T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI DİZİ UZAYLARI ÜZERİNDE İDEAL YAKINSAKLIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mahmut DAŞTAN

EYLÜL 2016

DÜZCE

KABUL VE ONAY BELGESİ

Mahmut DAŞTAN tarafından hazırlanan Bazı Dizi Uzayları Üzerinde İdeal Yakınsaklık isimli lisansüstü tez çalışması, Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 24.08.2016 tarih ve 2016/664... sayılı kararı ile oluşturulan jüri tarafından ...Matematik.... Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans olarak kabul edilmiştir.

Üye
(Tez Danışmanı)
Doç. Dr. Emrah Evren KARA
Düzce Üniversitesi

Üye
Doç. Dr. Murat KİRİŞCİ
İstanbul Üniversitesi

Üye
Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Düzce Üniversitesi

Tezin Savunulduğu Tarih : 23.09.2016

ONAY

Bu tez ile Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Mahmut DAŞTAN'ın Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans derecesini almasını onamıştır.

Doç. Dr. Resul KARA
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

23 Eylül 2016

Mahmut DAŞTAN

Sevgili Eşime ve Aileme

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim ve bu tezin hazırlanmasında süresince gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Doç.Dr. Emrah Evren KARA'ya en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Tez çalışmam boyunca değerli katkılarını esirgemeyen Arş.Gör. Merve İLKHAN'a da şükranlarımı sunarım.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

23 Eylül 2016 **Mahmut DAŞTAN**

İÇİNDEKİLER **Sayfa**

SİMGELER VE KISALTMALAR

inf	En büyük alt sınır
sup	En küçük üst sınır
st-lim x_k	(x_k) dizisinin istatistiksel limiti
bs	Sınırlı seri teşkil eden dizilerin uzayı
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
c_0	Sıfıra yakınsak dizilerin uzayı
c	Yakınsak dizilerin uzayı
cs	Yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı
ℓ_∞	Sınırlı dizilerin uzayı
ℓ_p	p. dereceden mutlak yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$x = (x_k)$	Reel sayı dizisi
$\delta(A)$	A kümesinin doğal yoğunluğu
$2^{\mathbb{N}}$	$\mathbb{N}$ nin tüm alt kümelerinin ailesi
$\mathcal{I}$	İdeal
N_θ	Lacunary yakınsak dizilerin uzayı
V_σ	σ-yakınsak dizilerin uzayı

ÖZET

BAZI DİZİ UZAYLARI ÜZERİNDE İDEAL YAKINSAKLIK

Mahmut DAŞTAN
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Doç. Dr. Emrah Evren KARA
Eylül 2016, 46 sayfa

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tez konusuyla ilgili kavramlar üzerinde yapılan çalışmalardan bahsedildi. İkinci bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan kavramların tanımları yapılarak ideal yakınsaklık kavramı, Orlicz fonksiyonu, lacunary dizisi kavramları üzerinde durulmuştur. Üçüncü bölümde ideal yakınsak ve ideal sınırlı dizi uzayları ile genel bir sonsuz üçgensel matris, Orlicz fonksiyonu kavramları bir araya getirilerek yeni dizi uzayları tanımlanmıştır. Daha sonra bu dizi uzayları üzerinde çeşitli kapsama bağıntılarının sağlandığı ispat edilmiştir. Dördüncü bölümde ise bir önceki bölümde oluşturulan dizi uzaylarına lacunary dizilerini de ekleyerek farklı dizi uzayları tanımlanmıştır. Bu tanımlarda belirtilen dizi uzaylarının da önceki bölümde oluşturulan dizi uzayları üzerinde yapılan çalışmaları sağladığı gözlemlenmiştir.

Anahtar sözcükler: İdeal yakınsaklık, ideal sınırlı dizi, sonsuz matris, Orlicz fonksiyonu, lacunary dizisi

ABSTRACT

IDEAL CONVERGENCE ON SOME SEQUENCE SPACES

Mahmut DAŞTAN
Duzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Mathematics,
Master of Science Thesis
Supervisor: Associated Prof. Emrah Evren KARA
September 2016, 46 pages

This research consist of four chapter. In the first chapter, the resarches, which are conducted on the consepts about the thesis, have been mentioned. In the second chapter, Ideal convergence, Orlicz function, lacunary sequence consepts are discoursed by defining the consepts which which will be used in later sections. In the third chapter, the new sequence space have been defined by gathering ideal convergence and ideal bounded sequence space with general an triangular infinite matrix and Orlicz function consepts. Afterwards, it has been proved that various inclusion relations are provided about these sequence spaces. In the four chapter, different sequence spaces have been defined by adding also the lacunary sequences which was created in the third section. It is going to be observed that these sequence spaces which are stated on consepts are cross checked the studies about sequence spaces which are created in previous chapter.

Keywords: Ideal convergence, ideal bounded sequence, infinite matrix, Orlicz function, lacunary function.

EXTENDED ABSTRACT

IDEAL CONVERGENCE ON SOME SEQUENCE SPACES

Mahmut DAŞTAN
Duzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Mathematics,
Master of Science Thesis
Supervisor: Associated Prof. Emrah Evren KARA
September 2016, 46 pages

1.INTRODUCTION:

Developments on convergence consept have taken many researchers attention. Ideal convergence which is genaral aspect of this consept is mentioned by many enquiries. The enquiries about statical convergence consept has been carried too far. The consept of ideal convergence has been identified and enquiries have been condusted on this consept.

This research consist of four chapter. In the first chapter, introduction is made. In the second chapter, Ideal convergence, Orlicz function, lacunary sequence consepts are discoursed by defining the consepts which are necessary for all our research. In the third chapter, a new space sequence has been created by gathering ideal convergence consept and ideal bounded sequence space with infinite matrix and Orlicz function consepts. Afterwards, it has been proved that various features are provided about sequence spaces. In the four chapter, different sequence spaces has been defined by adding also the lacunary sequences. It is going to be observed that these sequence spaces which are stated on consepts are cross checked the studies about sequence spaces which are created in previous chapter.

2. MATERIAL AND METHODS:

Firstly, we make widely know some new sequence space by defined ideal convergence of Orlicz function and infinite matrix. We studied what type of features related to these new sequence spaces were resarched by writers. We prove also some inclusion relations related to these sequence spaces.

3. RESULTS AND DISCUSSIONS:

In the third chapter, $\mathcal{I}-{c_0}^{\sigma}(M,A,p)$, $\mathcal{I}-c^{\sigma}(M,A,p)$, $\mathcal{I}-{\ell_\infty}^{\sigma}(M,A,p)$ sequence spaces have been defined by gathering ideal convergence consept and ideal bounded sequence space with infinite matrix and Orlicz function consepts

In the four chapter, $\mathcal{I}-N_{\theta,\sigma}^{0}(M,A,p)$, $\mathcal{I}-N_{\theta,\sigma}(M,A,p)$, $\mathcal{I}-N_{\theta,\sigma}^{\infty}(M,A,p)$ sequence spaces have been defined by adding also the lacunary sequences.

Afterwards, We prove some inclusion relations related to these sequence spaces.

4. CONCLUSION AND OUTLOOK:

The notion of ideal convergence has been investigated by several researchers. The original purpose of this resarch, we have defined new sequence spaces by combining an ideal convergence, Orlicz function, infinite matrix and lacunary sequence. The researcher will add the results used in thesis for further investigations ideal convergence.

1.GİRİŞ

Geçmişten günümüze yakınsaklık kavramı üzerine birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalar neticesinde yakınsaklık kavramının farklı tanımları ortaya çıkmıştır. Yakınsaklık kavramının genel hali olan ve pozitif tam sayıların doğal yoğunluğu olarak belirtilen İstatistiksel yakınsaklık kavramı üzerinde durulacak olursa; Reel sayı dizileri için istatistiksel yakınsaklık tanımını ilk olarak H.Fast ve Schoenberg (1951) birbirinden bağımsız olarak yapmışlardır. Bunu daha genel olarak maksimal ideal için Bernstain (1969/1970) ve Katetov (1968) filtre yakınsaklığının dual halini de katarak çalışmalar yapmışlardır. Connor (1988,1989) yaptığı çalışmalarla istatistiksel yakınsaklığın fonksiyonel analizde önemli bir yeri olduğunu gösterdi. Bu çalışmalardan farklı olarak Maddox (1970), Šalát (1980), Fridy (1985), Rath ve Tripathy (1994), Nuray ve Ruckle (2000) gibi birçok araştırmacı İstatistiksel yakınsaklık üzerine çalışmalar yapmışlardır.

İstatistiksel yakınsaklık kavramı üzerinde yapılan çalışmalar daha da ileriye götürülerek istatistiksel yakınsaklık kavramının pozitif tamsayıların doğal yoğunluğuna temel oluşturması ile doğal yoğunluğu sıfır olan pozitif tamsayı kümelerinin ailesinin bir ideal olmasından esinlenerek daha genel bir kavram olan $\mathcal{I}$-yakınsaklık tanımlanmıştır.

$\mathcal{I}$-yakınsaklık kavramını ilk olarak Kostro (2000) tanımlamış ve bununla birlikte $\mathcal{I}^*$-yakınsaklık, $\mathcal{I}$-Cauchy ve $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizilerini tanımlayarak bunlar üzerinde çalışmalarına devam etmiştir. Demirci(2001) üst limit ve alt limit tanımlarını yaparak bazı teoremleri ispatlamıştır. Gürdal ve Dems birbirinden bağımsız olarak "Metrik uzayda bir dizinin $\mathcal{I}$-Cauchy olabilmesi için gerek ve yeter şart o dizinin $\mathcal{I}$-yakınsak olmasıdır." teoremini ispatlamışlardır (Gürdal,2004; Dems,2004).

Šalát ve diğerleri istatistiksel yakınsaklık üzerinde yapılan çalışmaları $\mathcal{I}$-yakınsaklık üzerinde de ele alarak bu sonuçların varlığını gözlemlemişlerdir(Šalát ve diğ.,2004). Gürdal, 2-normlu uzaylar üzerinde $\mathcal{I}$-yakınsaklık kavramı üzerinde çalışmalar yapmıştır (Gürdal,2006). Daha sonra Şahiner ve diğerleri 2-normlu uzaylarda çalışmalar yapmışlardır (Şahiner ve diğ. 2007). Gürdal ve Açık bu çalışmayı devam ettirerek 2-normlu uzaylarda $\mathcal{I}$-Cauchy dizilerini araştırmışlardır (Gürdal ve Açık, 2008). Gürdal ve Şahiner, $\mathcal{I}$-sınırlı dizi, $\mathcal{I}$-alt limit ve $\mathcal{I}$-üst limit kavramlarını vermişlerdir (Gürdal ve Şahiner, 2008). Ayrıca Gürdal ve Pehlivan 2-normlu uzaylarda istatistiksel yakınsaklık üzerinde çalışmalar yapmışlardır (Gürdal ve Pehlivan, 2008). Das, çift indisli dizilerde $\mathcal{I}$-yakınsaklık ile ilgili çalışmalarda bulunmuştur (Das, 2008). Bunu takip eden süreçte Savaş, 2-normlu uzaylarda ideal yakınsaklık ve Orlicz fonksiyonunu birleştirerek fark dizi uzaylarını ele almıştır (Savaş,2010).

Bu çalışmada kullanacak diğer bir kavram olan Orlicz fonksiyonu, ilk defa 1951'de Orlicz tarafından tanımlanmıştır. Lindenstrauss ve Tzafiri bu fonksiyonu kullanarak yeni bir dizi uzayı oluşturmuşlardır (Lindenstrauss ve Tzafiri, 1971).Yakın zamanlarda Bilgin(2003), Esi(2004), Savaş(2004) ve diğer araştırmacılar, çalışmalarında Orlicz fonksiyonunu kullanmışlardır.

Lacunary kuvvetli yakınsak dizilerin uzayı ise ilk kez Freedman ve diğerleri tarafından tanımlanmıştır (Freedman ve diğ.,1978). Savaş Invariant yakınsaklık kavramı ile lacunary dizisini birleştirerek yeni bir dizi uzayı oluşturmuştur (Savaş,1989).

Bu tez çalışmasında yapılmış olan bu çalışmaların devamı olarak yeni dizi uzayları tanımlanacaktır. $\mathcal{I}$ -yakınsak ve $\mathcal{I}$-sınırlı dizi uzayları üzerinde genel bir sonsuz üçgensel matris kullanarak yeni dizi uzayları oluşturulacak ve bu uzayların bazı özellikleri incelenecektir.

2.TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde tez çalışması için gerekli olan tanımlara yer verilmiştir. Çalışma boyunca ω, kompleks değerli tüm dizilerin uzayını ve ℓ_∞ ise tüm sınırlı dizilerin uzayını gösterecektir. Ayrıca, $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{C}$ sırasıyla doğal sayılar ve kompleks sayılar kümesidir ve $e = (1,1,1,\dots)$ olarak kabul edilecektir.

Tanım 2.1: L boş olmayan bir küme ve F reel veya kompleks sayılar cismi olsun.
Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L ye F üzerinde lineer uzay (veya vektör uzayı) denir.
L, $+$ işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,

- **i)** Her $x, y \in L$ için $x + y \in L$ (kapalılık özelliği)
- **ii)** Her $x, y, z \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ (birleşme özelliği)
- **iii)** Her $x \in L$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır (özdeş eleman varlığı)
- **iv)** Her $x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır (ters elemanın varlığı)
- **v)** Her $x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir (değişme özelliği)

$x, y \in L$ ve $\alpha, \beta \in$ F olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

- **i)** $\alpha x \in L$ (skalerle çarpmaya göre kapalılık)
- **ii)** $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$
- **iii)** $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$
- **iv)** $(\alpha\beta).x = \alpha.(\beta.x)$
- **v)** $1.x = 1$ (Burada 1, F nin birim elemanıdır.) (Bayraktar M.2006).

Tanım 2.2: Tanım kümesi $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olan fonksiyona dizi denir. Diziler değer kümelerine göre çeşitli adlar alırlar. Eğer dizinin değer kümesi $\mathbb{R}$ reel sayılar ise diziye reel terimli dizi, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi ise diziye rasyonel terimli dizi denir (Balcı M. 1999).

Tanım 2.3: $\varepsilon > 0$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun.

$$K = \{x: |x - a| < \varepsilon, x \in \mathbb{R}\}$$

kümesine a nın ε-komşuluğu denir (Balcı M. 1999).

Tanım 2.4: $x = (x_n)$ bir reel sayı dizisi ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n > n_0$ olduğunda

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

olacak biçimde ε a bağlı bir n_0 sayısı bulunabiliyorsa $x = (x_n)$ dizisi $a \in \mathbb{R}$ noktasına yakınsaktır denir ve, $\lim_n x_n = a$ veya $(x_n) \to a$ ile gösterilir (Balcı M. 1999).

Tanım 2.5: Her $n \in \mathbb{N}$ için (x_n) reel terimli bir dizi olsun. Eğer $|x_n| < M$ olacak şekilde bir M pozitif reel sayısı varsa (x_n) dizisine sınırlı dizi denir (Balcı M. 1999).

Tanım 2.6: (x_{n_k}), (x_n) dizisinin alt dizisi olsun. (x_{n_k}) yakınsak ve limiti a ise bu a noktasına (x_n) dizisinin limit noktası denir (Balcı M. 1999).

Tanım 2.7: Boş olmayan bir X kümesi ile $\rho: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin ve her $x, y, z \in X$ için aşağıdaki özellikler sağlansın.

i) $\rho(x, y) \geq 0$
ii) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
iii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (simetri özelliği)
iv) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (üçgen eşitsizliği).

Bu durumda ρ fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir metrik, (X, ρ) ikilisine de bir metrik uzay denir **(**Kreyszig,1989).

Tanım 2.8: $\mathrm{F} = \mathbb{R}$ veya $\mathrm{F} = \mathbb{C}$ olmak üzere,

$$\omega = \{x = (x_k) \in \omega: x: \mathbb{N} \to \mathrm{F}, k \to x_k = (x_k)\}$$

kümesine bütün dizilerin kümesi denir. ω kümesi,

$$\big((x_k), (y_k)\big) \to (x_k + y_k) \text{ ve } \big(\lambda, (x_k)\big) \to (\lambda x_k)$$

ikili işlemleri F üzerinde bir vektör uzayıdır. ω nin herhangi bir alt vektör uzayına bir dizi uzayı denir. ω nin bazı önemli özel alt kümeleri aşağıdaki şekilde sıralanabilir.

$c_0 = \{x = (x_k) \in \omega: \lim_k x_k = 0\}$, (Sıfıra yakınsak dizilerin uzayı)

$c = \{x = (x_k) \in \omega: \lim_k x_k = l, l \in \mathrm{F}\}$, (Yakınsak dizilerin uzayı)

$\ell_\infty = \{x = (x_k) \in \omega: \sup_k |x_k| < \infty\}$, (Sınırlı dizilerin uzayı)

$cs = \{x = (x_k) \in \omega: (\sum_{k=1}^{n} x_k) \in c, n \in \mathbb{N}\}$, (Yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı)

$bs = \{x = (x_k) \in \omega \colon (\sum_{k=1}^{n} x_k) \in \ell_\infty, n \in \mathbb{N}\}$, (Sınırlı seri teşkil eden dizilerin uzayı)

ve p. dereceden mutlak yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı

$\ell_p = \{x = (x_k) \in \omega \colon \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p < \infty, 0 \leq p < \infty\}$ ile gösterilir.

Önerme 2.9: $p = (p_k)$, pozitif reel sayıların bir dizisi ve

$$0 < \inf_k p_k = h \leq \sup_k p_k = H < \infty$$

olsun. Bu taktirde $D = max\{1, 2^{H-1}\}$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $a_k, b_k \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$|a_k + b_k|^{p_k} \leq D\{|a_k|^{p_k} + |b_k|^{p_k}\}$$

eşitsizliği sağlanır (Maddox, 1970).

Tanım 2.10: X bir dizi uzayı olsun.

Bu durumda, eğer

$\{(u_k) \in \omega \colon \exists (x_k), \forall k \in \mathbb{N}$ için $|u_k| \leq |x_k|\} \subseteq X$ oluyorsa X dizi uzayına solid dizi uzayı denir (Boss, 2000).

Tanım 2.11: E bir dizi uzayı ve $K = \{k_1 < k_2 < \cdots\} \subseteq \mathbb{N}$ olsun. E nin K-step uzayı λ_K^E dizi uzayı, $\lambda_K^E = \{(x_{k_n}) \in \omega \colon x_n \in E\}$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.12: Bir $(x_{k_n}) \in \lambda_K^E$ dizi uzayının kanonik ön görüntüsü $(y_k) \in \omega$ olmak üzere,

$$y_k = \begin{cases} x_k, & k \in K \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $(y_k) \in \omega$ dizisidir.

Tanım 2.13: E dizi uzayının monoton olması için gerek ve yeter şart kanonik ön görüntüsünün step uzay olmasıdır.

Tanım 2.14: $K \subset \mathbb{N}$ ve $K_n = \{k \leq n \colon k \in K\}$ cümlesini alalım.

$|K| = cardK$ (K kümesinin kardinalitesi) olmak üzere

$$\underline{\delta}(\mathrm{K}) = \liminf_n \frac{|K_n|}{n}$$

ve

$$\overline{\delta}(\mathrm{K}) = \limsup_n \frac{|K_n|}{n}$$

limitlerine sırasıyla Kcümlesinin alt ve üst yoğunlukları denir.

$\underline{\delta}(\mathrm{K}) = \overline{\delta}(\mathrm{K})$ ise $(\frac{|K_n|}{n})$ dizisinin limiti mevcuttur. Bu limit $\delta(\mathrm{K})$ ile gösterilir ve bu limite K cümlesinin doğal yoğunluğu denir. $K \subset \mathbb{N}$ kümesinin doğal yoğunluğu

$$\delta(\mathrm{K}) = \lim_n \frac{|K_n|}{n} = \lim_n \frac{1}{n}\{\{k \le n:\ k \in K\}\}$$

ile gösterilir (Niven ve diğ.1991).

Tanım 2.15: Her $\varepsilon > 0$ için,

$$A = A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N}: |x_n - \xi| \ge \varepsilon\}$$

kümesinin yoğunluğu sıfır yani,

$$\lim_k \frac{1}{k} |\{n \in \mathbb{N}: |x_n - \xi| \ge \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_n)$ dizisi, $\xi \in \mathbb{R}$ sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $st\text{-}\lim x = \xi$ ile gösterilir (Steinhaus 1951).

Örnek 2.16:

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2, (m = 1,2, \dots) \\ 0, & k \ne m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini göz önüne alalım. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$|\{k \le n: |x_k| \ge \varepsilon\}| \le |\{k \le n: x_k \ne 0\}| \le \sqrt{n}$$

olduğundan,

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \le n: x_k \ne 0\}| \le \lim_n \frac{\sqrt{n}}{n}$$

elde edilir. Demek ki $\{k \in \mathbb{N}: |x_k - 0| \ge \varepsilon\}$ kümesinin elemanları hariç diğer bütün k lar için $|x_k - 0| < \varepsilon$ (Her $\varepsilon > 0$) olduğunda $\mathrm{st} - \lim x = 0$ dır (Demirci 1998).

Örnek 2.17:

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = m^2, (m = 1,2, \dots) \\ 1, & k \ne m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi için $\mathrm{st} - \lim x = 1$ dir (Demirci 1998).

Normal anlamda yakınsak olan tüm diziler istatistiksel yakınsaktır fakat bu iki örnekten de anlaşıldığı gibi istatistiksel yakınsak bir dizi yakınsak olmak zorunda değildir.

Tanım 2.18: X boş olmayan bir küme olsun. $\mathcal{I} \subset 2^X$sınıfı,

- **i)** $\emptyset \in \mathcal{I}$
- **ii)** $A, B \in \mathcal{I}$ ise $A \cup B \in \mathcal{I}$
- **iii)** $A \in \mathcal{I}$ ve $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$ ise $B \in \mathcal{I}$

şartlarını sağlarsa $\mathcal{I}$ ya X üzerinde bir idealdir, denir ve eğer $X \notin \mathcal{I}$ ise $\mathcal{I}$ ya bir gerçek (aşikar olmayan) ideal denir (Kostyrko ve diğ.2000).

Tanım 2.19: $X \ne \emptyset$olsun. $\mathcal{F} \subseteq 2^X$sınıfı,

- **i)** $\emptyset \notin \mathcal{F}$

ii) $A, B \in \mathcal{F}$ ise $A \cap B \in \mathcal{F}$

iii) $A \in \mathcal{F}$ ve $A \subseteq B$ ise $B \in \mathcal{F}$

şartlarını sağlarsa $\mathcal{F}$ ya X üzerinde bir filtre denir (Kostyrko ve diğ. 2000).

Tanım 2.20: X üzerinde $\mathcal{I}$ gerçek ideali her bir $x \in X$ için $\{x\} \in \mathcal{I}$ şartını sağlıyorsa, $\mathcal{I}$ ya bir uygun (admissible) ideal denir (Kostyrko ve diğ. 2000).

Önerme 2.21: $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ üzerinde bir uygun ideal olsun.

$$\mathcal{F}(\mathcal{I}) = \{M \subseteq \mathbb{N}: \exists A, M = \mathbb{N} \backslash A\}$$

ailesi $\mathbb{N}$ de $\mathcal{I}$ ideali ile ilgili filtredir (Kostyrko ve diğ. 2000).

Önerme 2.22: $\mathcal{I} \subseteq 2^X$ idealinin gerçek ideal olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{I}) = \{X \backslash A: A \in \mathcal{I}\}$ kümesinin X de bir filtre olmasıdır.

Örnek 2.23: $\mathbb{N}$ in tüm sonlu alt kümelerinin sınıfını $\mathcal{I}_f$ ile gösterelim. $\mathcal{I}_f$, $\mathbb{N}$ de bir uygun (admissible) idealdir. Çünkü

i) $\emptyset$ sonlu olduğundan $\emptyset \in \mathcal{I}_f$,

ii) $A, B \in \mathcal{I}_f \Longrightarrow A$ ve B sonlu kümelerdir. İki sonlu kümenin birleşimi yine sonlu küme olacağından $A \cup B$ sonlu olup $A \cup B \in \mathcal{I}_f$ dir.

iii) $A \in \mathcal{I}_f$ ve $B \subseteq A \Longrightarrow A$ sonlu bir küme ve sonlu bir kümenin alt kümeleri de sonlu olacağından $B \in \mathcal{I}_f$ dir.

$\mathbb{N}$ sayılabilir sonsuz olduğundan $\mathbb{N} \notin \mathcal{I}_f$dir. Bundan dolayı $\mathcal{I}_f$, $\mathbb{N}$ de bir gerçek (aşikâr olmayan) idealdir. Ayrıca $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\{n\}$ tek nokta kümesi sonlu bir küme olduğundan, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\{n\} \in \mathcal{I}_f$ olup $\mathcal{I}_f$, $\mathbb{N}$ de bir uygun (admissible) idealdir (Kostyrko ve diğ. 2000).

Tanım 2.24: $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ de bir gerçek (aşikar olmayan) ideal olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için, $A(\varepsilon) = \{n: |x_n - \xi| \geq \varepsilon\}$ kümesi $\mathcal{I}$ ya ait ise $x = (x_n)$ dizisi, $\xi \in \mathbb{R}$ sayısına $\mathcal{I}$-yakınsaktır denir ve $\mathcal{I}$-lim$x = \xi$ şeklinde gösterilir. $\xi \in \mathbb{R}$ sayısına da $x = (x_n)$ dizisinin $\mathcal{I}$-limiti denir (Kostyrko ve diğ. 2000).

Örnek 2.25: $\mathcal{I}_f$, $\mathbb{N}$ nin tüm sonlu alt kümelerinin ailesi olsun. $\mathcal{I}_f$-yakınsaklık klasik yakınsaklığın genelleştirilmişidir. $\mathcal{I}_f$ kapsamaya göre en küçük idealdir (Kostyrko ve diğ. 2000).

Örnek 2.26: $\mathcal{I}_\delta = \{A \subseteq \mathbb{N}: \delta(A) = 0\}$ kümesi $\mathbb{N}$ de bir uygun (admissible) idealdir. $\mathcal{I}_\delta$-yakınsaklık istatistiksel yakınsaklığın genelleştirilmişidir (Kostyrko ve diğ. 2000).

Örnek 2.27: $\mathcal{I}_u = \{A \subseteq \mathbb{N}: u(A) = 0\}$ kümesi $\mathbb{N}$ de bir uygun idealdir. $\mathcal{I}_u$-yakınsaklık düğün istatistiksel yakınsaklığın genelleştirilmişidir (Kostyrko ve diğ. 2000).

Klasik anlamda yakınsaklık kavramı için sağlanan bazı aksiyomlar $\mathcal{I}$-yakınsaklık içinde sağlanır.

i) Her $x = \{\xi. \xi, \xi, \dots, \xi, ..\}$ sabit dizisi ξ sayısına $\mathcal{I}$-yakınsaktır.

ii) Yakınsak dizilerin $\mathcal{I}$-limiti tektir. Yani, eğer; $\mathcal{I}$-lim$x = \xi$ ve $\mathcal{I}$-lim$x = \eta$ ise $\xi = \eta$ dir.

iii) Eğer $\mathcal{I}$-lim$x = \xi$ ise x in her y alt dizisi için $\mathcal{I}$-lim$y = \xi$ dir.

iv) Eğer x dizisinin her alt dizisi ξ ye $\mathcal{I}$-yakınsak bir z alt dizisine sahipse, x dizisi ξ ye $\mathcal{I}$-yakınsaktır (Kostyrko ve diğ., 2000).

Uyarı 2.28: Eğer bir $\mathcal{I}$ uygun (admissible) ideali sonsuz küme içermiyorsa, $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ nin bütün sonlu alt kümelerinin sınıfı ile çakışır ve $\mathcal{I}$-yakınsaklık $\mathbb{R}$ deki alışılmış yakınsaklığa denk olur. Bundan dolayı (iii) aksiyomu sağlanır (Kostyrko ve diğ., 2000).

Teorem 2.29: $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ üzerinde bir uygun (admissible) ideal olsun. Buradan,

a) $\mathcal{I}$-yakınsaklık (i),(ii),(iv) aksiyomlarını sağlar.

b) Eğer $\mathcal{I}$ sonsuz bir küme içeriyorsa $\mathcal{I}$-yakınsaklık (iii) aksiyomunu sağlamaz (Kostyrko ve diğ. 2000).

Teorem 2.30: $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ üzerinde bir gerçek (aşikar olmayan) ideal olsun.

i) Eğer $\mathcal{I}$-lim$x_n = \xi$ ve $\mathcal{I}$-lim$y_n = \eta$ ise $\mathcal{I}$-lim$(x_n + y_n) = \xi + \eta$

ii) Eğer $\mathcal{I}$-lim$x_n = \xi$ ve $\mathcal{I}$-lim$y_n = \eta$ ise $\mathcal{I}$-lim$(x_n . y_n) = \xi . \eta$

iii) Eğer $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ üzerinde bir uygun (admissible) ideal ise lim$x_n = \xi$ olması $\mathcal{I}$-lim$x_n = \xi$ olmasını ifade eder (Kostyrko ve diğ. 2000).

Tanım 2.31: $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ üzerinde bir uygun (admissible) ideal olsun.

$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N}: |x_n| > K\} \in \mathcal{I}$ olacak şekilde $K > 0$ sayısı mevcut ise $(x_n) \in X$ dizisine $\mathcal{I}$-sınırlıdır denir (Kostyrko ve diğ., 2005).

Tanım 2.32: X bir F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$\|.\|: X \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}, x \to \|x\|$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in$ F için

i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| . \|x\|$,

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde bir norm adını alır ve $(X, \|.\|)$ İkilisine bir normlu vektör uzayı adı verilir (Musayev B., Alp M.,2000).

Tanım 2.33: $(X, \|.\|)$ bir normlu uzay ve bu uzayda bir dizi $x = (x_n)$ olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $\forall k, l > k_0$ iken

$$\|x_k - x_l\| < \varepsilon$$

olacak şekilde $k_0 = k_0(\varepsilon)$ sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisine $(X, \|.\|)$ uzayında bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.34: $(X, \|.\|)$ normlu uzayı tam ise; yani bu uzayda alınan her Cauchy dizisi, uzayın bir noktasına yakınsıyorsa bu normlu uzaya Banach uzayı denir (Banach,1932).

Örnek 2.35: l_∞, c, c_0 dizi uzayları,

$$\|x\|_\infty = \sup_k |x_k|$$

normu ile birlikte birer Banach uzaylarıdır.

Tanım 2.36: $x = \{(x_k)\} \in c$ olsun. L lineer fonksiyonel, $\|L\| = 1$ ve $x \in c$ için x', $x' = (x_2, x_3, \dots)$ şeklinde tanımlandığında $L(x) = L(x')$ olsun.

Ayrıca $x \geq 0$ olduğundan $L(x) \geq 0$. Bu şartları sağlayan L ye Banach limiti denir ve $L(x) = \lim x$ şeklinde gösterilir (Conway, 1990).

Tanım 2.37: Bir $x = (x_k) \in l_\infty$ dizisi verilsin. Her L Banach limiti için $L(x) = s$ ise x dizisine hemen hemen yakınsak dizi ve s ye de x in f –limiti denir(Banach,1932).

Teorem 2.38: Bir x dizisinin bir s sayısına hemen hemen yakınsak olabilmesi için gerek ve yeter koşul n ye göre düzgün olarak

$$\lim_k d_{kn}(x) = \lim_k \frac{x_n + x_{n+1} + \cdots + x_{n+k}}{k+1} = s$$

olmasıdır. Hemen hemen yakınsak dizilerin sınıfı,

$$\hat{c} = \left\{ x \in \ell_\infty : \lim_k d_{kn}(x), n \text{ ye göre düzgün} \right\}$$

şeklindedir (Lorentz,1948).

Tanım 2.39: $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ her m, k pozitif tam sayıları için $\sigma^{\boldsymbol{m}}(k) \neq k$ olacak şekilde bir birebir dönüşüm olsun. $x = (x_k)$ olmak üzere sürekli bir $\phi: l_\infty \to \mathbb{R}$ lineer fonksiyoneli,

i) Her k için $x_k \geq 0$ iken $\phi(x_k) \geq 0$,

ii) Her $x \in \ell_\infty$ için $\phi(\{x_{\sigma(k)}\}) = \phi(x)$

iii) $e = (1,1,1, \dots)$ olmak üzere $\phi(e) = 1$

özelliklerini sağlarsa invaryant limit veya σ-limit adını alır. Özel olarak $\sigma(n) = n + 1$ alınırsa ϕ bir Banach limiti olur (Schaefer, 1972).

Tanım 2.39: İnvaryant limitleri eşit olan sınırlı bir diziye invaryant yakınsak veya σ-

yakınsak dizi denir. σ-yakınsak dizilerin kümesi V_σ ile gösterilir.

$$t_{kn}(x) = \frac{x_n + x_{\sigma^1(n)} + \cdots + x_{\sigma^k(n)}}{k+1}$$

olduğunda,

$$V_\sigma = \left\{ x \in l_\infty : \lim_k t_{kn}(x) = l, n \text{ ye göre düzgün}, l = \sigma - \lim x \right\}$$

olup $\sigma(n) = n + 1$ olması durumunda σ-limitleri, l_∞ üzerinde bir Banach limitidir ve V_σ kümesi de hemen hemen yakınsak dizlerin f kümesidir (Schaefer, 1972).

Tanım 2.40: λ ve μ iki dizi uzayı ve $A = (a_{nk})$ reel ya da kompleks sayıların sonsuz bir matrisi olsun. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $A_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k$ yakınsak ise $A(x) = (A_n(x))$ yazılır. Eğer $x = (x_k) \in \lambda$ iken $A(x) = (A_n(x)) \in \mu$ ise A ya λ dizi uzayından μ dizi uzayına bir matris dönüşümüdür denir ve $A: \lambda \to \mu$ olarak gösterilir. Ax dizisine de x in A-dönüşümü denir.

(λ, μ) ile $A: \lambda \to \mu$ şeklindeki bütün A matrislerinin kümesi gösterilecektir. (Nanda,1983)

Tanım 2.41: $x = (x_k)$ dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k = L$$

olacak şekilde L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına Cesàro toplanabilirdir denir (Volkov,2001).

Tanım 2.42: $x = (x_k)$ dizisi için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L| = 0$$

olacak şekilde L sayısına kuvvetli Cesàro toplanabilirdir denir (Freedman ve diğ.,1978).

Tanım 2.43: $x = (x_k)$ dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L|^p = 0$$

olacak şekilde L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına p-Cesàro toplanabilirdir denir (Connor,1988)

Tanım 2.44: $\theta = (k_r)$ pozitif sayıların $r \to \infty$ iken $h_r = k_r - k_{r-1} \to \infty$ şartını sağlayan artan bir dizi olsun. Bu durumda $\theta = (k_r)$ dizisine lacunary dizisi denir. θ tarafından belirlenen aralıklar $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ ve $\frac{k_r}{k_{r-1}}$ oranı q_r ile gösterilir. Herhangi bir $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi için,

$$\lim_{r\to\infty}\left(\frac{1}{h_r}\sum\nolimits_{k\in I_r}|x_k - L|\right) = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı var ise (x_k) dizisi L sayısına kuvvetli lacunary yakınsaktır denir ve kuvvetli lacunary yakınsak dizi uzayı,

$$N_\theta = \left\{x = (x_k): \lim_{r\to\infty}\left(\frac{1}{h_r}\sum\nolimits_{k\in I_r}|x_k - L|\right) \to 0, \text{en az bir } L \text{ için}\right\}$$

şeklinde tanımlanır (Freedman ve diğ.,1978).

Tanım 2.45: $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ üzerinde uygun ideal olsun. $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi ve $(x_k) \in X$ ve $\forall\varepsilon > 0$ için,

$$A\,(\varepsilon) = \left\{r \in \mathbb{N}: \frac{1}{h_r}\sum\nolimits_{k\in I_r}|x_k - \xi| \geq \varepsilon\right\} \in \mathcal{I}$$

ise $(x_k) \in X$ dizisi ξ sayısına lacunary $\mathcal{I}$-yakınsaktır denir. Bu ifade $\mathcal{I}_\theta - \lim_k x_k = \xi$ ile gösterilir (Choudhary ve diğ.,2012).

Örnek 2.46: $\theta = (k_r) = 2^r - 1$ dizisi bir lacunary dizisidir. Çünkü bu dizi için; $k_0 = 2^0 - 1 = 0$ ve $r \to \infty$ iken

$$h_r = k_r - k_{r-1} = (2^r - 1) - (2^{r-1} - 1) \to \infty$$

olur. Ayrıca $k_0 = 0,\ k_1 = 1, k_2 = 3, k_3 = 7, k_7 = 15,$ olduğundan, bu dizi negatif olmayan tam sayıların bir dizisidir (Ulusu,2013)

Tanım 2.47: $\forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ için,

$$M\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[M(u_1) + M(u_2)]$$

Eşitsizliğini sağlayan reel değerli M fonksiyonuna konveks fonksiyon denir (Krasnoelskii ve Rutitskii,1961).

Tanım 2.48: Aşağıdaki koşulları sağlayan $M: [0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonuna Orlicz fonksiyonu denir.

- **i)** $M(0) = 0,$
- **ii)** Her $x > 0$ için $M(x) > 0,$
- **iii)** M sürekli, azalmayan ve konvekstir.
- **iv)** $x \to \infty$ iken $M(x) \to \infty.$

$\eta(t)$ fonksiyonu azalmayan $t > 0$ için $\eta(t) > 0$ ve $\lim_{t\to\infty}\eta(t) \to \infty$ koşullarını sağlayan bir fonksiyon olmak üzere M Orlicz fonksiyonu her zaman

$$M(x) = \int_0^x \eta(t)\mathrm{dt}$$

temsil edilebilir. Buradaki $\eta(t)$ fonksiyonu M Orlicz fonksiyonunun çekirdeği olarak adlandırılır (Krasnoelskii ve Rutitskii,1961).

M konveks ve $M(0) = 0$ olduğundan $\forall\lambda \in (0,1)$ için $M(\lambda x) \leq \lambda M(x)$ eşitsizliği sağlanır.

Tanım 2.49: M bir Orlicz fonksiyonu, $\forall x \in [0,\infty)$ ve $K > 0$ olduğunda $M(2x) \leq KM(x)$ eşitsizliği sağlanıyorsa Δ_2-şartını sağlar ve $K > 2$ olduğu kolayca görülür. Ayrıca buna benzer bir durum $L > 1$ için $M(Lx) \leq KLM(x)$ sağlanır. (Krasnoelskii ve Rutitskii,1961).

Tanım 2.50: M bir Orlicz fonksiyonu olsun. Bir

$$\ell_m = \left\{x = (x_k) \in \omega: \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) < \infty, \rho > 0\right\}$$

uzayı $\|x\| = \left\{\rho > 0: \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) \leq 1\right\}$ normu ile birlikte bir Banach uzayıdır. Bu uzaya Orlicz dizi uzayı denir (Lindenstrauss ve Tzafriri, 1971).

Lemma 2.51: A, E üzerinde bir dizi uzayı solid ise monotondur (Kamthanand ,1980)

Lemma 2.52: Eğer $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ ve $M \subset \mathbb{N}$ için $M \notin \mathcal{I}$ olduğunda $M \cap K \notin \mathcal{I}$ (Kostyrko ve diğ., 2000).

3. ORLİZC FONKSİYONU İLE OLUŞTURULAN BAZI DİZİ UZAYLARI

Bu bölümde $\mathcal{I}$-yakınsak ve $\mathcal{I}$-sınırlı dizi uzayları üzerinde genel bir sonsuz üçgensel matris kullanarak yeni dizi uzayları tanımlanacak ve bu uzayların bazı özellikleri incelenecektir.

Tanım 3.1: $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ üzerinde bir uygun(admissible) ideal, M bir Orlicz fonksiyonu, A bir sonsuz matris ve $p = (p_k)$ pozitif reel sayıların bir dizisi olsun.

$\mathcal{I} - {c_0}^{\sigma}(M, A, p)$, $\mathcal{I} - c^{\sigma}(M, A, p)$, $\mathcal{I} - {\ell_\infty}^{\sigma}(M, A, p)$ dizi uzayları

$$\mathcal{I} - {c_0}^{\sigma}(M, A, p) = \left\{x \in \omega : \left\{k \in \mathbb{N} : \left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho}\right)\right]^{p_k} \geq \varepsilon\right\} \in \mathcal{I}, \forall\, \varepsilon > 0\,, \exists \rho > 0, \forall n \in \mathbb{N}\right\}$$

$$\mathcal{I} - c^{\sigma}(M, A, p) = \left\{x \in \omega : \left\{k \in \mathbb{N} : \left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax - le)|}{\rho}\right)\right]^{p_k} \geq \varepsilon\right\} \in \mathcal{I}, \forall\, \varepsilon > 0\,, \exists \rho > 0, \forall n \in \mathbb{N} \text{ ve } l \in \mathbb{C}\right\}$$

$$\mathcal{I} - {\ell_\infty}^{\sigma}(M, A, p) = \left\{x \in \omega : \exists K > 0, \left\{k \in \mathbb{N} : \left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho}\right)\right]^{p_k} \geq K\right\} \in \mathcal{I}, \forall\, \varepsilon > 0, \exists \rho > 0, \forall n \in \mathbb{N}\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.2 : $\mathcal{I} - {c_0}^{\sigma}(M, A, p), \mathcal{I} - c^{\sigma}(M, A, p), \mathcal{I} - {\ell_\infty}^{\sigma}(M, A, p)$ uzayları lineer uzaylardır.

İspat: $\mathcal{I} - {c_0}^{\sigma}(M, A, p)$ uzayının lineer uzay olması için gerekli şartların sağlayıp sağlanmadığına bakılacaktır. Diğer uzaylar içinde benzer yol izlenebilir.

$x, y \in \mathcal{I} - {c_0}^{\sigma}(M, A, p)$ ve $x \neq y$ olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı için, S_1 ve S_2 kümeleri

$$S_1 = \left\{k \in \mathbb{N} : \left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho_1}\right)\right]^{p_k} \geq \frac{\varepsilon}{2D}, n \in \mathbb{N}\right\} \in \mathcal{I}$$

ve

$$S_2 = \left\{k \in \mathbb{N} : \left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ay)|}{\rho_2}\right)\right]^{p_k} \geq \frac{\varepsilon}{2D}, n \in \mathbb{N}\right\} \in \mathcal{I}$$

şeklinde tanımlansın. Şimdi, $k_1 \in \mathbb{N} \backslash S_1 \cup S_2$ olsun. $\rho_1, \rho_2 > 0$ için M azalmayan ve konveks fonksiyon olup $\forall a, b \in \mathbb{C}$ için $\rho = \max\{2|a|\rho_1, 2|b|\rho_2\}$ olmak üzere

$$\left[M\left(\frac{\left|t_{kn}\big(A(ax+by)\big)\right|}{\rho}\right)\right]^{p_k} \leq \left[\left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho_1}\right)\right]+\left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ay)|}{\rho_2}\right)\right]\right]^{p_k}$$

$$\leq D\left\{\left[M\left(\frac{\left|t_{k_n}(Ax)\right|}{\rho_1}\right)\right]^{p_k}+\left[M\left(\frac{\left|t_{k_n}(Ay)\right|}{\rho_2}\right)\right]^{p_k}\right\}<\varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. O halde,

$$k_1 \in \left\{k \in \mathbb{N}: \left[M\left(\frac{\left|t_{kn}\big(A(ax+by)\big)\right|}{\rho}\right)\right]^{p_k} < \varepsilon, n \in \mathbb{N}\right\}$$

olur. Buradan,

$$\mathbb{N}\backslash S_1 \cup S_2 \subseteq \left\{k \in \mathbb{N}: \left[M\left(\frac{\left|t_{kn}\big(A(ax+by)\big)\right|}{\rho}\right)\right]^{p_k} < \varepsilon, n \in \mathbb{N}\right\}$$

bulunur. Buna göre,

$$\left\{k \in \mathbb{N}: \left[M\left(\frac{\left|t_{kn}\big(A(ax+by)\big)\right|}{\rho}\right)\right]^{p_k} \geq \varepsilon, n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq S_1 \cup S_2 \qquad (*)$$

olur. S_1 ve S_2 kümeleri ideale ait olduğundan idealin tanımından $S_1 \cup S_2 \in \mathcal{I}$ dır. $(*)$ kapsama bağıntısında sağ taraf ideale ait olduğundan $\left\{k \in \mathbb{N}: \left[M\left(\frac{\left|t_{kn}(A(ax+by))\right|}{\rho}\right)\right]^{p_k} \geq \varepsilon, n \in \mathbb{N}\right\}$ kümesi de ideale ait olur. O halde $ax+by \in \mathcal{I}-{c_0}^{\sigma}(M,A,p)$ olarak bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.3 : M_1 ve M_2, iki Orlicz fonksiyonu olmak üzere, $\mathcal{I}-{c_0}^{\sigma}(M,A,p), \mathcal{I}-c^{\sigma}(M,A,p)$, $\mathcal{I}-{\ell_\infty}^{\sigma}(M,A,p)$ uzayları için aşağıda verilen kapsama bağıntıları sağlanır.

i) $\mathcal{I}-{c_0}^{\sigma}(M_1,A,p) \cap \mathcal{I}-{c_0}^{\sigma}(M_2,A,p) \subseteq \mathcal{I}-{c_0}^{\sigma}(M_1+M_2,A,p)$

ii) $\mathcal{I}-c^{\sigma}(M_1,A,p) \cap \mathcal{I}-c^{\sigma}(M_2,A,p) \subseteq \mathcal{I}-c^{\sigma}(M_1+M_2,A,p)$

iii) $\mathcal{I}-{\ell_\infty}^{\sigma}(M_1,A,p) \cap \mathcal{I}-{\ell_\infty}^{\sigma}(M_2,A,p) \subseteq \mathcal{I}-{\ell_\infty}^{\sigma}(M_1+M_2,A,p)$.

İspat: Sadece i) nin ispatı yapılacaktır. Diğerleri benzer şekilde gösterilebilir.

i) $x \in \mathcal{I}-{c_0}^{\sigma}(M_1,A,p) \cap \mathcal{I}-{c_0}^{\sigma}(M_2,A,p)$ olsun. $\rho_1, \rho_2 > 0$ olmak üzere S_1 ve S_2 kümeleri

$$S_1 = \left\{ k \in \mathbb{N} : \left[M_1 \left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho_1} \right) \right]^{p_k} \geq \frac{\varepsilon}{2D}, n \in \mathbb{N} \right\} \in \mathcal{I}$$

ve

$$S_2 = \left\{ k \in \mathbb{N} : \left[M_2 \left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho_2} \right) \right]^{p_k} \geq \frac{\varepsilon}{2D}, n \in \mathbb{N} \right\} \in \mathcal{I}$$

şeklinde tanımlansın. $k_1 \in \mathbb{N} \backslash S_1 \cup S_2$ olsun. M_1 ve M_2 azalmayan ve konveks fonksiyonlar olup $\rho = \max\{2\rho_1, 2\rho_2\}$ olmak üzere

$$\left[(M_1 + M_2) \left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho} \right) \right]^{p_k} = \left[\left[M_1 \left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho} \right) \right] + \left[M_2 \left(\frac{|t_{kn}(Ay)|}{\rho} \right) \right] \right]^{p_k}$$

$$\leq D \left\{ \left[M_1 \left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho_1} \right) \right]^{p_k} + \left[M_2 \left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho_2} \right) \right]^{p_k} \right\} < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğe göre,

$$k_1 \in \left\{ k \in \mathbb{N} : \left[(M_1 + M_2) \left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho} \right) \right]^{p_k} < \varepsilon, n \in \mathbb{N} \right\}$$

olur. Buradan,

$$\mathbb{N} \backslash S_1 \cup S_2 \subseteq \left\{ k \in \mathbb{N} : \left[(M_1 + M_2) \left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho} \right) \right]^{p_k} < \varepsilon, n \in \mathbb{N} \right\}$$

bulunur. O halde,

$$\left\{ k \in \mathbb{N} : \left[(M_1 + M_2) \left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho} \right) \right]^{p_k} \geq \varepsilon, n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq S_1 \cup S_2$$

olur. S_1 ve S_2 kümeleri ideale ait olduğundan $S_1 \cup S_2 \in \mathcal{I}$ dır. Buna göre kapsama bağıntısının sağ tarafı ideale ait olduğundan

$$\left\{ k \in \mathbb{N} : \left[M \left(\frac{|t_{kn}(A(ax + by))|}{\rho} \right) \right]^{p_k} \geq \varepsilon, n \in \mathbb{N} \right\}$$

kümesi de ideale ait olur. O halde $x \in \mathcal{I} - c_0{}^{\sigma}(M_1 + M_2, A, \rho)$ olarak bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.4 : M_1 ve M_2 Orlicz fonksiyonları olmak üzere M_2 Δ_2 şartını sağlasın. Bu taktirde aşağıdaki kapsama bağıntıları sağlanır.

i) $\mathcal{I} - c_0{}^{\sigma}(M_1, A, p) \subset \mathcal{I} - c_0{}^{\sigma}(M_2 o M_1, A, p)$,

ii) $\mathcal{J}-c^{\sigma}(M_1,A,p)\subset \mathcal{J}-c^{\sigma}(M_2oM_1,A,p)$,

iii) $\mathcal{J}-\ell_{\infty}{}^{\sigma}(M_1,A,p)\subset \mathcal{J}-\ell_{\infty}{}^{\sigma}(M_2oM_1,A,p)$.

İspat: $x\in \mathcal{J}-c_0{}^{\sigma}(M,A,p)$ olsun. Buna göre $\delta>0$ ve $K\geq 1$ olmak üzere bir $\rho>0$ sayısı için S kümesi

$$S=\left\{k\in\mathbb{N}:\left[M_1\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho}\right)\right]^{p_k}\geq\frac{\varepsilon}{\max\left\{1,\left(K\delta^{-1}M_2(2)\right)^H\right\}},n\in\mathbb{N}\right\}\in\mathcal{J}$$

şeklinde tanımlansın. $k_1\in\mathbb{N}\backslash S$ olsun. İspatı iki kısımda inceleyeceğiz.

$y_k=M_1\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho}\right)$ olsun.

$y_k>\delta$ ve $\delta<1$ için

$$y_k<\frac{y_k}{\delta}<1+\frac{y_k}{\delta}$$

eşitsizliği sağlanır. M_2 azalmayan ve konveks olduğundan

$$M_2\,(y_k)<M_2\left(1+\frac{y_k}{\delta}\right)<\frac{1}{2}M_2\,(2)+\frac{1}{2}M_2\left(\frac{y_k}{\delta}2\right) \tag{3.1}$$

bulunur. Ayrıca $K\geq 1$ ve $\delta<1$ için M_2 , Δ_2 şartını sağladığından

$$M_2\left(\frac{y_k}{\delta}2\right)\leq K\frac{y_k}{\delta}M_2\,(2). \tag{3.2}$$

olur. (3.1) ve (3.2) den

$$M_2\,(y_k)<\frac{1}{2}M_2\,(2)+\frac{1}{2}K\frac{y_k}{\delta}M_2\,(2)\leq\frac{1}{2}K\frac{y_k}{\delta}M_2\,(2)+\frac{1}{2}K\frac{y_k}{\delta}M_2\,(2)=K\frac{y_k}{\delta}M_2\,(2)$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned}[M_2\,(y_k)]^{p_k}&\leq\left(K\delta^{-1}M_2(2)\right)^{p_k}(y_k)^{p_k}\leq\max\left\{1,\left(K\delta^{-1}M_2(2)\right)^H\right\}(y_k)^{p_k}\\&<\max\left\{1,\left(K\delta^{-1}M_2(2)\right)^H\right\}\frac{\varepsilon}{\max\left\{1,\left(K\delta^{-1}M_2(2)\right)^H\right\}}=\varepsilon\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitsizliğe göre

$$k_1\in\ \{k\in\mathbb{N}:[M_2\,(y_k)]^{p_k}<\varepsilon,n\in\mathbb{N}\}$$

dır. Dolayısıyla

$$\mathbb{N}\backslash S \subseteq \{k \in \mathbb{N}: [M_2\,(y_k)]^{p_k} < \varepsilon, n \in \mathbb{N}\}$$

bulunur. Buna göre

$$S_1 = \{k \in \mathbb{N}: [M_2\,(y_k)]^{p_k} \geq \varepsilon, n \in \mathbb{N}, y_k \geq \delta\} \subseteq S$$

ve $S \in \mathcal{I}$ olduğundan $S_1 \in \mathcal{I}$ dır. Diğer taraftan M_2 sürekli olduğundan,

$y_k \leq \delta$ için $M_2\,(y_k) < \varepsilon$ olur. Böylece

$$[M_2\,(y_k)]^{p_k} < \varepsilon^{p_k} \leq \max\{\varepsilon^h, \varepsilon^H\}$$

elde edilir. Bu son ifadede $k \to \infty$ için limit alınırsa ve $\varepsilon \to 0$ olduğunda

$$0 \leq \lim_k [M_2\,(y_k)]^{p_k} \leq 0$$

yani $\mathcal{I}$-$\lim_k [M_2\,(y_n)]^{p_k} = 0$ olur. Buna göre

$$S_2 = \{k \in \mathbb{N}: [M_2\,(y_k)]^{p_k} \geq \varepsilon, n \in \mathbb{N}, y_k \leq \delta\} \in \mathcal{I}$$

dır. O halde, $S_1, S_2 \in \mathcal{I}$ olup $S_1 \cup S_2 \in \mathcal{I}$ bulunur.Böylece $x \in \mathcal{I} - {c_0}^{\sigma}(M_2 o M_1, A, p)$ elde edilir. Bu da istenilen kapsama bağıntısının sağlandığını gösterir.

Diğer kapsama bağıntıları benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 3.5 : $\forall t > 0$ için $\sup_k [M(t)]^{p_k} < \infty$ olmak üzere

$$\mathcal{I} - c^{\sigma}(M, A, \rho) \subset \mathcal{I} - {\ell_\infty}^{\sigma}(M, A, \rho)$$

kapsama bağıntısı sağlanır.

İspat : $x \in\ \mathcal{I} - c^{\sigma}(M, A, p)$ olsun. Buna göre $\rho > 0$ sayısı için S kümesi

$$S = \left\{k \in N: \left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax - le)|}{\rho_1}\right)\right]^{p_k} \geq \varepsilon, n \in \mathbb{N}\right\} \in \mathcal{I}$$

şeklinde tanımlansın. $k_1 \in \mathbb{N}\backslash S$ olsun. Diğer taraftan M konveks ve azalmayan olduğundan,

$$\left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho}\right)\right]^{p_k} = \left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax-le+le)|}{\rho}\right)\right]^{p_k}$$
$$\leq \left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax-le)|+|t_{kn}(le)|}{\rho}\right)\right]^{p_k}$$
$$\leq D\left\{\left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax-le)|}{\rho}\right)\right]^{p_k} + \left[M\left(\frac{|t_{kn}(le)|}{\rho}\right)\right]^{p_k}\right\}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğin sağ tarafında bulunan $\left[M\left(\frac{|t_{kn}(le)|}{\rho}\right)\right]^{p_k}$ ifadesi x e bağlı değildir. Ayrıca $\left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax-le)|}{\rho}\right)\right]^{p_k} < \varepsilon$ için K sayısı $\varepsilon < K$ olarak alınırsa

$$\left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax-le)|}{\rho}\right)\right]^{p_k} < K$$

bulunur. Böylece

$$k_1 \in \left\{k \in \mathbb{N}: \left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax-le)|}{\rho}\right)\right]^{p_k} < K, n \in \mathbb{N}\right\}$$

olur. O halde

$$\mathbb{N}\backslash S \subseteq \left\{k \in \mathbb{N}: \left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax-le)|}{\rho}\right)\right]^{p_k} < K, n \in \mathbb{N}\right\}$$

elde edilir. Buna göre

$$\left\{k \in \mathbb{N}: \left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax-le)|}{\rho}\right)\right]^{p_k} \geq K, n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq S \in \mathcal{I}$$

olup $\forall n$ ve $K > 0$ için üsteki kapsama bağıntısında sağ taraf idealin elemanı olduğundan sol taraf da idealin elemanı olur. O halde $x \in \mathcal{I} - \ell_\infty{}^\sigma(M, A, \rho)$ olup kapsama bağıntısı sağlanır.

Teorem 3.6: $\forall k \in \mathbb{N}$ iken $0 < p_k < q_k$ ve $\left(\frac{q_k}{p_k}\right)$ sınırlı olsun. Bu taktirde aşağıdaki kapsama bağıntıları sağlanır.

i) $\mathcal{I} - c_0{}^\sigma(M, A, q) \subseteq \mathcal{I} - c_0{}^\sigma(M, A, p)$

ii) $\mathcal{I} - c^\sigma(M, A, q) \subseteq \mathcal{I} - c^\sigma(M, A, p)$.

İspat: $x \in \mathcal{I} - c_0{}^\sigma(M, A, q)$ olsun. Buna göre S kümesi

$$S=\left\{k\in\mathbb{N}:\left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho}\right)\right]^{q_k}\geq\varepsilon,n\in\mathbb{N}\right\}\in\mathcal{I}$$

şeklinde tanımlansın. Ayrıca $y_k=\left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho}\right)\right]^{q_k}$ ve $\lambda_k=\frac{p_k}{q_k}$ olsun. O halde $0<\lambda<\lambda_k<1$ olmak üzere λ sayısı vardır. Diğer taraftan $S=S_1\cup S_2$ olmak üzere S_1 ve S_2 kümeleri

$$S_1=\left\{k\in\mathbb{N}:y_k\geq\frac{\varepsilon}{2},y_k\geq 1,n\in\mathbb{N}\right\}\in\mathcal{I}$$

ve

$$S_2=\left\{k\in\mathbb{N}:y_k\geq\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{\lambda}},y_k<1,n\in\mathbb{N}\right\}\in\mathcal{I}$$

şeklinde tanımlansın. $k_1\in\mathbb{N}\backslash S_1\cup S_2$ olsun. $y_k=a_k+b_k$ olacak şekilde a_k ve b_k dizileri var olsun. Buna göre

$y_k\geq 1$ için $y_k=a_k$ ve $b_k=0$ ve $y_k<1$ için $y_k=b_k$ ve $a_k=0$ olsun. Bu şartlar altında ${y_k}^{\lambda_k}={a_k}^{\lambda_k}+{b_k}^{\lambda_k}$ eşitliği yazılabilir. Buradan da

$${y_k}^{\lambda_k}={a_k}^{\lambda_k}+{b_k}^{\lambda_k}<{y_k}^{\lambda}=a_k+{b_k}^{\lambda}=y_k+{y_k}^{\lambda}<\frac{\varepsilon}{2}+\left(\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right)^{\lambda}=\varepsilon$$

bulunur. Buna göre

$${y_k}^{\lambda_k}=\left(\left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho}\right)\right]^{q_k}\right)^{\lambda_k}=\left(\left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho}\right)\right]^{q_k}\right)^{\frac{p_k}{q_k}}=\left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho}\right)\right]^{p_k}<\varepsilon$$

olur. Bu da $k_1\in\left\{k\in\mathbb{N}:\left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho}\right)\right]^{p_k}<\varepsilon,n\in\mathbb{N}\right\}$ olduğunu gösterir. Buna göre

$$\mathbb{N}\backslash S_1\cup S_2\subseteq\left\{k\in\mathbb{N}:\left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho}\right)\right]^{p_k}<\varepsilon,n\in\mathbb{N}\right\}$$

elde edilir. O halde

$$\left\{k\in\mathbb{N}:\left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho}\right)\right]^{p_k}\geq\varepsilon,n\in\mathbb{N}\right\}\subseteq S_1\cup S_2\in\mathcal{I}$$

olur. Bu kapsama bağıntısında sağ taraf idealin elemanı olduğundan sol taraf da idealin elemanıdır. Buna göre $x \in \mathcal{I} - {c_0}^{\sigma}(M, A, p)$ bulunur. O halde,

$$\mathcal{I} - {c_0}^{\sigma}(M, A, p) \subseteq \mathcal{I} - {c_0}^{\sigma}(M, A, q)$$

kapsama bağıntısı sağlanır.

Diğeri benzer şekilde gösterilebilir.

Sonuç 3.8: $\exists k \in \mathbb{N}$ için $1 \leq p_k \leq supp_k \leq \infty$ olsun. Bu durumda

i) $\mathcal{I} - {c_0}^{\sigma}(M, A, p) \subseteq \mathcal{I} - {c_0}^{\sigma}(M, A)$

ii) $\mathcal{I} - c^{\sigma}(M, A, p) \subseteq \mathcal{I} - c^{\sigma}(M, A)$

kapsama bağıntıları sağlanır.

İspat: Teorem 3.7 de p_k ve q_k yer değiştirilip $q_k = 1$ alınırsa ispat tamamlanır.

Teorem 3.9: $\forall k \in \mathbb{N}$ için $0 \leq \inf p_k \leq p_k \leq 1$ olsun. Bu durumda

i) $\mathcal{I} - {c_0}^{\sigma}(M, A) \subseteq \mathcal{I} - {c_0}^{\sigma}(M, A, p)$

ii) $\mathcal{I} - c^{\sigma}(M, A) \subseteq \mathcal{I} - c^{\sigma}(M, A, p)$

kapsama bağıntıları sağlanır.

İspat: i) $x \in \mathcal{I} - {c_0}^{\sigma}(M, A)$ olsun.$h = \inf p_k$ olmak üzere S kümesi

$$S = \left\{k \in \mathbb{N}: \left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho}\right)\right] \geq \varepsilon^{\frac{1}{h}}, n \in \mathbb{N}\right\} \in \mathcal{I}$$

şeklinde tanımlansın. Ayrıca, $k_1 \in \mathbb{N} \backslash S$ olsun. Diğer taraftan M konveks ve azalmayan olduğundan, $0 < \varepsilon < 1$ için $\left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho}\right)\right] < \varepsilon^{\frac{1}{h}}$ eşitsizliğinin her iki tarafının p_k ıncı kuvveti alınırsa

$$\left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho}\right)\right]^{p_k} \leq \left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho}\right)\right]^{\frac{p_k}{h}} < \varepsilon^{\frac{p_k}{h}} < \varepsilon$$

eşitsizliği elde edilir. Buna göre $\left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho}\right)\right]^{p_k} < \varepsilon$ bulunur. O halde

$$k_1 \in \left\{k \in \mathbb{N}: \left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho}\right)\right]^{p_k} < \varepsilon\,, n \in \mathbb{N},\right\}$$

olur. Buradan

$$\mathbb{N}\backslash S \subseteq \left\{k \in \mathbb{N}: \left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho}\right)\right]^{p_k} < \varepsilon, n \in \mathbb{N}\right\}$$

bulunur. Buna göre

$$\left\{k \in \mathbb{N}: \left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho}\right)\right]^{p_k} \geq \varepsilon, n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq S \in \mathcal{I}$$

olur. Bu kapsama bağıntısının sağ tarafı ideale ait olduğundan sol tarafı da ideale aittir. O halde $x \in \mathcal{I} - {c_0}^{\sigma}(M, A, p)$bulunur. Bu ise kapsama bağıntısının sağlandığını gösterir.

Diğer durum benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 3.10: $\mathcal{I} - {c_0}^{\sigma}(M, A, p)$ ve $\mathcal{I} - {\ell_\infty}^{\sigma}(M, A, p)$ uzayları soliddir.

İspat: $\mathcal{I} - {c_0}^{\sigma}(M, A, p)$ uzayının solid olduğu gösterilecektir. Diğer uzayın solid olduğu benzer yolla gösterilebilir. $x \in \mathcal{I} - {c_0}^{\sigma}(M, A, p)$ olsun. Buna göre S kümesi

$$S = \left\{k \in \mathbb{N}: \left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho}\right)\right]^{p_k} \geq \varepsilon, n \in \mathbb{N}\right\} \in \mathcal{I}$$

şeklinde tanımlansın. Şimdi, $k_1 \in \mathbb{N}\backslash S$ olsun. $\gamma = (\gamma_k)$ skaler dizisi $\forall k \in \mathbb{N}$ için $|\gamma_k| \leq 1$ şartını sağlasın. Diğer taraftan M konveks ve azalmayan olduğundan

$$\left[M\left(\frac{|t_{kn}(A\gamma x)|}{\rho}\right)\right]^{p_k} \leq \left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho}\right)\right]^{p_k} < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. Buna göre

$$k_1 \in \left\{k \in \mathbb{N}: \left[M\left(\frac{|t_{kn}(A\gamma x)|}{\rho}\right)\right]^{p_k} < \varepsilon\,, n \in \mathbb{N},\right\}$$

olur. Böylece

$$\mathbb{N}\backslash S \subseteq \left\{k \in \mathbb{N}: \left[M\left(\frac{|t_{kn}(A\gamma x)|}{\rho}\right)\right]^{p_k} < \varepsilon, n \in \mathbb{N}\right\}$$

bulunur. O halde

$$\left\{k \in \mathbb{N}: \left[M\left(\frac{|t_{kn}(A\gamma x)|}{\rho}\right)\right]^{p_k} \geq \varepsilon, n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq S \in \mathcal{J}$$

olduğu görülür. Bu kapsama bağıntısının sağ tarafı ideale ait olduğundan sol tarafı da ideale aittir. Buna göre, $\gamma x \in \mathcal{J} - c_0{}^{\sigma}(M, A, p)$ bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 3.11: $\mathcal{J} - c_0{}^{\sigma}(M, A, p)\ ve\ \mathcal{J} - \ell_\infty{}^{\sigma}(M, A, p)$ uzayları monotondur

İspat: Lemma 1.1 den ispatı aşikardır.

Teorem 3.12: $lim_k p_k > 0$ ve $x \to x_0\big(\mathcal{J} - c^{\sigma}(M, A, p)\big)$ olduğunda x_o tektir.

İspat: $lim_k p_k > 0$ ve $x \to x_0\big(\mathcal{J} - c^{\sigma}(M, A, p)\big),\ x \to y_0\big(\mathcal{J} - c^{\sigma}(M, A, p)\big)$

$x_0 \neq y_0$ olacak şekilde y_o var olsun. $\rho_1, \rho_2 > 0$ ve $\rho = \max\{2\rho_1, 2\rho_2\}$ olmak üzere S_1 ve S_2 kümeleri

$$S_1 = \left\{k \in \mathbb{N}: \left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax - x_0 e)|}{\rho_1}\right)\right]^{p_k} \geq \frac{\varepsilon}{2D}, n \in \mathbb{N}, x_0 \in \mathbb{C}\right\} \in \mathcal{J}$$

ve

$$S_2 = \left\{k \in \mathbb{N}: \left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ay - y_0 e)|}{\rho_2}\right)\right]^{p_k} \geq \frac{\varepsilon}{2D}, n \in \mathbb{N}, y_0 \in \mathbb{C}\right\} \in \mathcal{J}$$

Şeklinde tanımlansın. $k_1 \in \mathbb{N} \backslash S_1 \cup S_2$ olsun. $\rho_1, \rho_2 > 0$ için M azalmayan ve konveks fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned}
\left[M\left(\frac{|x_0 - y_0|}{\rho}\right)\right]^{p_k} &= \left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax) - t_{kn}(Ax) + x_0 - y_0|}{\rho}\right)\right]^{p_k} \\
&\leq D\left\{\left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax - x_0 e)|}{\rho_1}\right)\right]^{p_k} + \left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax - y_0 e)|}{\rho_1}\right)\right]^{p_k}\right\} \\
&< D\left\{\frac{\varepsilon}{2D} + \frac{\varepsilon}{2D}\right\} = \varepsilon
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğe göre

$$\left[M\left(\frac{|x_0 - y_0|}{\rho}\right)\right]^{p_k} < \varepsilon$$

bulunur. Buradan

$$k_1 \in \left\{k \in \mathbb{N}: \left[M\left(\frac{|x_0 - y_0|}{\rho}\right)\right]^{p_k} < \varepsilon\,, n \in \mathbb{N},\right\}$$

olduğu görülür. O halde

$$\mathbb{N} \backslash S_1 \cup S_2 \subseteq \left\{k \in N: \left[M\left(\frac{|x_0 - y_0|}{\rho}\right)\right]^{p_k} < \varepsilon\right\}$$

olur. Buna göre

$$\left\{k \in N: \left[M\left(\frac{|x_0 - y_0|}{\rho}\right)\right]^{p_k} \geq \varepsilon\right\} \subseteq S \in \mathcal{I}$$

elde edilir. Bu ise

$$\mathcal{I} - \lim_k \left[M\left(\frac{|x_0 - y_0|}{\rho}\right)\right]^{p_k} = 0.$$

olduğunu gösterir. $k \to \infty$ için (p_k) dizisi p_0 noktasına yakınsayacağından

$\left[M\left(\frac{|x_0-y_0|}{\rho}\right)\right]^{p_k} \to \left[M\left(\frac{|x_0-y_0|}{\rho}\right)\right]^{p_0}$dır ve bundan dolayı, $\left[M\left(\frac{|x_0-y_0|}{\rho}\right)\right]^{p_0} = 0$ bulunur. M fonksiyonunun özelliğinden $x_0 = y_0$ elde edilir.

4.LACUNARY DİZİSİYLE OLUŞTURULAN BAZI DİZİ UZAYLARI

Bu bölümde $\mathcal{I}$ -yakınsak, $\mathcal{I}$-sınırlı ve lacunary dizi uzayları üzerinde genel bir sonsuz üçgensel matris kullanarak yeni dizi uzayları tanımlanacak ve bu uzayların bazı özellikleri incelenecektir.

Tanım 4.1: $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ üzerinde bir uygun ideal ve M bir Orlicz fonksiyon, A bir sonsuz matris ve $p=(p_k)$ pozitif reel sayılarda bir dizi olsun.

$\mathcal{I}-N^0_{\theta,\sigma}(M,A,p), \mathcal{I}-N_{\theta,\sigma}(M,A,p),\ \mathcal{I}-N^\infty_{\theta,\sigma}(M,A,p)$ dizi uzayları

$\mathcal{I}-N^0_{\theta,\sigma}(M,A,p)=\left\{x\in\omega: \mathcal{I}-\lim_r \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho}\right)\right]^{p_k}=0\,, \forall\varepsilon>\ 0 \text{ ve } \exists\rho>0, \forall n\in\mathbb{N}\right\}$

$\mathcal{I}-N_{\theta,\sigma}(M,A,p)=\left\{x\in\omega: \mathcal{I}-\lim_r \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax-le)|}{\rho}\right)\right]^{p_k}=0\,, \forall\varepsilon>\ 0 \text{ ve } \exists\rho>0, \forall n\in \mathbb{N} \text{ ve } l\in\mathbb{C}\right\}$

$\mathcal{I}-N^\infty_{\theta,\sigma}(M,A,p)=\left\{x\in\omega: \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho}\right)\right]^{p_k} \text{ ifadesi } \mathcal{I}-\text{sınırlı}, \forall\varepsilon>\ 0 \text{ ve } \exists\rho>0, \forall n\in\mathbb{N}\right\}$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.2 : $\mathcal{I}-N^0_{\theta,\sigma}(M,A,p), \mathcal{I}-N_{\theta,\sigma}(M,A,p), \mathcal{I}-N^\infty_{\theta,\sigma}(M,A,p)$ uzayları lineer uzaydır.

İspat: $\mathcal{I}-N^0_{\theta,\sigma}(M,A,p)$ uzayının, lineer uzay olması için gerekli şartları sağlayıp sağlamadığına bakılacaktır. Diğer uzaylar içinde benzer yol izlenebilir.

$x\neq y\in\mathcal{I}-N^0_{\theta,\sigma}(M,A,p)$ olsun. $\varepsilon>0$ ve $\rho_1,\rho_2>0$ sayıları verildiğinde,

$$\mathcal{I}-\lim_r \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho_1}\right)\right]^{p_k}=0$$

ve

$$\mathcal{I}-\lim_r \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ay)|}{\rho_2}\right)\right]^{p_k}=0$$

olur. Bu limitlere S_1 ve S_2 kümeleri

$$S_1=\left\{r\in\mathbb{N}:\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho_1}\right)\right]^{p_k}\geq\frac{\varepsilon}{2D},n\in\mathbb{N}\right\}\in\mathcal{I}$$

ve

$$S_2=\left\{r\in\mathbb{N}:\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ay)|}{\rho_2}\right)\right]^{p_k}\geq\frac{\varepsilon}{2D},n\in\mathbb{N}\right\}\in\mathcal{I}$$

şeklinde tanımlansın. Şimdi, $r_1\in\mathbb{N}\backslash S_1\cup S_2$ olsun. M azalmayan ve konveks fonksiyon olup $\rho_1,\rho_2>0$ ile $\rho=\max\{2|a|\rho_1,2|b|\rho_2\}$ ve $\forall a,b\in\mathbb{C}$ için

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[M\left(\frac{|t_{kn}(A(ax+by))|}{\rho}\right)\right]^{p_k}\leq\sum_{k\in I_r}\left[\left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho_1}\right)\right]+\left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ay)|}{\rho_2}\right)\right]\right]^{p_k}$$

$$\leq D\left\{\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho_1}\right)\right]^{p_k}+\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ay)|}{\rho_2}\right)\right]^{p_k}\right\}<\varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. Buna göre, $r_1\in\left\{r\in\mathbb{N}:\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[M\left(\frac{|t_{kn}(A(ax+by))|}{\rho}\right)\right]^{p_k}<\varepsilon,n\in\mathbb{N}\right\}$ bulunur. O halde

$$\mathbb{N}\backslash S_1\cup S_2\subseteq\left\{r\in\mathbb{N}:\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[M\left(\frac{|t_{kn}(A(ax+by))|}{\rho}\right)\right]^{p_k}<\varepsilon,n\in\mathbb{N}\right\}$$

olur. Buradan

$$\left\{r\in\mathbb{N}:\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[M\left(\frac{|t_{kn}(A(ax+by))|}{\rho}\right)\right]^{p_k}\geq\varepsilon,n\in\mathbb{N}\right\}\subseteq S_1\cup S_2\in\mathcal{I}$$

elde edilir. Buna göre kapsama bağıntısının sağ tarafı ideale ait olduğundan

$$\left\{r\in\mathbb{N}:\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[M\left(\frac{|t_{kn}(A(ax+by))|}{\rho}\right)\right]^{p_k}\geq\varepsilon,n\in\mathbb{N}\right\}$$

kümesi de ideale aittir.

O halde $ax+by\in\mathcal{I}-N_{\theta,\sigma}^{0}(M,A,p)$ olarak bulunur ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.3: M_1 ve M_2 Orlicz fonksiyonları için, $\mathcal{I}-N^0_{\theta,\sigma}(M,A,p)$, $\mathcal{I}-N_{\theta,\sigma}(M,A,p)$, $\mathcal{I}-N_{\theta,\sigma}{}^{\infty}(M,A,p)$ uzayları aşağıda verilen kapsama bağıntılarını sağlar.

i) $\mathcal{I}-N^0_{\theta,\sigma}(M_1,A,p)\cap\mathcal{I}-N^0_{\theta,\sigma}(M_2,A,p)\subseteq\mathcal{I}-N^0_{\theta,\sigma}(M_1+M_2,A,p)$

ii) $\mathcal{I}-N_{\theta,\sigma}(M_1,A,p)\cap\mathcal{I}-N_{\theta,\sigma}(M_2,A,p)\subseteq\mathcal{I}-N_{\theta,\sigma}(M_1+M_2,A,p)$

iii) $\mathcal{I}-N^{\infty}_{\theta,\sigma}(M_1,A,p)\cap\mathcal{I}-N^{\infty}_{\theta,\sigma}(M_2,A,p)\subseteq\mathcal{I}-N^{\infty}_{\theta,\sigma}(M_1+M_2,A,p)$.

İspat: Sadece i) nin ispatı yapılacaktır. Diğerleri benzer şekilde yapılabilir.

$x\in\mathcal{I}-N^0_{\theta,\sigma}(M_1,A,p)\cap\mathcal{I}-N^0_{\theta,\sigma}(M_2,A,p)$ olsun. Buna göre, $x\in\mathcal{I}-N^0_{\theta,\sigma}(M_1,A,p)$ ve $x\in\mathcal{I}-N^0_{\theta,\sigma}(M_2,A,p)$ olur. O halde aşağıdaki limitler vardır.

$$\mathcal{I}-\lim_r\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[M_1\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho}\right)\right]^{p_k}=0$$

ve

$$\mathcal{I}-\lim_r\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[M_2\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho}\right)\right]^{p_k}=0.$$

Bu limitlere göre, S_1 ve S_2 kümeleri

$$S_1=\left\{r\in\mathbb{N}:\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[M_1\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho_1}\right)\right]^{p_k}\geq\frac{\varepsilon}{2D},n\in\mathbb{N}\right\}\in\mathcal{I}$$

ve

$$S_2=\left\{r\in\mathbb{N}:\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[M_2\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho_2}\right)\right]^{p_k}\geq\frac{\varepsilon}{2D},n\in\mathbb{N}\right\}\in\mathcal{I}$$

şeklinde tanımlansın. Şimdi $r_1\in\mathbb{N}\backslash S_1\cup S_2$ olsun. M azalmayan ve konveks fonksiyon olup $\rho_1,\rho_2>0$ ile $\rho=\max\{2|a|\rho_1,2|b|\rho_2\}$ için

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[(M_1+M_2)\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho}\right)\right]^{p_k}$$

$$=\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[\left[M_1\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho}\right)\right]+\left[M_2\left(\frac{|t_{kn}(Ay)|}{\rho}\right)\right]\right]^{p_k}$$

$$\leq D\left\{\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[M_1\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho_1}\right)\right]^{p_k}+\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[M_2\left(\frac{|t_{kn}(Ay)|}{\rho_2}\right)\right]^{p_k}\right\}<\varepsilon$$

bulunur. Bu eşitsizliğe göre

$$r_1 \in \left\{ r \in \mathbb{N}: \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[(M_1 + M_2) \left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho} \right) \right]^{p_k} < \varepsilon, n \in \mathbb{N} \right\}$$

olur. Buradan

$$\mathbb{N} \backslash S_1 \cup S_2 \subseteq \left\{ r \in \mathbb{N}: \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[(M_1 + M_2) \left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho} \right) \right]^{p_k} < \varepsilon, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

elde edilir. O halde

$$\left\{ r \in \mathbb{N}: \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[(M_1 + M_2) \left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho} \right) \right]^{p_k} \geq \varepsilon, n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq S_1 \cup S_2 \in \mathcal{J}$$

bulunur. Buna göre kapsama bağıntısının sağ tarafı ideale ait olduğundan

$$\left\{ r \in \mathbb{N}: \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[(M_1 + M_2) \left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho} \right) \right]^{p_k} \geq \varepsilon, n \in \mathbb{N} \right\}$$

kümesi de ideale aittir.

O halde $x \in \mathcal{J} - N^0_{\theta,\sigma}(M_1 + M_2, A, p)$ olur. Bu da ispatı tamamlar. Diğerleri benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 4.4: M_1 ve M_2 Orlicz fonksiyonları olmak üzere M_2 fonksiyonu Δ_2 şartını sağlasın. Bu taktirde aşağıdaki kapsama bağıntıları sağlanır.

i) $\mathcal{J} - N^0_{\theta,\sigma}(M_1, A, p) \subset \mathcal{J} - N^0_{\theta,\sigma}(M_2 o M_1, A, p)$

ii) $\mathcal{J} - N_{\theta,\sigma}(M_1, A, p) \subset \mathcal{J} - N_{\theta,\sigma}(M_2 o M_1, A, p)$

iii) $\mathcal{J} - N^\infty_{\theta,\sigma}(M_1, A, p) \subset \mathcal{J} - N^\infty_{\theta,\sigma}(M_2 o M_1, A, p)$.

İspat: $x \in \mathcal{J} - N^0_{\theta,\sigma}(M, A, p)$ alalım. Buna göre

$$\mathcal{J} - \lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M_1 \left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho} \right) \right]^{p_k} = 0$$

dır. Buna göre, $\delta > 0$ ve $K \geq 1$ olmak üzere bir $\rho > 0$ sayısı için S kümesi

$$S = \left\{ r \in \mathbb{N}: \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M_1 \left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho} \right) \right]^{p_k} \geq \frac{\varepsilon}{\max\left\{1, \left(K\delta^{-1} M_2(2)\right)^H\right\}}, n \in \mathbb{N} \right\} \in \mathcal{J}$$

şeklinde tanımlansın. $r_1 \in \mathbb{N} \backslash S$ olsun.

İspat iki kısımda incelenecektir. $y_k = M_1\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho}\right)$ olsun.

$y_k > \delta$ ve $\delta < 1$ için,

$$y_k < \frac{y_k}{\delta} < 1 + \frac{y_k}{\delta},$$

eşitsizliği sağlanır. M_2 azalmayan ve konveks olduğundan

$$M_2\,(y_k) < M_2\,\left(1 + \frac{y_k}{\delta}\right) < \frac{1}{2} M_2\,(2) + \frac{1}{2} M_2\,\left(\frac{y_k}{\delta} 2\right) \tag{3.1}$$

bulunur. Ayrıca $K \geq 1$ ve $\delta < 1$ için M_2 , Δ_2 şartını sağladığından,

$$M_2\,\left(\frac{y_k}{\delta} 2\right) \leq K \frac{y_k}{\delta} M_2\,(2) \tag{3.2}$$

bulunur. (3.1) ve (3.2) den

$$M_2\,(y_k) < \frac{1}{2} M_2\,(2) + \frac{1}{2} K \frac{y_k}{\delta} M_2\,(2) \leq \frac{1}{2} K \frac{y_k}{\delta} M_2\,(2) + \frac{1}{2} K \frac{y_k}{\delta} M_2\,(2) = K \frac{y_k}{\delta} M_2\,(2)$$

eşitsizliği yazılır. O halde

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} [M_2\,(y_k)]^{p_k} &\leq \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left(K \delta^{-1} M_2(2)\right)^{p_k} (y_k)^{p_k} \\
&\leq \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \max\left\{1, \left(K \delta^{-1} M_2(2)\right)^H\right\} (y_k)^{p_k} \\
&= \max\left\{1, \left(K \delta^{-1} M_2(2)\right)^H\right\} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} (y_k)^{p_k} \\
&< \max\left\{1, \left(K \delta^{-1} M_2(2)\right)^H\right\} \frac{\varepsilon}{\max\left\{1, \left(K \delta^{-1} M_2(2)\right)^H\right\}} = \varepsilon
\end{aligned}$$

olur. Bu eşitsizlikten

$$r_1 \in \left\{ r \in \mathbb{N}\colon \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} [M_2\,(y_k)]^{p_k} < \varepsilon, n \in \mathbb{N} \right\}$$

olduğu görülür. Buna göre

$$\mathbb{N}\backslash S \subseteq \left\{ r \in \mathbb{N}: \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} [M_2\,(y_k)]^{p_k} < \varepsilon, n \in \mathbb{N} \right\}$$

olur. O halde

$$S_1 = \left\{ r \in \mathbb{N}: \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} [M_2\,(y_k)]^{p_k} \geq \varepsilon, y_k \geq \delta, n \in \mathbb{N} \right\} \in \mathcal{I}$$

elde edilir. $S \in \mathcal{I}$ olduğundan $S_1 \in \mathcal{I}$ dır.

M_2 sürekli olduğundan $y_k \leq \delta$ iken $\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} [M_2\,(y_k)]^{p_k} < \varepsilon$ olur. Böylece

$$\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} [M_2\,(y_k)]^{p_k} < \varepsilon^{p_k} \leq \max\{\varepsilon^h, \varepsilon^H\}$$

eşitsizliği bulunur. $r \to \infty$ için limit alınırsa ve $\varepsilon \to 0$ olduğunda

$$0 \leq \lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} [M_2\,(y_k)]^{p_k} \leq 0$$

bulunur. O halde

$$\mathcal{I} - \lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} [M_2\,(y_k)]^{p_k} = 0$$

dir. Buna göre

$$S_2 = \left\{ r \in \mathbb{N}: \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} [M_2\,(y_k)]^{p_k} \geq \varepsilon, y_k \leq \delta, n \in \mathbb{N} \right\} \in \mathcal{I}$$

bulunur. $S_1, S_2 \in \mathcal{I}$ olup $S_1 \cup S_2 \in \mathcal{I}$ olur.

Bu da $x \in \mathcal{I} - N^0_{\theta,\sigma}(M_2 o M_1, A, p)$ olduğunu gösterir. Buna göre istenilen kapsama bağıntısı sağlanır. Diğer kapsama bağıntıları benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 4.5 : $\forall t > 0$ için $sup_k[M(t)]^{p_k} < \infty$ olsun. Buna göre aşağıdaki kapsama bağıntısı sağlanır.

$$\mathcal{I} - N_{\theta,\sigma}(M, A, \rho) \subseteq \mathcal{I} - N^\infty_{\theta,\sigma}(M, A, \rho).$$

İspat : $x \in \mathcal{I} - N_{\theta,\sigma}(M, A, p)$ seçelim. O halde,

$$\mathcal{I} - \lim_{r} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{|t_{kn}(Ax - le)|}{\rho} \right) \right]^{p_k} = 0$$

dir. Buna göre S kümesi

$$S = \left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{|t_{kn}(Ax - le)|}{\rho} \right) \right]^{p_k} \geq \varepsilon, n \in \mathbb{N} \text{ve } l \in \mathbb{C} \right\} \in \mathcal{I}$$

şeklinde tanımlansın. $r_1 \in \mathbb{N} \backslash S$ olsun. Diğer taraftan M konveks ve azalmayan olduğundan

$$\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho} \right) \right]^{p_k} = \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{|t_{kn}(Ax - le + le)|}{\rho} \right) \right]^{p_k}$$

$$\leq \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{|t_{kn}(Ax - le)|}{\rho} + \frac{|t_{kn}(le)|}{\rho} \right) \right]^{p_k}$$

$$\leq D \left\{ \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{|t_{kn}(Ax - le)|}{\rho} \right) \right]^{p_k} + \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{|t_{kn}(le)|}{\rho} \right) \right]^{p_k} \right\}$$

eşitsizliği sağlanır.

Bu eşitsizliğin sağ tarafında bulunan $\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{|t_{kn}(le)|}{\rho} \right) \right]^{p_k}$ ifadesi x e bağlı değildir. Ayrıca $\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{|t_{kn}(Ax - le)|}{\rho} \right) \right]^{p_k} < \varepsilon$ için K sayısı $\varepsilon < K$ olarak alınırsa

$$\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{|t_{kn}(Ax - le)|}{\rho} \right) \right]^{p_k} < K$$

bulunur. Böylece

$$r_1 \in \left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho} \right) \right]^{p_k} < K, n \in \mathbb{N} \right\}$$

olur. Buna göre

$$\mathbb{N} \backslash S \subseteq \left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho} \right) \right]^{p_k} < K, n \in \mathbb{N} \right\}$$

elde edilir. O halde

$$\left\{r \in \mathbb{N}: \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho}\right)\right]^{p_k} \geq K, n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq S \in \mathcal{I} \qquad (**)$$

olur. $\forall n$ ve $K > 0$ için (**) kapsama bağıntısında sağ taraf idealin elemanı olduğundan sol taraf da idealin elemanı olur. O halde $x \in \mathcal{I} - N_{\theta,\sigma}^{\infty}(M, A, \rho)$ olup kapsama bağıntısı sağlanır.

Teorem 4.6: $\forall k \in \mathbb{N}$ için $0 < p_k < q_k$ ve $\left(\frac{q_k}{p_k}\right)$ sınırlı olsun. Buna göre aşağıdaki kapsama bağıntıları sağlanır.

i) $\mathcal{I} - N_{\theta,\sigma}^{0}(M, A, q) \subseteq \mathcal{I} - N_{\theta,\sigma}^{0}(M, A, p)$

ii) $\mathcal{I} - N_{\theta,\sigma}(M, A, q) \subseteq \mathcal{I} - N_{\theta,\sigma}(M, A, p)$.

İspat: **i)** $x \in \mathcal{I} - N_{\theta,\sigma}^{0}(M, A, q)$ olsun. Bu taktirde

$$\mathcal{I} - \lim_{r} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M_1\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho}\right)\right]^{q_k} = 0$$

dır. Buna göre S kümesi

$$S = \left\{r \in \mathbb{N}: \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho}\right)\right]^{q_k} \geq \varepsilon, n \in \mathbb{N}\right\} \in \mathcal{I}$$

şeklinde tanımlansın. Ayrıca $y_k = \left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho}\right)\right]^{q_k}$ ve $\lambda_k = \frac{p_k}{q_k}$ olsun. O halde $0 < \lambda < \lambda_k < 1$ olmak üzere λ sayısı vardır. Diğer taraftan $S = S_1 \cup S_2$ olmak üzere S_1 ve S_2 kümeleri

$$S_1 = \left\{r \in \mathbb{N}: \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} y_k \geq \frac{\varepsilon}{2}, y_k \geq 1, n \in \mathbb{N}\right\} \in \mathcal{I}$$

ve

$$S_2 = \left\{r \in \mathbb{N}: \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} y_k \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{\lambda}}, y_k < 1, n \in \mathbb{N}\right\} \in \mathcal{I}$$

şeklinde tanımlansın. $r_1 \in \mathbb{N}\backslash S_1 \cup S_2$ olsun. Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r} {y_k}^{\lambda_k} &= \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r, y_k\geq 1} {y_k}^{\lambda_k} + \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r, y_k<1} {y_k}^{\lambda_k} \\
&\leq \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r, y_k\geq 1} {y_k}^{\lambda_k} + \sum_{k\in I_r, y_k<1} \left(\frac{1}{h_r}y_k\right)^{\lambda}\left(\frac{1}{h_r}\right)^{1-\lambda} \\
&\leq \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r, y_k\geq 1} {y_k}^{\lambda_k} \\
&+ \left(\sum_{k\in I_r, y_k<1}\left[\left(\frac{1}{h_r}y_k\right)^{\lambda}\right]^{\frac{1}{\lambda}}\right)^{\lambda}\left(\sum_{k\in I_r, y_k<1}\left[\left(\frac{1}{h_r}\right)^{1-\lambda}\right]^{\frac{1}{1-\lambda}}\right)^{1-\lambda} \\
&\leq \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r, y_k\geq 1} {y_k}^{\lambda_k} + \left(\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r, y_k<1} y_k\right)^{\lambda} < \frac{\varepsilon}{2} + \left(\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right)^{\lambda} = \varepsilon
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Buna göre

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r} {y_k}^{\lambda_k} &= \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left(\left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho}\right)\right]^{q_k}\right)^{\lambda_k} = \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left(\left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho}\right)\right]^{q_k}\right)^{\frac{p_k}{q_k}} \\
&= \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho}\right)\right]^{p_k} < \varepsilon
\end{aligned}$$

olur. Bu da $r_1 \in \left\{r \in \mathbb{N}: \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho}\right)\right]^{p_k} < \varepsilon, n \in \mathbb{N}\right\}$ olduğunu gösterir.Buna göre

$$\mathbb{N}\backslash S_1 \cup S_2 \subseteq \left\{r \in \mathbb{N}: \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho}\right)\right]^{p_k} < \varepsilon, n \in \mathbb{N}\right\}$$

elde edilir. O halde

$$\left\{r \in \mathbb{N}: \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho}\right)\right]^{p_k} \geq \varepsilon, n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq S_1 \cup S_2 \in \mathcal{I}$$

olur. Bu kapsama bağıntısında sağ taraf idealin elemanı olduğundan sol taraf da idealin elemanıdır. Bu ise $x \in \mathcal{I} - N_{\theta,\sigma}^0(M, A, q)$ olduğunu gösterir. Buna göre $\mathcal{I} - N_{\theta,\sigma}^0(M, A, p) \subseteq x \in \mathcal{I} - N_{\theta,\sigma}^0(M, A, q)$ kapsama bağıntısı sağlanır. Diğeri benzer şekilde gösterilebilir.

Sonuç 4.7: $1 \leq p_k \leq \sup p_k \leq \infty,\ \exists k \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki kapsama bağıntıları sağlanır.

i) $\mathcal{I} - N^0_{\theta,\sigma}(M, A, p) \subseteq \mathcal{I} - N^0_{\theta,\sigma}(M, A)$

ii) $\mathcal{I} - N_{\theta,\sigma}(M, A, p) \subseteq \mathcal{I} - N_{\theta,\sigma}(M, A)$.

İspat: Teorem 4.6 da p_k ve q_k yer değiştirilip $q_k = 1$ alınırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4.8: $0 \leq \inf p_k \leq p_k \leq 1, \forall k \in \mathbb{N}$ için

i) $\mathcal{I} - N^0_{\theta,\sigma}(M, A) \subseteq \mathcal{I} - N^0_{\theta,\sigma}(M, A, p)$

ii) $\mathcal{I} - N_{\theta,\sigma}(M, A) \subseteq \mathcal{I} - N_{\theta,\sigma}(M, A, p)$

kapsama bağıntıları sağlanır.

İspat: i) $x \in \mathcal{I} - N^0_{\theta,\sigma}(M, A)$ olsun. O halde,

$$\mathcal{I} - \lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M_1 \left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho} \right) \right] = 0$$

dır. Buna göre, S kümesi

$$S = \left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho} \right) \right] \geq \varepsilon^{\frac{1}{h}}, h = \inf p_k, n \in \mathbb{N} \right\} \in \mathcal{I}$$

şeklinde tanımlansın. $r_1 \in \mathbb{N} \backslash S$ olsun. Diğer taraftan M konveks ve azalmayan olduğundan, $0 < \varepsilon < 1$ için

$$\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho} \right) \right] < \varepsilon^{\frac{1}{h}}$$

eşitsizliğinin her iki tarafının p_k ıncı kuvveti alınırsa

$$\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho} \right) \right]^{p_k} \leq \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho} \right) \right]^{\frac{p_k}{h}} < \varepsilon^{\frac{p_k}{h}} < \varepsilon$$

eşitsizliği elde edilir. Buna göre $\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho} \right) \right]^{p_k} < \varepsilon$ bulunur. O halde

$$r_1 \in \left\{ r \in \mathbb{N}: \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho} \right) \right]^{p_k} < \varepsilon \,, n \in \mathbb{N}, \right\}$$

olur. Buradan

$$\mathbb{N} \backslash S \subseteq \left\{ r \in \mathbb{N}: \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho} \right) \right]^{p_k} < \varepsilon \,, n \in \mathbb{N}, \right\}$$

bulunur. Buna göre

$$\left\{ r \in \mathbb{N}: \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho} \right) \right]^{p_k} \geq \varepsilon \,, n \in \mathbb{N}, \right\} \subseteq S \in \mathcal{I}$$

olur. Bu kapsama bağıntısının sağ tarafı ideale ait olduğundan sol tarafı da ideale aittir. O halde $x \in \mathcal{I} - N_{\theta,\sigma}^{0}(M, A, p)$ bulunur. Bu ise kapsama bağıntısının sağlandığını gösterir. Diğer durum benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 4.9: $\mathcal{I} - N_{\theta,\sigma}^{0}(M, A, p)$ ve $\mathcal{I} - N_{\theta,\sigma}^{\infty}(M, A, p)$ uzayları soliddir.

İspat: $\mathcal{I} - N_{\theta,\sigma}^{0}(M, A, p)$ nın solid olduğunu gösterilecektir. Diğer uzayın solid olduğu benzer yolla gösterilebilir. $x \in \mathcal{I} - N_{\theta,\sigma}^{0}(M, A, p)$ olsun. Bu taktirde,

$\mathcal{I} - \lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho} \right) \right]^{p_k} = 0$ vardır. Buna göre,

$$S = \left\{ r \in \mathbb{N}: \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho} \right) \right]^{p_k} \geq \varepsilon, n \in \mathbb{N} \right\} \in \mathcal{I}$$

yazılır. $r_1 \in \mathbb{N} \backslash S$ olsun. $\gamma = (\gamma_k)$ skaler dizisi $\forall k \in \mathbb{N}$ için $|\gamma_k| = 1$ şartını sağlasın. O halde,

$$\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M\left(\frac{|t_{kn}(A\gamma x)|}{\rho} \right) \right]^{p_k} \leq \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax)|}{\rho} \right) \right]^{p_k} < \varepsilon$$

elde edilir. Buna göre

$$r_1 \in \left\{ r \in \mathbb{N}: \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M\left(\frac{|t_{kn}(A\gamma x)|}{\rho} \right) \right]^{p_k} < \varepsilon, n \in \mathbb{N} \right\}$$

olur. Buradan

$$\mathbb{N}\backslash S \subseteq \left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M\left(\frac{|t_{kn}(A\gamma x)|}{\rho} \right) \right]^{p_k} < \varepsilon, n \in \mathbb{N} \right\}$$

yazılır. O halde

$$\left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M\left(\frac{|t_{kn}(A\gamma x)|}{\rho} \right) \right]^{p_k} \geq \varepsilon, n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq S \in \mathcal{I}$$

bulunur. Eşitsizliğin sağ tarafı ideale ait olduğundan eşitsizliğin sol tarafı da ideale aittir. Buna göre $\mathcal{I} - \lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M\left(\frac{|t_{kn}(A\gamma x)|}{\rho} \right) \right]^{p_k} = 0$ olup $\gamma x \in \mathcal{I} - N_{\theta,\sigma}{}^{0}(M, A, p)$ bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 4.10: $\mathcal{I} - N_{\theta,\sigma}^{0}(M, A, p)\ ve\ \mathcal{I} - N_{\theta,\sigma}^{\infty}(M, A, p)$ uzayları monotondur

İspat: Lemma 2.1 den her solid uzay monoton olduğundan ve ve Teorem 4.9 dan $\mathcal{I} - N_{\theta,\sigma}^{0}(M, A, p)\ ve\ \mathcal{I} - N_{\theta,\sigma}^{\infty}(M, A, p)$ uzayları solid uzay olduğundan bu uzaylar monotondur.

Teorem 4.11: $\lim_k p_k > 0\ ve\ x \to x_0 \left(\mathcal{I} - N_{\theta,\sigma}(M, A, p) \right)$ olduğunda x_0 tektir.

İspat: $lim_k p_k > 0\ ve\ x \to x_0 \left(\mathcal{I} - N_{\theta,\sigma}(M, A, p) \right),\ x \to y_0 \left(\mathcal{I} - N_{\theta,\sigma}(M, A, p) \right)$

$x_0 \neq y_0$olacak şekilde y_o var olsun. Buna göre

$$\mathcal{I} - \lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax - x_0 e)|}{\rho} \right) \right]^{p_k} = 0$$

ve

$$\mathcal{I} - \lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax - y_0 e)|}{\rho} \right) \right]^{p_k} = 0$$

limitleri vardır. Buna göre S_1 ve S_2 kümeleri

$$S_1 = \left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax - x_0 e)|}{\rho_1} \right) \right]^{p_k} \geq \frac{\varepsilon}{2D}, n \in \mathbb{N}, x_0 \in \mathbb{C} \right\} \in \mathcal{I}$$

ve

$$S_2=\left\{r\in\mathbb{N}:\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ay-y_0e)|}{\rho_2}\right)\right]^{p_k}\geq\frac{\varepsilon}{2D},n\in\mathbb{N},y_0\in\mathbb{C}\right\}\in\mathcal{I}$$

şeklinde tanımlansın. $r_1\in\mathbb{N}\backslash S_1\cup S_2$ olsun. $\rho_1,\rho_2>0$ ve $\rho=\max\{2\rho_1,2\rho_2\}$ için, M azalmayan ve konveks fonksiyon olduğundan,

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[M\left(\frac{|x_0-y_0|}{\rho}\right)\right]^{p_k}=\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax)-t_{kn}(Ax)+x_0-y_0|}{\rho}\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq D\left\{\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax-x_0e)|}{\rho_1}\right)\right]^{p_k}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[M\left(\frac{|t_{kn}(Ax-y_0e)|}{\rho_1}\right)\right]^{p_k}\right\}<D\left\{\frac{\varepsilon}{2D}+\frac{\varepsilon}{2D}\right\}=\varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğe göre

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[M\left(\frac{|x_0-y_0|}{\rho}\right)\right]^{p_k}<\varepsilon$$

yazılır. O halde

$$r_1\in\left\{r\in\mathbb{N}:\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[M\left(\frac{|x_0-y_0|}{\rho}\right)\right]^{p_k}<\varepsilon,n\in\mathbb{N}\right\}$$

olur. Buradan

$$\mathbb{N}\backslash S_1\cup S_2\subseteq\left\{r\in\mathbb{N}:\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[M\left(\frac{|x_0-y_0|}{\rho}\right)\right]^{p_k}<\varepsilon,n\in\mathbb{N}\right\}$$

bulunur. Buna göre

$$\left\{r\in\mathbb{N}:\frac{1}{h_r}\sum_{k\in \mathcal{I}_r}\left[M\left(\frac{|x_0-y_0|}{\rho}\right)\right]^{p_k}\geq\varepsilon,n\in\mathbb{N}\right\}\subseteq S_1\cup S_2\in\mathcal{I}$$

olur. Bu da

$$\mathcal{J}-\lim_{r}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in\mathcal{J}_r}\left[M\left(\frac{|x_0-y_0|}{\rho}\right)\right]^{p_k}=0$$

olduğunu gösterir. $k\to\infty$ için (p_k) dizisi p_0 noktasına yakınsayacağından

$$\left[M\left(\frac{|x_0-y_0|}{\rho}\right)\right]^{p_k}\to\left[M\left(\frac{|x_0-y_0|}{\rho}\right)\right]^{p_0}$$

olur. $\left[M\left(\frac{|x_0-y_0|}{\rho}\right)\right]^{p_0}=0$ olup $x_0=y_0$ elde edilir.

5.SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasının üçüncü bölümünde, ideal yakınsaklık ve ideal yakınsak dizi uzayları sonsuz matris ve Orlicz fonksiyonu bir araya getirilerek $\mathcal{I}-{c_0}^{\sigma}(M,A,p)$, $\mathcal{I}-c^{\sigma}(M,A,p)$, $\mathcal{I}-{\ell_\infty}^{\sigma}(M,A,p)$ dizi uzayları elde edilmiştir.

Tez çalışmasının dördüncü bölümünde üçüncü bölümde elde edilen dizi uzaylarına lacunary dizileri eklenerek $\mathcal{I}-N^0_{\theta,\sigma}(M,A,p)$, $\mathcal{I}-N_{\theta,\sigma}(M,A,p)$, $\mathcal{I}-N^{\infty}_{\theta,\sigma}(M,A,p)$ dizi uzayları elde edilmiştir. Bu dizi uzayları üzerinde bazı kapsama ilişkileri incelenmiştir. Benzer şekilde farklı dizi uzayları içinde bu kapsama ilişkileri gösterilebilir.

6. KAYNAKLAR

Balcı M., *Matematik Analiz,* **(1999)**.

Banach,S., *Theorie Des Operations Lineraies*, **(1932)**

Bayraktar M., *Fonksiyonel Analiz*, Gazi Kitapevi, **(2006)**.

Boss J., *Classical and Modern Methods in Summability*, **(2000).**

Connor. J.S, *The Statical and Strong p-Cesàro convergence of sequences***, (1988)**, 47-63

Connor,J., *On strong matrix summability with respectto a modulus and statical convergence*, **(1989)**,194-198.

Conway J., *A Course İn Functional Analiysis*, **(1990).**

Demirci K., *$\mathcal{I}$-limit superior and $\mathcal{I}$-limit inferior*, **(2001),** 165-172.

Fast H., *Sur la convergence statistique*. Colloquium Mathematicae, **(1951),** 2-241.

Freedman, A.R.,Sember, A.J., Raphael, M., Some Cesaro-Type summability spaces**, (1978),** 37,508-520

Fridy, J. A., *On statistical convergence*, Analysis, (**1985**), 301-313.

Gürdal, M. and Pehlivan, *The Statistical Convergence in 2-Banach Spaces*, Thai Journal of Mathematics, **(2004),** 107-113.

Gürdal, M. and Açık, *On $\mathcal{I}$-Cauchy sequences in 2-normed spaces*, Mathematical Inequalities and Applications, **(2008)**, 349-354.

Gürdal, *On ideal convergent sequences in 2-normed spaces*, Thai Journal Of Mathematics, **(2006)**, 85-91.

Kuratwski C., *Topologie*, **(1958)**.

Kamthan. P. K.Gupta, *Sequence Spacesand Series*, Marcel Dekker, New York, **(1980)**.

Kostyrko, P. Macaj, M., Salàt, T. $\mathcal{I}$-convergence, Real Analysis Exchange,669-686, (**2000**).

Kostyrko, P. Macaj, M., Salàt, T., Sleziaki M., *$\mathcal{I}$-convergence and extremal $\mathcal{I}$-limit points*, Math.Slovaca, (**2000**), 55,443-464.,

Krasnoelskii, ve Rutitskii, *Convex Functions and Orlicz Spaces*, **(1961).**

Kreyszig E., *Introductory Functional Analysis with Applications*, **(1989)**.

Lindenstrauss ve Tzafriri, *On Orlicz Sequence Spaces*, **(1971)**, 379-390

Lorentz,G.G., *A Contribution to the Theory of Divergent Sequences***, (1948)**,167-190.

Maddox, I.J., *Spaces of Strongly Summable Sequences*,Quart.J.Math., **(1967),** 345-355

Maddox, I. J. *Elements of Functional Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, **(1970)**.

Musayev B., Alp M., *Fonksiyonel Analiz,* **(2000**).

Nanda,S., *Matrix Transformations and Sequence Spaces,* **(1983).**

Niven, I.Zuckermann, H.S. and Montgomery, H.L. *An Introduction to the Theory of Numbers*, **(1991).**

Nuray, F. and Ruckle, W.H.*Generalized statistical convergence and convergence free spaces*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, (**2000**), 245(2).

Rath, D. and Tripaty, B. C. *On statistically convergence and statistically Cauchy sequences*, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, (**1994**), 381-386.

Savaş, E. Δ^m*-Strongly summable sequences spaces in 2-normed spaces,* **(2010)**.

Salàt, T. *On statistically convergent sequences of real numbers*, Mathematica Slovaca, **(1980),** 139-150.

Schaefer, P., *Infinite Matrces and Invariant Means***, (1972),** 104-110.

Schoenberg, “*The integrability of certain functions and related summability methods*,” The American Mathematical Monthly, **(1959)**, 361–375.

Steinhaus, H..*Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique*. Colloq Mathematics, **(1951)**, 73-74.

Şahiner, A., Gürdal, M., Saltan, S. and Gunawan, H. *Ideal convergence in 2-normed spaces*, Taiwan ese Journal of Mathematics, **(2007),** 1477-1484.

Tripathy, B.C., Choudhary,B., Hazarika,B., *Lacunary $\mathcal{I}$-convergent sequences*, **(2012)**, 473-482.

Ulusu, *Küme Dizilerinin Lacunary İstatistiksel Yakınsaklığı*, **(2013)**, 15-16.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	: Daştan Mahmut
Uyruğu	: T.C
Doğum tarihi ve yeri	:1986-Kangal
Telefon	: 05069885158
E-posta	: epsilon58@gmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Lisans	: Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü	22.06.2009
Lise	: Sivas Kongre Lisesi	2005

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2011-2016	Düzce Üniversitesi Rektörlüğü Personel Daire Başkanlığı	Bilgisayar İşletmeni
Şubat 2016-Eylül 2016	Düzce Adnan Menderes MTAL	Öğretmen
Eylül 2016	Konuralp MTAL	Öğretmen

Yabancı Dil

İngilizce