T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

SİNGÜLER YARI RİEMANN HEMEN HEMEN DEĞME MANİFOLDLAR

DOKTORA TEZİ

GÜLHAN AYAR

MART 2016

DÜZCE

KABUL VE ONAY BELGESİ

Gülhan AYAR tarafından hazırlanan Singüler Yarı Riemann Hemen Hemen Değme Manifoldlar isimli lisansüstü tez çalışması, Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararı ile oluşturulan jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Üye
(Tez Danışmanı)
Prof. Dr. Nesip AKTAN
Necmettin Erbakan Üniversitesi

Üye
Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Düzce Üniversitesi

Üye
Doç. Dr. Erdal ÖZÜSAĞLAM
Aksaray Üniversitesi

Üye
Doç. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ
Afyon Koctepe Üniversitesi

Üye
Yrd. Doç. Dr. Arzu ÖZKOÇ
Düzce Üniversitesi

Tezin Savunulduğu Tarih: 31.03.2016

ONAY

Bu tez ile Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Gülhan AYAR'ın Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora derecesini almasını onamıştır.

Prof. Dr. Haldun MÜDERRİSOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

31 Mart 2016

Gülhan AYAR

Sevgili Aileme

TEŞEKKÜR

Doktora öğrenimim ve bu tezin hazırlanması süresince gösterdiği her türlü destek ve büyük yardımlardan dolayı çok değerli hocam Prof. Dr. Nesip AKTAN’a ve çalışma arkadaşlarıma en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Aynı zamanda Yurt Dışı Doktora Sırası Araştırma Burs Programı ile İspanya Sevilla Üniversitesi Geometri ve Topoloji Departmanına çalışmalarımı yapmak üzere gitmeme vesile olan TUBİTAK’a sağladığı imkanlardan dolayı minnettarlığımı sunarım.

Sevilla Üniversitesi’nde geçirdiğim 10 ay boyunca gösterdiği destek ve tezimin oluşmasına sağladığı katkılardan dolayı çok değerli hocam Prof. Dr. Alfonzo CARRIAZO ’ya teşekkürü bir borç bilirim.

Ve son olarak bu çalışma boyunca yardımlarını, maddi ve manevi her türlü desteklerini esirgemeyen sevgili annem Saime AYAR, babam Kemal AYAR ve ablam Nazan AYAR YILMAZ’ a herzaman yanımda oldukları için sonsuz sevgiler dilerim.

31 Mart 2016 **Gülhan AYAR**

İÇİNDEKİLER **Sayfa**

SİMGELER VE KISALTMALAR

D	Değme dağılımı
div	Divergens operatörü
J	Hemen hemen kompleks yapı
Φ	İkinci temel form
$M^n(c)$	c sabit eğrilikli uzay form
∇	Levi-Civita konneksiyonu
L	Lie türev operatörü
$\chi(M)$	M üzerindeki C^∞ vektör alanları uzayı
TM	M üzerindeki tanjant demeti
$TM^\perp$	M üzerindeki tanjant demetlerinin ortogonal tümleyeni
N	Nijenhuis tensör alanı
$O(s)$	Ortogonal grup
R	Riemann eğrilik tensörü
$U(n)$	Üniter grup
V	Vektör uzayı
$\overline{V}$	V vektör uzayının bölüm uzayı
$\hat{R}$	İç eğrilik tensörü
ψ	Lifleme
Π	Doğal izdüşüm dönüşümü

ÖZET

SİNGÜLER YARI RİEMANN HEMEN HEMEN DEĞME MANİFOLDLAR

Gülhan AYAR
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi
Danışman: Prof. Dr. Nesip AKTAN
Mart 2016, 84 sayfa

Değme manifoldlar, manifold teorisinde önemli bir yer teşkil etmektedir. Değme manifoldların geometrisi, temelini simplektik manifoldların teşkil ettiği tek boyutlu manifoldlar yardımıyla yapılmaktadır. Hem değme hem de simplektik manifoldlar klasik mekanikte uygulama alanı bulmaktadır. Değme metrik yapılarda, metriğin yapısı değiştirilerek, değme manifoldların birçok farklı sınıfı tanımlanmıştır. Ancak dejenere metrikli (singüler) değme manifoldların geometrisi ve bu tür manifoldların özel sınıfları üzerine daha önce çok az sayıda çalışma yapılmıştır. Bu bağlamda bu tez çalışmasıyla manifold teorisine yeni çalışma alanları kazandırılmıştır. Hazırlanan tez çalışmasında, daha önce yapılan bazı çalışmaların ışığında, singüler hemen hemen yarı Riemann değme manifoldların tanımı verilerek bunlara ait bazı eğrilik özellikleri incelenmiş ayrıca bu tip manifoldların özel bir sınıfı olan singüler yarı Riemann Sasakian manifoldlarının geometrik yapısı üzerine yoğunlaşılmıştır

Anahtar sözcükler: Değme Manifold, Hemen Hemen Yarı Riemann Manifold, Singüler Manifold, Singüler Yarı Riemann Hemen Hemen Değme Manifold.

ABSTRACT

SINGULAR SEMI RIEMANNIAN ALMOST CONTACT MANIFOLDS

Gülhan AYAR
Duzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Departmant of Mathematics
Doctoral Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Nesip Aktan
March 2016, 84 pages

Contact manifolds in manifold theory have a very important place. The geometry of contact manifolds, which constitute the basis for symplectic manifolds are made with the help of one dimensional manifolds. Both contact and simplectic manifolds could find the area for applications in classical mechanics. In contact metric structures, changing the structure of the metric, many different classes of contact manifolds have been identified. However, very few studies, on geometry of degenerate (singular) metric manifolds and special classes of such manifolds are made before. In this context, new areas were brought to the manifold theory with this thesis. In the prepared thesis, in the light of the some previous works, giving the definition of singular semi riemannian almost contact manifolds, has examined some curvature properties of these manifolds and also has focused on geometric structures of Singuler Semi-Riemannian Almost Sasakian manifolds which are a special class of such manifolds.

Keywords: Contact Manifold, Almost Semi Riemannian Manifold, Singular Manifold, Singular Semi Riemannian Almost Contact Manifold

EXTENDED ABSTRACT

SINGULAR SEMI RIEMANNIAN ALMOST CONTACT MANIFOLDS

Gülhan AYAR
Duzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Departmant of Mathematics
Doctoral Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Nesip Aktan
March 2016, 84 pages

1. INTRODUCTION:

The purpose of this work is to study the Singuler Semi-Riemannian Almost Contact manifolds. The geometry of manifolds with degenerate indefnite metrics has been studied by Demir Kupeli [6]. In that book it is shown that a manifold M with a degenerate indefinite metric g admits a geometric structure if and only if g is Lie parallel along the vector fields on M. In this case we call (M, g) a Singular Semi-Riemannian manifold. Then it is possible to attach a nondegenerate tangent bundle to (M, g) which admits a connection whose curvature tensor satisfies the usual identities of the curvature tensor of Levi Civita connection. We call this connection the Kozsul Connection of (M, g).

2. MATERIAL AND METHODS:

The plan of this paper is as follows: In section 1, we will give the introduction section and provide a generel knowledge of literature. In section 2 we will give the main definations on an almost contact manifold and we will give some properties of Semi-Riemannian manifolds. Also we will give the Kozsul Derivative, Kozsul Connection and curvature properties of Singular Semi-Riemannian manifolds. In section 3 we will study to introduce the degenerate geometric structures on Singular Semi-Riemannian Almost Contact Manifolds and we will give some definations and properties of this kind of manifolds. Also in this section, will give an important example of Singular Semi Riemannian Almost Contact Manifolds.

And finally in section 4 we will give some conclusions and comments about this study.

3. RESULTS AND DISCUSSIONS:

In this study, we focus on Singular Semi-Riemannian Almost Contact Manifolds and considering Demir Kupeli`s book on Singular Semi-Riemannian Geometry [6], we will try to get a new class of Singular Semi-Riemannian manifolds.

4. CONCLUSION AND OUTLOOK:

In this study, we have a new class of Singuler Manifolds. Submanifolds of this type of manifolds are open problems, also under some symmetry conditions, one can obtain very important results.

1. GİRİŞ

Manifold teorisinde hemen hemen değme manifoldları çok önemli bir yere sahiptir. Değme metrik yapılar birçok araştırmacı tarafından yoğun bir şekilde çalışılmıştır. Blair 2002 yılında yapmış olduğu monografında bu alanda elde edilen sonuçlara geniş ve detaylı bir bakış açısı kazandırmıştır.

$(2n+1)$-boyutlu bir C sınıfından diferensiyellenebilir M manifoldunun tanjant demetlerinin grup yapısı $U(n)\times 1$ tipine indirgenebiliyorsa M ye hemen hemen değme manifold denir. İlk olarak, 1959 yılında J.Gray tek boyutlu manifoldlar üzerinde yaptığı çalışmada $U(n)\times 1$ yapısal grubunun bir indirgenmesiyle hemen hemen değme yapıları tanımlamıştır. Buna göre, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme yapısı

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi, \quad \eta(\xi) = 1$$

denklemlerini sağlayan $(1,1)$-tipli bir tensör alanı φ, bir vektör alanı ξ ve bir $1-$form olan η ile oluşturulan $(\varphi, \xi, \eta)-$üçlüsüyle ifade edilir.

Değme yarı- Riemann yapılar (η, g); η değme $1-$form ve g de bu yapıyla ilgili yarı-Riemann metrik olmak üzere, değme metrik yapıların bir genelleştirilmesidir. 1960 yılında Sasaki (φ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı üzerinde

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)$$
$$\eta(X) = g(X, \xi)$$

eşitlikleriyle verilen uygun bir g metriği tanımlayarak hemen hemen değme metrik yapıyı tam olarak ifade etmiştir. 1961 yılında Sasaki ve Hatakeyama hemen hemen değme manifoldlar için normallik şartının J kompleks yapısının $J^2 = -I$ integrallenebilmesi olduğunu ispatlamışlardır. Değme yarı- Riemann metrik yapıların fiziksel bağlantıları Duggal tarafından 1990 yılında ifade edilmiştir. Yarı-Riemann metriklerle donatılmış değme yapılar ise ilk kez Takahashi tarafından çalışılmıştır ki bu çalışmada Sasaki koşulu göz önünde bulundurulmuştur. Sonraları bu bilgilere dayanılarak, konuyla ilgili birçok araştırma Sasakian yarı-Riemann metriklerle ilgili olmuştur.

Diğer bir taraftan değme yarı-Riemann metrikli manifoldların sistematik genel bir çalışması Blair tarafından (2010) yapılmıştır. Bu çalışmada değme Yarı-Riemann metrik manifoldların bazı temel formülleri, genel homotetik ve diğer deformasyonları, sabit kesit eğrilikli yarı-Riemann metrik manifoldların sınıflandırılması ve bazı yerel simetrik yarı-Riemann metrik manifoldların sınıflandırılması gibi bölümlere yer verilmiştir.

Dejenere yarı metrikli manifoldların geometrisi Demir Kupeli [6] tarafından çalışılmıştır. Yapılan çalışmada dejenere g yarı metrikli bir M manifoldunun M üzerindeki vektör alanları boyunca Lie paralel olması durumunda bir geometrik yapı oluşturduğu gösterilmiştir. Bu durumda (M, g)'ye singüler yarı-Riemannian manifoldu denir. Böylelikle (M, g) ye eğrilik tensörü Levi Civita konneksiyonun genel özelliklerini sağlayan dejenere olmayan bir tanjant demeti eklemek mümkündür. Bu konneksiyona (M, g) nin Kozsul konneksiyonu denir.

Bu tez çalışmasında singüler yarı Riemann manifoldların yeni bir sınıfı olan singüler yarı Riemann hemen hemen değme manifoldlar tanımlanmış ve bu tür manifoldların bazı temel özellikleri incelenmiştir.

Çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Bu bölüm giriş kısmına ayrılarak manifold teorisi ile ilgili temel kavramlara ve genel bir literatür bilgisine yer verilmiş, hemen hemen değme manifoldların yapısından ve sağladığı özelliklerden bahsedilmiştir. İkinci bölümde, çalışmalarımız için gerekli olan singüler manifoldlara ait temel kavramlardan söz edilmiştir. Üçüncü bölümde, singüler yarı-Riemann hemen hemen değme manifoldları tanımlanmış, bu tip manifoldların sağladığı geometrik özellikler ve bazı eğrilik özellikleri verilerek bu tip manifoldların yapısı incelenmiştir. Ayrıca konu ile ilgili önemli bir örnek yine bu bölümde verilmiştir. Son bölüm olan dördüncü bölüm ise sonuç ve önerilere ayrılarak açık problemlere yer verilmiştir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde referans verilmeyen tanımlar, teorem ve sonuçlar [6] den derlenmiştir.

2.1. REEL İÇ ÇARPIM UZAYLARININ LİNEER CEBİRİ

2.1.1. Reel İç Çarpım Uzayları

$b: V\times V \to R$, V üzerinde bilineer bir fonksiyon olsun. Lineer cebirden bilindiği üzere, $L_b, R_b : V \to V^*$, $(L_b x)(y) = b(x,y) = (R_b y)(x)$ şeklinde tanımlı lineer dönüşümler ise bu durumda $rank(L_b) = rank(R_b) = r$ olup r'ye b'nin rankı denir [19]. Burada V^*, V uzayının dual uzayıdır. Eğer

$$N_b^l = \{x \in V \mid b(x,y) = 0 \ \forall y \in V\}$$

ve

$$N_b^r = \{y \in V \mid b(x,y) = 0 \ \forall x \in V\}$$

şeklinde tanımlanırsa, $N_b^l = çek\ L_b$ ve $N_b^r = çek\ R_b$ olduğu görülür. Eğer $n = r$, yani $N_b^l = \{0\} = N_b^r$ ise V üzerinde tanımlı b bilineer fonksiyona dejenere değildir denir. V üzerindeki simetrik bir bilineer fonksiyona, bilineer form ve yarı-simetrik bilineer fonksiyona da yarı form denir. Eğer b bilineer veya yarı form ise $N_b^l = N_b^r = N_b$ olup, N_b'ye b'nin dejenere uzayı denir. Eğer b, V üzerinde tanımlı bir bilineer form ise;

1. $b(\alpha_i, \alpha_j) = 0 \quad i \neq j$ için,

2. $b(\alpha_i, \alpha_i) = 0 \quad 1 \le i \le \mu$ için,

3. $b(\alpha_i, \alpha_i) = -1 \quad \mu + 1 \le i \le \mu + \nu$ için,

4. $b(\alpha_i, \alpha_i) = 1 \quad \mu + \nu + 1 \le i \le n = \mu + \nu + \nu^*$ için,

özelliklerini sağlayan bir $\mathrm{B} = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ bazı vardır. Burada, $\mu (= \dim N_b)$, ν, ν^* bazı tamsayılardır ve (μ, ν, ν^*) üçlüsüne de b'nin tipi denir [8]. Ayrıca, B'ye de V'nin ortonormal bazı denir.

Tanım 2.1.1.1. V üzerinde tanımlı (μ, ν, ν^*) tipindeki bir g bilineer forma (μ, ν, ν^*) tipinde bir iç çarpım denir. Özel olarak, eğer $\mu = 0$ ise, yani $N_g = \{0\}$ oluyorsa, g'ye

$(\nu,\ \nu^*)$ tipinde dejenere olmayan bir iç çarpım denir [1].

Tanım 2.1.1.2. Eğer g, V üzerinde $(\mu,\ \nu,\ \nu^*)$ tipinde bir iç çarpım ise, $(V,\ g)$ de $(\mu,\ \nu,\ \nu^*)$ tipinde bir iç çarpım uzayı olur. Eğer g, $(\nu,\ \nu^*)$ tipinde dejenere olmayan bir iç çarpım ise $(V,\ g)$ de $(\nu,\ \nu^*)$ tipinde dejenere olmayan bir iç çarpım uzayı olur. Sıfırdan farklı bir $u \in V$ vektörü, eğer $u \in N_g$ oluyorsa u 'ya dejeneredir denir. Dejenere olmayan sıfırdan farklı bir $v \in V$ vektörüne, eğer $g(v,v)=0$ ise null, $g(v,v)<0$ ise timelike ve $g(v,v)>0$ ise spacelike denir. Dejenere ve null olmayan bir $v \in V$ vektörü için eğer $|g(v,v)|=1$ ise v 'ye birim vektör denir [1].

$(V,\ g)$, $(\mu,\ \nu,\ \nu^*)$ tipinde olsun. Bu durumda, $\mathrm{b}: \mathrm{V} \to V^*$ musiki dönüşümü $\alpha^b = L_g\alpha\left(= R_g\alpha\right)$ şeklinde tanımlanır. b 'nin bir izomorfizm olması için gerekli ve yeterli koşul $\mu = 0$ olmasıdır. Bu durumda, onun tersi $\#: \mathrm{V}^* \to V$ ile gösterilir [1].

Yardımcı Teorem 2.1.1.1. $(V,\ g)$, $(\mu,\ \nu,\ \nu^*)$ tipinde olsun. V^* 'daki bir ω lineer fonksiyonelin b 'nin görüntü kümesinde olması için gerekli ve yeterli koşul her $u \in N_g$ için $\omega(u)=0$ olmasıdır [1].

İspat. $\Rightarrow$: $\alpha \in V$ ve $\alpha^b = \omega$ olsun. Buradan, her $\alpha \in V$ için $\omega(u) = \alpha^b(u) = g(u,\alpha) = 0$ olduğu açıktır. $\Leftarrow$: $\mathrm{B} = \{\alpha_1,...,\alpha_n\}$, V 'nin bir ortonormal bazı ve $\mathrm{B}^* = \{\alpha^1,...,\alpha^n\}$ da V^* dual uzayının bir bazı olsun. Buradan, $\omega_{\mathrm{i}} = \omega(\alpha_i)$ olmak üzere $\omega = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \omega_i\alpha_i$ olduğu görülür. Fakat, her $u \in N_g$ için $\omega(u)=0$ olduğundan her $i = 1,...,\mu$ için $\omega_i = 0$ olur. Ayrıca, her $\mu+1 \le i \le \mu+\nu$ için $\alpha^i = -\alpha_i^b$ ve her $\mu+\nu+1 \le i \le n$ için $\alpha^i = \alpha_i^b$ olduğu görülür. Böylece,

$$\omega = -\sum_{i=\mu+1}^{\mu+\nu} \omega_i\alpha_i^b + \sum_{i=\mu+\nu+1}^{n} \omega_i\alpha_i^b$$

elde edilir. Bu ise

$$\alpha = -\sum_{i=\mu+1}^{\mu+\nu} \omega_i\alpha_i + \sum_{i=\mu+\nu+1}^{n} \omega_i\alpha_i$$

vektörünün $\alpha^b = \omega$ ifadesini sağladığını gösterir.

Yorum 2.1.1.1. Eğer W, N_g uzayının tümleyen uzayı ise g 'nin W üzerine kısıtlanışı dejenere değildir. Böylece, bir önceki teoremde belirtilen $\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ baz vektörleri W'nın bir ortonormal bazı olacak şekilde $\{\alpha_{\mu+1},...,\alpha_n\}$ şeklinde seçilebilir. Bu durumda, b musiki dönüşümünün W'ya kısıtlanışı, W'dan $\{\omega\in V^* \mid \omega(u)=0,\ \forall u\in N_g\}$ lineer fonksiyonellerin kümesine tanımlı bir izomorfizm haline gelir [1].

2.1.2. Dejenere Olmayan İç Çarpım Uzaylarının Alt Uzayları

$\left(\mu'\geq 1,\ \nu',\ \nu^{*'}\right)$ tipindeki iç çarpım uzaylarının önemi, bu uzayların $(\nu\geq 1,\ \nu^*\geq 1)$ tipindeki dejenere olmayan iç çarpım uzayların alt uzayları olmasından gelmektedir.

Tanım 2.1.2.1. $(V,\ g)$, $(\nu,\ \nu^*)$ tipinde dejenere olmayan bir iç çarpım uzayı olsun. W, V'nin bir alt uzayı olmak üzere, eğer g'nin W üzerine kısıtlaması g_W dejenere değilse W'ya V'nin dejenere olmayan alt uzayı denir. Aksi takdirde, W V'nin dejenere alt uzayı olarak adlandırılır. Eğer g_W $\left(\mu',\ \nu',\ \nu^{*'}\right)$ tipinde ise W da $\left(\mu',\ \nu',\ \nu^{*'}\right)$ tipindedir denir. $(V,\ g)$, $(\nu,\ \nu^*)$ tipinde bir iç çarpım uzayı olsun. Bir $x\in V$ ve bir $y\in V$ vektörü için, eğer $g(x,y)=0$ oluyorsa x vektörü, y vektörüne diktir denir. Eğer bu vektörler dejenere ve null olmadıkları zaman ortogonal ve birim vektörler ise bu vektörlere ortonormal vektörler denir. W'ya ortogonal olan uzay, $W^{\perp}=\{x\in V \mid g(x,y)=0, \forall y\in W\}$ şeklinde tanımlanır [6].

Yardımcı Teorem 2.1.2.1. $(V,\ g)$, $(\nu,\ \nu^*)$ tipinde dejenere olmayan iç çarpım uzayının bir alt uzayı W olsun. Bu durumda

(a) $\dim W+\dim W^{\perp}=\dim V=n$

(b) $(W^{\perp})^{\perp}=W$

(c) W'nın, V'nin dejenere olmayan alt uzayı olması için gerekli ve yeterli koşul $W\cap W^{\perp}=\{0\}$ olmasıdır. Bunun olması için gerekli ve yeterli koşul ise $W\oplus W^{\perp}=V$ olmasıdır [6].

İspat. (a) W'nın, bir bazı $\{\alpha_1,...,\alpha_k\}$ ve $\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ de, V'nin bir bazı için $\{\alpha_1,...,\alpha_k\}$ bazının tümleyeni olsun. Bu durumda, $x\in W^{\perp}$ olması için gerekli ve yeterli koşul her $i=1,2,...,k$ için $g(x,\alpha_i)=0$ olmasıdır. $x=\sum_{i=1}^{n}x^i\alpha_i$ ve $g_{ij}=g(\alpha_i,\alpha_j)$ olsun. Böylece, her $i=1,2,...,k$ için $\sum_{j=1}^{n} x^j g_{ji} = 0$ olur. Fakat, $\lfloor g_{ij} \rfloor$ matrisi singüler olmadığından, yukarıdaki lineer sistemin katsayılar matrisinin rankı k olur ve buradan onun çözüm uzayının $(n-k)$-boyutlu olduğu görülür. Bu ise, $\dim W^{\perp} = \dim V - \dim W$ olduğu anlamına gelir.

(b) (a) şıkkı göz önüne alınırsa, $W \subseteq (W^{\perp})^{\perp}$ ve $\dim W = \dim (W^{\perp})^{\perp}$ olduğundan $(W^{\perp})^{\perp} = W$ elde edilir.

(c) İlk olarak, eğer $u \in N_{g_W}$ ise u, W'ya ortogonal olur ve böylece $u \in W^{\perp}$'dır. Buradan $N_{g_W} \subseteq W \cap W^{\perp}$ olduğu elde edilir. Ayrıca, eğer $u \in W \cap W^{\perp}$ ise u, W'ya ortogonal olur ve böylece $u \in N_{g_W}$ ifadesi elde edilir. Bu sayede $N_{g_W} = W \cap W^{\perp}$ olduğu bulunur. Bu ise, W'nın dejenere olmaması için gerekli ve yeterli koşulun $W \cap W^{\perp} = \{0\}$ olduğu anlamına gelir. Son olarak, $\dim(W + W^{\perp}) + \dim(W \cap W^{\perp}) = \dim(W) + \dim(W^{\perp})$ olduğundan, $V = W \oplus W^{\perp}$ ifadesinin sağlanması, ancak ve ancak $W \cap W^{\perp} = \{0\}$ olmasıyla mümkündür.

Yorum 2.1.2.1. $(W^{\perp})^{\perp} = W$ olduğundan, $N_{g_W} = W \cap W^{\perp} = N_{g_{W^{\perp}}}$ eşitliği elde edilir.

V'nin bir W alt uzayı için, eğer $g_W = 0$ ise yani W, $(\mu', 0, 0)$ tipinde ise W tamamen dejeneredir denir. Böylece, $\dim W = \mu'$ olur [6].

Yardımcı Teorem 2.1.2.2. W, (ν, ν^*) tipinde dejenere olmayan bir (V, g) uzayın μ'-boyutlu tamamen dejenere alt uzayı olsun. Bu durumda, (V, g)'de her $i = 1,2,...,\mu'$ için, $g(x_i, x_i) = -g(y_i, y_i)$ olacak şekilde null olmayan $\{x_1, y_1, ..., x_{\mu'}, y_{\mu'}\}$ vektörler kümesi vardır öyle ki, $\{u_1 = x_1 + y_1, ..., u_{\mu'} = x_{\mu'} + y_{\mu'}\}$ kümesi W'nın bir bazı olur [6].

İspat. $x_1, y_1 \in V$, $u_1 = x_1 + y_1$ şartını sağlayan ortonormal null olmayan vektörler olsun ve böylece $g(x_1, x_1) = -g(y_1, y_1)$ ifadesi sağlanır. Ayrıca, $U_1 = span\{x_1, y_1\}$ ve V'de U_1'e ortogonal olan uzay $U_1^{\perp}$ olsun. Bu durumda, $W \cap U_1^{\perp}$ uzayı, W'nın $(\mu' - 1)$-boyutlu alt uzayı olması gerektiği gösterilsin. Aşağıdaki ifade sağlanır.

$$\dim\left(W+U_1^{\perp}\right)+\dim\left(W\cap U_1^{\perp}\right)=\dim W+\dim U_1^{\perp},$$
$$\dim\left(W\cap U_1^{\perp}\right)=\mu'+n-2-\dim\left(W+U_1^{\perp}\right).$$

Bu yüzden $\dim\left(W+U_1^{\perp}\right)=n-1$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Bunun için, ilk olarak, $u_1\in W$ olduğundan $\dim\left(W+U_1^{\perp}\right)\geq n-1$ olur. $\dim\left(W+U_1^{\perp}\right)$, n olamayacağından, bu durumda eğer, u_1' den lineer bağımsız bir $v\in U_1$ varsa, $\omega\in W$ vardır öyle ki, $z\in U_1^{\perp}$ için $v=\omega+z$ yazılabilir. Böylece, v u_1'e ortogonal olur. Bu ise bir çelişkidir. Çünkü, U_1'de lineer bağımsız iki vektör birbirine dik olamaz. Şimdi $x_2,y_2\in U_1^{\perp}$, $u_2=x_2+y_2\in W\cap U_1^{\perp}$ şartını sağlayan ortonormal vektörler ve $U_2=span\{x_1,y_1,x_2,y_2\}$ olsun. Bu durumda, yukarıdakine benzer olarak, $W\cap U_2^{\perp}$ uzayı, W'nın $U_2^{\perp}$ tarafından kapsanan $(\mu'-2)$-boyutlu alt uzayı olur. Bu şekilde devam edilerek, $\{u_1=x_1+y_1,...,u_{\mu'}=x_{\mu'}+y_{\mu'}\}$ kümesi W'nın bir bazı olacak şekilde $x_1,y_1,...,x_{\mu'},y_{\mu'}\in V$ ortonormal vektörler elde edilir.

Önerme 2.1.2.1. Eğer W, (ν,ν^*) tipinde dejenere olmayan bir (V,g) uzayının $\left(\mu',\nu',\nu^{*'}\right)$ tipinde bir alt uzayı ise, $W^{\perp}$ de $\left(\mu',\nu-\mu'-\nu',\nu^*-\mu'-\nu^{*'}\right)$ tipindedir [6].

İspat. $N_{g_W}=W\cap W^{\perp}=N_{g_{W^{\perp}}}$ olduğunda, $\dim N_{g_{W^{\perp}}}=\mu'$ olduğu görülür. Şimdi U_1 ve U_2 sırasıyla, W'da $N_{g_W}=N_{g_{W^{\perp}}}$ uzaylarının tümleyen uzayları olsun. Burada, W ve $W^{\perp}$ sırasıyla $\left(\mu',\nu',\nu^{*'}\right)$ ve $\left(\mu',\nu'',\nu^{*''}\right)$ tiplerinde olsunlar. Bu durumda, $U=U_1\oplus U_2$, V'nin $\left(\nu'+\nu'',\nu^{*'}+\nu^{*''}\right)$ tipinde dejenere olmayan bir alt uzayıdır öyle ki, $N_{g_{W^{\perp}}}\subseteq U^{\perp}$ olur. $U^{\perp}$ dejenere olmadığından $N_{g_{W^{\perp}}}$, $U^{\perp}$'de tamamen dejenere olduğundan, Yardımcı Teorem 2.1.2.2. ye göre $\{u_1=x_1+y_1,...,u_{\mu'}=x_{\mu'}+y_{\nu'}\}$ kümesi $N_{g_{W^{\perp}}}$'nin bir bazı olacak şekilde $x_1,y_1,...,x_{\mu'},y_{\mu'}\in U^{\perp}$ ortonormal vektörleri vardır. $\{x_1,y_1,...,x_{\mu'},y_{\mu'}\}$ kümesi $U^{\perp}$ uzayını gerer. Eğer böyle olmasaydı, null olmayan bir

$z \in U^{\perp}$ olurdu öyle ki, $\{x_1, y_1, ..., x_{\mu'}, y_{\mu'}\}$ kümesine ortogonal olurdu. Fakat, bu durumda, $z \in W \cap W^{\perp}$ olduğu elde edilirdi. Bu ise $W \cap W^{\perp}$ uzayının tamamen dejenere olmasıyla çelişir. Bu yüzden, $V = U^{\perp} \oplus U_1 \oplus U_2$ olup, $\mu' + \nu' + \nu'' = \nu$ ve $\mu' + \nu^{*'} + \nu^{*''} = \nu^*$ olduğu bulunur. Böylece $\nu'' = \nu - \mu' - \nu'$ ve $\nu^{*''} = \nu^* - \mu' - \nu^{*'}$ ifadeleri elde edilir.

Önerme 2.1.2.2. Eğer W, (ν, ν^*) tipinde dejenere olmayan bir (V, g) uzayının $\left(\mu', \nu', \nu^{*'}\right)$ tipinde bir alt uzayı ise, $N_{g_{W^{\perp}}} = W + W^{\perp}$ olur ve buradan da $N_{g_{W^{\perp}}}$ 'nin $(\mu', \nu - \mu', \nu^* - \mu')$ tipinde olduğu elde edilir [6].

İspat. $W \cap W^{\perp} = N_{g_W}$ olduğundan, Yardımcı Teorem 2.1.2.1, Önerme 2.1.2.1 ve

$$\dim(W + W^{\perp}) + \dim(W \cap W^{\perp}) = \dim W + \dim W^{\perp}$$

şartından

$$\begin{aligned}\dim(W + W^{\perp}) &= \mu' + \nu' + \nu^{*'} + \mu' + \nu - \mu' - \nu' + \nu^* - \mu' - \nu^{*'} - \mu' \\ &= \nu + \nu^* - \mu' \\ &= N_{g_W}^{\perp}\end{aligned}$$

dır.

Böylece, $W + W^{\perp} \subseteq N_{g_W}^{\perp}$ olduğundan, $N_{g_W}^{\perp} = W + W^{\perp}$ ifadesi bulunur. Buradan, $N_{g_W}^{\perp}$ 'nin $(\mu', \nu - \mu', \nu^* - \mu')$ tipinde olduğu görülür.

2.1.3. Dejenere Olmayan Bölüm Uzayları

W, V bir alt uzayı olsun. $x \in V$ için, eğer $x - y \in W$ oluyorsa, x W modülüne göre $y \in V$ 'ye denktir denir ve $x \equiv y (\operatorname{mod} W)$ ile gösterilir. $x \equiv y (\operatorname{mod} W)$ ifadesi V üzerinde bir denklik bağıntısıdır ve $\overline{V} = V / W$ denklik sınıflarının kümesi bir vektör uzayı yapısı oluşturur öyle ki, $\prod : V \to \overline{V}$ doğal izdüşümü lineerdir. Burada $\prod(x)$, x'i içeren denklik sınıfıdır. Ayrıca, $\dim \overline{V} = \dim V - \dim W$ ifadesi sağlanır [8].

Tanım 2.1.3.1. (V,g), (μ,ν,ν^*) tipinde olsun. (V,g)'nin $(\overline{V},\overline{g})$ dejenere olmayan bölüm uzayı, $x,y \in V$ olmak üzere $\overline{V} = V / N_g$ ve $\overline{g}(\overline{x},\overline{y}) = g(x,y)$ ile tanımlanır. Burada $\prod(x) = \overline{x}$ ve $\prod(y) = \overline{y}$ şeklindedir [6].

$\overline{g}$ iyi tanımlı ve (ν,ν^*) olduğu gösterilsin. Bunun için, ilk olarak, $\prod(x) = \prod(x') = \overline{x}$ ve $\prod(y) = \prod(y') = \overline{y}$ olacak şekilde $x, x', y, y' \in V$ verilsin. Bu durumda, $x = x' + u$ ve $y = y' + \omega$ olacak şekilde $u, \omega \in N_g$ vardır. Buradan, $\overline{g}(\overline{x},\overline{y}) = g(x,y) = g(x'+u, y'+\omega) = g(x',y')$ olur. Yani, $\overline{x}$ ve $\overline{y}$'nin temsillerinin seçiminden bağımsızdır. Ayrıca $\overline{g}$ dejenere değildir. $\overline{g}(\overline{x},\overline{y}) = 0$ şartını sağlayan $\overline{x} \in \overline{N}_{\overline{g}}$ için bir $\overline{y} \in \overline{V}$ vardır, yani $\prod(x) = \overline{x}$ ve $\prod(y) = \overline{y}$ şartını sağlayan her $y \in V$ $g(x,y) = 0$ olur. Açıkça, $\overline{g}$ (ν,ν^*) tipindedir.

(V,g), (μ,ν,ν^*) tipinde bir iç çarpım uzayı ve $(\overline{V},\overline{g})$ de (V,g)'nin dejenere olmayan bölüm uzayı olsun. N_g'nin V içindeki bir W tümleyen uzayına, $\overline{V}$'nin geometrik gerçekleşimi denir. Gerçekten, g_W'nin dejenere olmadığı ve $\prod|_W : W \to \overline{V}$ lineer bir izometri olduğu kolayca görülebilir.

Tanım 2.1.3.2. (V,g), (μ,ν,ν^*) tipinde ve W da V'nin bir alt uzayı olsun. Bu durumda,

(a) $\prod_W(x) = \overline{x}$ ve $\prod_W(y) = \overline{y}$ şartını sağlayan her $x,y \in W$ için $\overline{W} = W / N_{g_W}$ ve $\overline{g}_W(\overline{x},\overline{y}) = g_W(x,y)$ olmak üzere, $(\overline{W},\overline{g}_W)$'ye (W,g_W)'nin dejenere olmayan bölüm uzayı denir. Burada $\prod_W : W \to \overline{W}$ doğal izdüşümdür [6].

(b) $\prod_{W^\perp}(x) = \overline{x}$ ve $\prod_{W^\perp}(y) = \overline{y}$ şartını sağlayan her $x,y \in W^\perp$ için $\overline{W}^\perp = W^\perp / N_{g_W}$ ve $\overline{g}_{W^\perp}(\overline{x},\overline{y}) = g_{W^\perp}(x,y)$ olmak üzere, $(\overline{W}^\perp,\overline{g}_{W^\perp})$'ye W'nın dejenere olmayan ortogonal bölüm uzayı denir. Burada $\prod_{W^\perp} : W^\perp \to \overline{W}^\perp$ doğal izdüşümdür [6].

(c) $\prod_{N_{g_W}^\perp}(x) = \overline{x}$ ve $\prod_{N_{g_W}^\perp}(y) = \overline{y}$ şartını sağlayan her $x,y \in N_{g_W}^\perp$ için $\overline{N}_{g_W}^\perp = N_{g_W}^\perp / N_{g_W}$

ve $\bar{g}_{N_{g_W}^{\perp}}(\bar{x},\bar{y}) = g_{N_{g_W}^{\perp}}(x,y)$ olmak üzere, $\left(\overline{N}_{g_W}^{\perp}, \bar{g}_{N_{g_W}^{\perp}}\right)$'ye W 'nın dejenere olmayan tam bölüm uzayı denir. Burada $\prod_{N_{g_W}^{\perp}} : N_{g_W}^{\perp} \to \overline{N}_{g_W}^{\perp}$ doğal izdüşümdür [6].

Yorum 2.1.3.1. Önerme 2.1.2.1 ve Önerme 2.1.2.2. göz önüne alınırsa, eğer W $\left(\mu', \nu', \nu^{*'}\right)$ tipinde ve (V,g) de (ν,ν^*) tipinde dejenere olmayan ise, bu durumda $(\overline{W},\bar{g}_W)$, $(\overline{W}^{\perp},\bar{g}_{W^{\perp}})$ ve $\left(\overline{N}_{g_W}^{\perp}, \bar{g}_{N_{g_W}^{\perp}}\right)$ uzayları da dejenere değildir ve sırasıyla $\left(\nu',\nu^{*'}\right)$, $\left(\nu-\mu'-\nu',\nu^*-\mu'-\nu^{*'}\right)$ ve $(\nu-\mu',\nu^*-\mu')$ tiplerindedir. Ayrıca $\overline{N}_{g_W}^{\perp} = \overline{W} \oplus \overline{W}^{\perp}$ şeklinde yazılabilir [6].

2.1.4. Dejenere Olmayan İç Çarpım Uzayları Üzerinde Tanımlı Bilineer Formlar

(V,g), (ν,ν^*) tipinde dejenere olmayan ve b de V üzerinde tanımlı bilineer form olsun. Eğer $\nu = 0$ veya $\nu^* = 0$ ise, $b(x,x)$ birim vektörler kümesi üzerinde sınırlıdır. Bu durumda, eğer her $x \in V$ birim vektörü için $b(x,x) = \lambda \in R$ ise, $b(x,y) = \lambda g(x,y)$ yazılabilir. $\nu \geq 1$ ve $\nu^* \geq 1$ olduğu zaman aşağıdaki durumlar ortaya çıkar [6].

Teorem 2.1.4.1. (V,g), $(\nu \geq 1,\nu^* \geq 1)$ tipinde dejenere olmayan ve b de V üzerinde tanımlı bilineer form olsun.

(a) Eğer her $u \in V$ null vektörü için $b(u,u) = 0$ ise, $b = \lambda g$, $\lambda \in R$ olur.

(b) Eğer her $x \in V$ timelike birim vektörleri veya her $x \in V$ spacelike birim vektörleri için $|b(x,x)| \leq d \in R$ ise, $b = \lambda g$, $\lambda \in R$ olur.

(c) Eğer her $x \in V$ timelike birim vektörleri veya her $x \in V$ spacelike birim vektörleri için $b(x,x) \leq d_1 \in R$ ve her $y \in V$ timelike birim vektörleri veya her $y \in V$ spacelike birim vektörleri için $b(y,y) \geq d_2 \in R$ ise, $b = \lambda g$, $\lambda \in R$ olur [11].

İspat. (a) $x \in V$ timelike ve $y \in V$ spacelike vektör olsun.

$$p(t) = g(x+ty,x+ty) = g(x,x) + 2tg(x,y) + t^2 g(y,y)$$

ve

$$q(t) = b(x+ty,x+ty) = b(x,x) + 2tb(x,y) + t^2 b(y,y)$$

kuadratik polinomları göz önüne alınsın. x timelike ve y spacelike olduğundan p, $t_1 < 0 < t_2$ şeklinde iki farklı köke sahiptir ve kökler çarpımı $t_1.t_2 = \dfrac{g(x,x)}{g(y,y)}$ dir. Ayrıca, $x + t_1 y$ ve $x + t_2 y$ null vektörler olduğundan t_1 ve t_2 q'nun da iki farklı köküdür ve $t_1.t_2 = \dfrac{b(x,x)}{b(y,y)}$ olur. Böylece, $\dfrac{g(x,x)}{g(y,y)} = \dfrac{b(x,x)}{b(y,y)}$ olup $\dfrac{b(x,x)}{g(x,x)} = \dfrac{b(y,y)}{g(y,y)} = \lambda \in R$. Bu ifade, $y \in V$ spacelike vektörü ve $x \in V$ timelike vektörü (vs.) için sağlandığından, her null olmayan $z \in V$ vektörü ve ayrıca $u \in V$ null vektörü için $b(z,z) = \lambda g(z,z)$ eşitliği elde edilir. Polarizasyon eşitliğinden $b = \lambda g$ olduğu görülür.

(b) u ve w V'de, $g(u,w) = -\dfrac{1}{2}$ şartını sağlayan null vektörler olsun. Bu durumda her $t > 0$ için $(u + tw)/\sqrt{t}$ timelike bir birim vektör olur. Buradan,

$$\left| b\left(\frac{u+tw}{\sqrt{t}}, \frac{u+tw}{\sqrt{t}} \right) \right| = \frac{1}{t} \left| b(u+tw, u+tw) \right| \leq d$$

olur ve böylece her $t > 0$ için $\left| b(u+tw, u+tw) \right| \leq d$ olduğu görülür. $t \to 0^+$ için limit alınırsa $\left| b(u,u) \right| \leq 0$ elde edilir. Bu ise, $b(u,u) = 0$ olduğunu verir. (a) şıkkı göz önüne alınırsa, $b = \lambda g$ olur.

(c) u ve w V'de, $g(u,w) = -\dfrac{1}{2}$ şartını sağlayan null vektörler olsun. Bu durumda her $t > 0$ için $(u + tw)/\sqrt{t}$ ve $(u - tw)/\sqrt{t}$ vektörleri sırasıyla, timelike ve spacelike birim vektörler olur. Buradan

$$\left| b\left(\frac{u+tw}{\sqrt{t}}, \frac{u+tw}{\sqrt{t}} \right) \right| = \frac{1}{t} \left| b(u+tw, u+tw) \right| \leq d_1$$

ve

$$\left| b\left(\frac{u-tw}{\sqrt{t}}, \frac{u-tw}{\sqrt{t}} \right) \right| = \frac{1}{t} \left| b(u-tw, u-tw) \right| \geq d_2$$

olur , böylece $\left| b(u+tw, u+tw) \right| \leq d_1$ ve $\left| b(u-tw, u-tw) \right| \geq d_2$ elde edilir. $t \to 0^+$ için limit alınırsa $b(u,u) \leq 0$ ve $b(u,u) \geq 0$ olup $b(u,u) = 0$ bulunur. (a) şıkkı göz önüne alınırsa, $b = \lambda g$ olur.

2.1.5. Dejenere Olmayan Reel İç Çarpım Uzayları Üzerindeki Eğrilik Benzeri Çok Lineer Fonksiyonlar

Bu bölüm boyunca, (V,g) n-boyutlu (ν,ν^*) tipinde dejenere olmayan bir uzay ve $G:V\times V\times V\times V\to R$ de V üzerinde tanımlı çok lineer bir fonksiyon olarak alınacaktır.

Tanım 2.1.5.1. V üzerinde tanımlı G çok lineer fonksiyonu eğer her $x,y,z\in V$ için aşağıdaki özellikleri sağlarsa G 'ye eğrilik benzeri fonksiyon denir.

(a) $G(x,y,z,v)=-G(y,x,z,v)=-G(x,y,v,z)$

(b) $G(x,y,z,v)+G(y,z,x,v)+G(z,x,y,v)=0$ (1. Bianchi özdeşliği)

(c) $G(x,y,z,v)=G(z,v,x,y)$

Dejenere olmayan bir (V,g) uzayı üzerinde $G^0(x,y,z,v)=g(z,y)g(x,v)-g(x,z)g(y,v)$ şeklinde tanımlı G^0 eğrilik benzeri çok lineer fonksiyona, (V,g)'nin temel eğrilik benzeri çok lineer fonksiyonu denir [6].

Tanım 2.1.5.2. G, (V,g) üzerinde tanımlı çok lineer bir fonksiyon olsun. Her $x,y,z\in V$ ve $v\in V$ için $g(R^G(x,y),z,v)=G(x,y,z,v)$ şeklinde tanımlı $R^G:V\times V\times V\to V$ çok lineer fonksiyonuna G 'nin eğrilik tensörü denir [6].

g dejenere olmadığından, R^G iyi tanımlıdır. $G(x,y,z,.)^{\#}:V\to R$, V^*'da bir lineer fonksiyonel olduğundan, $R^G(x,y)z=G(x,y,z,.)^{\#}$ elde edilir. Burada, $\#:V^*\to V$ dönüşümü $\mathrm{b}:\mathrm{V}\to V^*$ musiki izomorfizminin tersidir. Ayrıca, (V,g) üzerindeki G eğrilik benzeri çok lineer bir fonksiyonun R^G eğrilik tensörü aşağıdaki özellikleri sağlar.

(a) $R^G(x,y)z=-R^G(y,x)z$

(b) $R^G(x,y)z+R^G(y,z)x+R^G(z,x)y=0$ (1. Bianchi özdeşliği)

Tanım 2.1.5.3. Dejenere olmayan bir (V,g) uzayının temel eğrilik benzeri çok lineer fonksiyonunun $R^0(x,y)=g(z,y)x-g(x,z)y$ eğrilik tensörüne (V,g)'nin temel eğrilik tensörü denir [6].

(V,g)'nin 2-boyutlu bir P alt uzayına (V,g)'de bir düzlem denir. P düzlemi, sırasıyla $(+,+)$, $(-,-)$, $(-,+)$, $(0,0)$, $(0,-)$ veya $(0,+)$ ile gösterilen $(0,2,0)$, $(0,0,2)$, $(0,1,1)$, $(2,0,0)$, $(1,1,0)$ veya $(1,0,1)$ tiplerinde olabilir. Bunların her birine P 'nin işareti denir [6].

Yardımcı Teorem 2.1.5.1. $Q: V \times V \to R$, her $x, y \in V$ için

$$Q(x,y) = G^0(x,y,y,x) = g(x,x)g(y,y) - g(x,y)^2$$

şeklinde dejenere olmayan (V,g) uzayı üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda, $P = span\{x,y\}$ düzleminin dejenere olmaması için gerekli ve yeterli koşul $Q(x,y) \neq 0$ olmasıdır. Ayrıca, P 'nin işaretinin $(-,-)$ veya $(+,+)$ olması için gerekli ve yeterli koşul $Q(x,y) > 0$ olmasıdır ve P 'nin işaretinin $(-,+)$ olması için gerekli ve yeterli koşul ise $Q(x,y) < 0$ 'dir [6].

İspat. İlk olarak, Q 'nun işaretinin P 'nin baz seçiminden bağımsız olduğu gösterilecektir. Bunun için $\{x', y'\}$ ve $\{x, y\}$, P 'nin iki bazı olsun. Bu durumda, $ad - bc \neq 0$ olmak üzere, $x' = ax + by$ ve $y' = cx + dy$ yazılabilir. Buradan, basit bir hesaplamayla, $Q(x', y') = (ad - bc)^2 Q(x,y)$ olduğu görülebilir. Şimdi, P 'nin dejenere olmadığı ve $\{x,y\}$'nin P 'nin ortonormal bir bazı olduğu varsayılsın. Bu durumda, $Q(x,y) = g(x,x)g(y,y) \neq 0$ olur. Özel olarak, P 'nin işaretinin $(-,-)$ veya $(+,+)$ olması için gerekli ve yeterli koşul $Q(x,y) > 0$ olmasıdır. P 'nin işaretinin $(-,+)$ olması için gerekli ve yeterli koşul ise $Q(x,y) < 0$ 'ın sağlanmasıdır. Tersine, P dejenere ve P 'nin ortonormal bir bazı $\{x,y\}$ ise, bu durumda $Q(x,y) = 0$ olur. Burada, x veya y null bir vektördür.

Yorum 2.1.5.1. Eğer $x, y \in V$ ve $Q(x,y) = 0$ olması için gerekli yeterli koşul ya $\{x,y\}$'nin gerdiği düzlem dejenere olmalıdır ya da x ve y lineer bağımlı olmalıdır [6].

Tanım 2.1.5.4. G, dejenere olmayan bir (V,g) uzayı üzerinde tanımlı eğrilik benzeri çok lineer fonksiyon ve P de V 'nin dejenere olmayan bir düzlemi olsun. Bu durumda, P 'nin G 'ye bağlı eğriliği $\kappa_G(P)$, $\{x,y\}$ P 'nin bir bazı olmak üzere

$$\kappa_G(P) = \frac{G(x,y,y,x)}{Q(x,y)}$$

şeklinde tanımlanır[6].

Bir düzlemin eğriliği iyi tanımlıdır. Eğer, $\{x', y'\}$ ve $\{x, y\}$ P'nin iki bazı ise, bu durumda $ad - bc \neq 0$ olmak üzere, $x' = ax + by$ ve $y' = cx + dy$ yazılabilir. Buradan, basit bir hesaplama ile $G(x', y', y', x') = (ad - bc)^2 G(x, y, y, x)$ olduğu görülebilir. Bu ise, $Q(x', y') = (ad - bc)^2 Q(x, y)$ olduğundan $\kappa_G(P)$'nin P'nin baz seçiminden bağımsız olduğunu gösterir [6].

Tanım 2.1.5.5. G, dejenere olmayan bir (V, g) uzayı üzerinde tanımlı eğrilik benzeri çok lineer bir fonksiyon olsun. Eğer V'deki her dejenere olmayan P düzleminin eğriliği $\kappa_G(P) = C$ oluyorsa, (V, g) uzayına G'ye göre sabit kesitsel eğriliğe sahiptir denir [6].

Teorem 2.1.5.1. G, dejenere olmayan bir (V, g) uzayı üzerinde tanımlı eğrilik benzeri çok lineer bir fonksiyon olsun. Bu durumda (V, g)'nin G'ye göre sabit eğriliğe sahip olması için gerekli ve yeterli koşul $G = CG^0$ veya denk olarak $R = CR^0$ olmasıdır ([7], [9]).

İspat. Eğer $G = CG^0$ ise, bu durumda her dejenere olmayan P düzlemi için $\kappa_G(P) = C$ olduğu aşikardır. Tersine, $G' = G - CG^0$ olsun. Dejenere olmayan her P düzlemi için $\kappa_G(P) = C$ olduğundan, $Q(x, y) \neq 0$ olacak şekildeki her $x, y \in V$ için $G'(x, y, y, x) = 0$ olur. Şimdi, $Q(x, y) = 0$ olacak şekilde $x, y \in V$ olsun. Keyfi n için, $Q(x, y) \neq 0$ olmak üzere, $x_n \to x$, $y_n \to y$ vektör dizileri verilsin. Buradan, $Q(x, y)$'nin çözüm kümesinin herhangi bir açık alt küme içermeyen ve değişkenleri x ve y olan bir polinom olduğu görülür. Böylece, $G'(x_n, y_n, y_n, x_n) = 0$ ve G' sürekli olduğundan, $Q(x, y) = 0$ olacak şekildeki her $x, y \in V$ için $G'(x, y, y, x) = 0$ olur. Bu durumda, her $x, y \in V$ için $G'(x, y, y, x) = 0$ olduğu görülür. Fakat bu $G' = 0$, eğrilik benzeri çok lineer fonksiyonlar için çok bilinen bir özelliktir [20]. Bu ise, $G = CG^0$ olduğu anlamına gelir.

Şimdi, bu durum Cartan'ın sabit kesitsel eğriliğe sahip dejenere olmayan (V, g) uzayına bağlanarak genelleştirilecektir.

Teorem 2.1.5.2. G, dejenere olmayan bir (V, g) uzayı üzerinde tanımlı eğrilik benzeri çok lineer bir fonksiyon olsun. Eğer null olmayan her $x, y, z \in V$ için $G(x, y, z, x) = 0$ ise, (V, g) uzayı da G 'ye göre sabit kesitsel eğriliğe sahip olur [9].

İspat. Bu teorem aşağıda ifade edilen dört adımda ispatlanacaktır.

Adım 1: Bu teoremin hipotezi, her $x, y, z \in V$ için $\kappa_G(span\{x, y\}) = \kappa_G(span\{x, z\})$ olduğunu vurgular.

Adım 1'in İspatı: Birinci Durum: $g(y, y) = g(z, z)$. $c^2 + s^2 = 1$ olacak şekilde her $c, s \in R$ ve $y' = cy - sz$, $z' = sy + cz$ olsun. x, y', z' null olmayan ortonormal vektörlerdir ve böylece $c^2 + s^2 = 1$ olacak şekilde her $c, s \in R$ için

$$\begin{aligned} 0 &= G(x, y', z', x) \\ &= csG(x, y, y, x) + c^2 G(x, y, z, x) - s^2 G(x, z, y, x) - scG(x, z, z, x) \\ &= cs[G(x, y, y, x) - G(x, z, z, x)] \end{aligned}$$

olur. Buradan, $G(x, y, y, x) = G(x, z, z, x)$ olup, bu ise $\kappa_G(span\{x, y\}) = \kappa_G(span\{x, z\})$ olduğu anlamına gelir.

İkinci Durum: $g(y, y) = -g(z, z)$. $c^2 - s^2 = 1$ olacak şekilde her $c, s \in R$ ve $y' = cy + sz$, $z' = sy + cz$ olsun. x, y', z' null olmayan ortonormal vektörlerdir ve böylece $c^2 - s^2 = 1$ olacak şekilde her $c, s \in R$ için birinci durumdakine benzer olarak

$$0 = G(x, y', z', x) = cs[G(x, y, y, x) + G(x, z, z, x)]$$

olur. Bu durumda, $G(x, y, y, x) = -G(x, z, z, x)$ olur. Buradan, $\kappa_G(span\{x, y\}) = \kappa_G(span\{x, z\})$ elde edilir.

Adım 2: $\{x, z\}$ ve $\{x, w\}$ sırasıyla dejenere olmayan P_1 ve P_2 düzlemlerinin ortonormal birer bazı olsun. Eğer $span\{z, w\}$ dejenere değilse, $\kappa_G(P_1) = \kappa_G(P_2)$ olur.

Adım 2'nin İspatı: $P_3 = span\{z, w\}$ ve $\{z, w'\}$ P_3'ün ortonormal bir bazı olsun. Bu durumda, z, x, w' null olmayan ortonormal vektörler olduğundan, adım 1'den $\kappa_G(P_1) = \kappa_G(P_3)$ bulunur. Benzer olarak, $\kappa_G(P_2) = \kappa_G(P_3)$ olur. Böylece $\kappa_G(P_1) = \kappa_G(P_2)$ elde edilir.

Adım 3: Eğer P_1 ve P_2 arakesitleri dejenere olmayan vektör uzayı olan birer dejenere olmayan düzlem ise, bu durumda $\kappa_G(P_1) = \kappa_G(P_2)$ olur.

Adım 3'ün İspatı: x, z, w adım 2'deki gibi verilsin ve $x \in P_1 \cap P_2$ olsun. Eğer $span\{z, w\}$ dejenere değilse (yani $n = \dim V = 3$ olma durumu), adım 2'den $\kappa_G(P_1) = \kappa_G(P_2)$ olduğu görülür. $span\{z, w\}$'nın dejenere olduğu varsayılsın (ve böylece $n \geq 4$ olur). Şimdi, aşağıdaki şartları sağlayan bir y' birim vektörünün var olduğu gösterilebilirse, adım 2'den $\kappa_G(span\{x, z\}) = \kappa_G(span\{x, y'\}) = \kappa_G(span\{x, w\})$ olur ve böylece $\kappa_G(P_1) = \kappa_G(P_2)$ elde edilir.

(i) $g(x, y') = 0$

(ii) $span\{z, y'\}$ ve $span\{w, y'\}$ dejenere değildir.

Böyle bir y' vektörü için, z, w null olmayan birim vektörler olduğundan, $span\{z, w\}$ dejenere düzlemi için bir $\{u, v\}$ ortonormal tabanı vardır öyle ki, u null ve v bir birim vektördür. x, u ve v, V'nin 3-boyutlu bir dejenere uzayını gerdiğinden dolayı, bir $y \in V$ birim vektör seçilebilir öyle ki, y, $span\{x, v\}$'ye ortogonaldir ve $g(y, u) \neq 0$ olur. Bu durumda, her $t \in R$ için aşağıdaki ifadeler hesaplanabilir.

(1) $g(y + tu, y + tu) = g(y, y) + 2tg(y, u).$

(2) $g(z, y + tu) = g(z, y)$, çünkü $g(z, u) = 0$'dır.

(3) $g(w, y + tu) = g(w, y)$, çünkü $g(w, u) = 0$'dır.

(4) $g(z, z)g(y + tu, y + tu) - g(z, y + tu)^2 = g(z, z)g(y, y) - g(z, y)^2 + 2tg(y, u)g(z, z).$

(5) $g(w, w)g(y + tu, y + tu) - g(w, y + tu)^2 = g(w, w)g(y, y) - g(w, y)^2 + 2tg(y, u)g(w, w).$

(1), (4) ve (5) eşitliklerinin sol tarafındaki t'nin sıfırdan farklı seçilebileceği açıktır. Bu durumda, $y + tu$ x'e dik olan null olmayan bir vektördür ve Yardımcı Teorem 2.5.1.'den $span\{z, y + tu\}$ ve $span\{w, y + tu\}$ dejenere olmadığı görülür. Şimdi y', $y + tu$ yönünde bir birim vektör olarak seçilirse ispat tamamlanmış olur.

Teoremin İspatı. P_1 ve P_2, V'de dejenere olmayan düzlemler olsun. $\kappa_G(P_1) = \kappa_G(P_2)$ olduğu gösterilecektir. $\{x, y\}$ ve $\{u, v\}$ sırasıyla P_1 ve P_2 düzlemlerinin ortonormal birer bazı olsun. Eğer $span\{x, u\}$, $span\{x, v\}$, $span\{y, u\}$ ve $span\{y, v\}$ düzlemlerinden biri olan P_3 düzlemi dejenere değilse, Adım 3'e göre $\kappa_G(P_1) = \kappa_G(P_3) = \kappa_G(P_2)$ olduğu görülür. Dolayısıyla, $span\{x, u\}$ ve $span\{x, v\}$ dejenere olduğu varsayılsın ve P_2'nin

$\{u,v\}$ bazı $\{w,w'\}$ ortonormal bazı ile değiştirilsin öyle ki, $span\{x,w\}$ dejenere olmasın. Bunun için $w = cu + sv$ olsun. $g(u,v) = 0$ olduğundan ve Yorum 2.1.5.1.'den $span\{x,u\}$ ve $span\{x,v\}$ dejenere olur. Bu durumda

$$g(x,x)g(w,w) - g(w,x)^2 = -2csg(x,u)g(x,v)$$

olduğu görülür. x,u,v birim vektörler olduğundan, $g(x,u)$ ve $g(x,v)$ sıfırdan farklı olmak zorundadır. Çünkü, $span\{x,u\}$ ve $span\{x,v\}$ dejenere düzlemlerdir. Benzer olarak, c ve s sıfırdan farklı iseler, yukarıdaki eşitliğin sol tarafı sıfır değildir. Böylece, Yardımcı Teorem 2.1.5.1.'den $span\{x,w\}$ düzleminin dejenere olmadığına ulaşılır. Uygun c ve s seçilerek, $|g(w,w) = 1|$ olması sağlanabilir. Şimdi, w' P_2'de w'ya dik olan bir birim vektör olsun. Bu durumda, üçüncü adımdan

$$\begin{aligned}\kappa_G(P_1) &= \kappa_G(span\{x,y\}) \\ &= \kappa_G(span\{x,w\}) \\ &= \kappa_G(span\{w,w'\}) = \kappa_G(P_2)\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

Şimdi, $(\nu \geq 1, \eta \geq 1)$ tipindeki dejenere olmayan (V,g) uzayı için Teorem 2.1.5.2.'nin kovaryantı verilecektir.

Yardımcı Teorem 2.1.5.2. (V,g) $(\nu \geq 1, \nu^* \geq 1)$ tipindeki dejenere olmayan bir uzay ve G, V üzerinde tanımlı eğrilik benzeri çok lineer bir fonksiyon olsun. Eğer $z \in V$ sabit bir vektör ise, aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) $x,y,z \in V$ ortonormal ve $g(x,x) = -g(y,y) = -1$ olduğunda $G(x,y,z,x) = 0$ olur.

(b) $x,y,z \in V$ ortonormal ve $g(x,x) = -g(y,y) = -1$ olduğunda $G(x,y,z,y) = 0$ olur. Ayrıca, (a) ve (b)'deki şartlar $g(x,x) = g(y,y) = 1$ veya $g(x,x) = g(y,y) = -1$ şeklinde de olabilir [6].

İspat. $(a) \Rightarrow (b)$: $c^2 - s^2 = 1$ olacak şekilde $c,s \in R$ olsun. $x' = cx + sy$ ve $y' = sx + cy$ sırasıyla, timelike ve spacelike vektörler olsun ve $g(z,x') = g(z,y') = 0$ sağlansın. Böylece, $G(x',y',z,x') = 0$ olduğundan, $sG(x,y,z,y) = 0$ olur. $s \neq 0$ olduğu için $G(x,y,z,y) = 0$ bulunur.

$(b) \Rightarrow (a)$: Benzer şekilde gösterilebilir.

Yardımcı Teorem 2.1.5.3. (V,g) $\left(\nu \geq 2, \nu^* \geq 2\right)$ tipindeki dejenere olmayan bir uzay ve G, V üzerinde tanımlı eğrilik benzeri çok lineer bir fonksiyon olsun. Eğer $x,y \in V$ ortonormal ve $g(x,x) = -g(y,y) = -1$ ise aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) $g(z,x) = g(z,y) = 0$ ve $g(z,z) = 1$ olduğunda $G(x,y,z,x) = 0$ olur.

(b) $g(w,x) = g(w,y) = 0$ ve $g(w,w) = -1$ olduğunda $G(x,y,w,x) = 0$ olur.

Burada $z,w \in V$ 'dir. Ayrıca $g(x,x) = -g(y,y) = -1$ şartı, $g(x,x) = g(y,y) = 1$ şartı veya $g(x,x) = g(y,y) = -1$ şartıyla yer değiştirebilir [6].

İspat. $(a) \Rightarrow (b)$: Verilen bir w için, (b)'deki gibi $g(z,z) = 1$ ve $g(z,x) = g(z,y) = g(z,w) = 0$ olacak şekilde bir $z \in V$ seçilebilir. $c^2 - s^2 = 1$ olacak şekilde $c,s \in R$ ve $z' = cz + sw$ olsun. Bu durumda, $g(z',z') = 1$ ve $g(z',x) = g(z',y) = 0$ olur. Böylece,

$$\begin{aligned} 0 = G(x,y,cz+sw,x) &= cG(x,y,z,x) + sG(x,y,w,x) \\ &= sG(x,y,w,x) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. $s \neq 0$ olduğu için, $G(x,y,w,x) = 0$ ifadesi elde edilir.

$(b) \Rightarrow (a)$: Benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 2.1.5.3. (V,g) $\left(\nu \geq 1, \nu^* \geq 1\right)$ tipindeki dejenere olmayan bir uzay ve G, V üzerinde tanımlı eğrilik benzeri çok lineer bir fonksiyon olsun. Eğer $g(x,x) = -g(y,y) = -1$ şeklindeki null olmayan her ortonormal $x,y,z \in V$ için $G(x,y,z,x) = 0$ ise, (V,g), G 'ye göre sabit kesitsel eğriliğe sahiptir. Ayrıca, $g(x,x) = -g(y,y) = -1$ koşulu, $g(x,x) = g(y,y) = 1$ veya $g(x,x) = g(y,y) = -1$ koşulları ile yer değiştirilebilir. Öte yandan, Yardımcı Teorem 2.1.5.3.'e göre z sadece timelike vektör veya sadece spacelike vektör seçilirse, (V,g) $\left(\nu \geq 2, \eta \geq 2\right)$ tipinde olur [6].

İspat. Yardımcı Teorem 2.1.5.2.'ye göre teoremin varsayımı, $g(z,z) = -g(x,x) = -1$ şeklindeki null olmayan her $x,y,z \in V$ ortonormal vektörleri için $G(z,x,y,x) = 0$ olmasına denktir. Şimdi, $x,y,z \in V$, $g(x,x) = g(y,y) = 1$ şartını sağlayan null olmayan ortonormal vektörler olsun. $g(x,x) = g(y,y) = -1$ için de benzer şekildedir. Eğer z timelike ise, $G(z,x,y,x) = 0$ olur. Buradan, birinci Bianchi eşitliğinden

$$
\begin{aligned}
G(x,y,z,x) &= -G(y,z,x,x) - G(z,x,y,x) \\
&= -G(z,x,y,x) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

elde edilir. Eğer z spacelike ise, $g(v,x)=g(v,y)=g(v,z)=0$ olacak şekilde bir v birim timelike vektör seçilir. Bu durumda, $c^2 - s^2 = 1$ şeklindeki $c,s \in R$ için, $cv+sy$ ve x sırasıyla, ortonormal timelike ve spacelike vektörler olurlar. Böylece, v ve x sırasıyla ortonormal timelike ve spacelike vektörler olduklarından dolayı,

$$
\begin{aligned}
0 &= -G(cv+sy,x,z,x) \\
&= cG(v,x,z,x) + sG(y,x,z,x) \\
&= sG(y,x,z,x)
\end{aligned}
$$

olduğu görülür. $s \neq 0$ olduğu için, $G(y,x,z,x)=0$ olur. Bu ise, $G(x,y,z,x)=0$ olduğu anlamına gelir. Böylece, null olmayan her ortonormal $x,y,z \in V$ için $G(x,y,z,x)=0$ olur ve Teorem 2.1.5.2. göz önüne alınırsa, (V,g)'nin, G 'ye göre sabit kesitsel eğriliğe sahip olduğu elde edilir.

Şimdi, eğer dejenere olmayan (V,g) uzayı $(\nu,0)$ veya $(\nu^*,0)$ tipinde ise, V 'deki düzlemlerin kesitsel eğriliğinin sınırlı olduğu gösterilecektir. Bu durum için, $(\nu \geq 1, \nu^* \geq 1)$ tipindeki (V,g) uzayı göz önüne alınacaktır.

Teorem 2.1.5.4. (V,g) $(\nu \geq 1, \nu^* \geq 1)$ tipindeki dejenere olmayan bir uzay ve G, V üzerinde tanımlı eğrilik benzeri çok lineer bir fonksiyon olsun.

(a) Eğer, $(-,+)$, $(-,-)$ veya $(+,+)$ işaretlerinden birine sahip olan her P düzlemi için, $|\kappa_G(P)| \leq k \in R$ oluyorsa, (V,g), G 'ye göre sabit kesitsel eğriliğe sahiptir.

(b) Eğer, $(-,+)$ ve $(+,+)$ veya $(-,+)$ ve $(-,-)$ işaretlerinden birine sahip olan her P düzlemi için, $\kappa_G(P) \geq k \in R$ veya $\kappa_G(P) \leq k \in R$ oluyorsa, (V,g), G 'ye göre sabit kesitsel eğriliğe sahiptir [6].

İspat. Eğer $\dim V = 2$ ise, teorem doğrudur. $\dim V \geq 2$ olduğu varsayılsın ve (V,g) $(\nu \geq 1, \nu^* \geq 2)$ olsun.

(a) $x \in V$ spacelike birim vektör olsun. Bu durumda, $(span\{x\})^{\perp}$ $(\nu, \nu^* - 1)$ tipinde olur. $(span\{x\})^{\perp}$ üzerinde, $b(z,v) = G(x,z,v,x)$ şeklinde bir bilineer form tanımlansın. $(-,+)$

işaretli her düzlem için $|\kappa_G(P)| \leq k \in R$ olduğundan her timelike birim $y \in (span\{x\})^{\perp}$ vektörü için $|b(y,y)| = |G(x,y,y,x)| \leq k$ olur. Buradan, Teorem 2.1.4.1.'in (b) şıkkı göz önüne alınırsa $b(z,v) = \lambda g(z,v)$, $\lambda \in R$ olduğu görülür. Böylece, her ortonormal $z,v \in (span\{x\})^{\perp}$ için $G(x,z,v,x) = \lambda g(z,v)$ olur. Son olarak, Teorem 2.1.5.3.'ten (V,g)'nin, G 'ye göre sabit kesitsel eğriliğe sahip olduğu elde edilir.

(b) Bir önceki şıkta yapıldığı gibi, $x \in V$ spacelike birim vektör ve $(span\{x\})^{\perp}$ üzerinde, $b(z,v) = G(x,z,v,x)$ olsun. $(-,+)$ veya $(+,+)$ işaretli her düzlem için $|\kappa_G(P)| \geq k \in R$ olduğundan her spacelike birim $y \in (span\{x\})^{\perp}$ vektörü için $|b(y,y)| = |G(x,y,y,x)| \geq k$ ve her timelike birim $w \in (span\{x\})^{\perp}$ vektörü için $|b(w,w)| = |G(x,w,w,x)| \leq -k$ olur. Bu durumda, her ortonormal $z,v \in (span\{x\})^{\perp}$ için, Teorem 2.1.4.1.'in (c) şıkkından $G(x,z,v,x) = \lambda g(z,v) = 0$ olur. Son olarak, Teorem 2.1.5.3. göz önüne alınırsa, (V,g), G 'ye göre sabit kesitsel eğriliğe sahip olur.

Eğer, (V,g), G 'ye göre sabit kesitsel eğriliğe sahipse, $G = CG^0$ olduğundan $Q(u,v) = 0$ olacak şekildeki her $u,v \in V$ için $G(u,v,v,u) = 0$ olur. Şimdi bunun tersi araştırılacaktır .

$(0,+)$ veya $(0,-)$ işaretlerine sahip olan düzlemlerin kesitsel eğriliği tanımlı değildir. Ancak bu tarz düzlemler üzerinde, G eğrilik benzeri çok lineer fonksiyonun sıfır olması, bu düzlemlerin G 'ye göre sabit kesitsel eğriliğe sahip olduğunu gösterir. Eğer $\{x,y\}$, $(0,+)$ veya $(0,-)$ işaretlerine sahip P düzleminin bir bazı ise $G(x,y,y,x) = 0$ olması, P 'nin bir ortonormal $\{u,w\}$ tabanı için $G(u,w,w,u) = 0$ olmasına denktir.

Teorem 2.1.5.5. (V,g) $(\nu \geq 1, \nu^* \geq 2)$ veya $(\nu \geq 2, \nu^* \geq 1)$ tipindeki dejenere olmayan bir uzay ve G, V üzerinde tanımlı eğrilik benzeri çok lineer bir fonksiyon olsun. $P = span\{x,y\}$ $(0,+)$ veya $(0,-)$ işaretlerine sahip bir düzlem olmak üzere, eğer her $x,y \in V$ için $G(x,y,y,x) = 0$ ise, bu durumda (V,g), G 'ye göre sabit kesitsel eğriliğe sahip olur [6].

İspat. Teorem 2.1.5.4.'ün (a) şıkkının ispatında olduğu gibi, x bir spacelike birim vektör ve $b(z,v)=G(x,z,v,x)$, $(span\{x\})^{\perp}$ üzerinde bilineer form olsun. Bu durumda her null $u\in(span\{x\})^{\perp}$ vektörü için $b(u,u)=G(x,u,u,x)=0$ olur ve Teorem 2.1.4.1.'in (a) şıkkından her ortonormal $z,v\in(span\{x\})^{\perp}$ için $b(z,v)=G(x,z,v,x)=\lambda g(z,v)=0$ elde edilir. Böylece, Teorem 2.1.5.3.'ten, (V,g)'nin, G'ye göre sabit kesitsel eğriliğe sahip olduğu bulunur.

Bu durumda, $(0,0)$ işaretine sahip her $P=span\{u,v\}$ düzlemi için $G(u,v,v,u)=0$ olması, G'ye göre sabit kesitsel eğriliğe sahip olacağı anlamına gelip gelmemesi ortaya çıkar. Bu her zaman için mümkün değildir. Ancak, bu durumun null izotropiye denk olması ilginçtir.

Tanım 2.1.5.6. G, (V,g) üzerinde tanımlı eğrilik benzeri çok lineer bir fonksiyon ve R^G de G'nin eğrilik tensörü olsun. Bu durumda, (V,g) üzerinde $Ric^G(x,y)=Trace\{z\to R^G(z,x)y\}$ şeklinde tanımlı bilineer formuna G'nin ricci tensörü denir [6].

Eğer $\{e_1,...,e_n\}$ (V,g)'nin ortonormal bir bazı ise,

$$Ric^G(x,y)=\sum_{i=1}^{n}g(e_i,e_i)g\left(R^G(e_i,x)y,e_i\right)=\sum_{i=1}^{n}g(e_i,e_i)G(e_i,x,y,e_i)$$

olup, Ric^G bir bilineer formdur. Şimdi yukarıdaki tanım kullanılarak, G^0 (V,g)'nin temel eğrilik benzeri çok lineer fonksiyonu $Ric^0=Ric^{G^0}$ ifadesi hesaplanacaktır. Bunun için, $x\in V$ bir spacelike veya timelike birim vektör olmak üzere ve $\{e_1=x,e_2,...,e_n\}$ de V'nin ortonormal bir bazı olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}Ric^0(x,x)&=\sum_{i=1}^{n}g(e_i,e_i)G^0(e_i,x,x,e_i)\\&=\sum_{i=2}^{n}g(e_i,e_i)g(x,x)g(e_i,e_i)\\&=(n-1)g(x,x)\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Böylece, eğer (V,g) $(\nu,0)$ veya $(\nu^*,0)$ tipinde ise, polarizasyon eşitliği $Ric^0=(n-1)g$ şekline dönüşür. Ayrıca, eğer (V,g) $(\nu\geq 1,\nu^*\geq 1)$ tipinde ise Teorem 2.5.1.'in (b) şıkkından yine $Ric^0=(n-1)g$ olur.

Tanım 2.5.7. G , dejenere olmayan bir (V,g) üzerinde tanımlı eğrilik benzeri çok lineer bir fonksiyon olsun. Bu durumda, her $x,y\in V$ için $g\left(\hat{Ric}^G(x),y\right)=Ric^G(x,y)$ (yani $\hat{Ric}^G(x)=Ric(x,.)^{\#}$ dir) şeklinde tanımlı $\hat{Ric}^G:V\to V$ lineer operatöre G 'nin Ricci operatörü denir. $S^G=Trace\,\hat{Ric}^G$ şeklinde tanımlı $S^G\in R$ sayısına G 'nin skaler eğriliği denir [6].

Eğer $\{e_1,...,e_n\}$ (V,g)'nin ortonormal bir bazı ise

$$\begin{aligned}
S^G &= \sum_{i=1}^{n} g(e_i,e_i)g\left(\hat{Ric}^G(e_i),e_i\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n} g(e_i,e_i)Ric^G(e_i,e_i)\\
&= \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} g(e_i,e_i)g(e_j,e_j)G(e_i,e_j,e_j,e_i)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Eğer G^0 (V,g)'nin eğrilik benzeri temel çok lineer fonksiyonu ise, bu durumda $S^0=S^{G^0}=n(n-1)$ olur.

(V,g) $(\nu\geq 1,\nu^*\geq 1)$ tipinde dejenere olmayan bir uzay ve $u\in V$ null bir vektör olsun. $\prod_{u^\perp}:u^\perp\to\bar{u}^\perp$ izdüşüm dönüşümü olmak üzere, $(\bar{u}^\perp,\bar{g}_{u^\perp})$, $span\{u\}$ dik olan dejenere olmayan bölüm uzayıdır. Burada $u^\perp=(span\{u\})^\perp$ şeklindedir.

Tanım 2.1.5.8. G , dejenere olmayan $(\nu\geq 1,\nu^*\geq 1)$ tipindeki bir (V,g) üzerinde tanımlı eğrilik benzeri çok lineer bir fonksiyon olsun. $x\in V$ için, $\prod_{u^\perp}(x)=\bar{x}$ olmak üzere, $\bar{R}_u^G\bar{x}=\prod_{u^\perp}\left(R^G(x,u)u\right)$ şeklinde tanımlanan $\bar{R}_u^G:\bar{u}^\perp\to\bar{u}^\perp$ lineer dönüşümüne, $u\in V$ 'nin G 'ye göre Jacobi operatörü denir. Burada, R^G G 'nin eğrilik tensörüdür [6].

Her $v\in span\{u\}$ için, $R^G(x+v,u)u=R^G(x,u)u$ olduğundan $\bar{R}_u^G$ iyi tanımlıdır. Ayrıca, $\bar{R}_u^G$, $\bar{g}_{u^\perp}$ 'ye göre self-adjointtir yani, $\bar{g}_{u^\perp}\left(\bar{R}_u^G\bar{x},\bar{y}\right)=\bar{g}_{u^\perp}\left(\bar{x},\bar{R}_u^G\bar{y}\right)$ sağlanır [6].

Tanım 2.1.5.9. G, dejenere olmayan $(\nu \geq 1, \nu^* \geq 1)$ tipinde ve boyutu $boyV = n = \nu + \eta \geq 3$ olan bir (V,g) uzayı üzerinde tanımlı eğrilik benzeri çok lineer bir fonksiyon olsun. Eğer, bir $u \in V$ null vektörü için, $c_u \in R$ ve $\overline{id} : \overline{u}^{\perp} \to \overline{u}^{\perp}$ birim fonksiyon olduğu zaman, $\overline{R}_u^G = c_u \overline{id}$ ise $u \in V$ null vektörüne G'ye göre izotropiktir denir. Eğer her $u \in V$ null vektörü G'ye göre izotropik ise (V,g) uzayı G'ye göre null izotropiktir denir [6].

Yorum 2.1.5.1.

(a) Eğer (V,g) uzayının boyutu $boyV = n = 3$ ise, her $u \in V$ null vektörü için $boy\overline{u}^{\perp} = 1$ olduğundan (V,g) null izotropiktir [6].

(b) Eğer $\overline{R}_u^G = c_u \overline{id}$ ise, $c_u = \dfrac{1}{n-2} Ric^G(u,u)$ olur. $u = e_1 + e_2$ olacak şekilde $\{e_1, ..., e_n\}$ ortonormal baz olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} Ric^G(u,u) &= g(e_1,e_1)G(e_1,u,u,e_1) + g(e_2,e_2)G(e_2,u,u,e_2) \\ &\quad + \sum_{i=3}^{n} g(e_i,e_i)G(e_i,u,u,e_i) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Ancak,

$$\begin{aligned} G(e_1,u,u,e_1) &= G(e_1, e_1+e_2, e_1+e_2, e_1) \\ &= G(e_1,e_2,e_2,e_1) \end{aligned}$$

ve benzer olarak,

$$G(e_2,u,u,e_2) = G(e_2,e_1,e_1,e_2) = G(e_1,e_2,e_2,e_1)$$

olur. Böylece $g(e_1,e_1) = -g(e_2,e_2)$ olduğundan

$$\begin{aligned} Ric^G(u,u) &= \sum_{i=3}^{n} g(e_i,e_i)G(e_i,u,u,e_i) \\ &= \sum_{i=3}^{n} \overline{g}_{u^{\perp}}(\overline{e}_i,\overline{e}_i)\,\overline{g}_{u^{\perp}}(\overline{R}_u^G e_i, e_i) \\ &= \dot{I}z\overline{R}_u^G \\ &= c_u(n-2) \end{aligned}$$

olur. Burada, her $i = 3,...,n$ için $\prod_{u^{\perp}}(e_i) = \overline{e}_i$'dir [6].

(c) Eğer, $\overline{R}_u^G = c_u \overline{id}$ ise, bu durumda her $x \in \overline{u}^{\perp}$ birim vektörü için

$G(x,u,u,x)=c_u g(x,x)$ olur. Tersine, eğer $G(x,u,u,x)=c_u g(x,x)$ ise, bu durumda her $x \in \bar{u}^{\perp}$ spacelike veya timelike birim vektörü için $\bar{R}_u^G = c_u \overline{id}$ olur. Bunu göstermek için, b $\bar{u}^{\perp}$ üzerinde $b(\bar{x},\bar{y})=\bar{g}_{u^{\perp}}(\bar{R}_u^G \bar{x},\bar{y})$ şeklinde tanımlı bilineer form olsun. Buradan, $\prod_{u^{\perp}}(x)=\bar{x}$ olacak şekildeki her $x \in u^{\perp}$ timelike veya spacelike birim vektörü için $b(\bar{x},\bar{x})=\bar{g}_{u^{\perp}}(\bar{R}_u^G \bar{x},\bar{x})=G(x,u,u,x)=c_u g(x,x)=c_u g_{u^{\perp}}(\bar{x},\bar{x})$ ifadesi bulunur. Teorem 2.1.4.1.'in (b) şıkkından $b(\bar{x},\bar{y})=c_u \bar{g}_{u^{\perp}}(\bar{x},\bar{y})$ olup, $\bar{R}_u^G = c_u \overline{id}$ ifadesi elde edilir [6].

(d) Eğer (V,g) $(\nu \geq 2, \eta \geq 2)$ tipinde ise, $\bar{R}_u^G = c_u \overline{id}$ olması için gerekli ve yeterli koşul her $v \in u^{\perp}$ için $G(v,u,u,v)=0$ olmasıdır. Önermenin gereklilik koşulu açıktır. Şimdi yeterlilik şartı gösterilecektir. Bunun için, b (c) şıkkında olduğu gibi $\bar{u}^{\perp}$ üzerinde bilineer bir form olsun. Bu durumda, $\prod_{u^{\perp}}(v)=\bar{v}$ olacak şekildeki her $v \in u^{\perp}$ null vektörü için $b(\bar{v},\bar{v})=G(v,u,u,v)=0$ olur. Böylece, Teorem 2.1.4.1.'in (a) şıkkından, $\bar{b}(\bar{x},\bar{y})=\bar{g}_{u^{\perp}}(\bar{x},\bar{y})$ olup, $\bar{R}_u^G = c_u \overline{id}$ elde edilir. Ayrıca, (c) şıkkındaki $G(v,u,u,v)=0$ şartı, $(0,0)$ işaretine sahip her $P=span\{u,v\}$ düzlemi için, (V,g) uzayının G 'ye göre sabit kesitsel eğriliğe sahip olduğunu vurgulamaz [6].

Şimdi, null izotropi durumunda, G eğrilik benzeri çok lineer fonksiyonun g , Ric^G ve S^G terimleri tanımlanacaktır.

Tanım 2.1.5.10. G, $boyV = n \geq 3$ olan dejenere olmayan (V,g) uzayının eğrilik benzeri çok lineer fonksiyonu ve $R_1^G : V \times V \times V \to V$ de $R_1^G(x,y)z = Ric^G(z,y)x - Ric^G(x,z)y$ şeklinde tanımlanan üç lineer fonksiyon olsun. R^0, (V,g) uzayının temel eğrilik tensörü olmak üzere, (V,g) uzayının G_1 eğrilik benzeri çok lineer fonksiyonu

$$G_1(x,y,z,v)=\frac{1}{n-2}\left[g\left(R_1^G(x,y)z,v\right)+Ric^G\left(R^0(x,y)z,v\right)\right]$$

ile tanımlanır [6].

Yorum 2.1.5.2. Eğer $u \in V$ ve $x \in u^{\perp}$ ise, $G_1(x,u,u,x)=\dfrac{1}{n-2}Ric^G(u,u)g(x,x)$ olur.

Ayrıca, eğer (V,g) null izotropik ise, bu durumda Yorum 2.1.5.1'in (b) şıkkından, $\overline{R}_u^G = c_u \overline{id}$ olmak üzere $G_1(x,u,u,x) = c_u g(x,x)$ olur [6].

Teorem 2.1.5.6. $n = \nu + \nu^* \geq 3$ olmak üzere, G, $(\nu \geq 1, \eta \geq 1)$ tipindeki dejenere olmayan (V,g) uzayının eğrilik benzeri çok lineer fonksiyonu olsun. Bu durumda, (V,g)'nin G'ye göre null izotropik olması için gerekli ve yeterli koşul $G = G_1 - \dfrac{1}{(n-1)(n-2)} S^G G^0$ olmasıdır [10].

İspat. $\Leftarrow$: $u \in V$ null bir vektör ve $x \in u^\perp$ spacelike veya timelike birim vektör olsun. Bu durumda, Yorum 2.1.5.2.'den ve

$$G(x,u,u,x) = \frac{1}{n-2} Ric^G(u,u) g(x,x) = c_u g(x,x)$$

olduğundan Yorum 2.1.5.1.'in (c) şıkkı her $u \in V$ null bir vektörü için $\overline{R}_u^G = c_u \overline{id}$ olduğu anlamına gelir.

$\Rightarrow$: G', V uzayının $G' = G - G_1$ şeklinde tanımlanan eğrilik benzeri çok lineer fonksiyonu olsun. Bu durumda, Yorum 2.1.5.1. ve 2.1.5.2.'den, $u \in V$ null vektörü ve $x \in u^\perp$ için, $G'(x,u,u,x) = 0$ olur. Böylece, Teorem 2.1.5.5.'den (V,g)'nin G''ne göre C sabit kesitsel eğriliğe sahip olduğu görülür. Buradan, Teorem 2.1.5.1.'den $G' = CG^0$ olur. Böylece, geriye sadece S^G ifadesindeki C'yi belirlemek kalır. $\{e_1, \ldots, e_n\}$, (V,g) uzayının ortonormal bir bazı olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} S^G &= \sum_{i,j=1}^{n} g(e_i,e_i) g(e_j,e_j) G(e_i,e_j,e_j,e_i) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} g(e_i,e_i) g(e_j,e_j) G_1(e_i,e_j,e_j,e_i) \\ &\quad + C \sum_{i,j=1}^{n} g(e_i,e_i) g(e_j,e_j) G^0(e_i,e_j,e_j,e_i) \end{aligned}$$

olur. Buradan basit bir hesaplama ile,

$$\sum_{i,j=1}^{n} g(e_i,e_i) g(e_j,e_j) G_1(e_i,e_j,e_j,e_i) = \frac{2(n-1)}{n-2} S^G$$

ve

$$\sum_{i,j=1}^{n} g(e_i,e_i)g(e_j,e_j)G^0(e_i,e_j,e_j,e_i)=n(n-1)$$

elde edilir. Böylece,

$$S^G=\frac{2(n-1)}{n-2}S^G+Cn(n-1)$$

olur ve buradan $C=-\dfrac{S^G}{(n-1)(n-2)}$ olduğu görülür.

Tanım 2.1.5.11. G, dejenere olmayan bir (V,g) uzayının eğrilik benzeri çok lineer bir fonksiyonu olsun. (V,g)'nin G 'ye göre Weyl çok lineer eğrilik fonksiyonu W

$W^G=G-G_1+\dfrac{1}{(n-1)(n-2)}S^G G^0$ şeklinde tanımlanır. W^G'nin R^{W^G} eğrilik tensörü, G 'ye göre Weyl eğrilik tensörü olarak adlandırılır [6].

Sonuç 2.1.5.1. $boyV\geq 3$ olmak üzere, G, $(\nu\geq 1,\nu^*\geq 1)$ tipindeki dejenere olmayan (V,g) uzayının eğrilik benzeri çok lineer fonksiyonu olsun. Bu durumda, (V,g)'nin null izotropik olması için gerekli ve yeterli koşul $W^G=0$ olmasıdır [6].

İspat. Teorem 2.1.5.6.'dan direkt elde edilir.

Sonuç 2.1.5.1. $boyV\geq 3$ olmak üzere, G, $(\nu\geq 1,\nu^*\geq 1)$ tipindeki dejenere olmayan bir (V,g) uzayının eğrilik benzeri çok lineer bir fonksiyonu olsun. Bu durumda, eğer (V,g) null izotropik ise, bu durumda, (V,g)'nin G 'ye göre sabit kesitsel eğriliğe sahip olması için gerekli ve yeterli koşul $\lambda\in R$ olmak üzere, $Ric^G=\lambda g$ olmasıdır [6].

İspat. Teorem 2.1.5.6.'dan direk elde edilir.

2.2. SİNGÜLER YARI RİEMANN MANİFOLDLAR

M n-boyutlu bir manifold ve g TM 'de (μ,ν,ν^*) tipinde bir metrik tensör olsun. Bu durumda, (M,g)'ye (μ,ν,ν^*) tipinde yarı Riemann manifold denir. Eğer g, $(0,\nu,\nu^*)$ tipinde ise (M,g)'ye (ν,ν^*) tipinde dejenere olmayan yarı Riemann manifold denir.

2.2.1. Koszul Türevleri

Tanım 2.2.1.1. (M,g), (μ,ν,ν^*) tipinde yarı Riemann bir manifold olsun. Eğer, $D:\Gamma TM\times\Gamma TM\times\Gamma TM\to\Gamma TM$ fonksiyonu, her $X,Y,Z,W\in\Gamma TM$ ve $f\in C^\infty(M)$ için aşağıdaki özellikleri sağlarsa D'ye bir Koszul türev denir [6].

(a) $g(D_{X+Y}Z,W)=g(D_XZ,W)+g(D_YZ,W)$

(b) $g(D_{fX}Z,W)=fg(D_XZ,W)$

(c) $g(D_X(Y+Z),W)=g(D_XY,W)+g(D_XZ,W)$

(d) $g(D_X(fY),W)=X(f)g(Y,W)+fg(D_xY,W)$

(e) $Zg(X,Y)=g(D_ZX,Y)+g(X,D_ZY)$

(f) $g(D_XY,W)-g(D_YX,W)=g([X,Y],W)$

Şimdi yarı Riemann geometrinin temel yardımcı teoremi ispatlanacaktır.

Yardımcı Teorem 2.2.1.1. (M,g), (μ,ν,ν^*) tipinde yarı Riemann bir manifold olsun. Bu durumda, (M,g)'nin bir Koszul türeve sahip olması için gerekli ve yeterli koşul her $U\in\Gamma N_g$ için $L_Ug=0$ olmasıdır. Burada, L Lie türevi ve N_g de ΓTM'nin alt demetidir [1].

İspat. $\Rightarrow$: D, (M,g) üzerinde bir Koszul türev olsun. Bu durumda, eğer $U\in\Gamma N_g$ ve $X,Y\in\Gamma TM$ ise

$$\begin{aligned}(L_Ug)(X,Y)&=Ug(X,Y)-g([U,X],Y)-g(X,[U,Y])\\&=g(D_UX,Y)+g(X,D_UY)-g(D_UX,Y)\\&\quad-g(D_XU,Y)-g(X,D_UY)+g(X,D_YU)\\&=g(D_XU,Y)+g(X,D_YU)\\&=Xg(U,Y)-g(U,D_XY)+Yg(X,U)-g(D_YX,U)\\&=0\end{aligned}$$

olduğu bulunur.

$\Leftarrow$: Her $U\in\Gamma N_g$ için $L_Ug=0$ olduğu varsayılsın. $X,Y\in\Gamma TM$ olsun ve M üzerinde $\omega_{X,Y}$ 1-dış formu aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\omega_{X,Y}(W)=\frac{1}{2}[Xg(Y,W)+Yg(W,X)-Wg(X,Y)$$
$$+g(W,[X,Y])+g(Y,[W,X])-g(X,[Y,W])].$$

Bu eşitlik Koszul formülü olarak adlandırılır. Bu durumda, eğer $U\in\Gamma N_g$ ise

$$\begin{aligned}\omega_{X,Y}(U)&=-Ug(X,Y)+g(Y,[U,X])+g(X,[U,Y])\\&=-(L_U g)(X,Y)\\&=0\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Bu durumda, TM 'nin bir $D_X Y$ diye adlandırılan bir kesiti vardır öyle ki, $(D_X Y)^b=\omega_{X,Y}$ şeklinde ifade edilir. (M,g) üzerinde D ile belirlenen bu yönteme Koszul türev denir. Dolayısıyla, Tanım 2.2.1.1.'deki tanımları sağlar. Burada, bu özelliklerden (d) şıkkındaki özellik gösterilecektir. Eğer $X,Y,W\in\Gamma TM$ ve $f\in C^{\infty}(M)$ ise

$$\begin{aligned}2g(D_X(fY),W)&=Xg(fY,W)+fYg(W,X)-Wg(X,fY)\\&\quad+g(W,[X,fY])+g(fY,[W,X])\\&\quad-g(X,[fY,W])\\&=X(f)g(Y,W)+fXg(Y,W)\\&\quad+fYg(W,X)-W(f)g(X,Y)\\&\quad-fWg(X,Y)+X(f)g(W,Y)\\&\quad+fg(W,[X,Y])+fg(Y,[W,X])\\&\quad+W(f)g(X,Y)-fg(X,[Y,W])\\&=2X(f)g(Y,W)\\&\quad+f[Xg(Y,W)+Yg(W,X)-Wg(X,Y)\\&\qquad+g(W,[X,Y])+g(Y,[W,X])\\&\qquad-g(X,[Y,W])]\\&=2X(f)g(Y,W)+2fg(D_X Y,W).\end{aligned}$$

bulunur.

Tanım 2.2.1.2. Eğer her $U\in\Gamma N_g$ için $L_U g=0$ ise, (μ,ν,ν^*) tipindeki yarı Riemann bir (M,g) manifoldu durağandır denir [6].

Yardımcı Teorem 2.2.1.2. (M,g) (μ,ν,ν^*) tipinde durağan yarı Riemann bir manifold olsun. Bu durumda,

(a) N_g integrallenebillirdir.

(b) Eğer D, (M,g) üzerinde bir Koszul türev ise, her $U \in \Gamma N_g$ ve $X \in \Gamma TM$ için $D_X U \in \Gamma N_g$ olur [6].

İspat. (a) $U_1, U_2 \in \Gamma N_g$ olsun. Bu durumda her $X \in \Gamma TM$ için

$$\begin{aligned} g([U_1,U_2],X) &= g(D_{U_1}U_2,X) - g(D_{U_2}U_1,X) \\ &= U_1 g(U_2,X) - g(U_2,D_{U_1}X) \\ &\quad - U_2 g(U_1,X) + g(U_1,D_{U_2}X) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece, $[U_1,U_2] \in \Gamma N_g$ olduğu anlaşılır.

(b) $U \in \Gamma N_g$ ve $X \in \Gamma TM$ olsun. Bu durumda her $W \in \Gamma TM$ için

$$\begin{aligned} g(D_X U,W) &= Xg(U,W) - g(U,D_X W) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Bu ise $D_X U \in \Gamma N_g$ olduğu anlamına gelir.

Önerme 2.2.1.1. (M,g), (μ,ν,ν^*) tipinde durağan yarı Riemann bir manifold ve D ve D' de (M,g) üzerinde Koszul türevler olsun. Bu durumda, $D''(X,Y) = D'_X Y - D_X Y$ şeklinde tanımlanan $D'' = D' - D : \Gamma TM \times \Gamma TM \to \Gamma TM$ fonksiyonun aldığı değerler ΓN_g'de dir. Tersine, eğer $D'' : \Gamma TM \times \Gamma TM \to \Gamma N_g$ bir fonksiyon ve D, (M,g) üzerinde bir Koszul türev ise, $D + D''$ de (M,g) üzerinde bir Koszul türev olur [6].

İspat. Eğer D (M,g) üzerinde bir Koszul türev ise, Tanım 2.2.1.1.'den her $X,Y,W \in \Gamma TM$ için

$$\begin{aligned} g(D_X Y,W) &= Xg(Y,W) - g(Y,D_X W) \\ &= Xg(Y,W) - g(Y,D_W X) - g(Y,[X,W]) \\ &= Xg(Y,W) - Wg(Y,X) + g(D_Y W,X) \\ &\quad + g([W,Y],X) + g(Y,[W,X]) \\ &= Xg(Y,W) - Wg(Y,X) + Yg(W,X) \\ &\quad - g(W,D_Y X) - g([Y,W],X) + g(Y,[W,X]) \\ &= Xg(Y,W) - Wg(Y,X) + Yg(W,X) + g(W,[X,Y]) \\ &\quad + g(Y,[W,X]) - g(X,[Y,W]) - g(D_X Y,W) \end{aligned}$$

ifadesine ulaşılır. Böylece,

$$g(D_X Y,W)=\frac{1}{2}[Xg(Y,W)+Yg(W,X)-Wg(X,Y)$$
$$+g(W,[X,Y])+g(Y,[W,X])-g(X,[Y,W])].$$

olur. Bu durumda, eğer D ve D' de (M,g) üzerinde Koszul türevler ise, her $X,Y,W\in\Gamma TM$ için $g(D'_X Y-D_X Y,W)=0$ elde edilir. Bu ise $X,Y\in\Gamma TM$ için $D''(X,Y)=D'_X Y-D_X Y\in\Gamma N_g$ olduğu görülür. Tersine, eğer $D'':\Gamma TM\times\Gamma TM\to\Gamma N_g$ bir fonksiyon ise, bu fonksiyonun değerlerini ΓN_g 'de aldığı göz önünde bulundurularak $D+D''$ de (M,g) üzerinde bir Koszul türev olduğu kolayca gösterilebilir.

Tanım 2.2.1.3 (M,g), (μ,ν,ν^*) tipinde durağan yarı Riemann bir manifold olsun. Bu durumda, (M,g) üzerinde tanımlı D Koszul türevinin $T^D:\Gamma TM\times\Gamma TM\to\Gamma N_g$ burulma fonksiyonu $T^D(X,Y)=D_X Y-D_Y X-[X,Y]$ şeklinde tanımlanır. Eğer $T^D=0$ ise, D sıfır-burulmaya sahiptir denir [6].

Yorum 2.2.1.1. (a) Tanım 2.2.1.1. (f) şıkkından T^D 'nin ΓN_g 'de değer aldığı görülür. Ayrıca $T^D(X,Y)=-T^D(Y,X)$ ifadesi sağlanır.

(b) Eğer D (M,g) üzerinde tanımlı bir Koszul türev ise, bu durumda T^D D 'nin burulma fonksiyonu olmak üzere, $D-\frac{1}{2}T^D$ ifadesi de (M,g) üzerinde sıfır-burulmalı bir Koszul türevdir [6].

Önerme 2.2.1.2. (M,g), (μ,ν,ν^*) tipinde durağan yarı Riemann bir manifold ve D ve D' de (M,g) üzerinde Koszul türevler olsun. Bu durumda $T'=T$ olması için gerekli ve yeterli koşul $D''=D'-D$ 'nin $D''(X,Y)=D''(Y,X)$ ifadesini sağlamasıdır. Burada, T' ve T, sırasıyla D ve D' Koszul türevlerinin burulma fonksiyonlarıdır [6].

İspat. $X,Y\in\Gamma TM$ olsun.

$$\begin{aligned}T'(X,Y)-T(X,Y)&=D_X Y-D_Y X-[X,Y]\\&\quad-D_X Y+D_Y X+[X,Y]\\&=D''(X,Y)-D''(Y,X)\end{aligned}$$

olduğu bulunur. Böylece, $T'=T$ olması için gerekli ve yeterli koşulun

$D''(X,Y)=D''(Y,X)$ olduğu görülür.

Tanım 2.2.1.4. (M,g), (μ,ν,ν^*) tipinde durağan yarı Riemann bir manifold ve D de (M,g) üzerinde Koszul türev olsun. Bu durumda, D'nin $R^D:\Gamma TM\times\Gamma TM\times\Gamma TM\to\Gamma TM$ eğrilik fonksiyonu $R^D(X,Y)Z=D_X D_Y Z-D_Y D_X Z-D_{[X,Y]}Z$ ile tanımlanır [6].

Yorum 2.2.1.2. Yardımcı Teorem 2.2.1.2. (b) şıkkı göz önüne alınırsa, eğer $U\in\Gamma N_g$ ve $X,Y\in\Gamma TM$ ise, $D_X U\in\Gamma N_g$ olduğundan dolayı $R^D(X,Y)U\in\Gamma N_g$ olur [6].

Yardımcı Teorem 2.2.1.3. (M,g), (μ,ν,ν^*) tipinde durağan yarı Riemann bir manifold ve D ve D' de (M,g) üzerinde sırasıyla R ve R' eğrilik fonksiyonlarına sahip Koszul türevler olsun. Bu durumda, $K=R'-R:\Gamma TM\times\Gamma TM\times\Gamma TM\to\Gamma N_g$ fonksiyonu tanımlanabilir. Özel olarak, eğer $X,Y,Z,V\in\Gamma TM$ ise, $g(R'(X,Y)Z,V)=g(R(X,Y)Z,V)$ eşitliği sağlanır [6].

İspat. $X,Y,Z\in\Gamma TM$ ve $D''=D'-D$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}D'_X D'_Y Z &= D'_X\left(D_Y Z+D''(Y,Z)\right)\\ &= D_X\left(D_Y Z+D''(Y,Z)\right)+D''\left(X,D_Y Z+D''(Y,Z)\right)\\ &= D_X D_Y Z+D_X D''(Y,Z)+D''\left(X,D_Y Z+D''(Y,Z)\right)\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$D'_Y D'_X Z=D_Y D_X Z+D_Y D''(X,Z)+D''\left(Y,D_X Z+D''(X,Z)\right)$$

ve

$$D'_{[X,Y]}Z=D_{[X,Y]}Z+D''([X,Y],Z)$$

olur. Böylece,

$$\begin{aligned}R'(X,Y)Z &= D'_X D'_Y Z-D'_Y D'_X Z-D'_{[X,Y]}Z\\ &= R(X,Y)Z+D_X D''(Y,Z)+D''\left(X,D_Y Z+D''(Y,Z)\right)\\ &\quad -D_Y D''(X,Z)-D''\left(Y,D_X Z+D''(X,Z)\right)\\ &\quad -D''([X,Y],Z)\end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylece, Önerme 2.2.1.1.'den dolayı D'' değerlerini ΓN_g'de alır ve Yardımcı Teorem 2.2.1.2.'nin (b) şıkkından dolayı $R'(X,Y)Z-R(X,Y)Z\in\Gamma N_g$ olur.

Yardımcı Teorem 2.2.1.4. (M,g), (μ,ν,ν^*) tipinde singüler yarı Riemann bir manifold, D (M,g) üzerinde bir Koszul türev ve R^D de D'nin eğrilik fonksiyonu olsun. Bu durumda, her $X,Y,Z,V,W \in \Gamma TM$ ve $f \in C^\infty(M)$ için aşağıdaki ifadeler sağlanır [6].

(a) $g(R^D(X+Y,Z)W,V) = g(R^D(X,Z)W,V) + g(R^D(Y,Z)W,V)$

(b) $g(R^D(fX,Y)Z,V) = fg(R^D(X,Y)Z,V)$

(c) $g(R^D(X,Y+Z)W,V) = g(R^D(X,Y)W,V) + g(R^D(X,Z)W,V)$

(d) $g(R^D(X,fY)Z,V) = fg(R^D(X,Y)Z,V)$

(e) $g(R^D(X,Y)(Z+W),V) = g(R^D(X,Y)Z,V) + g(R^D(X,Y)W,V)$

(f) $g(R^D(X,Y)fZ,V) = fg(R^D(X,Y)Z,V)$

İspat. Burada sadece (e) ve (f) şıkları ispatlanacaktır. Diğerleri, benzer şekilde yapılabilir.

(e) Burada

$$
\begin{aligned}
& g(R^D(X,Y)(Z+W),V) = g(D_X D_Y(Z+W),V) \\
& - g(D_Y D_X(Z+W),V) - g(D_{[X,Y]}(Z+W),V) \\
& = Xg(D_Y(Z+W),V) - g(D_Y(Z+W),D_X V) \\
& - Yg(D_X(Z+W),V) + g(D_X(Z+W),D_Y V) \\
& - g(D_{[X,Y]}Z,V) - g(D_{[X,Y]}W,V) \\
& = X[g(D_Y Z,V) + g(D_Y W,V)] - g(D_Y Z,D_X V) \\
& - g(D_Y W,D_X V) - Y[g(D_X Z,V) + g(D_X W,V)] \\
& + g(D_X Z,D_Y V) + g(D_X W,D_Y V) \\
& - g(D_{[X,Y]}Z,V) - g(D_{[X,Y]}W,V) \\
& = g(D_X D_Y Z,V) + g(D_Y Z,D_X V) + g(D_X D_Y W,V) \\
& + g(D_Y W,D_X V) - g(D_Y Z,D_X V) \\
& - g(D_Y W,D_X V) - g(D_Y D_X Z,V) - g(D_X Z,D_Y V) \\
& - g(D_Y D_X W,V) - g(D_X W,D_Y V) \\
& + g(D_X Z,D_Y V) + g(D_X W,D_Y V) \\
& - g(D_{[X,Y]}Z,V) - g(D_{[X,Y]}W,V) \\
& = g(D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]}Z,V) \\
& + g(D_X D_Y W - D_Y D_X W - D_{[X,Y]}W,V) \\
& = g(R^D(X,Y)Z,V) + g(R^D(X,Y)W,V)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

(f)

$$
\begin{aligned}
&g\left(R^D(X,Y)fZ,V\right)=g\left(D_X D_Y\, fZ,V\right)-g\left(D_Y D_X\, fZ,V\right)-g\left(D_{[X,Y]}fZ,V\right)\\
&=Xg\left(D_Y\, fZ,V\right)-g\left(D_Y\, fZ,D_X V\right)-Yg\left(D_X\, fZ,V\right)+g\left(D_X\, fZ,D_Y V\right)\\
&-[X,Y]g\left(fZ,V\right)+g\left(fZ,D_{[X,Y]}V\right)\\
&=XYg\left(fZ,V\right)-Xg\left(fZ,D_Y V\right)-Yg\left(fZ,D_X V\right)+fg\left(Z,D_Y D_X V\right)\\
&-YXg\left(fZ,V\right)+Yg\left(fZ,D_X V\right)+Xg\left(fZ,D_Y V\right)-fg\left(Z,D_X D_Y V\right)\\
&-[X,Y]g\left(fZ,V\right)+fg\left(Z,D_{[X,Y]}V\right)\\
&=\left(g\left(Z,D_Y D_X V\right)-g\left(Z,D_X D_Y V\right)+g\left(Z,D_{[X,Y]},V\right)\right)\\
&=f\left(Yg\left(Z,D_X V\right)-g\left(D_Y Z,D_X V\right)\right.\\
&-Xg\left(Z,D_Y V\right)+g\left(D_X Z,D_Y V\right)\\
&\left.+[X,Y]g\left(Z,V\right)-g\left(D_{[X,Y]}Z,V\right)\right)\\
&=f\left(YXg\left(Z,V\right)-Yg\left(D_X Z,V\right)\right.\\
&-Xg\left(D_Y Z,V\right)+g\left(D_X D_Y Z,V\right)\\
&-XYg\left(Z,V\right)+Xg\left(D_Y Z,V\right)\\
&+Yg\left(D_X Z,V\right)-g\left(D_Y D_X Z,V\right)\\
&\left.+[X,Y]g\left(Z,V\right)-g\left(D_{[X,Y]}Z,V\right)\right)\\
&=fg\left(R^D(X,Y)Z,V\right)
\end{aligned}
$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Yorum 2.2.1.3. Yukarıdaki yardımcı teoremden, $g\left(R^D(X,Y)Z,V\right)$ ifadesinin $C^\infty(M)$-çok lineer olduğu, yani her bir bileşenine göre tensörel olduğu görülür. Böylece, eğer $X,X',Y,Y',Z,Z',V,V'\in\Gamma TM$ ve $X_p=X'_p$, $Y_p=Y'_p$, $Z_p=Z'_p$ ve $V_p=V'_p$ ise, bu durumda $g\left(R^D(X,Y)Z,V\right)\big|_p=g\left(R^D(X',Y')Z',V'\right)\big|_p$ olur. Bu ise, $g\left(R^D(X,Y)Z,V\right)$ ifadesinin, $p\in M$ noktasında sadece X,Y,Z,V değerlerine bağlıdır [6].

Yardımcı Teorem 2.2.1.5. (M,g), (μ,ν,ν^*) tipinde durağan yarı Riemann bir manifold ve D de (M,g) üzerinde R^D eğrilik fonksiyonuna sahip bir Koszul türev olsun. Bu durumda, her $X,Y,Z,V\in\Gamma TM$ için aşağıdaki ifadeler doğrudur [6].

(a) $g\left(R^D(X,Y)Z,V\right)=-g\left(R^D(Y,X)Z,V\right)$,

(b) $g\left(R^D(X,Y)Z,V\right)=-g\left(R^D(X,Y)V,Z\right)$,

(c) $g\left(R^D(X,Y)Z,V\right)+g\left(R^D(Y,Z)X,V\right)+g\left(R^D(Z,X)Y,V\right)=0$,

(d) $g\left(R^D(X,Y)Z,V\right)=g\left(R^D(Z,V)X,Y\right)$.

İspat. (a) Tanım 2.2.1.3.'ten açıktır.

(b) (a) şıkkına benzer olarak yapılabilir.

(c)

$$
\begin{aligned}
& g\left(R^D(X,Y)Z,V\right)+g\left(R^D(Y,Z)X,V\right)+g\left(R^D(Z,X)Y,V\right) \\
& = g\left(D_X D_Y Z,V\right)-g\left(D_Y D_X Z,V\right)-g\left(D_{[X,Y]}Z,V\right) \\
& + g\left(D_Y D_Z X,V\right)-g\left(D_Z D_Y X,V\right)-g\left(D_{[Y,Z]}X,V\right) \\
& + g\left(D_Z D_X Y,V\right)-g\left(D_X D_Z Y,V\right)-g\left(D_{[Z,X]}Z,V\right) \\
& = g\left(D_X\left(D_Y Z-D_Z Y\right),V\right)+g\left(D_Y\left(D_Z X-D_X Z\right),V\right) \\
& + g\left(D_Z\left(D_X Y-D_Y X\right),V\right)-g\left(D_{[X,Y]}Z,V\right) \\
& - g\left(D_{[Y,Z]}X,V\right)-g\left(D_{[Z,X]}Z,V\right) \\
& = Xg\left([Y,Z],V\right)-g\left([Y,Z],D_X V\right)+Zg\left([X,Y],V\right) \\
& - g\left([X,Y],D_Z V\right)-g\left(D_Z[X,Y],V\right)-g\left([[X,Y],Z],V\right) \\
& - g\left(D_X[Y,Z],V\right)-g\left([[Y,Z],X],V\right) \\
& - g\left(D_Y[Z,X],V\right)-g\left([[Z,X],Y],V\right) \\
& = g\left(D_X[Y,Z],V\right)+g\left(D_Y[Z,X],V\right)+g\left(D_Z[X,Y],V\right) \\
& - g\left(D_Z[X,Y],V\right)-g\left(D_X[Y,Z],V\right)-g\left(D_Y[Z,X],V\right) \\
& - g\left([[X,Y],Z],V\right)-g\left([[Y,Z],X],V\right)-g\left([[Z,X],Y],V\right) \\
& = 0,
\end{aligned}
$$

şeklinde elde edilir. Burada, Jacobi özdeşliği olarak bilinen $[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=0$ ifadesi kullanılmıştır.

(d), (a), (b) ve (c) şıklarındaki ifadeler kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
& g\left(R^D(X,Y)Z,V\right)=-g\left(R^D(X,Y)V,Z\right) \\
& = g\left(R^D(Y,V)X,Z\right)+g\left(R^D(V,X)Y,Z\right) \\
& = -g\left(R^D(Y,V)Z,X\right)+g\left(R^D(V,X)Z,Y\right) \\
& = g\left(R^D(V,Z)Y,X\right)+g\left(R^D(Z,Y)V,X\right) \\
& + g\left(R^D(X,Z)V,Y\right)+g\left(R^D(Z,V)X,Y\right) \\
& = 2g\left(R^D(Z,V)X,Y\right)+g\left(R^D(Y,Z)X,V\right) \\
& + g\left(R^D(Z,X)Y,V\right) \\
& = 2g\left(R^D(Z,V)X,Y\right)-g\left(R^D(X,Y)Z,V\right),
\end{aligned}
$$

olup, buradan $g\left(R^D(X,Y)Z,V\right)=g\left(R^D(Z,V)X,Y\right)$ olduğu görülür.

Yorum 2.2.1.4. Yukarıdaki yardımcı teoremden, eğer $U\in\Gamma N_g$ ve $X,Y,Z\in\Gamma TM$ ise, bu durumda

$$g\left(R^D(U,X)Y,Z\right)=-g\left(R^D(X,U)Y,Z\right)=g\left(R^D(Y,Z)U,X\right)=-g\left(R^D(Y,Z)X,U\right)=0$$

olur. Bu ise, $R^D(U,X)Y, R^D(X,U)Y, R^D(X,Y)U \in \Gamma N_g$ olduğunu verir [6].

2.2.2. Koszul Konneksiyonu

Tanım 2.2.2.1. (M,g), (μ,ν,ν^*) tipinde yarı Riemann bir manifold olsun. $X,Y \in \Gamma TM$ için $\prod(X)=\overline{X}$ ve $\prod(Y)=\overline{Y}$ olmak üzere, $\overline{TM}$ üzerinde $\overline{g}(\overline{X},\overline{Y})=g(X,Y)$ şeklinde tanımlanan $\overline{g}$ metrik tensörüne sahip dejenere olmayan bölüm tanjant demeti $\overline{TM}=TM/N_g$ ile tanımlanır [6].

Tanım 2.1.3.1.'den $\overline{g}$ iyi tanımlıdır ve $(\overline{TM},\overline{g})$, M üzerinde (ν,ν^*) tipinde dejenere olmayan bir vektör demetidir. Ayrıca, eğer (M,g) dejenere değilse, bu durumda $(\overline{TM},\overline{g})$ kanonik olarak (TM,g)'ye izometriktir.

Tanım 2.2.2.2. (M,g), (μ,ν,ν^*) tipinde yarı Riemann bir manifold ve ∇ da $\overline{TM}$ üzerinde bir konneksiyon olsun. $X,Y \in \Gamma TM$ için $\prod(X)=\overline{X}$ ve $\prod(Y)=\overline{Y}$ olmak üzere, ∇'nın $T \in \Gamma \wedge^2 \left(TM;\overline{TM}\right)$ burulma tensörü $T(X,Y)=\nabla_X\overline{Y}-\nabla_Y\overline{X}-\prod([X,Y])$ şeklinde tanımlanır. Eğer $T=0$ ise, ∇ sıfır burulmalı konneksiyon olarak adlandırılır [6].

$(\overline{TM},\overline{g})$, bir yarı Riemann konneksiyona sahip olduğu bilinmektedir. Şimdi, (M,g) üzerinde, $(\overline{TM},\overline{g})$'nin sıfır burulmalı yarı Riemann bir konneksiyona sahip olması için gerekli ve yeterli koşullar araştırılacaktır. Bunun için, aşağıdaki singüler yarı Riemann geometrisinin temel teoremi ispatlanacaktır.

Teorem 2.2.2.1 (M,g), (μ,ν,ν^*) tipinde yarı Riemann bir manifold olsun. Eğer (M,g) durağan ise, bu durumda D, (M,g) üzerinde bir Koszul türev ve $\prod(Y)=\overline{Y}$ olacak şekilde $X,Y \in \Gamma TM$ olmak üzere $(\overline{TM},\overline{g})$'de $\overline{\nabla}_X\overline{Y}=\prod(D_X Y)$ ile tanımlı sıfır burulmalı bir tek $\overline{\nabla}$ yarı Riemann konneksiyonu vardır. Tersine, eğer $(\overline{TM},\overline{g})$'de sıfır burulmalı bir tek $\overline{\nabla}$ yarı Riemann konneksiyonu varsa, bu durumda (M,g) durağan olur [1].

İspat. (M,g) durağan olsun. Bu durumda Yardımcı Teorem 2.2.1.1.'den, (M,g) üzerinde $\prod(Y)=\overline{Y}$ olacak şekilde $X,Y\in\Gamma TM$ için $\overline{\nabla}_X\overline{Y}=\prod(D_XY)$ şeklinde tanımlı bir $\overline{\nabla}$ Koszul türevi vardır. İlk olarak, $\overline{\nabla}$'nin iyi tanımlı olduğu yani, $\overline{\nabla}$ tanımının D Koszul türevi ve $\prod(Y)=\overline{Y}$ olacak şekilde $Y\in\Gamma TM$ seçiminden bağımsız olduğu gösterilecektir. D ve D' (M,g) üzerinde birer Koszul türev ve $\prod(Y)=\prod(Y')$ olacak şekilde $Y,Y'\in\Gamma TM$ olsun. Bu durumda, Önerme 2.2.1.1.'den bir $D''=D'-D:\Gamma TM\times\Gamma TM\to\Gamma N_g$ Koszul türev ve $U\in\Gamma N_g$ vardır öyle ki, $Y'=Y+U$ olur. Böylece, Yardımcı Teorem 2.2.1.2.'nin (b) şıkkından, $\prod(Z)=\overline{Z}$ olacak şekilde $Z\in\Gamma TM$ olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
&\overline{g}\left(\prod(D'_XY'),\overline{Z}\right)=g(D'_XY',Z)\\
&=g(D'_X(Y+U),Z)\\
&=g(D'_XY,Z)+g(D'_XU,Z)\\
&=g(D'_XY,Z)=g(D_XY+D''(X,Y),Z)\\
&=g(D_XY,Z)=\overline{g}\left(\prod(D_XY),\overline{Z}\right),
\end{aligned}
$$

ifadesi elde edilir. Buradan $\overline{g}$'nin dejenere olmadığı göz önüne alınırsa, $\prod(D'_XY')=\prod(D_XY)$ olduğu görülür. Öte yandan, Tanım 2.2.1.1.'deki Koszul türevinin temel özellikleri kullanılarak, $\overline{\nabla}$ konneksiyonun $(\overline{TM},\overline{g})$ üzerinde sıfır burulmalı yarı Riemann bir konneksiyon olduğu gösterilebilir. Şimdi $\overline{\nabla}$'nin bir tek olduğu gösterilecektir. $\prod(X)=\overline{X}$, $\prod(Y)=\overline{Y}$ ve $\prod(Z)=\overline{Z}$ olmak üzere, $X,Y,Z\in\Gamma TM$ verilsin.

$$
\begin{aligned}
&\overline{g}(\overline{\nabla}_X\overline{Y},\overline{Z})=X\overline{g}(\overline{Y},\overline{Z})-\overline{g}(\overline{Y},\overline{\nabla}_X\overline{Z})\\
&=X\overline{g}(\overline{Y},\overline{Z})-\overline{g}(\overline{Y},\overline{\nabla}_Z\overline{X}+\prod([X,Z]))\\
&=X\overline{g}(\overline{Y},\overline{Z})-Z\overline{g}(\overline{X},\overline{Y})+\overline{g}(\overline{\nabla}_Z\overline{Y},\overline{X})+\overline{g}(\overline{Y},\prod([Z,X]))\\
&=X\overline{g}(\overline{Y},\overline{Z})-Z\overline{g}(\overline{X},\overline{Y})+\overline{g}(\overline{\nabla}_Y\overline{Z}+\prod([Z,Y]),\overline{X})+\overline{g}(\overline{Y},\prod([Z,X]))\\
&=X\overline{g}(\overline{Y},\overline{Z})-Z\overline{g}(\overline{X},\overline{Y})+Y\overline{g}(\overline{Z},\overline{X})-\overline{g}(\overline{Z},\overline{\nabla}_Y\overline{X})\\
&-\overline{g}(\overline{X},\prod([Y,Z]))+\overline{g}(\overline{Y},\prod([Z,X]))\\
&=X\overline{g}(\overline{Y},\overline{Z})+Y\overline{g}(\overline{Z},\overline{X})-Z\overline{g}(\overline{X},\overline{Y})+\overline{g}(\overline{Z},\prod([X,Y]))\\
&+\overline{g}(\overline{Y},\prod([Z,X]))-\overline{g}(\overline{X},\prod([Y,Z]))-\overline{g}(\overline{\nabla}_X\overline{Y},\overline{Z})
\end{aligned}
$$

olur. Böylece,

$$\bar{g}\left(\bar{\nabla}_X \bar{Y}, \bar{Z}\right) = \frac{1}{2}\left[X\bar{g}\left(\bar{Y}, \bar{Z}\right) + Y\bar{g}\left(\bar{Z}, \bar{X}\right) - Z\bar{g}\left(\bar{X}, \bar{Y}\right)\right.$$
$$\left. + \bar{g}\left(\bar{Z}, \Pi([X, Y])\right) + \bar{g}\left(\bar{Y}, \Pi([Z, X])\right) - \bar{g}\left(\bar{X}, \Pi([Y, Z])\right)\right]$$

olduğu görülür. Bu eşitlik $\left(\overline{TM}, \bar{g}\right)$ üzerinde, sıfır burulmalı her yarı Riemann konneksiyonu için sağlandığından, $\bar{g}$ 'nin dejenere olmadığı göz önüne alınırsa, $\bar{\nabla}$ 'nin bir tek olduğu elde edilir.

Tersine, $\bar{\nabla}$ 'nin $\left(\overline{TM}, \bar{g}\right)$ üzerinde sıfır burulmalı yarı Riemann konneksiyonu olduğu varsayılsın. Bu durumda, eğer $U \in \Gamma N_g$ ve $\Pi(X) = \bar{X}$, $\Pi(Y) = \bar{Y}$ olacak şekilde $X, Y \in \Gamma TM$ ise

$$\begin{aligned}
&(L_U g)(X, Y) = Ug(X, Y) - g([U, X], Y) - g(X, [U, Y]) \\
&= U\bar{g}\left(\bar{X}, \bar{Y}\right) - \bar{g}\left(\Pi([U, X]), \bar{Y}\right) - \bar{g}\left(\bar{X}, \Pi([U, Y])\right) \\
&= U\bar{g}\left(\bar{X}, \bar{Y}\right) - \bar{g}\left(\bar{\nabla}_U \bar{X}, \bar{Y}\right) - \bar{g}\left(\bar{X}, \bar{\nabla}_U \bar{Y}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğu bulunur. Bu ise, (M, g)'nin durağan yarı Riemann bir manifold olduğunu verir.

Tanım 2.2.2.3. (M, g), $\left(\mu, \nu, \nu^*\right)$ tipinde durağan yarı Riemann bir manifold olsun. Bu durumda $\left(\overline{TM}, \bar{g}\right)$ üzerinde tanımlı $\bar{\nabla}$ sıfır burulmalı bir tek yarı Riemann konneksiyonuna (M, g)'nin Koszul konneksiyonu denir. Eğer (M, g) dejenere değilse, bu konneksiyona, (M, g) üzerinde Levi-Civita konneksiyonu denir [6].

Yorum 2.2.2.1. Eğer, (M, g) $\left(\nu, \nu^*\right)$ tipinde dejenere olmayan yarı Riemann bir manifold ise, bu durumda $N_g = 0$ (sıfır kesit) olur. Böylece, $U \in \Gamma N_g$ olmak üzere, $L_U g = 0$ bulunur. Yani (M, g) dejenere değilse, durağandır. Bu yüzden, $\left(\overline{TM}, \bar{g}\right)$ ve (TM, g) kanonik olarak izometrik olduklarından, $\left(\overline{TM}, \bar{g}\right)$'de tanımlı Koszul konneksiyonu (TM, g) üzerinde tanımlı olan Levi-Civita konneksiyonu olarak adlandırılan bir tek konneksiyon gibi düşünülebilir [6].

$\bar{\nabla}$, $\left(\mu, \nu, \nu^*\right)$ tipinde durağan yarı Riemann bir manifoldun Koszul konneksiyonu ve $\bar{R}$ de $\bar{\nabla}$ 'nin eğrilik tensörü olsun.

Yardımcı Teorem 2.2.2.1. (M, g), $\left(\mu, \nu, \nu^*\right)$ tipinde durağan yarı Riemann bir manifold olsun. Eğer D, (M,g) üzerinde R^D eğrilik fonksiyonu ise, bu durumda $X,Y,Z \in \Gamma TM$ olmak üzere $\prod(Z)=\overline{Z}$ olacak şekilde, , $\overline{R}(X,Y)\overline{Z} = \prod\left(R^D(X,Y)Z\right)$ eşitliği sağlanır [6].

İspat. Koszul konneksiyonun tanımı göz önüne alınırsa

$$
\begin{aligned}
\prod\left(R^D(X,Y)Z\right) &= \prod\left(D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]}Z\right) \\
&= \prod(D_X D_Y Z) - \prod(D_Y D_X Z) - \prod\left(D_{[X,Y]}Z\right) \\
&= \overline{\nabla}_X \prod(D_Y Z) - \overline{\nabla}_Y \prod(D_X Z) - \overline{\nabla}_{[X,Y]}\overline{Z} \\
&= \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y \overline{Z} - \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X \overline{Z} - \overline{\nabla}_{[X,Y]}\overline{Z} \\
&= \overline{R}(X,Y)\overline{Z}
\end{aligned}
$$

olduğu görülür.

Teorem 2.2.2.2. (M,g), (μ,ν,ν^*) tipinde durağan yarı Riemann bir manifold olsun. Bu durumda, $\prod(X)=\overline{X}$, $\prod(Y)=\overline{Y}$, $\prod(Z)=\overline{Z}$ ve $\prod(V)=\overline{V}$ olacak şekildeki her $X,Y,Z,V \in \Gamma TM$ için aşağıdaki ifadeler sağlanır [6].

(a) $\overline{R}(X,Y)\overline{Z} = -\overline{R}(Y,X)\overline{Z}$

(b) $\overline{g}\left(\overline{R}(X,Y)\overline{Z},\overline{V}\right) = -\overline{g}\left(\overline{R}(X,Y)\overline{V},\overline{Z}\right)$

(c) $d^{\overline{\nabla}} = 0$ (İkinci Bianchi özdeşliği)

(d) $\overline{R}(X,Y)\overline{Z} + \overline{R}(Y,Z)\overline{X} + \overline{R}(Z,X)\overline{Y} = 0$ (Birinci Bianchi özdeşliği)

(e) $\overline{g}\left(\overline{R}(X,Y)\overline{Z},\overline{V}\right) = -\overline{g}\left(\overline{R}(Z,V)\overline{X},\overline{Y}\right)$

İspat. (a), (b) (d) ve (e) şıklarındaki ifadelerin ispatı Yardımcı Teorem 2.2.2.1. ve Yardımcı Teorem 2.2.1.5.'den kolayca yapılabilir. (c) şıkkının ispatı ise Poincare özelliğinden direkt yapılır.

Yorum 2.2.2.2. $\left(\overline{TM},\overline{g}\right)$ üzerindeki herhangi bir yarı Riemann konneksiyonun eğrilik tensörü . (a), (b) ve (c) özelliklerini sağlar, fakat (d) ve (e) özelliklerini sağlamak zorunda değildir [6].

Tanım 2.2.2.4. (M,g), (μ,ν,ν^*) tipinde durağan yarı Riemann bir manifold olsun. Bu durumda, $\left(\overline{TM},\overline{g}\right)$'nin $\hat{R} \in \Gamma \wedge^2 \left(\overline{TM}; \wedge^1\left(\overline{TM};\overline{TM}\right)\right)$ iç eğrilik tensörü, $\prod(X)=\overline{X}$ ve

$\prod(Y)=\overline{Y}$ olmak üzere $X,Y\in\Gamma TM$ ve $\overline{Z}\in\Gamma\overline{TM}$ için $\hat{R}(\overline{X},\overline{Y})\overline{Z}=\overline{R}(X,Y)\overline{Z}$ şeklinde tanımlanır [6].

Yardımcı Teorem 2.2.2.1 ve Yorum 2.2.1.3.’ten $\hat{R}$’nin iyi tanımlı olduğu kolayca gösterilebilir.

Teorem 2.2.2.3. (M,g), (μ,ν,ν^*) tipinde durağan yarı Riemann bir manifold olsun. Bu durumda $\overline{X},\overline{Y},\overline{Z},\overline{V}\in\Gamma\overline{TM}$ için

(a) $\hat{R}(\overline{X},\overline{Y})\overline{Z}=-\hat{R}(\overline{Y},\overline{X})\overline{Z}$

(b) $\overline{g}\left(\hat{R}(\overline{X},\overline{Y})\overline{Z},\overline{V}\right)=-\overline{g}\left(\hat{R}(\overline{X},\overline{Y})\overline{V},\overline{Z}\right)$

(c) $\hat{R}(\overline{X},\overline{Y})\overline{Z}+\hat{R}(\overline{Y},\overline{Z})\overline{X}+\hat{R}(\overline{Z},\overline{X})\overline{Y}=0$ (Birinci Bianchi özdeşliği)

(d) $\overline{g}\left(\hat{R}(\overline{X},\overline{Y})\overline{Z},\overline{V}\right)=-\overline{g}\left(\hat{R}(\overline{Z},\overline{V})\overline{X},\overline{Y}\right)$

özellikleri sağlanır [6].

İspat. Tanım 2.2.2.4. ve Teorem 2.2.2.2.’den direkt görülür.

Fakat $d^{\nabla}\hat{R}$ tanımlı değildir. Ancak, eğer $\hat{R}\in\Gamma T_3^0\left(\overline{TM};\overline{TM}\right)$ olduğu göz önüne alınırsa aşağıdaki özdeşlik elde edilir.

Teorem 2.2.2.4. (İkinci Bianchi Özdeşliği) (M,g), (μ,ν,ν^*) tipinde durağan yarı Riemann bir manifold olsun. Bu durumda, $\left(\overline{TM},\overline{g}\right)$’nin $\hat{R}$ iç eğrilik tensörü, $\prod(X)=\overline{X}$, $\prod(Y)=\overline{Y}$, $\prod(Z)=\overline{Z}$ ve $\prod(V)=\overline{V}$ olacak şekildeki her $X,Y,Z,V\in\Gamma TM$ için

$$\left(\nabla_X\hat{R}\right)\left(\overline{Y},\overline{Z},\overline{V}\right)+\left(\nabla_Y\hat{R}\right)\left(\overline{Z},\overline{X},\overline{V}\right)+\left(\nabla_Z\hat{R}\right)\left(\overline{X},\overline{Y},\overline{V}\right)=0,$$

özdeşliği sağlanır [6].

İspat. Teorem 2.2.2.2.’nin (c) şıkkından

$$
\begin{aligned}
&\left(\overline{\nabla}_X \hat{R}\right)\left(\overline{Y},\overline{Z},\overline{V}\right)+\left(\overline{\nabla}_Y \hat{R}\right)\left(\overline{Z},\overline{X},\overline{V}\right)+\left(\overline{\nabla}_Z \hat{R}\right)\left(\overline{X},\overline{Y},\overline{V}\right)\\
&=\overline{\nabla}_X \hat{R}\left(\overline{Y},\overline{Z}\right)\overline{V}-\hat{R}\left(\overline{\nabla}_X \overline{Y},\overline{Z}\right)\overline{V}-\hat{R}\left(\overline{Y},\overline{\nabla}_X \overline{Z}\right)\overline{V}\\
&-\hat{R}\left(\overline{Y},\overline{Z}\right)\overline{\nabla}_X \overline{V}+\overline{\nabla}_Y \hat{R}\left(\overline{Z},\overline{X}\right)\overline{V}-\hat{R}\left(\overline{\nabla}_Y \overline{Z},\overline{X}\right)\overline{V}\\
&-\hat{R}\left(\overline{Z},\overline{\nabla}_Y \overline{X}\right)\overline{V}-\hat{R}\left(\overline{Z},\overline{X}\right)\overline{\nabla}_Y \overline{V}+\overline{\nabla}_Z \hat{R}\left(\overline{X},\overline{Y}\right)\overline{V}\\
&-\hat{R}\left(\overline{\nabla}_Z \overline{X},\overline{Y}\right)\overline{V}-\hat{R}\left(\overline{X},\overline{\nabla}_Z \overline{Y}\right)\overline{V}-\hat{R}\left(\overline{X},\overline{Y}\right)\overline{\nabla}_Z \overline{V}\\
&=\overline{\nabla}_X \hat{R}\left(\overline{Y},\overline{Z}\right)\overline{V}+\overline{\nabla}_Y \hat{R}\left(\overline{Z},\overline{X}\right)\overline{V}+\overline{\nabla}_Z \hat{R}\left(\overline{X},\overline{Y}\right)\overline{V}\\
&-\hat{R}\left(\prod([X,Y]),\overline{Z}\right)\overline{V}-\hat{R}\left(\prod([Y,Z]),\overline{X}\right)\overline{V}-\hat{R}\left(\prod([Z,X]),\overline{Y}\right)\overline{V}\\
&-\hat{R}\left(\overline{Y},\overline{Z}\right)\overline{\nabla}_X \overline{V}-\hat{R}\left(\overline{Z},\overline{X}\right)\overline{\nabla}_Y \overline{V}-\hat{R}\left(\overline{X},\overline{Y}\right)\overline{\nabla}_Z \overline{V}\\
&=\overline{\nabla}_X \overline{R}(Y,Z)\overline{V}+\overline{\nabla}_Y \overline{R}(Z,X)\overline{V}+\overline{\nabla}_Z \overline{R}(X,Y)\overline{V}\\
&-\overline{R}([X,Y],Z)\overline{V}-\overline{R}([Y,Z],X)\overline{V}-\overline{R}([Z,X],Y)\overline{V}\\
&-\overline{R}(Y,Z)\overline{\nabla}_X \overline{V}-\overline{R}(Z,X)\overline{\nabla}_Y \overline{V}-\overline{R}(X,Y)\overline{\nabla}_Z \overline{V}\\
&=\left(d^{\overline{\nabla}}\overline{R}\right)(X,Y,Z)\left(\overline{V}\right)=0,
\end{aligned}
$$

olduğu görülür.

2.2.3. Durağan Yarı Riemann Manifoldların Eğriliği

$\hat{R}$ iç eğrilik tensörü, her bir birleşenine göre tensöreldir. Dolayısıyla, $\left(\hat{R}\left(\overline{X},\overline{Y}\right)\overline{Z}\right)_p$ ifadesi $p\in M$ noktasında sadece $\overline{X},\overline{Y},\overline{Z}\in\Gamma\overline{TM}$ değerlerine bağlıdır.

Tanım 2.2.3.1. (M,g), $\left(\mu,\nu,\nu^*\right)$ tipinde durağan yarı Riemann bir manifold olsun. $p\in M$ noktasında $\overline{x},\overline{y},\overline{z},\overline{v}\in\overline{T_pM}$ olmak üzere, $\hat{R}$'nın $\hat{G}\in\Gamma T_4^0\left(\overline{TM}\right)$ ilgili eğrilik benzeri tensör alanı $\hat{G}\left(\overline{x},\overline{y},\overline{z},\overline{v}\right)=\overline{g}\left(\hat{R}\left(\overline{x},\overline{y}\right)\overline{z},\overline{v}\right)$ şeklinde tanımlanır. $p\in M$ noktasında $\overline{x},\overline{y},\overline{z},\overline{v}\in\overline{T_pM}$ olmak üzere $\left(\overline{TM},\overline{g}\right)$'nin $\hat{G}^0\in\Gamma T_4^0\left(\overline{TM}\right)$ temel eğrilik benzeri tensör alanı ise $\hat{G}^0\left(\overline{x},\overline{y},\overline{z},\overline{v}\right)=\overline{g}\left(\overline{z},\overline{y}\right)\overline{g}\left(\overline{x},\overline{v}\right)-\overline{g}\left(\overline{x},\overline{z}\right)\overline{g}\left(\overline{y},\overline{v}\right)$ ile tanımlanır [6].

Yorum 2.2.3.1. Teorem 2.2.2.3.'den $\hat{G}$'nın her $\overline{T_pM}$ üzerinde eğrilik benzeridir ve $\hat{R}$ da $\hat{G}$'nın eğrilik tensörüdür. Her $p\in M$ noktasında $\overline{x},\overline{y},\overline{z}\in\overline{T_pM}$ olmak üzere $\left(\overline{T_pM},\overline{g}_p\right)$'nin $\hat{R}^0\in\Gamma\wedge^2\left(\overline{TM};\wedge^1\left(\overline{TM};\overline{TM}\right)\right)$ temel eğrilik tensörü $\hat{R}^0\left(\overline{x},\overline{y}\right)\overline{z}=\overline{g}\left(\overline{z},\overline{y}\right)\overline{x}-\overline{g}\left(\overline{x},\overline{z}\right)\overline{y}$ ile verilir (Tanım 2.1.5.1, 2.1.5.2. ve 2.1.5.3) [6].

Tanım 2.2.3.2. (M,g), $\left(\mu,\nu,\nu^*\right)$ tipinde durağan yarı Riemann bir manifold ve $\overline{P}$ de $\left(\overline{T_pM},\overline{g}_p\right)$'de dejenere olmayan bir düzlem olsun. Bu durumda, $\overline{P}$'nin $\kappa\left(\overline{P}\right)$ eğriliği

$$\kappa(\overline{P})=\frac{\overline{g}\left(\hat{R}(\overline{x},\overline{y},\overline{y},\overline{x})\right)}{\hat{Q}(\overline{x},\overline{y})},$$

ile tanımlıdır. Burada, $\hat{Q}(\overline{x},\overline{y})=\overline{g}(\overline{x},\overline{x})g(\overline{y},\overline{y})-\overline{g}(\overline{x},\overline{y})^2$ ve $\overline{P}=span\{\overline{x},\overline{y}\}$'dir. Eğer $\left(\overline{T_pM},\overline{g}_p\right)$'deki dejenere olmayan her $\overline{P}$ düzlemi için $\kappa(\overline{P})=C$ oluyorsa, (M,g)'ye $p\in M$ noktasında, C sabit kesitsel eğriliğe sahiptir denir [6].

Yorum 2.2.3.2. Eğer $\overline{P}=span\{\overline{x},\overline{y}\}$ $\left(\overline{T_pM},\overline{g}_p\right)$'de bir düzlem ise, R^D (M,g) üzerinde bir Koszul türevin eğrilik fonksiyonu ve $\prod(x)=\overline{x}$ ve $\prod(y)=\overline{y}$ olacak şekildeki $x,y\in T_pM$ için $\hat{G}(\overline{x},\overline{y},\overline{y},\overline{x})=\overline{g}\left(\hat{R}(\overline{x},\overline{y})\overline{y},\overline{x}\right)=\overline{g}\left(\overline{R}(x,y)\overline{y},\overline{x}\right)=g\left(R^D(x,y)y,x\right)$ olur. Ayrıca, $\hat{Q}(\overline{x},\overline{y})=\overline{g}(\overline{x},\overline{x})g(\overline{y},\overline{y})-\overline{g}(\overline{x},\overline{y})^2=g(x,x)g(y,y)-g(x,y)^2$ elde edilir. Böylece, eğer $\overline{P}=span\{\overline{x},\overline{y}\}$ $\left(\overline{T_pM},\overline{g}_p\right)$'de dejenere olmayan bir düzlem ise $\prod(x)=\overline{x}$ ve $\prod(y)=\overline{y}$ olacak şekildeki her $x,y\in T_pM$ için

$$\kappa(\overline{P})=\frac{g\left(R^D(x,y)y,x\right)}{g(x,x)g(y,y)-g(x,y)^2}$$

olur. Şimdi $\left(T_pM,g_p\right)$ üzerinde düzlemler için bir denklik bağıntısı tanımlanacaktır: P ve P', T_pM 'de dejenere olmayan birer düzlem olsun. Eğer P 'nin bir $\{x,y\}$ bazı için P' 'nün bir bazı $\{x'=x+u_1,y'=y+u_2\}$ olacak şekilde $u_1,u_2\in N_{g_p}$ varsa P düzlemi P' düzlemine denktir denir. Böylece, bu denklik bağıntısı tarafından belirlenen denklik sınıfları $\overline{T_pM}$ 'de dejenere olmayan düzlemlerdir. Diğer tarafından, eğer $\overline{P}$ bir denklik sınıfı (düzlem) ise, bu durumda Yorum 2.2.1.4. göz önüne alınırsa, $\overline{P}=span\{\overline{x},\overline{y}\}$ düzleminin her $P=span\{x,y\}$ temsili için

$$\kappa(\overline{P})=\frac{g\left(R^D(x,y)y,x\right)}{g(x,x)g(y,y)-g(x,y)^2}$$

olur [6].

Teorem 2.2.3.1. (M,g), $\left(\mu,\nu,\nu^*\right)$ tipinde durağan yarı Riemann bir manifold olsun. Bu durumda (M,g)'nin $p\in M$ noktasında C sabit kesitsel eğriliğe sahip olması için gerekli ve yeterli koşul $\hat{G}=C\hat{G}^0$ veya denk olarak $\hat{R}=C\hat{R}^0$ olması gerekir [6].

İspat. Teorem 2.1.5.1.'den direkt görülür.

Teorem 2.2.3.2. (M,g), $(\mu,\nu \geq 1,\nu^* \geq 1)$ tipinde durağan yarı Riemann bir manifold olsun.

(a) Eğer $(\overline{T_p M}, g_p)$ üzerinde, $(-,+)$ işaretine veya $(-,-)$ veya $(+,+)$ işaretlerinden birine sahip her $\overline{P}$ düzlemi için $|\kappa(\overline{P})| \leq k \in R$ oluyorsa, (M,g), $p \in M$ noktasında sabit kesitsel eğriliğe sahiptir.

(b) Eğer $(-,+)$ ve $(+,+)$ işaretine veya $(-,+)$ ve $(-,-)$ işaretlerinden birine sahip tüm $\overline{P}$ düzlemleri için $\kappa(\overline{P}) \geq k \in R$ eşitsizliği sağlanırsa, bu durumda (M,g) sabit kesitsel eğriliğe sahiptir. Yukarıdaki eşitsizlik $\kappa(\overline{P}) \leq k \in R$ ifadesi ile yer değiştirilebilir [6].

İspat. İspat Teorem 2.1.5.4.'den direkt görülür.

Teorem 2.2.3.3. (M,g), $(\mu,\nu \geq 1,\nu^* \geq 2)$ tipinde veya (M,g), $(\mu,\nu \geq 2,\nu^* \geq 1)$ tipinde durağan yarı Riemann bir manifold olsun. Eğer $(0,+)$ veya $(0,-)$ işaretlerinden birine sahip bir $\overline{P} = span\{\overline{x},\overline{y}\}$ düzlemi üzerinde her $\overline{x},\overline{y} \in \overline{T_p M}$ için $\hat{G}(\overline{x},\overline{y},\overline{y},\overline{x}) = 0$ ise, bu durumda, (M,g) $p \in M$ noktasında sabit kesitsel eğriliğe sahip olur [6].

İspat. İspat Teorem 2.1.5.5.'den direkt elde edilir.

Tanım 2.2.3.3. (M,g), (μ,ν,ν^*) tipinde durağan yarı Riemann bir manifold olsun. $p \in M$ noktasında $\overline{x},\overline{y},\overline{z} \in \overline{T_p M}$ olmak üzere, $(\overline{TM},\overline{g})$'nin $\hat{Ric} \in \Gamma T_2^0(\overline{TM})$ Ricci tensörü $\hat{Ric}(\overline{x},\overline{y}) = \dot{I}z\{\overline{z} \to \hat{R}(\overline{z},\overline{x})\overline{y}\}$ şeklinde tanımlanır. $\hat{\hat{Ric}}$, $\hat{Ric}$ Ricci operatörü olmak üzere, (M,g)'nin $\hat{S} \in C^\infty(M)$ skaler eğriliği $\hat{S}_p = \dot{I}z\,\hat{\hat{Ric}}$ şeklinde tanımlanır [6].

Tanım 2.2.3.4. (M,g), $\nu + \nu^* \geq 3$ olmak üzere (μ,ν,ν^*) tipinde durağan yarı Riemann bir manifold olsun. $\hat{R}_1 \in \Gamma T_3^0(\overline{TM};\overline{TM})$,

$$\hat{R}_1(\overline{x},\overline{y})\overline{z} = \hat{Ric}(\overline{z},\overline{y})\overline{x} - \hat{Ric}(\overline{x},\overline{z})\overline{y}$$

ve $\hat{G}_1 \in \Gamma T_4^0(\overline{TM})$ de

$$\hat{G}_1(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{v}) = \frac{1}{\nu+\eta-2}\left[\bar{g}\left(\hat{R}_1(\bar{x},\bar{y})\bar{z},\bar{v}\right) + \hat{Ric}\left(\hat{R}^0(\bar{x},\bar{y})\bar{z},\bar{v}\right)\right]$$

şeklinde verilsin. Bu durumda, $\hat{R^{\hat{W}}}$, $\hat{W} \in \Gamma \wedge^2 \left(\overline{TM}; \wedge^1\left(\overline{TM};\overline{TM}\right)\right)$'nin eğrilik tensörü olmak üzere, $\left(\overline{TM},\bar{g}\right)$'nin Weyl eğrilik tensörü

$$\hat{W} = \hat{G} - \hat{G}_1 + \frac{1}{(\nu+\eta-1)(\nu+\eta-2)}\hat{S}\hat{G}_0$$

ile tanımlanır [6].

Önerme 2.2.3.1. (M,g), $\nu+\nu^* \geq 3$ olmak üzere, $(\mu,\nu \geq 1,\nu^* \geq 1)$ tipinde durağan yarı Riemann bir manifold olsun. Eğer $\left(\overline{T_pM},\bar{g}_p\right)$ null izotropik ise yani $\hat{W}_p = 0$ oluyorsa, bu durumda (M,g)'nin $p \in M$ noktasında sabit kesitsel eğriliğe sahip olması için gerekli ve yeterli koşul $\lambda \in R$ olmak üzere $p \in M$ noktasında $\hat{Ric} = \lambda\bar{g}$ olmasıdır [6].

İspat. Sonuç 2.1.5.2.'den direkt elde edilir.

Tanım 2.2.3.5. (M,g), (μ,ν,ν^*) tipinde durağan yarı Riemann bir manifold olsun. $\lambda \in R$ olmak üzere, eğer $p \in M$ noktasında $\hat{Ric} = \lambda\bar{g}$ ise, $\left(\overline{TM},\bar{g}\right)$ bu noktada Einstein'dır denir. Eğer $\left(\overline{TM},\bar{g}\right)$ her $p \in M$ noktasında Einstein ise $\left(\overline{TM},\bar{g}\right)$ Einstein'dır denir [6].

Eğer (M,g), $\nu+\nu^* = 2$ olmak üzere, (μ,ν,ν^*) tipinde durağan yarı Riemann bir manifold ise, bu durumda $\lambda = C$ olacak şekilde $C,\lambda \in C^\infty(M)$ olmak üzere, $\hat{G} = C\hat{G}^0$ ve $\hat{Ric} = \lambda\bar{g}$ olur. Şimdi $\nu+\nu^* \geq 3$ olması durumları karşılaştırılacaktır.

İlk olarak, eğer (M,g) $p \in M$ noktasında sabit kesitsel eğriliğe sahip olduğunda, $C \in C^\infty(M)$ olmak üzere, $\hat{G} = C\hat{G}^0$ veya denk olarak $\hat{R} = C\hat{R}^0$ olduğunun belirtilmesi gerekir. İkinci olarak, $\bar{g}$ paralel olduğundan yani $\overline{\nabla}\bar{g} = 0$ olduğundan $\hat{R}^0$ paralel olur, yani $\overline{\nabla}\hat{R}^0 = 0$ olur. $\prod(X) = \bar{X}$, $\prod(Y) = \bar{Y}$, $\prod(Z) = \bar{Z}$ ve $\prod(V) = \bar{V}$ olacak şekilde $X,Y,Z,V \in \Gamma TM$ verilsin. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
\left(\overline{\nabla}_V \hat{R}^0\right)\left(\overline{X},\overline{Y},\overline{Z}\right) &= \overline{\nabla}_V \hat{R}^0\left(\overline{X},\overline{Y},\overline{Z}\right) - \hat{R}^0\left(\overline{\nabla}_V \overline{X},\overline{Y}\right)\overline{Z} \\
&- \hat{R}^0\left(\overline{X},\overline{\nabla}_V \overline{Y}\right)\overline{Z} - \hat{R}^0\left(\overline{X},\overline{Y}\right)\overline{\nabla}_V \overline{Z} \\
&= \overline{g}\left(\overline{\nabla}_V \overline{Z},\overline{Y}\right)\overline{X} + \overline{g}\left(\overline{Z},\overline{\nabla}_V \overline{Y}\right)\overline{X} + \overline{g}\left(\overline{Z},\overline{Y}\right)\overline{\nabla}_V \overline{X} \\
&- \overline{g}\left(\overline{\nabla}_V \overline{X},\overline{Z}\right)\overline{Y} - \overline{g}\left(\overline{X},\overline{\nabla}_V \overline{Z}\right)\overline{Y} - \overline{g}\left(\overline{X},\overline{Z}\right)\overline{\nabla}_V \overline{Y} \\
&- \overline{g}\left(\overline{Z},\overline{Y}\right)\overline{\nabla}_V \overline{X} + \overline{g}\left(\overline{\nabla}_V \overline{X},\overline{Z}\right)\overline{Y} - \overline{g}\left(\overline{Z},\overline{\nabla}_V \overline{Y}\right)\overline{X} \\
&+ \overline{g}\left(\overline{X},\overline{Z}\right)\overline{\nabla}_V \overline{Y} - \overline{g}\left(\overline{\nabla}_V \overline{Z},\overline{Y}\right)\overline{X} - \overline{g}\left(\overline{X},\overline{\nabla}_V \overline{Z}\right)\overline{Y} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

olduğu elde edilir.

Teorem 2.2.3.4. (Schur Lemma) (M,g), $\mu+\nu^* \geq 3$ olmak üzere, (μ,ν,ν^*) tipinde bağlantılı durağan yarı Riemann bir manifold olsun. Eğer (M,g) her $p \in M$ noktasında sabit kesitsel eğriliğe sahip ise, bu durumda $\left(\overline{TM},\overline{g}\right)$ üzerindeki dejenere olmayan her $\overline{P}$ düzleminin eğriliği sabit olur [6].

İspat. $C \in C^\infty(M)$ olmak üzere, $\hat{R} = C\hat{R}^0$ olsun. Bu durumda, $\hat{R}^0$ paralel olduğundan ikinci Bianchi özdeşliği göz önüne alınırsa, $\prod(X)=\overline{X}$, $\prod(Y)=\overline{Y}$, $\prod(Z)=\overline{Z}$ ve $\prod(V)=\overline{V}$ olacak şekildeki her $X,Y,Z,V \in \Gamma TM$ için,

$$
X(C)\hat{R}^0\left(\overline{Y},\overline{Z}\right)\overline{V} + Y(C)\hat{R}^0\left(\overline{Z},\overline{X}\right)\overline{V} + Z(C)\hat{R}^0\left(\overline{X},\overline{Y}\right)\overline{V} = 0
$$

olduğu elde edilir. Böylece,

$$
\begin{aligned}
&X(C)\left[\overline{g}\left(\overline{V},\overline{Z}\right)\overline{Y} - \overline{g}\left(\overline{Y},\overline{V}\right)\overline{Z}\right] + Y(C)\left[\overline{g}\left(\overline{V},\overline{X}\right)\overline{Z} - \overline{g}\left(\overline{Z},\overline{V}\right)\overline{X}\right] \\
&+ Z(C)\left[\overline{g}\left(\overline{V},\overline{Y}\right)\overline{X} - \overline{g}\left(\overline{X},\overline{V}\right)\overline{Y}\right] = 0
\end{aligned}
$$

bulunur. Herhangi bir $X \in \Gamma N_g$ verilsin. Null ve dejenere olmayan, $V = Z$, ve $\prod(Y)=\overline{Y}$ ve $\prod(Z)=\overline{Z}$ ortonormal olacak şekilde $Y,Z,V \in \Gamma TM$ seçilirse, $X(C)\overline{g}\left(\overline{Z},\overline{Z}\right)\overline{Y} = 0$ olur. Buradan her $X \in \Gamma N_g$ için $X(C)=0$ bulunur. Şimdi dejenere ve null olmayan birim $X \in \Gamma TM$ verilsin. Dejenere ve null olmayan $V = Z$, $\prod(X)=\overline{X}$, $\prod(Y)=\overline{Y}$ ve $\prod(Z)=\overline{Z}$ ortonormal olacak şekilde $Y,Z,V \in \Gamma TM$ seçildiğinde $X(C)\overline{g}\left(\overline{Z},\overline{Z}\right)\overline{Y} - Y(C)\overline{g}\left(\overline{Z},\overline{Z}\right)\overline{X} = 0$ bulunur. Buradan, dejenere ve null olmayan her $X \in \Gamma TM$ için $X(C)=0$ olduğu görülür. Böylece, her null vektör, dejenere ve null olmayan vektörlerin bir lineeer kombinasyonu olarak yazılabileceğinden her $X \in \Gamma TM$ için $X(C)=0$ olduğu bulunur.

Teorem 2.2.3.5. [Schur Lemma] (M,g), $\nu+\nu^* \geq 3$ olmak üzere, (μ,ν,ν^*) tipinde bağlantılı durağan yarı Riemann bir manifold olsun. Eğer M her $p \in M$ noktasında Einstein ise, bu durumda $\hat{Ric} = \lambda \overline{g}$ olmak üzere λ, M üzerinde sabit olur [6].

Şimdi ispat için aşağıdaki taslak verilecektir:

İspat. $\prod(X) = \overline{X}$ olacak şekilde $X \in \Gamma TM$ ve her $i = 1,\ldots,\nu+\nu^*$ için $\prod(E_i) = \overline{E}_i$ olacak şekilde $E_1,\ldots,E_{\nu+\eta} \in \Gamma TM$ dejenere ve null olmayan ortonormal vektörler olsun. $\overline{g}$ paralel olduğundan, $\hat{G}$ ikinci Bianchi özdeşliğini sağlar. Yani,

$$\left(\overline{\nabla}_X \hat{G}\right)\left(\overline{E}_k, \overline{E}_l, \overline{E}_j, \overline{E}_i\right) + \left(\overline{\nabla}_{E_k} \hat{G}\right)\left(\overline{E}_l, \overline{X}, \overline{E}_j, \overline{E}_i\right) + \left(\overline{\nabla}_{E_l} \hat{G}\right)\left(X, \overline{E}_k, \overline{E}_j, \overline{E}_i\right) = 0$$

olur. Bu durumda, yukarıdaki denklem $\overline{g}\left(\overline{E}_i, \overline{E}_l\right)\overline{g}\left(\overline{E}_j, \overline{E}_k\right)$ ile çarpılıp i, j, k, l üzerinden toplam alınıp, son olarak $\hat{G}$ 'nin eğrilik benzeri özellikleri kullanılırsa,

$$\sum_{i,k=1}^{\nu+\eta} \overline{g}\left(\overline{E}_i, \overline{E}_k\right)\hat{G}\left(\overline{E}_k, \overline{E}_l, \overline{E}_j, \overline{E}_i\right) = \hat{Ric}\left(\overline{E}_l, \overline{E}_j\right) = \lambda \overline{g}\left(\overline{E}_l, \overline{E}_j\right)$$

olup $(\nu+\nu^*-2)X(\lambda) = 0$ olduğu bulunur. Bu ise, λ 'nın, M üzerinde sabit olduğunu gösterir.

Yorum 2.2.3.3. $C \in C^\infty(M)$ olmak üzere, eğer her $p \in M$ noktasında $\hat{G} = C\hat{G}^0$ ise, bu durumda, $\hat{Ric} = C(\nu+\nu^*-1)\overline{g}$ olur. Böylece, eğer $\nu+\nu^* \geq 3$ ise, Teorem 2.2.3.5., Teorem 2.2.3.4.'ü doğrular [6].

2.2.4. Yarı Riemann Manifoldların Liflemesi

Eğer (M,g) durağan yarı Riemann bir manifold ise, bu durumda N_g integrallenebilirdir. Gerçekte, N_g 'nin integrallenebilirliği, Lie türevini N_g 'nin kesitleri boyunca $\overline{TM}$ 'ye genişletebilme imkanı sunar.

Tanım 2.2.4.1. (M,g), (μ,ν,ν^*) tipinde yarı Riemann bir manifold olsun. Bu durumda, eğer N_g integrallenebilir bir dağılım ise (M,g) integrallenebilirdir denir [6].

Tanım 2.2.4.2. (M,g), (μ,ν,ν^*) tipinde integrallenebilir yarı Riemann bir manifold olsun. Eğer $U \in \Gamma N_g$ ve $\overline{X} \in \Gamma \overline{TM}$ ise, $\overline{X}$ ’in U boyunca Lie türevi $\overline{L}_U \overline{X} = \prod(L_U X)$ şeklinde tanımlanır. Burada, $\prod(X) = \overline{X}$ olacak şekilde $X \in \Gamma TM$ ve L de M üzerinde Lie türevdir [6].

$\overline{L}_U$ ’nun iyi tanımlı olduğunu göstermek için, $\prod(L_U X)$’in $\prod(X) = \overline{X}$ olacak şekildeki $X \in \Gamma TM$ seçiminden bağımsız olduğunun gösterilmesi yeterlidir. $U' \in \Gamma N_g$ olmak üzere $X + U'$ elemanı için, $L_U U' = [U, U'] \in \Gamma N_g$ olduğundan $\prod(L_U (X + U')) = \prod(L_U X) + \prod(L_U U') = \prod(L_U X)$ ifadesi elde edilir.

Yorum 2.2.4.1. $\overline{L}_U$, U ’ya göre tensöreldir, yani eğer $U, U' \in \Gamma N_g$ ve $f \in C^\infty(M)$ ise, bu durumda $\overline{L}_{U+U'} \overline{X} = \overline{L}_U \overline{X} + \overline{L}_{U'} \overline{X}$ ve $\overline{L}_{fU} \overline{X} = f\overline{L}_U \overline{X}$ ifadeleri sağlanır. Böylece, $\overline{L}_U \overline{X}$ ’in p noktasında sadece U değerine bağlıdır [6].

Şimdi, $\overline{L}_U$, $\Gamma T_s^0(\overline{TM})$’e bir lineer türev olarak genişletilecektir.

Tanım 2.2.4.3. (M, g), (μ, ν, ν^*) tipinde integrallenebilir yarı Riemann bir manifold olsun. $\overline{X}_1, \ldots \overline{X}_s \in \Gamma \overline{TM}$ olmak üzere, $\overline{T} \in \Gamma T_s^0(\overline{TM})$ Lie türevi

$$\left(\overline{L}_U \overline{T}\right)\left(\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_s\right) = U\overline{T}\left(\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_s\right) - \sum_{i=1}^{s} \overline{T}\left(\overline{X}_1, \ldots \overline{L}_U \overline{X}_i, \ldots, \overline{X}_s\right)$$

şeklinde tanımlanır [6].

Tanım 2.2.4.4. (M, g), (μ, ν, ν^*) tipinde yarı Riemann bir manifold olsun. Eğer her $X_1, \ldots X_s \in \Gamma TM$ ve $1 \le i \le s$ olmak üzere $U_i \in \Gamma N_g$ için $T(X_1, \ldots, U_i, \ldots X_s) = 0$ oluyorsa, $T \in \Gamma T_s^0(TM)$ dejeneredir denir [6].

Tanım 2.2.4.5. (M, g), (μ, ν, ν^*) tipinde yarı Riemann bir manifold ve $T \in \Gamma T_s^0(TM)$ dejenere olsun. $\prod(X_1) = \overline{X}_1, \ldots, \prod(X_s) = \overline{X}_s$ olacak şekildeki $X_1, \ldots, X_s \in \Gamma TM$ olmak üzere, T ’nin $\overline{TM}$ ’e lifti $\overline{T} \in \Gamma T_s^0(\overline{TM})$, $\overline{T}(\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_s) = T(X_1, \ldots, X_s)$ şeklinde tanımlanır. T dejenere olduğundan, $\overline{T}$ iyi tanımlıdır [6].

Önerme 2.2.4.1. (M, g), (μ, ν, ν^*) tipinde integrallenebilir yarı Riemann bir manifold olsun. Eğer $\overline{T} \in \Gamma T_s^0\left(\overline{TM}\right)$, dejenere bir $T \in \Gamma T_s^0(TM)$'in bir lifti ise, bu durumda $U \in \Gamma N_g$ ve $\prod(X_1) = \overline{X}_1, \ldots, \prod(X_s) = \overline{X}_s$ olacak şekildeki $X_1, \ldots, X_s \in \Gamma TM$ için $\left(\overline{L}_U \overline{T}\right)\left(\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_s\right) = (L_U T)(X_1, \ldots, X_s)$ şeklindedir [6].

İspat. Tanım 2.2.4.3. ve Tanım 2.2.4.5.'den direkt elde edilir.

Eğer (M, g), (μ, ν, ν^*) tipinde yarı Riemann bir manifold ise, bu durumda $\overline{g}$, g'nin $\overline{TM}$'e lifti olsun. Bu durumda aşağıdaki önerme sağlanır.

Önerme 2.2.4.2. (M, g), (μ, ν, ν^*) tipinde integrallenebilir yarı Riemann bir manifold olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(a) $U \in \Gamma N_g$ ve $\prod(X) = \overline{X}, \prod(Y) = \overline{Y}$ olacak şekildeki $X, Y \in \Gamma TM$ için $\left(\overline{L}_U \overline{g}\right)\left(\overline{X}, \overline{Y}\right) = (L_U g)(X, Y)$ olur.

(b) (M, g)'nin durağan olması için gerekli ve yeterli koşul her $U \in \Gamma N_g$ için $\overline{L}_U \overline{g} = 0$ olmasıdır [6].

İspat. Tanım 2.2.1.2. ve Önerme 2.2.4.1.'den açıkça görülür.

Şimdi (μ, ν, ν^*) tipinde yarı Riemann manifold örnekleri verilecek ve genel izafiyet teoride ortaya çıkan $(1, 0, 2)$ tipindeki bazı yarı Riemann manifoldların üzerinde bulunan yapılar analiz edilecektir.

M bir manifold, (H, h) (ν, ν^*) tipinde dejenere olmayan yarı Riemann bir manifold ve $\psi : M \to H$ bir daldırma olsun. Bu durumda, eğer $f : M \to (0, \infty)$ ise, $\mu = boyM - \nu - \nu^*$ olmak üzere, $g = f\psi^* h$, M üzerinde (μ, ν, ν^*) tipinde bir metrik tensördür. Öte yandan, $N_g = çek\,\psi^*$ olduğundan, (M, g) (μ, ν, ν^*) tipinde integrallenebilir yarı Riemann bir manifold olur. Ayrıca, $\prod : TM \to \overline{TM}$ doğal izdüşüm olmak üzere, ψ, $\overline{\psi} : \overline{TM} \to TH$ şeklinde kanonik bir demet dönüşümü meydana getirir. Burada, $\overline{\psi} \circ \prod = \psi_*$ şeklinde tanımlıdır [6].

Tanım 2.2.4.6. (M, g) (μ, ν, ν^*) tipinde yarı Riemann bir manifold ve (H, h) (ν, ν^*)

tipinde dejenere olmayan yarı Riemann bir manifold olsun. $f: M \to (0,\infty)$ düzgün bir fonksiyon olmak üzere, $g = f\psi^* h$ ise $\psi : M \to H$ şeklinde tanımlı örten bir daldırmaya (M,g)'nin (H,h) üzerinde bir liflemesi denir [6].

Yorum 2.2.4.2. $\psi : M \to H$, (M,g)'nin (H,h) üzerinde bir liflemesi olsun. Bu durumda,

(a) $N_g = çek\,\psi_*$ ve böylece N_g integrallenebilirdir.

(b) Eğer $\bar{x},\bar{y} \in \overline{T_pM}$ ise, $\bar{g}(\bar{x},\bar{y}) = f(p)h(\bar{\psi}(\bar{x}),\psi(\bar{y}))$ olur.

$\psi : M \to H$, (M,g)'nin (H,h) üzerinde bir liflemesi olsun. Eğer $\tilde{f} = f \circ \psi$ ise, bir $\tilde{f} \in C^\infty(M)$ fonksiyonuna ψ boyunca $f \in C^\infty(H)$'nin liflemesi denir. Ayrıca, eğer $\tilde{X}$ ve X ψ-ilişkili ise yani $\psi_*\tilde{X} = X \circ \psi$ ise $\tilde{X} \in \Gamma TM$'e, $X \in \Gamma TH$'in ψ boyunca liflemesi denir. Eğer $\bar{\psi}(\bar{X}) = X \circ \psi$ ise, $\bar{X} \in \Gamma\overline{TM}$'e ψ boyunca $X \in \Gamma TH$'in liflemesi denir. Eğer $\tilde{X} \in \Gamma TM$, ψ boyunca $X \in \Gamma TH$'in bir liflemesi ise, bu durumda $\prod(\tilde{X}) = \bar{X}$'e ψ boyunca X'in liflemesi denir [6].

Yardımcı Teorem 2.2.4.1. (M,g), (μ,ν,ν^*) tipinde yarı Riemann bir manifold, (H,h) (ν,ν^*) tipinde dejenere olmayan yarı Riemann bir manifold ve $\psi : M \to H$, (M,g)'nin (H,h) üzerinde bir liflemesi olsun. Bu durumda,

(a) $\tilde{f} \in C^\infty(M)$ fonksiyonunun ψ boyunca $f \in C^\infty(H)$ fonksiyonunun bir liflemesi olması için gerekli ve yeterli koşul her $U \in \Gamma N_g$ için $U(\tilde{f}) = 0$ olmasıdır.

(b) $\bar{X} \in \Gamma\overline{TM}$ kesitinin, bir $X \in \Gamma TH$ kesitinin lifti olması için gerekli ve yeterli koşul her $U \in \Gamma N_g$ için $\bar{L}_U \bar{X} = 0$ olmasıdır [6].

İspat. (a) $\tilde{f}$'nın ψ boyunca f'nin lifti olduğu varsayılsın. Yani, $\tilde{f} = f \circ \psi$ olsun. Bu durumda, her $U \in \Gamma N_g = \Gamma çek\,\psi_*$, $U(\tilde{f}) = U(f \circ \psi) = (\psi_* U)(f) = 0$ olur. Tersine, her $U \in \Gamma N_g$ için $U(\tilde{f}) = 0$ olduğu varsayılsın. Bu durumda, her $q \in H$ için $\tilde{f}(\psi^{-1}(q)) = c_q \in R$ olur. Böylece, $f \in C^\infty(H)$ ve $f(q) = c_q$ olmak üzere, $\tilde{f} = f \circ \psi$ elde edilir.

(b) $\overline{X} \in \Gamma\overline{TM}$ 'in ψ boyunca $X \in \Gamma TH$ 'nin lifti olduğu varsayılsın. Şimdi, $\widetilde{X} \in \Gamma TM$, $\prod(\widetilde{X}) = \overline{X}$ olacak şekilde $X \in \Gamma TM$ 'in ψ boyunca lifti ve $U \in \Gamma N_g$ olsun. Bu durumda, $\psi_*[U, \widetilde{X}] = [0, X] \circ \psi = 0$ olduğundan yani $[U, \widetilde{X}] \in \Gamma N_g$ olduğundan, $\overline{L}_U \overline{X} = \prod(L_U \overline{X}) = \prod([U, \widetilde{X}]) = 0$ olur. Tersine, her $U \in \Gamma N_g$ için $\overline{L}_U \overline{X} = 0$. $\overline{X}$ 'nın yerel bir lift olduğunu göstermek yeterli olacaktır. $q \in H$ ve $X_1, \ldots, X_{\nu+\eta}$ de H üzerinde q 'nun bir V komşuluğu üzerinde yerel baz vektör alanları olsun. $\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_{\nu+\eta}$ de $X_1, \ldots, X_{\nu+\nu^*}$ 'nın ψ boyunca $\overline{TM}$ 'e liftleri, $\psi^{-1}(V)$ üzerinde $\overline{TM}$ 'in yerel baz vektörleri olur ve böylece, $1 \leq i \leq \nu + \nu^*$ için $\widetilde{f}_i \in C^\infty(\psi^{-1}(V))$ olmak üzere $\overline{X} = \sum_{i=1}^{\nu+\eta} \widetilde{f}_i \overline{X}_i$ yazılabilir. $\overline{L}_U \overline{X} = 0$ ve her $1 \leq i \leq \nu + \nu^*$ için $\overline{L}_U \overline{X}_i = 0$ olduğundan, her $1 \leq i \leq \nu + \nu^*$ için $U(\widetilde{f}_i) = 0$ olur. Yani, $\widetilde{f}_i$, $f_i \in C^\infty(V)$ fonksiyonunun ψ boyunca liftidir. Böylece, $\overline{X}$, $X = \sum_{i=1}^{\nu+\eta} f_i X_i$ vektör alanının V üzerinde ψ boyunca lifti olur.

Teorem 2.2.4.1. (M, g), (μ, ν, ν^*) tipinde yarı Riemann bir manifold, (H, h) (ν, ν^*) tipinde dejenere olmayan yarı Riemann bir manifold ve $g = f\psi^* h$ olmak üzere $\psi : M \to H$ de, (M, g)'nin (H, h) üzerinde bir liflemesi olsun. Burada, $f : M \to (0, \infty)$ düzgün bir fonksiyondur. Bu durumda, (M, g)'nin durağan olması için gerekli ve yeterli koşul f 'nin N üzerinde ψ boyunca bir fonksiyonun lifti olmasıdır [6].

İspat. $\psi^* h \in \Gamma T_2^0 TM$ dejeneredir ve böylece $\overline{\psi^* h}$ de $\psi^* h$ 'nin $\overline{TM}$ 'e bir lifti olsun. İlk olarak her $U \in \Gamma N_g$ için $\overline{L}_U \overline{\psi^* h} = 0$ olduğu gösterilecektir. Bunun için, $\overline{X}, \overline{Y} \in \Gamma\overline{TM}$, $X, Y \in \Gamma TH$ 'nin ψ boyunca lifti ve $U \in \Gamma N_g$ olsun. Buradan, $\overline{L}_U \overline{X} = 0 = \overline{L}_U \overline{Y}$, $\overline{\psi^* h}(\overline{X}, \overline{Y})$ de $h(X, Y)$ fonksiyonunun H üzerinde ψ boyunca lifti ve (M, g) integrallenebilir olduğundan

$$
\begin{aligned}
(\overline{L}_U \overline{\psi^* h})(\overline{X}, \overline{Y}) &= U(\overline{\psi^* h}(\overline{X}, \overline{Y})) - \overline{\psi^* h}(\overline{L}_U \overline{X}, \overline{Y}) - \overline{\psi^* h}(\overline{X}, \overline{L}_U \overline{Y}) \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

olur. Böylece, eğer $U \in \Gamma N_g$ ise

$$\overline{L}_U \overline{g} = \overline{L}_U \left(f\overline{\psi^* h} \right) = U(f)\overline{\psi^* h} + f\overline{L}_U \overline{\psi^* h}$$
$$= U(f)\overline{\psi^* h},$$

olduğu görülür. Buradan, $\overline{L}_U \overline{g} = 0$ olması için gerekli ve yeterli koşulun $U(f) = 0$ olması gerektiği bulunur. Böylece, Önerme 2.2.4.2. (b) ve Yardımcı Teorem 2.2.4.1. (a) göz önüne alınırsa, (M,g)'nin durağan olması için gerekli ve yeterli koşulun f'nin H üzerinde ψ boyunca bir fonksiyonun lifti olmasıdır.

Yorum 2.2.4.3. Yukarıdaki teoremden, eğer, $g = f\psi^* h$ olmak üzere $\psi : M \to H$ (M,g)'nin (H,h) üzerinde bir liflemesi ise, bu durumda (M,g)'nin durağan olması için gerekli ve yeterli koşul $f_1 : H \to (0,\infty)$ olmak üzere $f = f_1 \circ \psi$ olmasıdır. Bu durumda, $g = (f_1 \circ \psi)\psi^* h = \psi^*(f_1 h)$ olur, yani $h_1 = f_1 h$ H üzerinde h'ye konformal metrik tensörü olmak üzere $g = \psi^* h_1$'dir. Diğer bir deyişle, (M,g)'nin durağan olması için gerekli ve yeterli koşulun h_1 H üzerinde h'ye konformal metrik tensörü olmak üzere $g = \psi^* h_1$ olması gerektiği elde edilir [6].

Şimdi, (M,g) ve (H,g)'nin eğrilik tensörleri arasındaki ilişki araştırılacaktır.

Yardımcı Teorem 2.2.4.2. (M,g), (μ,ν,ν^*) tipinde yarı Riemann bir manifold, (H,h) (ν,ν^*) tipinde dejenere olmayan yarı Riemann bir manifold ve $g = \psi^* h$ olmak üzere $\psi : M \to H$ de, (M,g)'nin (H,h) üzerinde bir liflemesi olsun. Eğer, $\widetilde{X} \in \Gamma TM$ ve $\widetilde{Y} \in \Gamma TM$ sırasıyla $X, Y \in \Gamma TH$'nin ψ boyunca liftleri ise, bu durumda, $\overline{\nabla}$ (M,g)'nin Koszul konneksiyonu ve ∇ da (H,h)'nin Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere $\overline{\psi}\left(\overline{\nabla}_{\widetilde{X}} \overline{Y}\right) = \nabla_X Y$ olur [6].

İspat. $\widetilde{Y}, \widetilde{Z} \in \Gamma TM$, sırasıyla $Y, Z \in \Gamma(TH)$'nin ψ boyunca liftleri ve $\overline{Z} = \prod\left(\widetilde{Z}\right)$ olsun. Bu durumda, (M,g) durağan olduğundan, Koszul formülü uygulanarak,

$$
\begin{aligned}
\bar{g}\left(\overline{\nabla}_{\tilde{X}}\bar{Y},\bar{Z}\right) &= \frac{1}{2}\Big(\tilde{X}\bar{g}\left(\bar{Y},\bar{Z}\right)+\tilde{Y}\bar{g}\left(\bar{Z},\bar{X}\right)-\tilde{Z}\bar{g}\left(\bar{X},\bar{Y}\right) \\
&+\bar{g}\left(\bar{Z},\Pi\left(\left[\tilde{X},\tilde{Y}\right]\right)\right)+\bar{g}\left(\bar{Y},\Pi\left(\left[\tilde{Z},\tilde{X}\right]\right)\right)-\bar{g}\left(\bar{X},\Pi\left(\left[\tilde{Y},\tilde{Z}\right]\right)\right)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\tilde{X}g\left(\tilde{Y},\tilde{Z}\right)+\tilde{Y}g\left(\tilde{Z},\tilde{X}\right)-\tilde{Z}g\left(\tilde{X},\tilde{Y}\right) \\
&+g\left(\tilde{Z},\left[\tilde{X},\tilde{Y}\right]\right)+g\left(\tilde{Y},\left[\tilde{Z},\tilde{X}\right]\right)-g\left(\tilde{X},\left[\tilde{Y},\tilde{Z}\right]\right)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\big(Xh(Y,Z)+Yh(Z,X)-Zh(X,Y) \\
&+h(Z,[X,Y])+h(Y,[Z,X])-h(X,[Y,Z])\big)\circ\psi \\
&= h\left(\nabla_X Y,Z\right)\circ\psi,
\end{aligned}
$$

ifadesi elde edilir. Böylece, $\bar{g}\left(\overline{\nabla}_{\tilde{X}}\bar{Y},\bar{Z}\right)=h\left(\bar{\psi}\left(\overline{\nabla}_{\tilde{X}}\bar{Y}\right),\bar{\psi}\left(\bar{Z}\right)\right)\circ\psi=h\left(\bar{\psi}\left(\overline{\nabla}_{\tilde{X}}\bar{Y}\right),Z\right)\circ\psi$ olduğundan, $\bar{\psi}\left(\overline{\nabla}_{\tilde{X}}\bar{Y}\right)=\nabla_X Y$ olduğu görülür.

Teorem 2.2.4.2. (M,g), $\left(\mu,\nu,\nu^*\right)$ tipinde yarı Riemann bir manifold, (H,h) $\left(\nu,\nu^*\right)$ tipinde dejenere olmayan yarı Riemann bir manifold ve $g=\psi^*h$ olmak üzere $\psi:M\to H$ de, (M,g)'nin (H,h) üzerinde bir liflemesi olsun. Bu durumda, $\bar{x},\bar{y},\bar{z}\in\overline{T_pM}$ ve R de (H,h) üzerinde ∇ Levi-Civita konneksiyonun eğrilik tensörü olmak üzere, $\bar{\psi}\left(\hat{R}(\bar{x},\bar{y})\bar{z}\right)=R\left(\bar{\psi}(\bar{x}),\bar{\psi}(\bar{y})\right)\bar{\psi}(\bar{z})$ şeklindedir [6].

İspat. $\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z}\in\Gamma TM$, $X,Y,Z\in\Gamma(TM)$'nin ψ boyunca liftleri ve $\Pi\left(\tilde{X}\right)_p=\bar{X}_p=\bar{x}$, $\Pi\left(\tilde{Y}\right)_p=\bar{Y}_p=\bar{y}$, $\Pi\left(\tilde{Z}\right)_p=\bar{Z}_p=\bar{z}$ olsun. Bu durumda Yardımcı Teorem 2.2.4.2.'den

$$
\begin{aligned}
\bar{\psi}\left(\hat{R}(\bar{x},\bar{y})\bar{z}\right) &= \bar{\psi}\left(\bar{R}\left(\tilde{X},\tilde{Y}\right)\bar{Z}\right)\Big|_p \\
&= \bar{\psi}\left(\overline{\nabla}_{\tilde{X}}\overline{\nabla}_{\tilde{Y}}\bar{Z}-\overline{\nabla}_{\tilde{Y}}\overline{\nabla}_{\tilde{X}}\bar{Z}-\overline{\nabla}_{[\tilde{X}.\tilde{Y}]}\bar{Z}\right)\Big|_p \\
&= \left(\nabla_X\left(\bar{\psi}\left(\overline{\nabla}_{\tilde{Y}}\bar{Z}\right)\right)-\left(\nabla_Y\left(\bar{\psi}\left(\overline{\nabla}_{\tilde{X}}\bar{Z}\right)\right)\right)-\left(\nabla_{[X,Y]}\left(\bar{\psi}\left(\bar{Z}\right)\right)\right)\right)\Big|_p \\
&= \left(\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z\right)\Big|_p \\
&= \left(R(X,Y)Z\right)\Big|_p \\
&= \left(R\left(\bar{\psi}\left(\bar{X}\right),\bar{\psi}\left(\bar{Y}\right)\right)\bar{\psi}\left(\bar{Z}\right)\right)\Big|_p \\
&= R\left(\bar{\psi}(\bar{x}),\bar{\psi}(\bar{y})\right)\bar{\psi}(\bar{z})
\end{aligned}
$$

olduğu elde edilir.

Sonuç 2.2.4.1. (M,g), $\left(\mu,\nu,\nu^*\right)$ tipinde yarı Riemann bir manifold, (H,h) $\left(\nu,\nu^*\right)$

tipinde dejenere olmayan yarı Riemann bir manifold ve $g=\psi^* h$ olmak üzere $\psi: M \to H$ de, (M,g)'nin (H,h) üzerinde bir liflemesi olsun. Eğer, $\overline{P}=span\{\overline{x},\overline{y}\}$ $\overline{T_p M}$ üzerinde dejenere olmayan bir düzlem ise, bu durumda $\kappa(\overline{P})=\kappa(P)$ olur. Burada, $\kappa(P)$, $T_{\psi(p)}H$ üzerindeki $P=span\{\overline{\psi}(\overline{x}),\overline{\psi}(\overline{y})\}$ düzleminin eğriliğidir [6].

İspat. Yorum 2.2.4.2. (b) ve Teorem 2.2.4.2.'den

$$\overline{g}\left(\hat{R}(\overline{x},\overline{y})\overline{y},\overline{x}\right)=h\left(R\left(\overline{\psi}(\overline{x}),\overline{\psi}(\overline{y})\right)\overline{\psi}(\overline{y}),\overline{\psi}(\overline{x})\right)$$

ve

$$\begin{aligned}Q(\overline{x},\overline{y}) &= \overline{g}(\overline{x},\overline{x})\overline{g}(\overline{y},\overline{y})-\overline{g}(\overline{x},\overline{y})^2\\ &= h\left(\overline{\psi}(\overline{x}),\overline{\psi}(\overline{x})\right)h\left(\overline{\psi}(\overline{y}),\overline{\psi}(\overline{y})\right)-h\left(\overline{\psi}(\overline{x}),\overline{\psi}(\overline{y})\right)^2\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\kappa(\overline{P})=\frac{\overline{g}\left(\hat{R}(\overline{x},\overline{y})\overline{y},\overline{x}\right)}{Q(\overline{x},\overline{y})}=\frac{h\left(R\left(\overline{\psi}(\overline{x}),\overline{\psi}(\overline{y})\right)\overline{\psi}(\overline{y}),\overline{\psi}(\overline{x})\right)}{Q\left(\overline{\psi}(\overline{x}),\overline{\psi}(\overline{y})\right)}=\kappa(P)$$

olduğu görülür.

Şimdi Genel İzafiyet teoreisinden, $(1,0,2)$ tipinde bazı yarı Riemann manifold örnekleri verilecektir.

Schwarzschild'in olay ufukları, Reissner ve Kerr'in uzay-zamanları, aşağıdaki yapıya sahip $(1,0,2)$ tipinde durağan yarı Riemann manifoldlardır: $H=S^2$, $(0,2)$tipinde dejenere olmayan h metrik tensörüne sahip olmak üzere, $M=R\times H$ olsun. (Schwarzschild ve Reissner çözümlerinde, h, S^2 üzerindeki standart metriğin bir skaler çarpımıdır; Kerr çözümleri için bakınız [11].) Şimdi $\psi: R\times S^2 \to S^2$ izdüşüm olsun. Yukarıdaki çözümlerin olay ufukları, $g=\psi^* h$ metriğine sahip (M,g) yarı Riemann manifoldlardır. Yorum 2.2.4.3. göz önüne alınırsa, olay ufuklarının durağan olduğu kolayca görülebilir.

Diğer bir örnek ise, aşağıdaki yapıya sahip, yine $(1,0,2)$ tipinde durağan yarı Riemann manifold olan Taub-NUT uzay-zamanın Cauchy ufuklarıdır [11].: $M=S^3$ ve $H=S^2$, S^2 üzerindeki standart metriğin bir skaler çarpımı olan h metriğine sahip olsunlar. Şimdi $\psi: S^3 \to S^2$, S^3'ün S^2 üzerindeki Hopf liflemesi olsun. Bu durumda, Taub-

NUT uzay-zamanın Cauchy ufukları $g=\psi^{*}h$ metriğine sahip (M,g) yarı Riemann manifoldlardır. Bu Cauchy ufukları [11] Yorum 2.2.4.3.'e göre durağandır. Ayrıca, Sonuç 2.2.4.1.'e göre, Schwarzschild'in olay ufukları [11] ve Reissner çözümleri [11] ve Taub-NUT uzay-zamanın Cauchy ufukları [11] sabit kesitsel eğriliğe sahiptir.

Son olarak, $\nu+\nu^{*}\geq 1$ olmak üzere $(\mu\geq 1,\nu,\nu^{*})$ tipindeki durağan her yarı Riemann manifoldun, yerel olarak dejenere yarı Riemann bir çarpım olduğu gösterilecektir.

Tanım 2.2.4.7. N bir manifold ve (H,h) de (ν,ν^{*}) tipinde dejenere olmayan yarı Riemann bir manifold olsun. Bu durumda, $\mathrm{Pr}_H : N\times H\to H$ izdüşüm olmak üzere $(M=N\times H, g=\mathrm{Pr}_H^{*}\,h)$, N ve H'nin dejenere yarı Riemann çarpımı olarak adlandırılır [6].

Yorum 2.2.4.3. göz önüne alınırsa $(M=N\times H, g=\mathrm{Pr}_H^{*}\,h)$'nin durağan olduğu bulunur.

Tanım 2.2.4.8. (M,g), $\nu+\nu^{*}\geq 1$ olmak üzere $(\mu\geq 1,\nu,\nu^{*})$ tipinde durağan yarı Riemann bir manifold olsun. Eğer $g|_H$, H üzerinde dejenere olmayan bir metrik tensör ise, M'deki bir $(\nu+\nu^{*})$-boyutlu H alt manifolduna M'de dejenere olmayan bir hiperyüzey denir [6].

Teorem 2.2.4.3. (M,g), $\nu+\nu^{*}\geq 1$ olmak üzere $(\mu\geq 1,\nu,\nu^{*})$ tipinde durağan yarı Riemann bir manifold olsun. Bu durumda H, M'nin dejenere olmayan bir hiperyüzeyi olmak üzere, M yerel olarak $(N\times H, \mathrm{Pr}_H^{*}\,h)$ bir yarı Riemann çarpımdır [6].

İspat. N_g integrallenebilir olduğundan, M yerel olarak $N\times H$ şeklinde bir çarpımdır. Burada N, N_g'nin bir integral manifoldu ve H de M'nin dejenere olmayan bir hiperyüzeyidir. Şimdi, $h=g|_H$ ise $g=\mathrm{Pr}_H^{*}\,h$ olduğu gösterilecektir. Bunun için, $\tilde{X},\tilde{Y}\in\Gamma TM$'nin, Pr_H boyunca $X,Y\in\Gamma TH$'nin liftleri olsun. Bu durumda (M,g) durağan olduğundan, her $U\in\Gamma N_g$ için,

$$\begin{aligned}0=(L_U g)(\tilde{X},\tilde{Y})&=Ug(\tilde{X},\tilde{Y})-g(L_U\tilde{X},\tilde{Y})-g(\tilde{X},L_U\tilde{Y})\\&=Ug(\tilde{X},\tilde{Y})\end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylece $g\left(\widetilde{X},\widetilde{Y}\right)$, H üzerinde bir fonksiyonun lifti olur ve $g\left(\widetilde{X},\widetilde{Y}\right)\Big|_H = h(X,Y)$ olduğundan $g\left(\widetilde{X},\widetilde{Y}\right)$, Pr_H boyunca $h(X,Y)$'nin bir lifti olur. Buradan,

$$g\left(\widetilde{X},\widetilde{Y}\right)=h\left(\mathrm{Pr}_{H_*}\widetilde{X},\mathrm{Pr}_{H_*}\widetilde{Y}\right)=\left(\mathrm{Pr}_H^* h\right)\left(\widetilde{X},\widetilde{Y}\right)$$

olduğu elde edilir.

2.2.5. Hemen Hemen Değme Pseudo Manifoldlar

Bu kısımda, değme pseudo manifoldları ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

Tanım 2.2.5.1. M, $(2n+1)$-boyutlu bir manifold, φ,ξ,η da M üzerinde, sırasıyla, $(1,1)$-tipinde bir tensör alanı, bir vektör alanı ve 1-form olsunlar. Eğer φ,ξ,η için, M üzerinde herhangi bir vektör alanı X olmak üzere,

$$\begin{aligned}&\eta(\xi)=1, \quad \phi^2 X=-X+\eta(X)\xi\\ &\phi\xi=0, \quad \eta\circ\phi=0, \quad rank(\phi)=2n\end{aligned} \tag{2.1}$$

eşitlikleri sağlanıyorsa o zaman, (φ,ξ,η) üçlüsüne M üzerinde bir hemen hemen değme yapı ve bu yapı ile birlikte M ye bir hemen hemen değme manifold denir [5].

Tanım 2.2.5.2. M , (φ,ξ,η) hemen hemen değme yapsı ile verilsin. M üzerinde bir g yarı Riemann metriği,

$$\begin{aligned}&\eta(X)=\varepsilon g(X,\xi)\\ &g(\phi X,\phi Y)=g(X,Y)-\varepsilon\eta(X)\eta(Y)\end{aligned} \tag{2.2}$$

şartlarını sağlıyorsa g yarı metriğine M üzerinde hemen hemen değme yarı metrik, (φ,ξ,η,g) yapısına hemen hemen değme yarı metrik yapı ve (φ,ξ,η,g) yapısı ile M ye de hemen hemen değme yarı metrik manifold denir [5].

Sonuç 2.2.5.1. M , (φ,ξ,η,g) hemen hemen değme yarı metrik yapsı ile verilsin. Bu durumda,

$$g(\phi X,Y)=-g(X,\phi Y) \tag{2.3}$$

dır [5].

Tanım 2.2.5.3. M üzerinde bir hemen hemen değme yarı metrik yapısı (φ,ξ,η,g)

olmak üzere,

$$\Phi(X,Y)=g(X,\phi Y) \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlı Φ dönüşümüne hemen hemen değme yarı metrik yapısının temel 2-formu denir [5].

Tanım 2.2.5.8. M bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere, M üzerinde $(1,1)$-tipli bir tensör alanı F olsun. $\forall X,Y\in\chi(M)$ için,

$$N_F(X,Y)=F^2[X,Y]+[FX,FY]-F[FX,Y]-F[X,FY] \tag{2.5}$$

şeklinde tanımlı N_F tensör alana F tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörü denir [18].

Önerme 2.2.5.2. M üzerinde (φ,ξ,η) hemen hemen yarı değme yapısının normal olması için gerek ve yeter koşul

$$N_\phi+2d\eta\otimes\xi=0 \tag{2.6}$$

eşitliğinin sağlamasıdır. Burada N_ϕ, ϕ tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörüdür [18].

2.2.6. BAZI SİMETRİK MANİFOLDLAR

Tanım 2.2.6.1. (M^n,g), $(n\geq 2)$ düz olmayan bir Riemann manifoldu olsun. R, $(1,3)$ tipinde eğrilik tensörü ve $\tilde{R}(X,Y,Z,W)=g(R(X,Y,Z,W))$ olmak üzere, $(0,4)$ tipindeki $\tilde{R}$ eğrilik tensörü

$$\begin{aligned}(\nabla_X\tilde{R})(U,Y,Z,W)&=[A(X)+B(X)]\tilde{R}(U,Y,Z,W)+A(U)\tilde{R}(X,Y,Z,W)\\&+A(Y)\tilde{R}(U,X,Z,W)+A(Z)\tilde{R}(U,Y,X,W)+A(W)\tilde{R}(U,Y,Z,X),\end{aligned} \tag{2.7}$$

şartını sağlarsa, (M^n,g) Riemann manifolduna hemen hemen pseudo simetrik manifold denir ve $A(PS)_n$ şeklinde gösterilir. Burada, A ve B, M^n üzerindeki her X,Y,Z,U,W vektör alanı için $g(X,P)=A(X)$, $g(X,Q)=B(X)$ şeklinde tanımlı sıfırdan farklı ilgili 1-formlar ve ∇ kovaryant türev operatörüdür [15]. Eğer, özel olarak $A=B$ alınırsa, manifold, $(PS)_n$ ile gösterilen pseudo simetrik manifolda indirgenir [12].

Tanım 2.2.6.2. (M^n,g), $(n\geq 2)$ düz olmayan bir Riemann manifoldu olsun. Eğer aynı anda sıfır olmayan ve

$$
\begin{aligned}
\left(\nabla_U \tilde{R}\right)(X,Y,Z,W) &= A(U)\tilde{R}(X,Y,Z,W) + B(X)\tilde{R}(U,Y,Z,W) \\
&+ C(Y)\tilde{R}(X,U,Z,W) + D(Z)\tilde{R}(X,Y,U,W) + E(W)\tilde{R}(X,Y,Z,U),
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

şartını sağlayan A,B,C,D,E 1-formları varsa $\left(M^n,g\right)$ manifolduna zayıf simetrik manifold denir [17].

Tanımlardan görüldüğü üzere, hemen hemen pseudo simetrik bir manifold, zayıf simetrik manifoldların özel bir hali değildir.

Tanım 2.2.6.3. $\left(M^n,g\right)$, $(n \geq 3)$ düz olmayan bir Riemann manifoldu olsun. Eğer S, $(0,2)$ tipindeki Ricci tensörü

$$
(\nabla_X S)(Y,Z) = [A(X)+B(X)]S(Y,Z) + A(Y)S(X,Z) + A(Z)S(X,Y), \tag{2.9}
$$

şartını sağlarsa, $\left(M^n,g\right)$ manifolduna hemen hemen pseudo Ricci simetrik manifold denir ve $A(PRS)_n$ ile gösterilir [14]. Eğer özel olarak, $A=B$ alınırsa manifold, pseudo Ricci simetrik manifolda indirgenir [13]. Hemen hemen pseudo Ricci simetrik manifold, zayıf Ricci simetrik manifoldun özel bir hali değildir.

Tanım 2.2.6.4. Bir (M,φ,ξ,η,g) Sasaki yapısı olsun. Eğer

$$
\begin{aligned}
\phi^2\left((\nabla_W R)(X,Y)Z\right) &= [A(W)+B(W)]R(X,Y)Z \\
&+ A(X)R(W,Y)Z + A(Y)R(X,W)Z \\
&+ A(Z)R(X,Y)W + g(R(X,Y)Z,W)P,
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

eşitliği sağlayan A ve B 1-formları ve P vektör alanı varsa, bu yapı hemen hemen ϕ-simetrik olarak adlandırılır. Bu tanımda, eğer $A=B=0$ ve $P=0$ ise, hemen hemen pseudo ϕ-simetri, Takahashi tarafından ξ'ye ortogonal olan her W,X,Y,Z için

$$
\phi^2\left((\nabla_W R)(X,Y)Z\right) = 0 \tag{2.11}
$$

şeklinde tanımlanan ϕ-simetriye dönüşür [16]. Hemen hemen pseudo ϕ-simetri, zayıf ϕ-simetrinin özel bir durumu değildir.

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

3.1. SİNGULAR YARI RİEMANN HEMEN HEMEN DEĞME MANİFOLDLAR

Tanım 3.1.1. (M,g), (μ,ν,ν^*) tipinde yarı Riemann bir manifold olsun ve (φ,ξ,η) üçlüsü (2.1) eşitliğini sağlasın. Eğer g, (2.2) eşitliğini sağlarsa, bu durumda (M,φ,ξ,η,g) singüler bir yarı Riemann hemen hemen değme metrik manifold olarak isimlendirilir.

Şimdi, $\forall X,Y \in \Gamma TM$ için M üzerindeki Φ temel 2-formu, $\Phi(X,Y)=g(X,\varphi Y)$ şeklinde tanımlanır. Eğer Φ'nin dejenere alt demeti N_Φ ile gösterilirse, $N_g \subseteq N_\Phi$ olduğu kolayca görülebilir. Fakat bunun tersi doğru değildir. Çünkü; eğer, $X \in N_\Phi$ ise sıfır olmak zorunda olmayan bir Y vektör alanı için $g(X,Y)=\varepsilon\eta(X)\eta(Y)$ olduğu kolayca elde edilebilir.

Tanım 3.1.2. (M,g) bir singüler yarı Riemann hemen hemen değme manifold olsun. M üzerindeki g Riemann metriği için

μ $=\dim\ \{u \in M \mid g(u,v)=0, \forall v \in M\}$ (g nin nulluğu),

$\nu = \sup\{\dim W \mid W \subset M \ni g(w,w)<0, \forall 0 \neq w \in W\}$ (g nin indeksi), ve

$\nu^* = \sup\ \{\dim W \mid W \subset M \ni g(w,w)>0, \forall 0 \neq w \in W\}$

şeklinde tanımlanır.

Eğer $\mu = 0$ ise, M üzerindeki g iç çarpımına dejenere değildir denir. Eğer g M üzerinde (μ,ν,ν^*) tipinde bir iç çarpım ise o zaman (M,g)'ye (μ,ν,ν^*) tipinde bir iç çarpım uzayıdır denir.

Tanım 3.1.3. g bir M singüler yarı Riemann hemen hemen değme manifoldu üzerinde (μ,ν,ν^*) tipinde metrik tensör olsun. (M,g)'nin dejenere demeti $M_g^{\perp}$

$M_g^{\perp} = \bigcup\{u \in T_pM, g(u,v)=0, \forall v \in T_pM\}$ şeklinde tanımlıdır.

Eğer $M_g^{\perp}$ TM'nin integrallenebilir alt demeti ise (M,g)'ye integrallenebilirdir denir. Eğer her $u \in \Gamma\left(M_g{}^{\perp}\right)$ için $L_u g = 0$ ise (M,g)'ye bir singüler yarı Riemann hemen hemen manifold denir. Burada L, M üzerinde Lie türevidir.

Teorem 3.1.1. Eğer (M,g) bir singüler yarı Riemann hemen hemen değme manifold ise o zaman (M,g) integrallenebilirdir.

İspat. (M,g)'nin integrallenebilirliğini göstermek için $U_1, U_2 \in \Gamma\left(M_g{}^{\perp}\right)$ verilsin. O halde her $X \in \Gamma TM$ için $L_u g = 0$ olur. Buradan,

$$\begin{aligned} g([U_1,U_2],X) &= U_1 g(U_2,X) - g(U_2,[U_1,X]) - (L_{U_1}g)(U_2,X) \\ &= 0, \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise $[U_1,U_2] \in \Gamma\left(M_g{}^{\perp}\right)$ olduğu anlamına gelir.

Teorem 3.1.2. (M,g,ξ,μ,φ) bir singüler yarı Riemann hemen hemen değme manifold olmak üzere

$M_g{}^{\perp} = M_{\phi}{}^{\perp} = \left(= M^{\perp}\right)$ ve $M^{\perp}$ φ altında invaryanttır. Özellikle

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X,Y)$$

$$\Phi(\varphi X, \varphi Y) = \Phi(X,Y)$$

ve her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\Phi(X,Y) = g(X,\varphi Y)$$

dir.

İspat. φ singüler olmadığından, $X \in \Gamma M_g^{\perp}$ olması için gerekli ve yeterli koşul $X \in \Gamma M_{\Phi}^{\perp}$ olmasıdır. Böylece, $M_g^{\perp} = M_{\Phi}^{\perp}\left(= M^{\perp}\right)$ olur. Ayrıca, her $Y \in M^{\perp}$, $X \in \Gamma TM$ ve $\varphi Y \in \Gamma M^{\perp}$ için $g(X,Y) = \Phi(X,\varphi Y) = 0$ olur. Böylece, $M^{\perp}$ φ altında invaryant kalır.

Sonuç 3.1.1. Bundan sonra, eğer (M,g,ξ,μ,φ) bir singüler yarı Riemann hemen hemen değme manifold dediğimizde, bu durumda $M_g{}^{\perp} = M_{\Phi}{}^{\perp}$ olduğu söylenebilir.

İspat. Teorem 3.1.2. den direkt elde edilir.

Sonuç 3.1.2. Aynı zamanda eğer $M_g{}^{\perp}$ veya $M_{\Phi}{}^{\perp}$ integrallenebilir ise, bu durumda $M^{\perp}$ de integrallenebilirdir.

İspat. Her $U_1, U_2 \in \Gamma M^{\perp}$ olsun. Bu durumda, $L_{U_1} g = 0$ olduğundan her $X \in \Gamma TM$ için

$$
\begin{aligned}
& g([U_1, U_2], X) = U_1 g(U_2, X) \\
& - g(U_2, [U_1, X]) - (L_{U_1} g)(U_2, X) \\
& = 0
\end{aligned}
$$

olur. Böylece, $[U_1, U_2] \in \Gamma M^{\perp}$ olduğu görülür. Bu ise $M_g{}^{\perp}$ nin integrallenebilir olduğunu verir. $M_{\Phi}{}^{\perp}$ nin integrallenebilir olduğu benzer şekilde gösterilir.

Sonuç 3.1.3. $(M, g, \xi, \mu, \varphi)$ bir singüler yarı Riemann hemen hemen değme metrik manifold ve Φ, M üzerinde temel 2-form olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(a) Her $U \in \Gamma M^{\perp}$ için eğer $L_u g = 0$ ve $L_u \Phi = 0$ ise, o zaman $U \in \Gamma M^{\perp}$'dir.

(b) Her $U \in \Gamma M^{\perp}$ için eğer $L_u g = 0$ ve $L_u \varphi \in \Gamma(Hom(TM, M^{\perp}))$ ise, o zaman her $U \in \Gamma M^{\perp}$ için $L_u \phi = 0$ olur.

(c) Her $U \in \Gamma M^{\perp}$ için eğer $L_u \Phi = 0$ ve $L_u \varphi \in \Gamma(Hom(TM, M^{\perp}))$ ise o zaman her $U \in \Gamma M^{\perp}$ için $L_u g = 0$'dır.

İspat. (a) Her $U \in \Gamma M^{\perp}$ ve $X, Y \in \Gamma TM$ için eğer $L_u g = 0$ ise

$$L_U g(X, Y) = (L_U \Phi)(X, Y) + \Phi(X, (L_U \varphi) Y)$$

ve

$$(Hom(TM, M^{\perp})) = \{ f \mid f : TM \to TM^{\perp} \}$$

lineer fonksiyonlar olduğundan $\Phi(X, (L_U \varphi) Y) = 0$ elde edilir. Buradan $(L_U \Phi)(X, Y) = 0$ bulunur. Bu nedenle, φ singüler olmadığından, (b) ve (c) şıklarındaki ifadeler yukarıdaki eşitlikten kolayca görülebilir.

Tanım 3.1.4 $(M, g, \xi, \mu, \varphi)$ bir singüler yarı Riemann hemen hemen değme metrik manifold ve Φ, M üzerind temel 2-form olsun. Bu durumda, $\overline{TM} = TM / TM^{\perp}$ olmak üzere $\prod : TM \rightarrow \overline{TM}$ kanonik dönüşümdür. $\prod(X) = \overline{X}$, $\prod(Y) = \overline{Y}$ ve $\overline{\varphi}\overline{X} = \prod(\varphi X)$ olacak şekildeki $\forall X, Y \in \Gamma TM$ için $\overline{g}(\overline{X}, \overline{Y}) = g(X, Y)$ ve $\overline{\Phi}(\overline{X}, \overline{Y}) = \Phi(X, Y)$ dir. Burada $\overline{g}$ degenere olmayan metrik, $\overline{\Phi}$ degenere olmayan temel 2-form ve $\overline{\varphi}$ $\overline{TM}$ de hemen hemen değme yapıdır. Ayrıca, $\overline{g}(\overline{X}, \overline{Y}) = \overline{\Phi}(\overline{X}, \overline{\varphi}\overline{Y})$ öyleki $\overline{X}, \overline{Y} \in \Gamma\overline{TM}$ dir.

Tanım 3.1.5 $(M, g, \xi, \mu, \varphi)$ bir singüler yarı Riemann hemen hemen değme metrik manifold ve Φ, M üzerind temel 2-form olsun. $\overline{X} \in \Gamma\overline{TM}$ nin $U \in \chi(M^{\perp})$ yönündeki Lie türevi

$$\overline{L}_U \overline{X} = \prod(L_U X)|p$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $X \in \Gamma TM$ için $\prod(X) = \overline{X}$ dir. $\overline{L}_U$ iyi tanımlıdır.

Tanım 3.1.6 $(M, g, \xi, \mu, \varphi)$ bir singüler yarı Riemann hemen hemen değme metrik manifold ve Φ, M üzerinde temel 2-form olsun. O halde

(a) $\overline{g}$ nin $u \in M_P{}^{\perp}$ yönündeki Lie türevi $\overline{L}_u \overline{g}$;

$$(\overline{L}_u \overline{g})(\overline{x}, \overline{y}) = (L_U g)(x, y)$$

olsun. $\forall x, y \in T_p M$ için, $\prod(x) = \overline{x}$, $\prod(y) = \overline{y}$ ve $U_p = u$ olmak üzere $U \in \Gamma M^{\perp}$'dir.

(b) $\overline{\Phi}$ nin $u \in M_P{}^{\perp}$ yönündeki Lie türevi $\overline{L}_u \overline{\Phi}$;

$$(\overline{L}_u \overline{\Phi})(\overline{x}, \overline{y}) = (L_U \Phi)(x, y)$$

olsun. $\forall x, y \in T_p M$ için, $\prod(x) = \overline{x}$, $\prod(y) = \overline{y}$ ve $U_p = u$ olmak üzere $U \in \Gamma M^{\perp}$'dir.

(c) $\overline{\Phi}$ nin $u \in M_P{}^{\perp}$ yönündeki Lie türevi $\overline{L}_u \overline{\varphi}$;

$$(\overline{L}_u \overline{\varphi})\overline{x} = \prod((L_U \varphi)x)$$

olsun. $\forall x, y \in T_p M$ için, $\prod(x) = \overline{x}$ ve $U_p = u$ olmak üzere $U \in \Gamma M^{\perp}$'dir.

Sonuç 3.1.4. $\overline{L}_u \overline{g}$, $\overline{L}_u \overline{\Phi}$ ve $\overline{L}_u \overline{\varphi}$ iyi tanımlıdır.

İspat. $X_1, X_2 \in \Gamma TM$ için $X_2 = X_1 + U$ olarak tanımlansın. Öte yandan, $U_1, U_2, U' \in \chi(M^{\perp})$ olmak üzere, $U_2 = U_1 + U'$ için

$$\prod\left(\left(L_{U_2}\varphi\right)X_2\right)=\prod\left(\left(L_{U_1+U'}\varphi\right)\left(X_1+U\right)\right)$$
$$=\prod\left(\left(L_{U_1}\varphi\right)X_1\right)+\left(L_{U_1}\varphi\right)U+\left(L_{U'}\varphi\right)X_1+\left(L_{U'}\varphi\right)U$$

olup $\prod\left(\left(L_{U_2}\varphi\right)X_2\right)=\prod\left(\left(L_{U_1}\varphi\right)X_1\right)$ elde edilir. Diğerleri de benzer şekilde ispatlanır.

Teorem 3.1.3. (M,g,ξ,μ,φ) bir singüler yarı Riemann hemen hemen değme metrik manifold ve Φ, M üzerinde temel 2-form olsun. O halde her $u\in M^{\perp}$ ve $\overline{X},\overline{Y}\in\Gamma\overline{TM}$ için

(a) $\overline{L}_u\overline{g}\left(\overline{X},\overline{Y}\right)=u\overline{g}\left(\overline{X},\overline{Y}\right)-\overline{g}\left(\overline{L}_u\overline{X},\overline{Y}\right)-\overline{g}\left(\overline{X},\overline{L}_u\overline{Y}\right)$

(b) $\overline{L}_u\overline{\Phi}\left(\overline{X},\overline{Y}\right)=u\overline{\Phi}\left(\overline{X},\overline{Y}\right)-\overline{\Phi}\left(\overline{L}_u\overline{X},\overline{Y}\right)-\overline{\Phi}\left(\overline{X},\overline{L}_u\overline{Y}\right)$

(c) $\left(\overline{L}_u\overline{\varphi}\right)x=\overline{L}_u\left(\overline{\varphi}\overline{X}\right)-\overline{\varphi}\left(\overline{L}_u\overline{X}\right)$

dir.

İspat. (a) $\prod(X)=\overline{X}$ ve $\prod(Y)=\overline{Y}$ olacak şekildeki $\forall X,Y\in\Gamma TM$ için

$$\left(\overline{L}_u\overline{g}\right)\left(\overline{X},\overline{Y}\right)=Ug(X,Y)-g(L_UX,Y)-g(X,L_UY)$$
$$=U\overline{g}\left(\overline{X},\overline{Y}\right)-\overline{g}\left(\prod(L_UX),\overline{Y}\right)-\overline{g}\left(\overline{X},\prod(L_UY)\right)$$
$$=U\overline{g}\left(\overline{X},\overline{Y}\right)-\overline{g}\left(\overline{L}_U\overline{X},\overline{Y}\right)-\overline{g}\left(\overline{X},\overline{L}_U\overline{Y}\right)$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. (b) ve (c) şıklarının ispatı da benzer şekilde yapılır.

Sonuç 3.1.5. (M,g,ξ,μ,φ) bir singüler yarı Riemann ve (M,Φ) bir singüler yarı Riemann hemen hemen değme metrik manifold ve Φ, M üzerinde temel 2-form olsun. O halde

(a) (M,g) bir singüler yarı Riemann manifolddur gerek ve yeter koşul, her $u\in M^{\perp}$ için $\overline{L}_u\overline{g}=0$ olur.

(b) (M,Φ) bir singüler yarı Riemann hemen hemen değme manifoldudur gerek ve yeter koşul, her $u\in M^{\perp}$ için $\overline{L}_u\overline{\Phi}=0$ olur.

(c) Eğer her $u\in M^{\perp}$ için $\overline{L}_u\overline{g}=0$ ve $\overline{L}_u\overline{\Phi}=0$ ise o halde her $u\in M^{\perp}$ için $\overline{L}_u\overline{\varphi}=0$ olur.

(d) Eğer her $u\in M^{\perp}$ için $\overline{L}_u\overline{g}=0$ ve $\overline{L}_u\overline{\Phi}=0$ ise o halde her $u\in M^{\perp}$ için $\overline{L}_u\overline{\Phi}=0$

olur.

(e) Eğer her $u \in M^{\perp}$ için $\overline{L}_u \overline{\varphi} = 0$ ve $\overline{L}_u \overline{\Phi} = 0$ ise o halde her $u \in M^{\perp}$ için $\overline{L}_u \overline{g} = 0$ olur.

İspat. Her $X, Y \in \Gamma TM$ ve $U \in \chi(M^{\perp})$ için,

$$\begin{aligned}
\left(\overline{L}_U \overline{g}\right)\left(\overline{X}, \overline{Y}\right) &= U\overline{g}\left(\overline{X}, \overline{Y}\right) - \overline{g}\left(\overline{L}_U \overline{X}, \overline{Y}\right) - \overline{g}\left(\overline{X}, \overline{L}_U \overline{Y}\right) \\
&= U\overline{\Phi}\left(\overline{X}, \overline{\varphi}\overline{Y}\right) - \overline{\Phi}\left(\overline{L}_U \overline{X}, \overline{\varphi}\overline{Y}\right) - \overline{\Phi}\left(\overline{X}, \overline{\varphi}\left(\overline{L}_U \overline{Y}\right)\right) \\
&= \left(\overline{L}_U \overline{\Phi}\right)\left(\overline{X}, \overline{\varphi}\overline{Y}\right) + \overline{\Phi}\left(\overline{X}, \overline{L}_U\left(\overline{\varphi}\overline{Y}\right)\right) - \overline{\Phi}\left(\overline{X}, \overline{\varphi}\left(\overline{L}_U \overline{Y}\right)\right) \\
&= \left(\overline{L}_U \overline{\Phi}\right)\left(\overline{X}, \overline{\varphi}\overline{Y}\right) + \overline{\Phi}\left(\overline{X}, \left(\overline{L}_U \overline{\varphi}\right)\overline{Y}\right)
\end{aligned}$$

olur. Buradan, $\overline{\varphi}$ singüler olmadığından (a)-(e) şıkları kolaylıkla elde edilir.

Tanım 3.1.7. $(M, g, \xi, \mu, \varphi)$ bir singüler yarı Riemann hemen hemen değme metrik manifold ve Φ, M üzerinde temel 2-form olsun.

(a) $\prod(X) = \overline{X}$, $\prod(Y) = \overline{Y}$ ve $\prod(Z) = \overline{Z}$ olacak şekildeki $X, Y, Z \in \Gamma TM$ için, $\overline{\Phi}$'nin $\overline{d\Phi}$ dış türevi $\overline{d\Phi}\left(\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}\right) = d\Phi(X, Y, Z)$ şeklinde tanımlanır.

(b) $\prod(X) = \overline{X}$ ve $\prod(Y) = \overline{Y}$ olacak şekildeki $X, Y \in \Gamma TM$ ve N de φ'nin Nijenhuis burulma tensörü olmak üzere, $\overline{\varphi}$'nin $\overline{N}$ Nijenhuis burulma tensörü $\overline{N}\left(\overline{X}, \overline{Y}\right) = \prod(N(X, Y))$ şeklinde tanımlanır.

Bir (M, g) singüler yarı Riemann hemen hemen değme manifoldunun $\left(\overline{TM}_g, \overline{g}\right)$ üzerindeki $\overline{\nabla}$ Koszul konneksiyonun $\overline{R}$ eğrilik tensörü aşağıdaki özellikleri sağlar:

(a) $\overline{R}(X, Y) = -\overline{R}(Y, X)$,

(b) $\overline{g}\left(\overline{R}(X, Y)\overline{Z}, \overline{V}\right) = -\overline{g}\left(\overline{R}(X, Y)\overline{V}, \overline{Z}\right)$,

(c) $d^{\overline{\nabla}}$, $\overline{\nabla}$'ye göre dış kovaryant türev operatörü olmak üzere $d^{\overline{\nabla}}\overline{R} = 0$ olur (ikinci Bianchi özdeşliği),

(d) $\overline{R}(X, Y)\overline{Z} + \overline{R}(Y, Z)\overline{X} + \overline{R}(Z, X)\overline{Y} = 0$,

(e) $\prod_g(X) = \overline{X}$, $\prod_g(Y) = \overline{Y}$, $\prod_g(Z) = \overline{Z}$ ve $\prod_g(V) = \overline{V}$ olacak şekildeki $X, Y, Z, V \in \Gamma TM$ için $\overline{g}\left(\overline{R}(X, Y)\overline{Z}, \overline{V}\right) = \overline{g}\left(\overline{R}(Z, V)\overline{X}, \overline{Y}\right)$.

$\prod(X) = \overline{X}$, $\prod(Y) = \overline{Y}$ ve $\prod(Z) = \overline{Z}$ olacak şekildeki $X, Y, Z \in \Gamma TM$ için, $\left(\overline{TM}, \overline{g}\right)$'nin

$\hat{R}$ dış eğrilik tensörü $\hat{R}(\overline{X},\overline{Y})\overline{Z} = \overline{R}(X,Y)\overline{Z}$ olarak tanımlanır.

$\hat{R}$'nin yukarıdaki (c) şıkkındaki özellik hariç diğerlerini sağladığı açıktır. Çünkü $d^{\overline{\nabla}}\hat{R}$ tanımlı değildir. Ancak, $\hat{R}$ değerlerini $\overline{TM}_g$'de alan, $\overline{TM}_g$ üzerinde tanımlı bir kovaryant 3-tensör olarak göz önüne alınırsa, $\hat{R}$ aşağıdaki ikinci Bianchi özdeşliğini sağlar.

Teorem 3.1.4. (M,g) bir singüler yarı Riemann hemen hemen değme manifold olsun. Bu durumda, $\prod_g(X)=\overline{X}$, $\prod_g(Y)=\overline{Y}$ ve $\prod_g(Z)=\overline{Z}$ olacak şekildeki $X,Y,Z\in\Gamma TM$ için $(\overline{TM}_g,\overline{g})$'nin $\hat{R}$ dış eğrilik tensörü

$$(\overline{\nabla}_X\hat{R})(\overline{Y},\overline{Z},\overline{V})+(\overline{\nabla}_Y\hat{R})(\overline{Z},\overline{X},\overline{V})+(\overline{\nabla}_Z\hat{R})(\overline{X},\overline{Y},\overline{V})=0,$$

İkinci Bianchi özdeşliğini sağlar.

İspat. $d^{\overline{\nabla}}\hat{R}=0$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
&(\overline{\nabla}_X\hat{R})(\overline{Y},\overline{Z},\overline{V})+(\overline{\nabla}_Y\hat{R})(\overline{Z},\overline{X},\overline{V})+(\overline{\nabla}_Z\hat{R})(\overline{X},\overline{Y},\overline{V})\\
&=\overline{\nabla}_X\hat{R}(\overline{Y},\overline{Z})\overline{V}-\hat{R}(\overline{\nabla}_X\overline{Y},\overline{Z})\overline{V}-\hat{R}(\overline{Y},\overline{\nabla}_X\overline{Z})\overline{V}-\hat{R}(\overline{Y},\overline{Z})\overline{\nabla}_X\overline{V}\\
&+\overline{\nabla}_Y\hat{R}(\overline{Z},\overline{X})\overline{V}-\hat{R}(\overline{\nabla}_Y\overline{Z},\overline{X})\overline{V}-\hat{R}(\overline{Z},\overline{\nabla}_Y\overline{X})\overline{V}-\hat{R}(\overline{Z},\overline{X})\overline{\nabla}_Y\overline{V}\\
&+\overline{\nabla}_Z\hat{R}(\overline{X},\overline{Y})\overline{V}-\hat{R}(\overline{\nabla}_Z\overline{X},\overline{Y})\overline{V}-\hat{R}(\overline{X},\overline{\nabla}_Z\overline{Y})\overline{V}-\hat{R}(\overline{X},\overline{Y})\overline{\nabla}_Z\overline{V}\\
&=\overline{\nabla}_X\hat{R}(\overline{Y},\overline{Z})\overline{V}+\overline{\nabla}_Y\hat{R}(\overline{Z},\overline{X})\overline{V}+\overline{\nabla}_Z\hat{R}(\overline{X},\overline{Y})\overline{V}-\hat{R}(\prod([X,Y]),\overline{Z})\overline{V}\\
&-\hat{R}(\prod([Y,Z]),\overline{X})\overline{V}-\hat{R}(\prod([Z,X]),\overline{Y})\overline{V}-\hat{R}(\overline{Y},\overline{Z})\overline{\nabla}_X\overline{V}\\
&-\hat{R}(\overline{Z},\overline{X})\overline{\nabla}_Y\overline{V}-\hat{R}(\overline{X},\overline{Y})\overline{\nabla}_Z\overline{V}\\
&=\overline{\nabla}_X\overline{R}(Y,Z)\overline{V}+\overline{\nabla}_Y\overline{R}(Z,X)\overline{V}+\overline{\nabla}_Z\overline{R}(X,Y)\overline{V}-\overline{R}([X,Y],Z)\overline{V}\\
&-\overline{R}([Y,Z],X)\overline{V}-\overline{R}([Z,X],Y)\overline{V}-\overline{R}(Y,Z)\overline{\nabla}_X\overline{V}\\
&-\overline{R}(Z,X)\overline{\nabla}_Y\overline{V}-\overline{R}(X,Y)\overline{\nabla}_Z\overline{V}\\
&=(d^{\overline{\nabla}}\overline{R})(X,Y,Z)(\overline{V})\\
&=0
\end{aligned}$$

$x,y\in(\overline{TM}_g)_p$ lineer bağımsız vektörler olsun. Bu durumda, $\overline{P}=span\{\overline{x},\overline{y}\}$'e $\overline{TM}_g$'de bir düzlem denir. $\overline{x},\overline{y}\in(\overline{TM}_g)_p$ olmak üzere, $\overline{Q}(\overline{x},\overline{y})=\overline{g}(\overline{x},\overline{x})\overline{g}(\overline{y},\overline{y})-[\overline{g}(\overline{x},\overline{y})]^2$ olsun. $\overline{TM}_g$'deki bir $\overline{P}=span\{\overline{x},\overline{y}\}$ düzlemi, eğer $\overline{Q}(\overline{x},\overline{y})\neq 0$ ise dejenere olmayan düzlem , eğer $\overline{Q}(\overline{x},\overline{y})=0$ ise dejenere düzlem olarak adlandırılır. Eğer (M,g) singüler yarı Riemann bir manifold ise, bu durumda dejenere olmayan bir $\overline{P}=span\{\overline{x},\overline{y}\}$

düzlemin eğriliği $\overline{K}\left(\overline{P}\right)=\overline{g}\left(\hat{R}(\overline{x},\overline{y})\overline{y},\overline{x}\right)/\overline{Q}(\overline{x},\overline{y})$ şeklinde tanımlanır. Bir (M,g) singüler yarı Riemann manifoldu için, eğer $\overline{TM}_g$ 'deki dejenere olmayan her düzlemin eğriliği C 'ye eşit ise, bu manifolda $P\in M$ noktasında sabit eğriliğe sahiptir denir. Bu durumda, $\overline{x},\overline{y},\overline{z}\in\left(\overline{TM}_g\right)_p$ için $\hat{R}(\overline{x},\overline{y})\overline{z}=C\left(g(\overline{z},\overline{y})\overline{x}-g(\overline{z},\overline{x})\overline{y}\right)$ olur.

Şimdi, singüler yarı Riemann manifoldlar için Schur Lemması ispatlanacaktır.

Teorem 3.1.5. (M,g), bağlantılı bir singüler yarı Riemann hemen hemen değme manifold olsun. Eğer (M,g) her noktada sabit eğriliğe sahip ve $rank\left(\overline{TM}_g\right)\geq 3$ ise, bu durumda (M,g) sabit eğriliğe sahiptir, yani $\overline{TM}_g$ 'deki dejenere olmayan her düzlemin eğriliği bir sabite eşittir.

İspat. Her $\overline{x},\overline{y},\overline{z}\in\left(\overline{TM}_g\right)_p$ için $\hat{R}_0(\overline{x},\overline{y})\overline{z}=g(\overline{z},\overline{y})\overline{x}-g(\overline{z},\overline{x})\overline{y}$ olsun. Buradan, f M üzerinde düzgün bir fonksiyon olmak üzere, $\hat{R}=f\,\hat{R}_0$ olur. Bu durumda, $\prod_g(X)=\overline{X}$, $\prod_g(Y)=\overline{Y}$, $\prod_g(Z)=\overline{Z}$ ve $\prod_g(V)=\overline{V}$ olacak şekildeki her $X,Y,Z,V\in\Gamma TM$ için $\overline{\nabla}\hat{R}_0=0$ olduğundan dolayı, ikinci Bianchi özdeşliğinden

$$(Xf)\hat{R}_0\left(\overline{Y},\overline{Z},\overline{V}\right)+(Yf)\hat{R}_0\left(\overline{Z},\overline{X},\overline{V}\right)+(Zf)\hat{R}_0\left(\overline{X},\overline{Y},\overline{V}\right)=0$$

bulunur. Böylece,

$$\begin{aligned}&(Xf)\left(\overline{g}\left(\overline{V},\overline{Z}\right)\overline{Y}-\overline{g}\left(\overline{V},\overline{Y}\right)\overline{Z}\right)+(Yf)\left(\overline{g}\left(\overline{V},\overline{X}\right)\overline{Z}-\overline{g}\left(\overline{V},\overline{Z}\right)\overline{X}\right)\\&+(Zf)\left(\overline{g}\left(\overline{V},\overline{Y}\right)\overline{X}-\overline{g}\left(\overline{V},\overline{X}\right)\overline{Y}\right)\\&=0\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Herhangi bir $X\in\Gamma M_g^{\perp}$ için, $\left(\overline{TM}_g,\overline{g}\right)$ ortonormal olan ve $V=Z$ ve $\prod_g(Y)=\overline{Y}$, $\prod_g(Z)=\overline{Z}$ şartlarını sağlayan dejenere ve null olmayan $X,Y,Z,V\in\Gamma TM$ seçilerek, $\overline{g}\left(\overline{Z},\overline{Z}\right)X(f)\overline{Y}=0$ elde edilir. Böylece, her $X\in M_g^{\perp}$ için $X(f)=0$ bulunur. $|g(X,X)|=1$ olacak şekildeki herhangi bir dejenere olmayan $X\in\Gamma M$ için, $\left(\overline{TM}_g,\overline{g}\right)$ ortonormal olan ve $V=Z$ ve $\prod_g(X)=\overline{X}$, $\prod_g(Y)=\overline{Y}$, $\prod_g(Z)=\overline{Z}$ şartlarını sağlayan dejenere ve null olmayan $Y,Z,V\in\Gamma TM$ seçilerek, $\overline{g}\left(\overline{Z},\overline{Z}\right)(Xf)\overline{Y}-\overline{g}\left(\overline{Z},\overline{Z}\right)(Yf)\overline{X}=0$ elde edilir. Böylece, dejenere ve null olmayan her $X\in\Gamma TM$ için $Xf=0$ bulunur.

Herhangi bir null vektör, dejenere ve null olmayan vektörlerin bir lineer kombinasyonu olarak yazılabildiğinden her $X \in \Gamma TM$ için $Xf = 0$ olur.

Tanım 3.1.8. (M,g), (μ,ν,ν^*) tipinde bir g metriğine sahip bir singüler yarı Riemann hemen hemen değme manifold olsun. İç Ricci eğriliği $\hat{Ric}$ ve $\left(\overline{TM},\overline{g}\right)$'nin iç skaler eğriliği $\hat{S}$,

$$\hat{Ric}\left(\overline{X},\overline{Y}\right)=\sum_i \theta_i \overline{g}\left(\hat{R}\left(\overline{E}_i, X\right)\overline{Y},\overline{E}_i\right)$$

ve

$$\hat{S}=\sum_i \hat{Ric}\left(\overline{E}_i,\overline{E}_i\right)$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $\{\overline{E}_i\}$, $\left(\overline{TM},\overline{g}\right)$ üzerinde yerel bir yarı Riemann bazı ve $\theta_i = \overline{g}\left(\overline{E}_i,\overline{E}_i\right)$ şeklinde tanımlanır.

Yorum 3.1.1. (M,g), (μ,ν,ν^*) tipinde bir g metriğine sahip bir singüler yarı Riemann hemen hemen değme manifold olsun. $\hat{S}$, $\left(\overline{TM},\overline{g}\right)$'nin iç skaler eğriliği olmak üzere $\hat{S}=\sum_{i\neq j}\overline{K}\left(\overline{P}_{ij}\right)\overline{P}_{ij}=span\left\{\overline{E}_i,\overline{E}_j\right\}$ şeklindedir.

Yardımcı Teorem 3.1.1. (M,φ,ξ,η,g) bir singüler Sasaki manifoldu olsun. Bu durumda her $\overline{X},\overline{Y},\overline{Z},\overline{W}\in\Gamma\overline{TM}$ için

$$\begin{aligned}\left(\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y\overline{Q}-\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X\overline{Q}-\overline{\nabla}_{[X,Y]}\overline{Q}\right)\left(\overline{Z},\overline{W}\right)=&-\overline{g}\left(\hat{R}\left(\overline{X},\overline{Y}\right)\overline{Z},\overline{\varphi}\overline{W}\right)\\&-\overline{g}\left(\hat{R}\left(\overline{X},\overline{Y}\right)\overline{\varphi}\overline{Z},\overline{W}\right),\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

İspat.

$$
\begin{aligned}
&\left(\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y \overline{Q} - \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X \overline{Q} - \overline{\nabla}_{[X,Y]} \overline{Q}\right)\left(\overline{Z}, \overline{W}\right) \\
&= \overline{g}\left(Z, \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y \overline{\varphi} \overline{W}\right) - \overline{g}\left(\overline{Z}, \overline{\nabla}_X \overline{\varphi} \overline{\nabla}_Y \overline{W}\right) \\
&- \overline{g}\left(\overline{Z}, \overline{\nabla}_Y \overline{\varphi} \overline{\nabla}_X \overline{W}\right) + \overline{g}\left(\overline{Z}, \overline{\varphi} \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X \overline{W}\right) \\
&- \overline{g}\left(\overline{Z}, \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X \overline{\varphi} \overline{W}\right) + \overline{g}\left(\overline{Z}, \overline{\nabla}_Y \overline{\varphi} \overline{\nabla}_X \overline{W}\right) \\
&+ \overline{g}\left(\overline{Z}, \overline{\nabla}_X \overline{\varphi} \overline{\nabla}_Y \overline{W}\right) - g\left(\overline{Z}, \overline{\varphi} \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y \overline{W}\right) \\
&- \overline{g}\left(\overline{Z}, \overline{\nabla}_{[X,Y]} \overline{\varphi} \overline{W}\right) + \overline{g}\left(\overline{Z}, \overline{\varphi} \overline{\nabla}_{[X,Y]} \overline{W}\right) \\
&= \overline{g}\left(\overline{Z}, \hat{R}\left(\overline{X}, \overline{Y}\right) \overline{\varphi} \overline{W}\right) - \overline{g}\left(\overline{Z}, \overline{\varphi} \hat{R}\left(\overline{X}, \overline{Y}\right) \overline{W}\right)
\end{aligned}
$$

olur. $\overline{\varphi}$ nin ters simetrik olması ve Bianchi özdeşlikleri göz önüne alınırsa ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.6. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir singüler Sasaki manifoldu olsun.

(a)

$$
\begin{aligned}
P\left(\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}, \overline{W}\right) &= \overline{g}\left(\overline{X}, \overline{\varphi} \overline{Z}\right) \overline{g}\left(\overline{Y}, \overline{W}\right) - \overline{g}\left(\overline{X}, \overline{\varphi} \overline{W}\right) \overline{g}\left(\overline{Y}, \overline{Z}\right) \\
&- \overline{g}\left(\overline{Y}, \overline{\varphi} \overline{Z}\right) \overline{g}\left(\overline{X}, \overline{W}\right) + \overline{g}\left(\overline{Y}, \overline{\varphi} \overline{W}\right) \overline{g}\left(\overline{X}, \overline{Z}\right)
\end{aligned}
$$

olmak üzere, her $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}, \overline{W} \in \Gamma \overline{TM}$ için

$$
\overline{g}\left(\hat{R}\left(\overline{X}, \overline{Y}\right) \overline{Z}, \overline{\varphi} W\right) + \overline{g}\left(\hat{R}\left(\overline{X}, \overline{Y}\right) \overline{\varphi} \overline{Z}, W\right) = -P\left(\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}, \overline{W}\right)
$$

ifadesi sağlanır.

(b) ξ 'ye dik olan her $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}, \overline{W} \in \Gamma \overline{TM}$ için

$$
\overline{g}\left(\hat{R}\left(\overline{\varphi} \overline{X}, \overline{\varphi} \overline{Y}\right) \overline{\varphi} \overline{Z}, \overline{\varphi} W\right) = \overline{g}\left(\hat{R}\left(\overline{X}, \overline{Y}\right) \overline{Z}, W\right)
$$

dir.

İspat.

(a) İlk olarak

$$
\begin{aligned}
\left(\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y \overline{\Phi} - \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X \overline{\Phi} - \overline{\nabla}_{[X,Y]} \overline{\Phi}\right)\left(\overline{Z}, \overline{W}\right) &= -\overline{g}\left(\hat{R}\left(\overline{X}, \overline{Y}\right) \overline{Z}, \overline{\varphi} \overline{W}\right) \\
&- \overline{g}\left(\hat{R}\left(\overline{X}, \overline{Y}\right) \overline{\varphi} \overline{Z}, \overline{W}\right),
\end{aligned}
$$

ifadesinde eşitliğin sağ tarafının $P\left(\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}, \overline{W}\right)$ ye eşit olduğu gösterilecektir.

$$
\begin{aligned}
P\left(\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}, \overline{W}\right) &= \overline{d}\overline{\eta}\left(\overline{X}, \overline{Z}\right) \overline{g}\left(\overline{Y}, \overline{W}\right) - \overline{d}\overline{\eta}\left(\overline{X}, \overline{W}\right) \overline{g}\left(\overline{Y}, \overline{Z}\right) \\
&- \overline{d}\overline{\eta}\left(\overline{Y}, \overline{Z}\right) \overline{g}\left(\overline{X}, \overline{W}\right) + \overline{d}\overline{\eta}\left(\overline{Y}, \overline{W}\right) \overline{g}\left(\overline{X}, \overline{Z}\right)
\end{aligned}
$$

Sasaki özelliğinden dolayı $\overline{d}\overline{\eta} = \overline{\Phi} = \overline{g}(., \overline{\varphi}.)$

$$
\left(\overline{\nabla}_X \overline{\varphi}\right) \overline{Y} = \overline{g}\left(\overline{X}, \overline{Y}\right) \xi - \overline{\eta}\left(\overline{Y}\right) \overline{X}
$$

ve

$$\left(\overline{\nabla}_X \overline{\Phi}\right)\left(\overline{Y},\overline{Z}\right)=\overline{X}\,\overline{\Phi}\left(\overline{Y},\overline{Z}\right)-\overline{\Phi}\left(\overline{\nabla}_X \overline{Y},\overline{Z}\right)-\overline{\Phi}\left(\overline{Y},\overline{\nabla}_X \overline{Z}\right)=\overline{g}\left(\overline{X},\overline{Z}\right)\overline{\eta}\left(\overline{Y}\right)-\overline{g}\left(\overline{X},\overline{Y}\right)\overline{\eta}\left(\overline{Z}\right)$$

olduğundan gerekli hesaplamalardan sonra,

$$\begin{aligned}&\left(\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y \overline{\Phi}\right)\left(\overline{Z},\overline{W}\right)=\overline{g}\left(\overline{\nabla}_X \overline{Y},\overline{W}\right)\overline{\eta}\left(\overline{Z}\right)-\overline{g}\left(\overline{\nabla}_X \overline{Y},\overline{Z}\right)\overline{\eta}\left(\overline{W}\right)\\&+\overline{g}\left(\overline{Y},\overline{W}\right)\overline{\Phi}\left(\overline{X},\overline{Z}\right)-\overline{g}\left(\overline{Y},\overline{Z}\right)\overline{\Phi}\left(\overline{X},\overline{W}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&-\left(\overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X \overline{\Phi}\right)\left(\overline{Z},\overline{W}\right)=-\overline{g}\left(\overline{\nabla}_Y \overline{X},\overline{W}\right)\overline{\eta}\left(\overline{Z}\right)-\overline{g}\left(\overline{\nabla}_Y \overline{X},\overline{Z}\right)\overline{\eta}\left(\overline{W}\right)\\&-\overline{g}\left(\overline{X},\overline{W}\right)\overline{\Phi}\left(\overline{Y},\overline{Z}\right)-\overline{g}\left(\overline{X},\overline{Z}\right)\overline{\Phi}\left(\overline{Y},\overline{W}\right)\end{aligned}$$

ve

$$\left(\overline{\nabla}_{[X,Y]}\overline{\Phi}\right)\left(\overline{Z},\overline{W}\right)=-\overline{g}\left(\Pi\left(\left[X,Y\right]\right),\overline{W}\right)\overline{\eta}\left(\overline{Z}\right)+\overline{g}\left(\Pi\left(\left[X,Y\right]\right),\overline{Z}\right)\overline{\eta}\left(\overline{W}\right)$$

olduğu görülür. Bu eşitlikler denklemde yerine yazılıp toplanırsa sonuca ulaşılır.

Şimdi $P\left(\overline{X},\overline{Y},\overline{Z},\overline{W}\right)$ nin

$$\overline{g}\left(\overline{X},\overline{\varphi}\overline{Z}\right)\overline{g}\left(\overline{Y},\overline{W}\right)-\overline{g}\left(\overline{X},\overline{\varphi}\overline{W}\right)\overline{g}\left(\overline{Y},\overline{Z}\right)-\overline{g}\left(\overline{Y},\overline{\varphi}\overline{Z}\right)\overline{g}\left(\overline{X},\overline{W}\right)+\overline{g}\left(\overline{Y},\overline{\varphi}\overline{W}\right)\overline{g}\left(\overline{X},\overline{Z}\right)$$

eşit oldğu gösterilecektir. $\forall X,Y,Z$ vektör alanları için

$$\left(\overline{\nabla}_X \overline{\Phi}\right)\left(\overline{Y},\overline{Z}\right)=\overline{g}\left(\overline{Y},\overline{\nabla}_X \overline{\varphi}\overline{Z}\right)-\overline{g}\left(\overline{Y},\overline{\varphi}\overline{\nabla}_X \overline{Z}\right)$$

ve

$$-\left(\overline{\nabla}_{[X,Y]}\overline{\Phi}\right)\left(\overline{Z},\overline{W}\right)=-\overline{g}\left(\overline{Z},\overline{\nabla}_{[X,Y]}\overline{\varphi}\overline{W}\right)+\overline{g}\left(\overline{Z},\overline{\varphi}\overline{\nabla}_{[X,Y]}\overline{W}\right)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}&\left(\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y \overline{\Phi}-\overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X \overline{\Phi}-\overline{\nabla}_{[X,Y]}\overline{\Phi}\right)\left(\overline{Z},\overline{W}\right)\\&=\overline{g}\left(\overline{Y},\overline{W}\right)\overline{\Phi}\left(\overline{X},\overline{Z}\right)-\overline{g}\left(\overline{Y},\overline{Z}\right)\overline{\Phi}\left(\overline{X},\overline{W}\right)\\&-\overline{g}\left(\overline{X},\overline{W}\right)\overline{\Phi}\left(\overline{Y},\overline{Z}\right)+\overline{g}\left(\overline{X},\overline{Z}\right)\overline{\Phi}\left(\overline{Y},\overline{W}\right)\\&=\overline{P}\left(\overline{X},\overline{Y},\overline{Z},\overline{W}\right)\end{aligned}$$

olur. Öte yandan

$$\begin{aligned}&\left(\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y \overline{\Phi}\right)\left(\overline{Z},\overline{W}\right)=\overline{g}\left(Z,\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y \overline{\varphi}\overline{W}\right)\\&-\overline{g}\left(\overline{Z},\overline{\nabla}_X \overline{\varphi}\overline{\nabla}_Y \overline{W}\right)-\overline{g}\left(\overline{Z},\overline{\nabla}_Y \overline{\varphi}\overline{\nabla}_X \overline{W}\right)\\&+\overline{g}\left(\overline{Z},\overline{\varphi}\overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X \overline{W}\right)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}&-\left(\overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X \overline{\Phi}\right)\left(\overline{Z},\overline{W}\right)=-\overline{g}\left(Z,\overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X \overline{\varphi}\overline{W}\right)\\&+\overline{g}\left(\overline{Z},\overline{\nabla}_Y \overline{\varphi}\overline{\nabla}_X \overline{W}\right)+g\left(\overline{Z},\overline{\nabla}_X \overline{\varphi}\overline{\nabla}_Y \overline{W}\right)\\&-\overline{g}\left(\overline{Z},\overline{\varphi}\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y \overline{W}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\left(\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y \overline{\Phi} - \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X \overline{\Phi} - \overline{\nabla}_{[X,Y]} \overline{\Phi}\right)\left(\overline{Z}, \overline{W}\right)$$
$$= -\overline{g}\left(\overline{\varphi W}, \hat{R}\left(\overline{X}, \overline{Y}\right)\overline{Z}\right) - \overline{g}\left(\overline{W}, \hat{R}\left(\overline{X}, \overline{Y}\right)\overline{\varphi Z}\right)$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

(b)

$$\overline{g}\left(\hat{R}\left(\overline{X}, \overline{Y}\right)\overline{Z}, \overline{\varphi W}\right) + \overline{g}\left(\hat{R}\left(\overline{X}, \overline{Y}\right)\overline{\varphi Z}, \overline{W}\right) = -P\left(\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}, \overline{W}\right)$$

olduğunu teoremin (a) şıkkından biliniyor. Bu ifade de $\overline{Z}$ yerine $\overline{\varphi}\overline{Z}$ alınısa

$$P\left(\overline{X}, \overline{Y}, \overline{\varphi}\overline{Z}, \overline{W}\right) = -\overline{g}\left(\overline{X}, \overline{Z}\right)\overline{g}\left(\overline{Y}, \overline{W}\right) - \overline{g}\left(\overline{X}, \overline{\varphi}\overline{W}\right)\overline{g}\left(\overline{Y}, \overline{\varphi}\,\overline{Z}\right)$$
$$+ \overline{g}\left(\overline{Y}, \overline{Z}\right)\overline{g}\left(\overline{X}, \overline{W}\right) + \overline{g}\left(\overline{Y}, \overline{\varphi}\overline{W}\right)\overline{g}\left(\overline{X}, \overline{\varphi}\overline{Z}\right) \qquad (*)$$

eşitliği elde edilir.

$$\left(\hat{R}\left(\overline{\varphi X}, \overline{\varphi Y}\right)\overline{\varphi Z}, \overline{\varphi} W\right) = \overline{g}\left(\hat{R}\left(\overline{\varphi}\overline{X}, \overline{\varphi}\overline{Y}\right)\overline{\varphi}\overline{Z}, \overline{\varphi}\overline{W}\right)$$

(*) dan dolayı

$$= -\overline{g}\left(\hat{R}\left(\overline{\varphi X}, \overline{\varphi Y}\right)\overline{\varphi}^2 \overline{Z}, \overline{W}\right) - \left(P\left(\overline{\varphi}\overline{X}, \overline{\varphi}\overline{Y}\right)\overline{\varphi}\overline{Z}, \overline{W}\right)$$
$$= \overline{g}\left(\hat{R}\left(\overline{\varphi X}, \overline{\varphi Y}\right)\overline{Z}, \overline{W}\right) - \left(P\left(\overline{\varphi}\overline{X}, \overline{\varphi}\overline{Y}\right)\overline{\varphi}\overline{Z}, \overline{W}\right)$$
$$= \overline{g}\left(\hat{R}\left(\overline{Z}, \overline{W}\right)\overline{\varphi}\overline{X}, \overline{\varphi}\overline{Y}\right) - \left(P\left(\overline{\varphi}\overline{X}, \overline{\varphi}\overline{Y}\right)\overline{\varphi}\overline{Z}, \overline{W}\right)$$
$$= -\overline{g}\left(\hat{R}\left(\overline{Z}, \overline{W}\right)\overline{\varphi}^2 \overline{X}, \overline{Y}\right) - P\left(\overline{Z}, \overline{W}, \overline{\varphi}\overline{X}, \overline{Y}\right) - \left(P\left(\overline{\varphi}\overline{X}, \overline{\varphi}\overline{Y}\right)\overline{\varphi}\overline{Z}, \overline{W}\right)$$
$$= \left(\hat{R}\left(\overline{X}, \overline{Y}\right)\overline{Z}, \overline{W}\right) - P\left(\overline{Z}, \overline{W}, \overline{\varphi}\overline{X}, \overline{Y}\right) - P\left(\overline{\varphi}\overline{X}, \overline{\varphi}\overline{Y}, \overline{\varphi}\overline{Z}, \overline{W}\right)$$
$$= \left(\hat{R}\left(\overline{X}, \overline{Y}\right)\overline{Z}, \overline{W}\right)$$

elde edilir.

Yardımcı Teorem 3.1.2. R, S ve r sırasıyla $(1,3)$ tipinde tensör alanı, $(0,2)$ tipinde Ricci tensörü ve bir $\left(M^n, g\right)$ singüler Sasakian manifoldu üzerinde skalar eğrilik olsun. Biliyoruz ki bir M^n singüler manifoldunda Riemann metriği seçilebilir öyleki M^n üzerinde her X, Y, Z vektör alanları için aşağıdaki özellikler sağlanır:

$$\overline{\varphi}\left(\overline{\xi}\right) = 0, \qquad (3.1)$$

$$\overline{\eta}\left(\overline{\xi}\right) = \varepsilon = \pm 1, \qquad (3.2)$$

$$\overline{\varphi}^2 \overline{X} = -\overline{X} + \overline{\eta}\left(\overline{X}\right)\overline{\xi}, \qquad (3.3)$$

$$\overline{g}\left(\overline{\varphi}\overline{X}, \overline{\varphi}\overline{Y}\right) = \overline{g}\left(\overline{X}, \overline{Y}\right) - \varepsilon\overline{\eta}\left(\overline{X}\right)\overline{\eta}\left(\overline{Y}\right), \qquad (3.4)$$

$$\overline{\eta}\left(\overline{X}\right) = \overline{g}\left(\overline{X}, \overline{\xi}\right), \qquad (3.5)$$

$$\overline{\nabla}_X \overline{\xi} = -\overline{\varphi}\overline{X} \tag{3.6}$$

$$\overline{\eta}\left(\overline{\varphi}\overline{X}\right) = 0, \tag{3.7}$$

$$\overline{S}\left(\overline{X}, \overline{\xi}\right) = (n-1)\overline{\eta}\left(\overline{X}\right) \tag{3.8}$$

$$\overline{g}\left(\overline{R}\left(\overline{\xi}, \overline{X}\right)\overline{Y}, \overline{\xi}\right) = \overline{g}\left(\overline{X}, \overline{Y}\right) - \overline{\eta}\left(\overline{X}\right)\overline{\eta}\left(\overline{Y}\right) \tag{3.9}$$

$$\overline{R}\left(\overline{\xi}, \overline{X}\right)\overline{\xi} = -\overline{X} + \eta\left(\overline{X}\right)\overline{\xi} \tag{3.10}$$

$$\overline{g}\left(\overline{R}\left(\overline{X}, \overline{Y}\right)\overline{\xi}, \overline{Z}\right) = \overline{g}\left(\overline{X}, \overline{Z}\right)\overline{\eta}\left(\overline{Y}\right) - \overline{g}\left(\overline{Y}, \overline{Z}\right)\overline{\eta}\left(\overline{X}\right) \tag{3.11}$$

$$\left(\overline{\nabla}_X \overline{\varphi}\right)\overline{Y} = \overline{R}\left(\overline{\xi}, \overline{X}\right)\overline{Y} \tag{3.12}$$

İspat. (3.1)-(3.6) eşitliklerinin ispatı açıktır.

(3.7):

$$\overline{\eta}\left(\overline{\varphi}\overline{X}\right) = \varepsilon g\left(\overline{\varphi}\overline{X}, \overline{\xi}\right) = \varepsilon g\left(\overline{X}, \overline{\varphi}\overline{\xi}\right) = 0$$

şeklinde elde edilir.

(3.8):

$$\begin{aligned}
\overline{S}\left(\overline{X}, \overline{\xi}\right) &= \sum_{i=1}^{n} \overline{g}\left(\overline{R}\left(\overline{e}_i, \overline{X}\right)\overline{\xi}, \overline{e}_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \overline{g}\left(\overline{\eta}\left(\overline{X}\right)\overline{e}_i - \overline{\eta}\left(\overline{e}_i\right)\overline{X}, \overline{e}_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \overline{\eta}\left(\overline{X}\right)\overline{g}\left(\overline{e}_i, \overline{e}_i\right) - \overline{\eta}\left(\overline{e}_i\right) g\left(\overline{X}, \overline{e}_i\right) \\
&= (n-1)\overline{\eta}\left(\overline{X}\right)
\end{aligned}$$

olup, böylece ispat tamamlanır.

(3.9):

$$\begin{aligned}
\overline{g}\left(\overline{R}\left(\overline{\xi}, \overline{X}\right)\overline{Y}, \overline{\xi}\right) &= -\overline{g}\left(\overline{R}\left(\overline{\xi}, \overline{X}\right)\overline{\xi}, \overline{Y}\right) \\
&= -\overline{g}\left(-\overline{X} + \overline{\eta}\left(\overline{X}\right)\overline{\xi}, \overline{Y}\right) \\
&= \overline{g}\left(\overline{X}, \overline{Y}\right) - \overline{\eta}\left(\overline{X}\right)\overline{\eta}\left(\overline{Y}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(3.10):

$$\begin{aligned}
\overline{R}\left(\overline{\xi}, \overline{X}\right)\overline{\xi} &= \overline{\nabla}_{\overline{\xi}} \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{\xi} - \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{\nabla}_{\overline{\xi}} \overline{\xi} - \overline{\nabla}_{[\overline{\xi}, \overline{X}]} \overline{\xi} \\
&= -\overline{X} + \overline{\eta}\left(\overline{X}\right)\overline{\xi}
\end{aligned}$$

olur.

(3.11):

$$\overline{R}\left(\overline{X},\overline{Y}\right)\overline{\xi}=\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{\nabla}_{Y}\overline{\xi}-\overline{\nabla}_{Y}\overline{\nabla}_{X}\overline{\xi}-\overline{\nabla}_{[X,Y]}\overline{\xi}$$
$$=\overline{\eta}\left(\overline{Y}\right)\overline{X}-\overline{\eta}\left(\overline{X}\right)\overline{Y}$$

olduğu görülür. Bu son eşitliğin $\overline{Z}$ ile iç çarpımı alınırsa istenen elde edilir.

(3.12): (3.11) den ispat açıktır.

3.2. SİNGÜLER SASAKİ MANİFOLDLARIN HEMEN HEMEN PSEUDO SİMETRİ ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, Bölüm 2.2.6.'da verilen tanımlar singüler Sasaki manifoldu için göz önüne alınacaktır.

Teorem 3.2.1. Eğer $3\overline{A}+\overline{B}$ ifadesi her yerde sıfır olmuyorsa, bu durumda, hemen hemen pseudo simetrik singüler Sasaki manifoldu yoktur.

İspat. $(i=1,\ldots,n)$ olmak üzere, $\{e_i\}$ kümesi manifoldun herhangi bir noktasındaki tanjant uzayının ortonormal bir bazı olsun. (2.7) eşitliğinde $\overline{U}=\overline{W}=\{e_i\}$ seçilip $i, 1\leq i\leq n$ üzerinden toplam alınırsa

$$\begin{aligned}\left(\overline{\nabla}_X\overline{S}\right)\left(\overline{Y},\overline{Z}\right)&=\left[\overline{A}\left(\overline{X}\right)+\overline{B}\left(\overline{X}\right)\right]\overline{S}\left(\overline{Y},\overline{Z}\right)+\overline{A}\left(\overline{Y}\right)\overline{S}\left(\overline{X},\overline{Z}\right)\\&+\overline{A}\left(\overline{Z}\right)\overline{S}\left(\overline{X},\overline{Y}\right)+\overline{A}\left(\overline{R}\left(\overline{X},\overline{Y}\right)\overline{Z}\right)+\overline{A}\left(\overline{R}\left(\overline{X},\overline{Z}\right)\overline{Y}\right),\end{aligned}\tag{3.13}$$

ifadesi elde edilir. $\left(\overline{\nabla}_X\overline{g}\right)\left(\overline{Z},\overline{\xi}\right)=0$ olması göz önüne alınıp, (3.5),(3.6) ve (3.8) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\left(\overline{\nabla}_X\overline{S}\right)\left(\overline{\xi},\overline{Z}\right)=-(n-1)\overline{g}\left(\overline{Z},\overline{\phi}\overline{X}\right)+\overline{S}\left(\overline{\phi}\overline{X},\overline{Z}\right),\tag{3.14}$$

ifadesi bulunur. (3.13)'de $\overline{Y}=\overline{\xi}$ alınırsa, (3.14) ve (3.8) ifadeleri göz önüne alındığında

$$\begin{aligned}&-(n-1)\overline{g}\left(\overline{Z},\overline{\phi}\overline{X}\right)+\overline{S}\left(\overline{\phi}\overline{X},\overline{Z}\right)=(n-1)\left[\overline{A}\left(\overline{X}\right)+\overline{B}\left(\overline{X}\right)\right]\overline{\eta}\left(\overline{Z}\right)\\&+\overline{A}\left(\overline{\xi}\right)\overline{S}\left(\overline{X},\overline{Z}\right)+(n-1)\overline{A}\left(\overline{Z}\right)\overline{\eta}\left(\overline{X}\right)+\overline{A}\left(\overline{R}\left(\overline{X},\overline{\xi}\right)\overline{Z}\right)+\overline{A}\left(\overline{R}\left(\overline{X},\overline{Z}\right)\overline{\xi}\right),\end{aligned}\tag{3.15}$$

olduğu görülür. (3.15)'de $\overline{Z}=\overline{\xi}$ seçilip, (3.2),(3.6), (3.8) ve (3.10) ifadeleri göz önüne alınırsa,

$$(n+1)\overline{A}\left(\overline{X}\right)+(n-1)\overline{B}\left(\overline{X}\right)+2(n-2)\overline{A}\left(\overline{\xi}\right)\overline{\eta}\left(\overline{X}\right)=0,\tag{3.16}$$

elde edilir. $n\geq 3$ olduğundan, (3.16)'de $\overline{X}=\overline{\xi}$ seçilirse

$$3\overline{A}\left(\overline{\xi}\right)+\overline{B}\left(\overline{\xi}\right)=0,\tag{3.17}$$

olur. Bu ise, (M,φ,ξ,η,g) yapısının bir Sasaki manifold olması için, $3\overline{A}+\overline{B}$ 1-formunun (M^n,g)'nin ξ Killing vektör alanı üzerinde sıfır olması gerektiği anlamına gelir. Şimdi herhangi bir vektör alanı için $3\overline{A}+\overline{B}=0$ olduğu gösterilecektir.

(3.15)'de $\overline{X}=\xi$ alınıp, (3.1),(3.2), (3.8) ve (3.10) ifadeleri hesaba katılırsa,

$$(2n-1)\overline{A}(\xi)\eta(\overline{Z})+(n-2)\overline{A}(\overline{Z})+(n-1)\overline{B}(\xi)\eta(\overline{Z})=0, \tag{3.18}$$

olduğu görülür. (3.18)'de $\overline{Z}$ yerine $\overline{X}$ yazılıp elde edilen ifade (3.16) ile toplanırsa, (3.17) eşitliğinin ışığında

$$(n-2)\overline{A}(\xi)\eta(\overline{X})+(2n-1)\overline{A}(\overline{X})+(n-1)\overline{B}(\overline{X})=0, \tag{3.19}$$

ifadesi elde edilir. Son olarak, (3.18)'da $\overline{Z}$ yerine $\overline{X}$ yazılıp elde edilen ifade (3.19) ile toplanırsa, (3.17) eşitliği doğrultusunda, her $\overline{X}$ için,

$$(n-1)\left[3\overline{A}(\overline{X})+\overline{B}(\overline{X})\right]=0, \tag{3.20}$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

Bu koşul, hemen hemen pseudo simetrik bir manifold üzerinde, singüler bir Sasaki yapısının varlığını mümkün kılar. Eğer özel olarak $\overline{A}=\overline{B}$ ise, bu durumda manifold pseudo simetrik manifolda dönüşür. (3.20)'dan $\overline{A}=0$ bulunur. Bu ise pseudo simetrik manifoldun tanımı ile çelişir. Dolayısıyla aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.2.1. Düzgün pseudo simetrik singüler Sasaki manifoldu yoktur.

Teorem 3.2.2. Eğer $3\overline{A}+\overline{B}$ ifadesi her yerde sıfır olmuyorsa, bu durumda, hemen hemen pseudo Ricci simetrik singüler Sasaki manifoldu yoktur.

İspat. (2.9)'de $\overline{Z}=\xi$ alınırsa,

$$(\nabla_X S)(\overline{Y},\xi)=\left[\overline{A}(\overline{X})+\overline{B}(\overline{X})\right]S(\overline{Y},\xi)+\overline{A}(\overline{Y})S(\overline{X},\xi)+\overline{A}(\xi)S(\overline{X},\overline{Y}), \tag{3.21}$$

olduğu görülür. (3.14) ve (3.8) göz önüne alınırsa, (3.21) denklemi

$$\begin{aligned}&-(n-1)\overline{g}(\overline{Y},\phi\overline{X})+S(\phi\overline{X},\overline{Y})=(n-1)\left[\overline{A}(\overline{X})+\overline{B}(\overline{X})\right]\eta(\overline{Y})\\&+(n-1)\overline{A}(\overline{Y})\eta(\overline{X})+\overline{A}(\xi)S(\overline{X},\overline{Y})\end{aligned} \tag{3.22}$$

şeklinde de yazılabilir. (3.22)'da $\overline{X}=\xi$ seçilip (3.1) eşitliği kullanılırsa

$$(n-1)\left[2\overline{A}(\xi)\eta(\overline{Y})+\overline{A}(\overline{Y})+\overline{B}(\xi)\eta(\overline{Y})\right]=0 \tag{3.23}$$

bulunur. Şimdi, (3.23)'de $\overline{Y} = \overline{\xi}$ alınırsa

$$(n-1)\left[3\overline{A}(\overline{\xi}) + \overline{B}(\overline{\xi})\right] = 0$$

olur. $n \geq 3$ olduğundan, yukarıdaki denklemden

$$3\overline{A}(\overline{\xi}) + \overline{B}(\overline{\xi}) = 0 \tag{3.24}$$

olduğu görülür. Tekrardan, (3.22)'da $\overline{Y} = \overline{\xi}$ alınırsa ve (3.5), (3.6) ve (3.8) kullanılırsa,

$$(n-1)\left[\overline{A}(\overline{X}) + \overline{B}(\overline{X}) + 2\overline{A}(\overline{\xi})\overline{\eta}(\overline{X})\right] = 0, \tag{3.25}$$

bulunur. (3.23)'de $\overline{Y}$ yerine $\overline{X}$ yazılıp elden edilen denklem (3.25) ifadesi ile toplandığında (3.24) ifadesi göz önünde bulundurulursa,

$$(n-1)\left[\overline{A}(\overline{\xi})\overline{\eta}(\overline{X}) + 2\overline{A}(\overline{X}) + \overline{B}(\overline{X})\right] = 0, \tag{3.26}$$

olduğu sonucuna varılır. Yine, (3.11)'de $\overline{Y}$ yerine $\overline{X}$ yazılıp elden edilen denklem (3.14) ifadesi ile toplandığında (3.23) ifadesi göz önünde bulundurulursa, her $\overline{X}$ için

$$(n-1)\left[3\overline{A}(\overline{X}) + \overline{B}(\overline{X})\right] = 0, \tag{3.27}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Eğer özel olarak $\overline{A} = \overline{B}$ ise, bu durumda manifold pseudo Ricci simetrik manifolda dönüşür. (3.15)'ten $\overline{A} = 0$ bulunur. Bu ise pseudo Ricci simetrik manifoldun tanımı ile çelişir. Dolayısıyla aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.2.2. Düzgün pseudo Ricci simetrik singüler Sasaki manifoldu yoktur.

Teorem 3.2.3. Eğer $3\overline{A} + \overline{B}$ ifadesi her yerde sıfır olmuyorsa, bu durumda, hemen hemen pseudo ϕ-simetrik singüler Sasaki manifoldu yoktur.

İspat. (2.10) ve (3.3) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned}
&-(\overline{\nabla}_X \overline{R})(\overline{W}, \overline{Y})\overline{Z} + \overline{\eta}((\overline{\nabla}_X \overline{R})(\overline{W}, \overline{Y})\overline{Z})\overline{\xi} \\
&= \left[\overline{A}(\overline{X}) + \overline{B}(\overline{X})\right]\overline{R}(\overline{W}, \overline{Y})\overline{Z} + \overline{A}(\overline{W})\overline{R}(\overline{X}, \overline{Y})\overline{Z} \\
&+ \overline{A}(\overline{Y})\overline{R}(\overline{W}, \overline{X})\overline{Z} + \overline{A}(\overline{Z})\overline{R}(\overline{W}, \overline{Y})\overline{X} + \overline{g}(\overline{R}(\overline{W}, \overline{Y})\overline{Z}, \overline{X})\overline{P}
\end{aligned} \tag{3.28}$$

ifadesi bulunur. (3.28) ifadesinde $\overline{W} = e_i$ seçilip, her iki tarafından da e_i ile iç çarpım yapılıp, i üzerinden toplam alındığında, (3.5) eşitliği ve R'nin simetri ve yarı-simetri özellikleri göz önüne alındığında,

$$
\begin{aligned}
&-\left(\overline{\nabla}_X \overline{S}\right)\left(\overline{Y},\overline{Z}\right)+\sum_{i=1}^{n}\overline{\eta}\left(\left(\overline{\nabla}_X \overline{R}\right)\left(e_i,\overline{Y}\right)\overline{Z}\right)\overline{\eta}\left(e_i\right)\\
&=\left[\overline{A}\left(\overline{X}\right)+\overline{B}\left(\overline{X}\right)\right]\overline{S}\left(\overline{Y},\overline{Z}\right)+\overline{A}\left(\overline{R}\left(\overline{X},\overline{Y}\right)\overline{Z}\right)\\
&+\overline{A}\left(\overline{Y}\right)\overline{S}\left(\overline{X},\overline{Z}\right)+\overline{A}\left(\overline{Z}\right)\overline{S}\left(\overline{Y},\overline{X}\right)+\overline{A}\left(\overline{R}\left(\overline{X},\overline{Z}\right)\overline{Y}\right),
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

ifadesine ulaşılır. Eğer (3.29)'da $\overline{Z}=\overline{\xi}$ alınırsa, (3.29)'un ikinci terimi sıfır olur. Yine (3.29)'da $\overline{Z}=\overline{\xi}$ seçilip, (3.8) ve (3.14) kullanıldığında, ikinci terimin sıfır olması da hesaba katılırsa,

$$
\begin{aligned}
&(n-1)\overline{g}\left(\overline{Y},\overline{\phi}\overline{X}\right)-\overline{S}\left(\overline{\phi}\overline{X},\overline{Y}\right)\\
&=(n-1)\left[\overline{A}\left(\overline{X}\right)+\overline{B}\left(\overline{X}\right)\right]\overline{\eta}\left(\overline{Y}\right)\\
&+\overline{A}\left(\overline{R}\left(\overline{X},\overline{Y}\right)\overline{\xi}\right)+(n-1)\overline{A}\left(\overline{Y}\right)\overline{\eta}\left(\overline{X}\right)\\
&+\overline{A}\left(\overline{\xi}\right)\overline{S}\left(\overline{Y},\overline{X}\right)+\overline{A}\left(\overline{R}\left(\overline{X},\overline{\xi}\right)\overline{Y}\right)
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

eşitliği elde edilir. Şimdi, (3.30)'da $\overline{Y}=\overline{\xi}$ alınıp, (3.2), (3.8) ve (3.10) kullanılırsa, (3.30)'dan (3.17) ve son olarak (3.20) elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

3.3. ÖRNEK

Bu bölümde, daha önce yapılan çalışmalara ışık tutması açısından bazı singüler yarı Riemann hemen hemen değme manifoldların varlığına dair bir örnek verilecektir.

R^{2n+1} üzerinde tanımlı standart yarı Riemann (φ,ξ,η,g) Sasaki yapısında değişiklik yapılacaktır. Eğer R^{2n+1}'in kartezyen koordinatları (x_i,y_i,z) şeklinde tanımlanırsa, bu durumda $\varepsilon=\pm 1$ olmak üzere, g yarı Riemann metriği

$$
g=\varepsilon\eta\otimes\eta+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\left(dx_i\otimes dx_i+dy_i\otimes dy_i\right)
$$

şeklinde verilebilir. Reeb veya karakteristik vektör alanı ξ, ve Darboux formu η sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$
\xi=2\frac{\partial}{\partial z},\qquad \eta=\frac{1}{2}\left(dz-\sum_{i=1}^{n}y_i dx_i\right).
$$

Buradan, $\eta(\xi)=1$ ve $g(\xi,\xi)=\varepsilon$ olduğu görülür ve böylece ε, ξ vektör alanının standart karakterini belirler, yani eğer $\varepsilon=1$ ise ξ spacelike, $\varepsilon=-1$ ise ξ timelike olur.

Eğer $i=1,\ldots,n$ için

$$E_i = 2\frac{\partial}{\partial y_i}, \qquad E_{n+i} = 2\left(\frac{\partial}{\partial x_i} + y_i\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

seçilirse, bu durumda φ hemen hemen değme yapısı

$$\varphi E_i = E_{n+i}, \quad \varphi E_{n+i} = -E_i \quad \text{ve} \quad \varphi\xi = 0$$

şeklinde alınarak belirlenir. Ayrıca, $\{E_i, E_{n+i}, \xi\}$ ortonormal bazı φ-baz olarak adlandırılır. E_i ve E_{n+i} spacelike vektör alanları iken, ξ ε bağlı olarak spacelike veya timelike olabilir.

Şimdi hesapların daha kolay olması için $n=1$ alınarak 3 boyutta çalışılacaktır. R^3'ün kartezyen koordinatları (x,y,z) olsun ve

$$\eta = \frac{1}{2}(dz - ydx), \quad g = \varepsilon\eta\otimes\eta + \frac{1}{4}(dx\otimes dx + dy\otimes dy),$$

$$E_1 = 2\frac{\partial}{\partial y}, \quad E_2 = 2\left(\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial}\right), \quad \xi = 2\frac{\partial}{\partial z},$$

olarak alınsın. Bu durumda,

$$[E_1, E_2] = 2\xi, \quad [E_1, \xi] = 0, \quad [E_2, \xi] = 0,$$

olduğu görülür. (R^3, g)'nin, ξ'nin standart karakteristiğine bağlı olarak, $(0,0,3)$ veya $(0,1,2)$ tipinde yarı Riemann bir manifold olduğu açıktır. Şimdi g metriği üzerinde aşağıdaki iki farklı şekilde değişiklik yapılacaktır.

Durum 1: Eğer $g = \varepsilon\eta\otimes\eta$ şeklinde alınırsa, bu durumda E_1, E_2 null vektör alanları olur ve $N_g = span\{E_1, E_2\}$ olduğu elde edilir. Bu durumda, (R^3, g) eğer ξ timelike ($\varepsilon = -1$) ise $(2,1,0)$ tipinde, eğer ξ spacelike ($\varepsilon = 1$) ise $(2,0,1)$ tipinde yarı Riemann bir manifold olur.

Durum 2: Eğer $g = \frac{1}{4}(dx\otimes dx + dy\otimes dy)$ şeklinde alınırsa, bu durumda ξ null vektör olur ve $N_g = span\{\xi\}$ olduğu elde edilir. Bu durumda, (R^3, g) $(1,0,2)$ tipinde yarı Riemann bir manifolddur.

Her iki durumda da, metrik dejenere yapılabilmektedir. Şimdi bu manifoldun durağan olup olmadığı kontrol edilecektir.

$[E_1, E_2] = 2\xi$, $[E_1, \xi] = 0$, $[E_2, \xi] = 0$, olduğundan $span\{E_1, E_2\}$ integrallenebilir değildir. Bu ise Durum 1'in durağan olmadığı anlamına gelir. Durum 2 göz önüne alınsın. f, R^3 üzerinde diferensiyellenebilir herhangi bir fonksiyon olmak üzere eğer $U = f\xi$ alınırsa, R^3 üzerindeki her X, Y vektör alanı için $(L_U g)(X, Y) = 0$ olduğu görülür. Böylece, bu durumda, (R^3, g) durağan olur ve burada bir Koszul türeve sahip olduğu görülür. $E_3 = \xi$ olmak üzere, her $i, j, k = 1, 2, 3$ için

$$g\left(D_{E_i} E_j, E_k\right) = 0$$

olduğu direk görülür.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Singüler (dejenere) metrikli manifoldların geometrisi üzerine literatürde çok az çalışma tespit edilmiştir. Bu doktora çalışması singüler (dejenere) değme manifoldlar ile ilgili olup bu çalışmada singüler (dejenere) manifoldların geometrik yapısını incelemek, eğrilik özelliklerini hesaplamak ve özel sınıfları üzerinde çalışmalar yapıp uygulanma alanı bulmak amaçlanmıştır. Bu nedenle çalışmakta olduğumuz konuları genişletmek, bu konulara uygulama alanı bulabilmek ve farklı yönleriyle ele almak adına bu tez çalışması literatürde önemli bir yere sahip olacaktır. Bununla birlikte yaptığımız çalışmalar sonucunda elde edilen singüler hemen hemen değme manifoldlar ve bir özel sınıfı olan singüler Sasakian Manifoldlar gelecekte yapılması planlanan çalışmalar için gerekli literatür bilgisi ve alt yapıya ulaşabilmek açısından bizlere ışık tutacaktır.

Sonuç olarak degenere değme manifoldlarının oluşumu bize çok geniş alanlarda çalışma imkanı sunacaktır. Bu oluşum degenere değme manifoldlarının özel sınıfları, degenere Sasakian manifoldlar, dejenere Kenmotsu manifoldlar ve bunların altmanifoldlarını incelemek açısından önemli bir nitelik taşımaktadır. Çünkü manifold teorisi birçok bilimsel disipline uygulanabilen bir alan olup özellikle singüler (dejenere) manifoldların varlığı günümüzde çok önemli sonuçları doğurmuştur. Diferansiyel geometride yapılan bu çalışmalar fizik, ekonomi, olasılık, mühendislik gibi birçok alanda ucu açık problemlerin ışığı haline gelecektir.

5. KAYNAKLAR

[1] Küpeli D. N., Degenerate manifolds geometry, *Dedicata*, 23(3) (**1987**) 259-290.

[2] Erkekoğlu F., Degenerate hermitian manifolds, *Mathematical Physics, Analysis and Geometry*,8 (**2005**) 361-387.

[3] Sasaki S., On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure, *Tohoku Math. J.*, 2 (**1960**) 459-476.

[4] Blair D. E., *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds*, Birkhauser, **(2010).**

[5] Calvaruso G., Perrone D., Contact pseudo-metric manifolds, *Differential Geom. Appl.*, 28 **(2010)** 615-634.

[6] Küpeli D.N., *Singular semi-Riemannian Geometry*, Kluwer academic Publisher, **(1996).**

[7] O'Neill B., *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, **(1971).**

[8] Nomizu K., *Fundamentals of Linear Algebra*, McGraw Hill, **(1966).**

[9] Graves L., Nomizu K., On sectional curvature of indefinite metrics, *Math. Ann.*, 232 **(1978)** 267-272.

[10] Garcia-Rio E., Küpeli D. N., Null and infinitesimal isotropy in Semi-Riemannian geometry, *J. Geom. Phys.*, 13 **(1994)** 207-222.

[11] Hawkings S. W., Ellis G. F. R., *The Large Scale Structure of Spacetime*, Cambridge University Press, **(1973).**

[12] Chaki M. C., On pseudo symmetric manifolds, *Analele Stiint, Univ. Al-I. Cuza*, 33 **(1987)** 53-58.

[13] Chaki M. C., On pseudo Ricci symmetric manifolds, *Bulg. J. Phys.*, 15 **(1988)** 526–531.

[14] Chaki M. C., Kawaguchi T., On almost pseudo Ricci symmetric manifolds, *Tensor (N.S.)*, 68 **(2007)** 10–14.

[15] De U. C., Gazi A. K., On almost pseudo symmetric manifolds, *Ann. Univ. Sci.*

Budapest. Sec. Math., 51 **(2008)** 53-68.

[16] Takahashi T., Sasakian ϕ-symmetric spaces, *Tohoku Math. J.*, 29 **(1977)** 91–113.

[17] Tamassy L., Binh T. Q., On weak symmetries of Einstein and Sasakian manifolds, *Tensor (N.S.)*, 53 **(1993)** 140–148.

[18] Yano K., Kon M., *Structures On Manifolds*, World Scientific, **(1984).**

[19] Hoffman K., Kunze R., *Linear Algebra*, Prentice-Hall, **(1971).**

[20] Kobayashi S., Nomizu K., *Foumdation of Differential Geometry Volum 1*, Interscience Publishers, **(1963).**

[18] Yano K., Kon M., *Structures On Manifolds*, World Scientific, **(1984).**

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: Gülhan AYAR
Uyruğu	: T.C
Doğum tarihi ve yeri	: 07.12.1985/ DÜZCE
Telefon	: 0535 350 79 60
Faks	:
E-posta	: gulhanayar@gmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Yüksek Lisans	Düzce Üniversitesi	2012
Lisans	Ondokuz Mayıs Üniversitesi	2010
Lise	Düzce Arsal Anadolu Lisesi	2003

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2011-2011	Düzce Kaynaşlı M.Y.O	Öğretim Elemanı

Yabancı Dil

İngilizce (ÜDS/KPDS/TOEFL : (63.75)

Yayınlar

1. Nesip Aktan, Gülhan Ayar and İmren Bektaş, A schur Type Theorem For Almost Cosymplectıc Manifolds With Kaehlerian Leaves, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, Volume 42 (4) (2013), 455 – 463.

2. Gülhan Ayar, Mustafa Yıldırım and Nesip Aktan, A schur Type Theorem For Almost $\alpha -$Cosymplectıc Manifolds With Kaehlerian Leaves, Konuralp Journal of Mathematics, Volume 4 (1) (2016), 211 – 224.

3. Nesip Aktan, İmren Bektaş and Gülhan Ayar, Almost cosymplectic (κ,μ)-spaces satisfying some curvature conditions , International Congress in Honour of Professor Hari M. Srivastava Auditorium, Campus of Uludag University, Bursa-Turkey, August 23-26, 2012.

4. Nesip Aktan, Gülhan Ayar and İmren Bektaş, A Schur Type Theorem for Almost Cosimplectic Manifolds, 7. Ankara Mathematic Days, Bilkent University, 31 May- 1 June 2012, Ankara.

5. Nesip Aktan, İmren Bektaş ve Gülhan Ayar , A Schur Type Theorem for Almost Kenmotsu Manifolds, 8. Ankara Mathematic Days, Bilkent University, 4-7 June 2013, Ankara.

6. Nesip Aktan, Gülhan Ayar and İmren Bektaş, Almost Cosymplectic Manifolds of Constant -Sectional Curvature , X. Geometry Symposium . Balıkesir University, 4-7 June 2012, Balıkesir.

7. Nesip Aktan, İmren Bektaş and Gülhan Ayar, Ordu University , A Theorem of Schur Type for Almost Kenmotsu Manifolds with Kaehlerian Leaves ,XI. Geometry Symposium, 1-5 July 2013, Ordu.

8. Gülhan Ayar, Galatasaray University, Conference on Geometry , 19-23 March 2014, İstanbul, Turkey.

9. Nesip Aktan, Gülhan Ayar and İmren Bektaş, A Schur Type Theorem for almost Alpha-Cosimplectic Manifolds with Kaehlerian Leaves, XVIII Geometrical Seminar, Vrnjačka Banja, Serbia, May 25-28, 2014.

10. Gülhan Ayar , Alfonso Carriazo, Nesip Aktan ,XI Encuentro Andaluz de Geometría ,Singular semi-Riemannian almost Contact Manifolds, May 15, 2015 Seville, Spain.