’ in standart koordinatları $(x_1,...,x_n, y_1,...,y_n, z_1,...,z_s)$ olarak tanımlansın.

$$M = \left\{(x_1,...,x_n, y_1,...,y_n, z_1,...,z_s) \middle| \sum_{j=''}^{s} z_j \neq 0\right\}$$

ile tanımlanan $(2n+s)$ boyutlu $M \subset R^{2n+s}$ manifoldu verilsin. M ’nin bir global bazı,

$$x_i = e^{\left(\sum_{j=''}^{s} z_j\right)^2} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$y_i = e^{\left(\sum_{j=''}^{s} z_j\right)^2} \frac{\partial}{\partial y_i}$$

$$\xi_j = \frac{\partial}{\partial z_j} \ , i = 1,2,...,n, \ j = 1,2,...,s$$

şeklinde verilsin. $\{x_i, y_i, \xi_j\}$ vektör kümesinin her noktada lineer bağımsız olduğu açıktır. M üzerindeki Riemann metriği $i,k \in \{1,2,...,n\}$, $j \in \{1,2,...,s\}$ için,

$$g(x_i, x_i) = g(y_i, y_i) = g(\xi_j, \xi_j) = 1$$

$$g(x_i, y_k) = g(x_i, \xi_j) = g(y_k, \xi_j) = 0$$

şeklinde tanımlansın. Bu metrik

$$g = \frac{1}{e^{2\left(\sum_{j=1}^{s} z_j\right)^2}} \left(\sum_{i=1}^{n} dx_i \otimes dx_i + dy_i \otimes dyi \right) + \sum_{j=1}^{s} dz_j \otimes dz_j$$

şeklinde verilebilir.

M üzerinde ;

$$\eta^j = dz_j$$

$$\varphi(\xi_j) = 0$$

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial y_i}$$

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_i}$$

olacak şekilde η^j, 1-formu ve (1,1) tipli φ tensör alanı tanımlayalım. Böylece aşağıdaki koşullar sağlanacaktır:

$$\forall X \in (TM) \text{ için } \eta^{j}(x) = g(x, x_j)$$

$$\varphi(x_i) = y_i, \ \ \varphi(y_i) = -x_i$$

$$\varphi^2 x = -x + \sum_{j=1}^{s} \eta^{j}(X)\xi_j$$

$$g(\varphi x, \varphi y) = g(x, y) - \sum_{j=1}^{s} \eta^{j}(x)\eta^{j}(y)$$

Bu şekilde M üzerinde $(\varphi, \xi_j, \eta^j, g)$, $f-$yapısı kurulduktan sonra bu yapının $d\eta^{j} = 0$ ve $d\Omega = 2f\overline{\eta} \wedge \Omega$ koşullarını sağladığını göstermek kalır. $d\eta^{j} = 0$ olduğu açıktır.

$$\Omega_{ii} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \varphi\frac{\partial}{\partial y_i}\right) = -\frac{1}{e^{2\left(\sum_{j=1}^{s} z_j\right)^2}}$$

dışındaki tüm bileşenler sıfır olduğundan

$$\Omega = -\frac{1}{e^{2\left(\sum_{j=2}^{s} z_k\right)^2}} \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i$$

dir. Ω'nin dış türevi alınırsa

$$d\Omega = \frac{4\left(\sum_{j=1}^{s} z_j\right)}{e^{2\sum_{j=1}^{s}(z_j)^2}}\left(\sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i\right) \wedge \overline{\eta}$$

$$= 4\left(\sum_{j=1}^{s} z_j\right)\overline{\eta} \wedge \Omega$$

olarak bulunur. Basit hesaplamalar ile φ'nin Nijenheus torsiyon tensörünün sıfır olduğu gösterilebilir. Yani manifold normaldir.

Sonuç olarak bu şekilde tanımlı Manifold $f = \left(\sum_{j=1}^{s} z_j\right)$ olacak şekilde global çatılı hemen hemen $f-$kosimplektik manifolddur.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu yapılan çalışmalar sonucunda global çatılı hemen hemen $f-$ kosimplektik $(\kappa,\mu,\nu)-$ uzayları için genel bir sınıflandırma problemi hala açıktır. Ayrıca Ricci simetrik, Ricci yarı-simetrik, Pseudo simetrik ve Pseudo yarı-simetrik gibi özel tensör şartları altında $(\kappa,\mu,\nu)-$ uzayları için ilginç sonuçlar bulunabilir. Bundan başka *divR=0* ve *divC=0* eşitlikleri bu tür uzaylar için açık uçlu problemlerdir.

5. KAYNAKLAR

Aktan N., Yıldırım M., Murathan C., Almost $f-$ Cosymplectic Manifolds, *Mediterranean Journal Of Mathematics*, 11**(2014)**, 775-787

Blair, D. E., The theory of quasi-Sasakian structures, *J. Diff. Geometry*, **(**1**)** (**1967**) 331-345.

Blair D. E., Geometry of manifolds with structural group $U(n)\times O(s)$, *J. Diff. Geom.*, 4 (**1970)** 155-167.

Blair D. E., *Contact manifolds in Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, NewYork (**1970)**.

Blair D. E., Two remarks on contact metric structures, *Tohoku Math. J.*, 29 (**1977**) 319-324.

Blair D. E., Koufogiorgos T. and Papantoniou B. J., Contact metric manifolds satisfying a nullity condition, *Israel J. Math.*, 91 (1-3) (**1995**) 189-214.

Blair D. E., *Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds*, Progress in Mathematics, 203. Birkhâuser Boston, (**2002).**

Boeckx E., A full classification of contact metric (κ,μ) -spaces, *Illinois J. Math.*, 44(1) (**2000)** 212-219.

Boeckx E., Cho J. T., $\eta-$parallel contact metric spaces, *Differential geometry and its applications*, 22 (**2005)** 275-285.

Boeckx E., Cho J. T., Locally symmetric contact metric manifolds, *Monatsh. Math*., 148 (4) (**2006)** 269-281.

S.S Chern and R.S. Hamilton, On Riemannian metrics adapted to three-dimensional contact manifolds,*Lecture Notes in Math.*, vol. 1111, Springer, Berlin **(1985**) 279–308.

Chinea D., Gonzalez C., A classification of almost contact metric manifolds, *Annali di Matematica pura ed applicata*, 156 (4) (**1990)** 15-36.

Dacko P. and Olszak Z., On conformally flat almost cosymplectic manifolds with Kahler leaves, *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino*, 56 (1) (**1998)** 89-103.

Dacko P., Olszak Z., On almost cosymplectic $(\kappa,\mu,\nu)-$spaces, *Banach Center Publ.*, 69 (**2005)** 211-220.

Dacko P., Olszak Z., On almost cosymplectic $(-1,\mu,0)-$ spaces, *Central European Journal of Mathematics*, 3 (2) **(2005)** 318-330.

Dileo G., Pastore A. M., Almost Kenmotsu manifolds and local symmetry, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 14 (**2007)** 343-354.

Dileo G., Pastore M., Almost Kenmotsu manifolds and nullity distributions, *J. Geom., Birkhauser Verlag Basel.*, (**2009).**

Dileo G., Pastore M. 2009. Almost Kenmotsu manifolds with a condition of $\eta-$ parallelism, *Differential Geo. and its applications*, (27) (**2009)** 671-679.

Falcitelli M. and Pastore M., f-structure of Kenmotsu type, *Mediterr. J. Math.*, 3 **(2006)** 549--564.

Falcitelli M. and Pastore M., Almost Kenmotsu f-manifolds, *Balkan journal of geometry and its applications*, 12(1) **(2007)** 32-43.

Gallot S., Hulin D., Lafontaine J., *Riemann Geometry*, 3rd ed., XVI, 322 p., Springer Universitext, ISBN: 9783540204930, (**2004).**

Goldberg S. I., Yano K., Integrability of almost cosymplectic structure, *Pacific J. Math.*, 31 (**1969)** 373-382.

Goldberg S. I., Integrability of almost Kaehler manifolds, *Proceedings of the American Math. Soc.*, 21(1) (**1969)** 96-100.

Goldberg S.I. ve Yano K., On Normal Globally Framed f-Manifolds,*Tohoku Math. Jour.*, 22:362-370 (**1971**).

Hacısalihoğlu H. H., *Diferensiyel Geometri*, Cilt I, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, **(1993).**

Hacısalihoğlu H. H., *Diferensiyel Geometri*, Cilt II, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, **(2000)**.

Hacısalihoğlu H. H., Ekmekçi N., *Tensör Geometri*, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, **(2003).**

Ishihara S. ve Yano K., On Integrability Conditions of a Structure f Satisfying $f^3 + f = 0$, *Quart, J, Math, Oxford (2)*, 15:217-222 **(1964).**

J.Gray, Some global properties of contact structures, *Ann. Of Math.*, 69(**1959**) 421-450

Kenmotsu K., A class of contact Riemannian manifold, *Tohoku Math. Journal*, 24 **(1972)** 93-103.

Kim T. W., Pak H. K., Canonical foliations of certain classes of almost contact metric structures, *Acta Math. Sinica, Eng. Ser. Aug.*, 21(4) **(2005)** 841-846.

Kim T. W., Pak H. K., Criticality of characteristic vector fields on almost cosymplectic manifolds, *J. Korean Math. Soc.*, 44(3) **(2007)** 605-613.

O'neill B., *Semi Riemannian Geometry*, A. Press, London, (**1983**)**.**

Olszak Z., On almost cosymplectic manifolds, *Kodai Math*, 4(2) (**1981**) 239-250.

Olszak Z., Almost cosymplectic manifolds with Kaehlerian leaves, *Tensor N.S.*, 46 (**1987**) 117-124.

Olszak Z., Locally conformal almost cosymplectic manifolds, *Coll. Math., 57* (**1989**) 73-87.

Olszak Z., Dacko P., On conformally flat almost cosymplectic manifolds with Keahlerian leaves, *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, (*56) 1 (**1998**) 89-103.

Öztürk H. , Aktan N. , Murathan C., Almost α-Cosymplectic $(\kappa,\mu,\nu)-$ Spaces, *arXiv:1007.0527*.(**2010**).

Öztürk H., *Hemen Hemen α-Kosimplektik $f-$Manifoldlar,* Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, **(2009).**

Sağbaş D., $\varepsilon_\alpha -$*Almost S-Manifoldlar,* Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, **(2010).**

Sasaki, S., and Y.Hatakeyama, On differantiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure. II, *Tohokou Math J., 13(2),* **(1961)** 281-294

Sharpe R.W., *Differential Geometry*, Graduate Texts in Math., Springer, (**1997**).

Spivak M., *Calculus on Manifolds,* Reading, Massachusetts, W.A. Benjamin, Inc., ISBN: 0805902193, (**1965**).

Yano K., Kon M., Structures on manifolds, *Series in Pure Mathematics, 3.World Scientific Publishing Corp. Singapore,* (**1984**).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: Mustafa Yıldırım
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 17.01.1988 / İSTANBUL
Telefon	: (0507) 621 34 34
E-posta	: mustafayldrm24@gmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Yüksek Lisans	Düzce Üniversitesi	2012
Lisans	Trakya Üniversitesi	2010
Lise	Merkez Lisesi (Y.D.A)	2006

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2010-2011	Düzce Üniversitesi Kaynaşlı M.Y.O	Öğretim Elemanı
2011-2012	Birey Dersanesi	Matematik Öğretmeni
2012-2013	Habibler Anadolu Lisesi	Matematik Öğretmeni
2013-	Doğa Koleji	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce (YDS: 62.5)

Yayınlar

1. Aktan N., Balkan S. and **Yıldırım M.**, On weak symmetries of almost Kenmotsu (κ,μ,ν) -spaces, *7.Ankara Matematik Günleri, Bilkent Üniversitesi, Ankara-Türkiye,* ***(2012).***

2. Aktan N., Balkan S. and **Yıldırım M.**, On weak symmetries of almost Kenmotsu (κ,μ,ν)-spaces, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics Volume 42 (4) (2013), 447 – 453*

3. Aktan N., **Yıldırım M.** And Murathan C., Almost $f-$Coymplectic Manifolds, *Mediterr. J. Math. 11****(2014),*** *775-787*

4. Aktan N., **Yıldırım M.**, Balkan Y.S., A new type of framed manifolds, *Workshop on integral geometry and inverse problems, In honour of Prof. Yuri E Anikonov, Mart 27-28 2015, Zonguldak-Türkiye* ***(2015).***