T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KESİRLİ İNTEGRALLER İLE İLGİLİ BAZI EŞİTSİZLİKLER

DOKTORA TEZİ

HATİCE YALDIZ

EYLÜL 2016

DÜZCE

KABUL VE ONAY BELGESİ

Hatice YALDIZ tarafından hazırlanan KESİRLİ İNTEGRALLER İLE İLGİLİ BAZI EŞİTSİZLİKLER isimli lisansüstü tez çalışması, Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 15.08.2016 tarih ve 2016\643 sayılı kararı ile oluşturulan jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

(Tez Danışmanı)
Doç.Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Düzce Üniversitesi

Prof. Dr. Nesip AKTAN
Necmettin Erbakan Üniversitesi

Yard. Doç. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Doç. Dr. Emrah Evren KARA
Düzce Üniversitesi

Yard. Doç. Dr. Arzu ÖZKOÇ
Düzce Üniversitesi

Tezin Savunulduğu Tarih :21.09.2016

ONAY

Bu tez ile Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Hatice YALDIZ'ın Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora derecesini almasını onamıştır.

Doç. Dr. Resul KARA
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

21 Eylül 2016

Hatice YALDIZ

Matematik Sevenlere

TEŞEKKÜR

Lisans, Yüksek Lisans ve Doktora öğrenimim boyunca bilgisini, emeğini ve bu tezin hazırlanması süresince gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok saygıdeğer danışman hocam,

Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA' ya;

tez çalışmam boyunca değerli katkılarını esirgemeyen her konuda yardımcı ve yol gösterici olan ve içten desteğini her zaman yanımda hissettiğim

Prof. Dr. Nesip AKTAN' a,

geniş tecrübesiyle ve bilgileriyle bana ışık tutan

Prof. Dr. Ferhan Merdivenci ATICI' ya ;

ve tezimin hazırlanışında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen

Yard. Doç. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ' e

şükranlarımı sunarım.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme; özellikle Allah sevgisi ile dualarını eksik etmeyen anneme ebediyette olan babama, halam Hilal YALDIZ' a ve duaları her daim üzerimde olan geniş aileme, Düzce de kaldığım süre boyunca maddi ve manevi destek veren Tülay AKSUNGUR' a, çalışma arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez çalışması, Tübitak 2214-A Doktora Sırası Yurt Dışı Araştırma Bursu ile desteklenmiştir. Tübitak Kurumuna sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

21 Eylül 2016 **Hatice Yaldız**

İÇİNDEKİLER **Sayfa**

ŞEKİL LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}^{+}$	Pozitif Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^{+}$	Pozitif Reel Sayılar Kümesi
I	$\mathbb{R}$ ' de Bir Aralık
I°	I 'nın İçi
$L_1[a,b]$	$[a,b]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
f', Df	f Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
$\mathbb{T}$	Zaman Skalası
$\mathbb{N}_a$	$\mathbb{N}_a = \{a, a+1, \ldots\}$
Δ	Delta Operatörü
∇	Nabla Operatörü
f^{Δ}	f Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Delta Türevi
f^{∇}	f Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Nabla Türevi
$Erf(x)$	Hata Fonksiyonu
B	Beta Fonksiyonu
Γ	Gamma Fonksiyonu
$J_{a^+}^{\alpha} f(x)$	α. Riemann-Liouville Sağ Taraflı Kesirli İntegrali
$J_{b^-}^{\alpha} f(x)$	α. Riemann-Liouville Sol Taraflı Kesirli İntegrali
$\Delta_a^{-\nu} f(x)$	ν. Delta Kesirli Toplamı
${}_{b-1}\nabla^{-\nu} f(x)$	ν. Nabla Kesirli Toplamı

ÖZET

KESİRLİ İNTEGRALLER İLE İLGİLİ BAZI EŞİTSİZLİKLER

Hatice YALDIZ
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi
Danışman: Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Eylül 2016, 100 sayfa

Kesirli türev ve kesirli integral kavramları ilk olarak Liouville tarafından ortaya atıldı. Bu fikrin temel kaynağı; kesirli türev ve kesirli integral kavramı türev ve integrallerin sadece tamsayılar için var mıdır sorusundan yola çıkılarak ortaya çıkmıştır. Daha sonra Euler kesirli türevi yeniden ele aldı ve 17. yüzyıldan itibaren Leibniz, Euler, Lagrange, Abel, Liouville ve diğer birçok matematikçinin, kesirli mertebe için diferansiyel ve integrasyonun genelleştirilmesine dayanan öncü çalışmalarıyla gelişmeye başlanmıştır. Keyfi mertebeli diferansiyel ve integrasyon kavramları, tamsayı mertebeli türev ve n-katlı integralleri birleştiren ve genelleştiren kavramlardır. Buradan hareketle, bu tez dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, kesirli integraller hakkında genel bilgiler verilip daha sonra temel kavramlardan bahsedilecektir. İkinci bölümde kesirli integraller hakkında bilgiler verilecek olup; kesirli integral ve kesirli türevin elde edilişi ve bu konu hakkındaki çözüm yöntemleri, üçüncü bölümde ise, eldeki verilerden yararlanılarak üç başlık altında toplanan bulgular, son bölümde ise, sonuçlar ve öneriler verilecektir.

Anahtar sözcükler: Ayrık Kesirli İntegral, Ayrık Konveks Fonksiyon, $\varphi-$Konveks Fonksiyon, Hermite-Hadamard Eşitsizliği, Hermite-Hadamard-Fejer Tipli Eşitsizlik, Kesirli İntegral, Kesirli Türev, Konveks Fonksiyon.

ABSTRACT

SOME INEQUALITIES ASSOCIATED WITH FRACTIONAL INTEGRALS

Hatice YALDIZ
Duzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics
Doctoral Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
September 2016, 100 pages

Fractional derivatives and fractional integral notions were first raised by Liouville. The main source of this idea; fractional derivatives and fractional integral concept has emerged from the question: “Is there derivatives and integrals for only integers.” Then, Euler dealt with fractional derivatives again and Leibniz, Euler, Lagrange, Abel, Liouville and many other mathematicians have begun to develop the fractional derivatives since 17th century as their pioneering work based on differential and integration to be generalized to fractional order. Arbitrary order differential and integration concepts are the notions which combine and generalize integer-order derivatives and n-fold integrals. Thus, this thesis consists of four chapters. In the first chapter, of how the concepts of fractional integral and fractional derivative is given. In the second chapter, all the necessary definitions and basic theorems for this study have been given. The third section, benefiting from the available data the findings summarized under three headings are given. In the fourth chapter, results and recommendations will be given.

Keywords: Convex Function, Discrete Convex Function, Discrete Fractional Integral, $\varphi-$Convex Function, Fractional Derivative, Fractional Integral, Hermite-Hadamard Inequality, Hermite-Hadamard-Fejer Type Inequality.

EXTENDED ABSTRACT

SOME INEQUALITIES ASSOCIATED WITH FRACTIONAL INTEGRALS

Hatice YALDIZ
Duzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics
Doctoral Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
September 2016, 100 pages

1. INTRODUCTION:

Fractional derivatives and fractional integral notions were first raised by Liouville. The main source of this idea; Fractional derivatives and fractional integral concept has emerged from the question: "Is there derivatives and integrals for only integers." Then, Euler dealt with fractional derivatives again and Leibniz, Euler, Lagrange, Abel, Liouville and many other mathematicians have begun to develop the fractional derivatives since 17th century as their pioneering work based on differential and integration to be generalized to fractional order. Arbitrary order differential and integration concepts are the notions which combine and generalize integer-order derivatives and n-fold integrals.

The theory of fractional calculus for functions of the natural numbers, however, is far less developed. To the author's knowledge, significant work did not appear in this area until the mid-1950's, with the majority of interest shown within the past thirty years. Diaz and Osler published their 1974 paper introducing a discrete fractional difference operator defined as an infinite series, a generalization of the binomial formula for the $N\,th$-order difference operator Δ^N. However, their definition differs fundamentally from the one presented in this dissertation (they agree only for integer order differences). In 1988, Gray and Zhang introduced the type of fractional difference operator used here; they developed Leibniz'formula, a limited composition rule and a version of a power rule for differentiation. However, they dealt exclusively with the nabla (backward) difference operator and therefore offer results distinct from those presented in this dissertation, where the delta (forward) difference operator is used exclusively.

A recent interest in discrete fractional calculus has been shown by Atici and Eloe, who in [6] discuss properties of the generalized falling function, a corresponding power rule for fractional delta-operators and the commutivity of fractional sums. They present in “Atıcı and Eloe 2009” more rules for composing fractional sums and differences but leave many important cases unresolved. Moreover, Atici and Eloe pay little attention in “Atıcı and Eloe 2007-2009” to function domains or to lower limits of summation and differentiation, two details vital for a rigorous and correct treatment of the power rule and the fractional composition rules. Their neglect leads to domain confusion and, worse, to false or ambiguous claims.

2. MATERIAL AND METHODS:

The monograph named “Fractional Integrals and Derivatives” has been published by Stefan G. Samko, Anatoly A. Kilbas, Oleg I. Marichev and in this monograph the additionally, function types, continous-discontinuity states have been discussed in detail. By means monography, fractional integrals have been examined and many mathematicians continue to study on different works based on this.

Gottfried Leibniz and Guilliaume L’Hopital sparked initial curiosity into the theory of fractional calculus during a 1695 correspondence on the possible value and meaning of noninteger-order derivatives. In one exchange, L’Hopital inquired, "then what would be the one-half derivative of x?" to which Leibniz responded that the answer "leads to an apparent paradox, from which one day useful consequences will be drawn" (see “Miller and Ross 1974” and “Oldham and Spainer 1974”). Leibniz may well have toyed with several seemingly correct ways to define a one-half order derivative but was forced to cede they lead to unequivalent results. In any case, by the late nineteenth century, the combined efforts of a number of mathematicians- most notably Liouville, Grünwald, Letnikov and Riemann- produced a fairly solid theory of fractional calculus for functions of a real variable. Though several viable fractional derivatives were proposed, the so-called Riemann-Liouville and Caputo derivatives are the two most commonly used today. Mathematicians have employed this fractional calculus in recent years to model and solve a variety of applied problems. Indeed, as Podlubney outlines in Podlubny 1999, fractional calculus aids significantly in the fields of viscoelasticity, capacitor theory,electrical circuits, electro-analytical chemistry, neurology, diffusion, control theory and statistics.

3. RESULTS AND DISCUSSIONS:

We briefly summarize; we have established the left hand side of the Hermite-Hadamard-Fejer type inequalities for the class of functions whose derivatives in absolute value at certain powers are convex functions by using fractional integrals.

We establish integral inequalities of Hermite-Hadamard type involving Riemann-Liouville fractional integrals for φ-convex functions and some new inequalities of right-hand side of Hermite-Hadamard type are given for functions whose first derivatives absolute values φ-convex functions via Riemann-Liouville fractional integrals.

We introduce the definition of a convex real valued function f defined on the set of integers, $\mathbb{Z}$. We prove that f is convex on $\mathbb{Z}$ if and only if $\Delta^2 f \geq 0$ on $\mathbb{Z}$. As a first application of this new concept, we state and prove discrete Hermite–Hadamard inequality using the basics of discrete calculus (i.e., the calculus on $\mathbb{Z}$). Second, we state and prove the discrete fractional Hermite–Hadamard inequality using the basics of discrete fractional calculus. We close the paper by defining the convexity of a real valued function on any time scale.

4. CONCLUSION AND OUTLOOK:

The goal of this dissertation is to apply the theory of fractional calculus on the inequalities.

1. GİRİŞ

1.1. AMAÇ VE KAPSAM

Kesirli türev ve kesirli integral kavramları ilk olarak Liouville tarafından ortaya atıldı. Bu fikrin temel kaynağı; kesirli türev ve kesirli integral kavramı türev ve integrallerin sadece tamsayılar için var mıdır sorusundan yola çıkılarak ortaya çıkmıştır. Daha sonra Euler kesirli türevi yeniden ele aldı ve 17. yüzyıldan itibaren Leibniz, Euler, Lagrange, Abel, Liouville ve diğer birçok matematikçinin, kesirli mertebe için diferansiyel ve integrasyonun genelleştirilmesine dayanan öncü çalışmalarıyla gelişmeye başlanmıştır. Keyfi mertebeli diferansiyel ve integrasyon kavramları, tamsayı mertebeli türev ve n-katlı integralleri birleştiren ve genelleştiren kavramlardır.

Kesirli diferansiyel teorisi çeşitli madde ve işlemlerin kalıtsal özelliklerinin tanımlanmasında kullanılabilecek çok iyi bir araçtır. Bu ise tamsayı mertebeli türevlerle karşılaştırıldığı zaman, kesirli türevler için önemli bir avantajdır. Kesirli türevlerin bu avantajı nesnelerin mekanik ve elektriksel özelliklerinin matematiksel modellemelerinde, akışkanlar teorisi, elektrik devreleri, elektro-analitik kimya gibi diğer birçok alanda kullanılmaktadır.

Analitik eşitsizlikler yaygın olarak matematik ve birçok uygulamalı matematiğin çeşitli dallarında gelişiminin arkasındaki temel itici güçlerinden biri olarak kabul edilmektedir. Eşitsizlikler ile ilgili çalışmaların son on yıldan fazladır matematiğin birçok farklı alanlardaki uygulamalara nasıl büyük bir katkı sağlandığı açıkça ortadadır.

Şimdi de kesirli hesaplamaların uygulamalı alanlardaki etkisinden bahsedilsin. Kesirli hesaplamalar; bildiğimiz hesaplamalardan üç yüzyıl önce var olmasına rağmen bilim ve mühendislik toplulukları arasında çok popüler değildir. Bu konunun en çekici yanı, kesirli türev ve kesirli integralin yerel (yani nokta) özelliği olmamasıdır. Buradan hareketle, kesirli türev ve kesirli integral kavramının yerel olmaması etkisi bizi düşündürmüştür. Diğer bir deyişle, bu konu doğanın gerçekliğini daha iyi açıklayacaktır. Bunun yanı sıra, bilim ve mühendislik topluluklarında olduğu gibi popüler olabilmesi için temel doğayı daha iyi bir yolla anlamak ve tanımlamak için daha farklı boyutlar eklenir. Belki de kesirli hesaplamaların kullanışlı olmasının sebebi;

doğayı anlamada ve konuşmada daha etkili olmasıdır. Geçtiğimiz üç yüzyılda matematikçiler tarafından araştırılmıştır. Son birkaç yıldır mühendislik, bilim ve ekonominin bazı uygulama alanlarına taşınmıştır. Buna rağmen son çalışmalarda özellikle Fractal Bilim Teorisinin yerel operatörlerdeki kesirli türev tanımı üzerinedir. Önümüzdeki on yıl içinde bu konu üzerine uygulamalar görülecektir. Bu çalışma okuyucuya doğa kanunlarını açıklamada yardımcı olacaktır.

30 Eylül 1695 de L'Hospital, Leibniz'e bir mektup yazdı. Mektupta L'Hospital, Leibniz'e fonksiyonun $\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n}$ 'ci dereceden türev formülünde $n=\frac{1}{2}$ ise çözüm nasıl olurdu sorusunu yöneltti. Leibniz'in $n=\frac{1}{2}$ durumu mantığa ters düşse de bir gün çok kullanışlı sonuçların ortaya çıkacağı cevabını verdi. Üç yüzyıl süren çalışmalarla en az yarı doğru üzerinde ispatlandı. Özellikle, yirminci yüzyılda sayısız uygulamalar bulundu. Yukarıdaki bilgilerin ışığı altında; bu çalışmada kesirli integraller için yeni birçok integral eşitsizlikleri; yani Hermite-Hadamard eşitsizliği, Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliği gibi integral eşitsizlikleri elde edilecektir. Burada elde edilen sonuçların daha önceki çalışmaların bir genellemesi olarak sunulacaktır.

Şimdi de biraz ayrık kesirli integrallerden bahsedecek olursak, doğal sayıların oluşturduğu fonksiyonlar için kesirli analiz teorisi çok fazla gelişmemiştir. Yazarların tecrübesi bu alanda 1950' lerin sonuna kadar çalışmalar oluşturmamıştır. Geçtiğimiz otuz yıl içinde bu alana büyük bir ilgi oluşmaya başlanmıştır.

Diaz ve Olser, 1974 yılında sonsuz bir seri için tanımlanan ayrık kesirli fark operatörü içeren, N.dereceden sıralı fark operatörü (Δ^N) için binom formülünün genelleştirilmesini yayınladılar. Fakat, onların tanımı, tezleri içinde ifade edilenden farklıydı. (Sadece sıralı fark operatöründe tamsayılar için hem fikirlerdi). 1988 yılında, Gray ve Zhang kesirli fark operatörünü tanıttı. Onlar, türev için kuvvet kuralının bir versiyonunu ve sınırlı bileşke kuralını Leibnizin formülünden geliştirdiler. Ama, onlar özellikle nabla(geri) fark operatörünü ele aldılar ve bundan dolayı delta(ileri) fark operatörünü kullandıklarında tezlerinde ifade ettiklerinden farklı sonuçlarla karşılaştılar.

Ayrık kesirli analizde merak edilenler, Atıcı ve Eloe tarafından falling fonksiyonun genelleştirilmesine ait özellikler, kesirli toplamın birleşme özelliği ve kesirli delta operatörü için kuvvet kuralı gösterildi. Bu konu üzerinde ki çalışmalar hala devam etmektedir.

Konveks fonksiyonlar için literatürde birçok eşitsizlik elde edilmiştir. Bu eşitsizliklerin en önemlilerinden biri de Hermite-Hadamard eşitsizliğidir. Bu eşitsizlik üzerine (Azpeitia 1994; Gill 1997; Dragomir 2000; Kirmaci 2004; Ozdemir et al. 2010) çalışmaları olmuştur. Ayrıca kesirli integraller için birçok eşitsizlik üzerine çalışmalar yapılmıştır. Bunlardan bazıları (Dahmani 2010; Sarikaya et al. 2012; Noor 2014) yazarları ve başka birçok araştırmacı tarafından çeşitli genelleştirmeler ve yeni sonuçlar elde edilmiştir.

İntegral ve diferansiyel kavramı elementer kalkülüsdeki çalışmalara benzemektedir. Örneğin, $f(x)=x^2$ fonksiyonunun birinci mertebeden integrali $\int f(x)dx=\frac{1}{3}x^3+c$ ve aynı fonksiyonun ikinci mertebeden integrali

$$\int\left[\int f(x)dx\right]dx=\frac{1}{12}x^4+c_1x+c_2$$

dır. Benzer olarak $\frac{d}{dx}f(x)=2x$ ve $\frac{d^2}{dx^2}f(x)=2$ dır. Bununla birlikte, $f(x)$ fonksiyonun $\frac{1}{2}-$ i mertebeden integrali ve türevi olabilir mi? Nasıl tanımlayabiliriz?

Kesirli Hesaplamaların Başlangıcı

Kesirli hesaplamaların başlangıcı $n-$ci mertebeden bir tamsayı için türevin anlamının n tam sayı olmadığında da olabilir mi sorusunun sorulmasıyla başlamıştır. Bu soru 30 Eylül 1695 de L'Hopital tarafından ortaya atılmıştır. Bir gün Leibniz mektubunda $\frac{D^n x}{Dx^n}$ şeklinde $f(x)=x$ fonksiyonun $n-$ci türevini bu sembol ile gösterilmiştir. L'Hopital da adi bir şekilde $n=\frac{1}{2}$ olduğunda sonucun ne olacağını sormuş ve Leibniz de cevaben "bir paradoks gibi bir gün yararlı bir sonuç olarak ortaya çıkacaktır" demiştir. Bu konu birçok büyük matematikçinin ilgisini çekmiştir. Bunlardan bazıları, Euler, Laplace, Fourier, Lacroix, Abel, Riemann ve Liouville gibi matematikçilerdir.

1819 da Lacroix kesirli türev düşüncesini bir makale olarak ilk yayımlayan matematikçidir. Onun vermiş olduğu tanımı aşağıdaki şekilde verilsin:

m pozitif tamsayı olmak üzere $y=x^m$ fonksiyonu alınsın. $n-$ci mertebeden türevini Lacroix

$$\frac{d^n y}{dx^n}=\frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n},m\geq n \tag{1.1}$$

şeklinde bulmuş ve Legendre' nin Γ sembolünü kullanarak genelleşmiş faktöriyel için

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n} \tag{1.2}$$

şeklinde yazılmıştır. $m=1$ ve $n=\frac{1}{2}$ için Lacroix (1.2) ifadesinden

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} y}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \tag{1.3}$$

olarak elde etmiştir. Bununla birlikte kesirli operatörlerin ilk kullanımı Lacroix tarafından değil Abel tarafından 1823 yılında verilmiştir. Abel tautochrone probleminin formülasyonundan ortaya çıkan bir integral denkleminin çözümünde kesirli hesaplamalar uygulamıştır.

Yıllarca birçok matematikçi kendi notasyonlarını ve yaklaşımlarını kullanarak tamsayı olmayan mertebeden integral ve türev fikrine uygun birçok tanım vermişlerdir. Bu tanımlamalardan en popüler olarak ortaya çıkan Riemann-Liouville nin tanımı olmuştur. İlginç olan bir kesirli türevin Riemann-Liouville tanımı Lacroix tarafından elde edilen (1.3) denklemine benzer sonuç olmuştur. Riemann-Liouville kesirli integral ve türevin tanımına bakmadan önce bazı önemli matematiksel kavramları verilsin: Bunlar sırasıyla Gamma, beta, error(hata), Mittag-Leffler ve Mellin-Ross fonksiyonlarıdır.

Gamma Fonksiyonu

$x \in \mathbb{R}^+$ için

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \tag{1.4}$$

olarak tanımlanır. Gamma fonksiyonun önemli bir özelliği

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \qquad x \in \mathbb{R}^+ \tag{1.5}$$

$$\Gamma(x) = (x-1)!, \qquad x \in \mathbb{N} \tag{1.6}$$

dır. (1.6) dan $\Gamma(1)=1$ dır. Şimdi $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ olduğu gösterilsin, (1.4) den

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt$$

yazılır. $t=y^2$ dönüşümü yapılırsa, $dt=2ydy$ olacağından

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^\infty e^{-y^2}dy \tag{1.7}$$

olur. (1.7) ye denk olarak

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^\infty e^{-x^2}dx \tag{1.8}$$

yazılabilir. (1.7) ve (1.8) çarpımından,

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy$$

iki katlı integrale dönüşür. Bu integrali hesaplamak için kutupsal koordinatlara geçilirse,

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty e^{-r^2}rdrd\theta=\pi$$

yani

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

elde edilmiş olur. Tam olmayan Gamma Fonksiyonu

$$\Gamma^*(\nu,t)=\frac{1}{\Gamma(\nu)t^\nu}\int_0^t e^{-x}x^{\nu-1}dx, \qquad \operatorname{Re}\nu>0 \tag{1.9}$$

şeklinde tanımlanır.

Beta Fonksiyonu

$x, y \in \mathbb{R}^{+}$ için

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt \tag{1.10}$$

olarak tanımlanır. Beta fonksiyonu gamma fonksiyonu cinsinden

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \qquad x, y \in \mathbb{R}^{+} \tag{1.11}$$

olarak yazılır.

Hata Fonksiyonu

$x \in \mathbb{R}$ için

$$Erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt \tag{1.12}$$

olarak tanımlanır. Hata fonksiyonun tümleyeni $Erf_c(x)$ olup

$$Erf_c(x)=1-Erf(x) \tag{1.13}$$

dır.

Mittag-Leffler Fonksiyonu

Mittag-Leffler fonksiyonu e^x üstel fonksiyonun bir genelleştirmesi olup kesirli hesaplamalarda önemli bir role sahiptir. Bir ve iki parametreli Mittag-Leffler fonksiyonun gösterimi

$$E_{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \alpha > 0 \tag{1.14}$$

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \alpha > 0, \beta > 0 \tag{1.15}$$

kuvvet serisi olarak tanımlanır. (1.15) deki seri (1.14) ün bir genelleştirmesidir. Bu genelleştirme 1953 te Agarwal tarafından tanımlanmıştır. (1.15) de verilen tanımın bir sonucu olarak,

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + xE_{\alpha,\alpha+\beta}(x) \tag{1.16}$$

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \beta E_{\alpha,\beta+1}(x) + \alpha x \frac{d}{dx} E_{\alpha,\beta+1}(x) \tag{1.17}$$

yazılır. (1.17) eşitliğinden

$$\frac{d}{dx} E_{\alpha,\beta+1}(x) = \frac{1}{\alpha x}\left[E_{\alpha,\beta}(x) - \beta E_{\alpha,\beta+1}(x)\right]$$

dır. Dolayısıyla β yerine $\beta - 1$ yazılırsa

$$\frac{d}{dx} E_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\alpha x}\left[E_{\alpha,\beta-1}(x) - (\beta - 1)E_{\alpha,\beta}(x)\right] \tag{1.18}$$

olur. Şimdi (1.16) eşitliği ispatlansın. Bunun için (1.15) yardımıyla

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} = \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{\Gamma(\alpha(k+1) + \beta)}$$

$$= \sum_{k=-1}^{\infty} x \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + (\alpha + \beta))} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + x\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + (\alpha + \beta))}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\beta)} + xE_{\alpha,\alpha+\beta}(x)$$

elde edilir. Burada $E_{\alpha,\beta}(0)=1$dır. α ve β nın bazı özel değerleri için Mittag-Leffler fonksiyonu bilinen bazı fonksiyonlara indirgenir. Örneğin,

$$E_{1,1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

$$E_{\frac{1}{2},1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)} = e^{x^2} Erf_c(-x)$$

$$E_{1,2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+2)} = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^x - 1}{x}$$

dır.

Mellin-Ross Fonksiyonu

Mellin-Ross fonksiyonu e^{at} nin kesirli integrali bulunduğu zaman ortaya çıkmıştır. Bu fonksiyon tam olmayan gamma ve Mittag-Leffler fonksiyonların ikisi ile ilişkilidir. Mellin-Ross fonksiyonu

$$E_t(\nu,a) = t^{\nu} e^{at} \Gamma^*(\nu,t) \tag{1.19}$$

şeklinde tanımlanır.

$$E_t(\nu,a) = t^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k+\nu+1)} = t^{\nu} E_{1,\nu+1}(at) \tag{1.20}$$

olarakta yazılır.

Riemann-Liouville Kesirli İntegrali

Burada ilk olarak daha çok kullanılan ${}_cD_x^{-\nu} f(x)$, $x-$ekseni boyunca keyfi $\nu-$ci mertebeden $f(x)$ fonksiyonun kesirli integrali olarak tanımlansın. Bu notasyonda ν

pozitif reel sayı; c ve x de integrasyon limitleridir.

ν negatif olmayan bir reel sayı olsun. f, $J^{'} = (0,\infty)$ da noktasal sürekli ve $J = [0,\infty]$ nın herhangi bir sonlu alt aralığında integrallenebilir olsun. Bu durumda $t > 0$ için $\nu -$i mertebeden f nin Riemann-Liouville kesirli integrali

$$ {}_cD_x^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x-t)^{\nu-1} f(t)\, dt, \nu > 0 \tag{1.21} $$

olarak tanımlanır. (1.21) ifadesi birçok yolla elde edilebilir. Diferansiyel denklemler teorisinde kullanılan bir yaklaşım göz önüne alınsın. Bunun için

$$ \begin{aligned} & y^{(n)}(x) = f(x) \\ & y(c) = 0, y^{'}(c) = 0, \ldots, y^{(n-1)}(c) = 0 \end{aligned} \tag{1.22} $$

başlangıç değer problemi göz önüne alınsın.

$$ H(x,t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \tag{1.23} $$

Cauchy fonksiyonunu kullanacak olursak,

$$ y(x) = \int_c^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\, dt \tag{1.24} $$

nın (1.22) denkleminin bir tek çözümü olduğu iddia edilsin. Bunu göstermek için tümevarım yöntemi kullanılsın:

$n = 1$ için

$$ y^{'}(x) = f(x), y(c) = 0 \tag{1.25} $$

olur. (1.25) denklemini çözersek,

$$\int_c^x y^{'}(t)dt = \int_c^x \frac{(x-t)^{1-1}}{(1-1)!} f(t)dt$$

olup $y(c)=0$ den

$$y(x)=\int_c^x f(t)dt$$

elde edilir. n için (1.24) ifadesini doğru olduğunu kabul edilsin ve $n+1$ için doğru olduğu gösterilsin.

$$\begin{aligned} & y^{(n+1)}(x) = f(x) \\ & y(c) = y^{'}(c) = \ldots = y^{(n)}(c) = 0 \end{aligned} \tag{1.26}$$

denklemi göz önüne alınsın. $y^{(n+1)}(x)=\left(y^{'}\right)^{(n)}(x)$ olduğundan $u(x)=y^{'}(x)$ alınırsa (1.26) denklemi

$$\begin{aligned} & u^{(n)}(x) = f(x) \\ & u(c) = u^{'}(c) = \ldots = u^{(n-1)}(c) = 0 \end{aligned} \tag{1.27}$$

olur. O halde n için doğru olduğundan,

$$\int_c^x y^{'}(t)dt = \int_{z=c}^{x}\left(\int_{t=c}^{z} \frac{(z-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt\right)dz$$

integral sınırının değişimi için Dirichlet formülü kullanılırsa,

$$y(x)-y(c) = \int_{t=c}^{z}\left(\int_{z=c}^{x} \frac{(z-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dz\right)dt$$

$$=\int_c^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)dt$$

olur. Burada $y(c)=0$ olduğundan

$$y(x)=\int_c^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)dt$$

elde edilir ki bu da (1.24) denkleminin bir çözümüdür. (1.22) de $f(x)$, y ’nin $n-$ci mertebeden türevi olduğundan $f(x)$ in $n-$ci mertebeden integrali olarak $y(x)$’i gösterebiliriz. Yani

$$_cD_x^{-n} f(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_c^x (x-t)^{n-1} f(t)dt \tag{1.28}$$

yazılır. Son olarak, n yerine herhangi bir ν reel sayısını ve faktöriyel yerine de gamma fonksiyonu yazılırsa (1.28) ifadesi (1.21) Riemann-Liouville kesirli integral tanımına dönüşür.

Burada $c=0$ olduğundan $D^{-\nu}$ notasyonu kullanılacaktır.

Örnek 1.1.1. $\operatorname{Re}\nu>0,\ \mu>-1$ olmak üzere $D^{-\nu}x^{\mu}$ hesaplayınız.

Çözüm. Riemann-Liouville kesirli integral tanımından

$$D^{-\nu}x^{\mu}=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^x (x-t)^{\nu-1}t^{\mu}dt$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^x \left(1-\frac{t}{x}\right)^{\nu-1} x^{\nu-1}t^{\mu}dt$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^1 (1-u)^{\nu-1} x^{\nu-1}(xu)^{\mu}\,xdu,\left(u=\frac{t}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\nu)} x^{\mu+\nu} \int_0^1 u^{\mu} (1-u)^{\nu-1} du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\nu)} x^{\mu+\nu} B(\mu+1, \nu) = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)} x^{\mu+\nu}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$D^{-\nu} x^{\mu} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)} x^{\mu+\nu}, \qquad \nu > 0, \mu > -1, x > 0 \tag{1.29}$$

dır. Benzer olarak, $\nu-$ci mertebeden k sabitinin kesirli integrali

$$D^{-\nu} k = \frac{k}{\Gamma(\nu+1)} x^{\nu} \tag{1.30}$$

dır. Özel olarak $\nu = \frac{1}{2}$ ise

$$D^{-\frac{1}{2}} x^0 = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$$

$$D^{-\frac{1}{2}} x^1 = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} x^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{x^3}{\pi}}$$

$$D^{-\frac{1}{2}} x^2 = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} x^{\frac{5}{2}} = \frac{16}{15}\sqrt{\frac{x^5}{\pi}}$$

yazılabilir.

Yukardaki örneklerden genellikle kesirli integrallerin hesaplanmasının kolay olduğu görülür. Ancak bu doğru değildir. Gerçekten, bazı kesirli integralleri; üslü ifadeler, sinüs ve cosinüs gibi elementer fonksiyonlar bile büyük işlevsel fonksiyonlara yol açabilir. Şimdi bunlarla ilgili olarak aşağıdaki örnekler verilebilir.

a sabit olmak üzere, $f(t)=e^{at}$ fonksiyonu ele alınsın. (1.21) tanımı kullanarak,

$$D^{-\nu}e^{at} = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^t (t-y)^{\nu-1}e^{ay}dy, \quad \nu>0 \tag{1.31}$$

yazılır. Burada $x=t-y$ dönüşümü yapılırsa, (1.31) ifadesi

$$D^{-\nu}e^{at} = \frac{e^{at}}{\Gamma(\nu)}\int_0^t x^{\nu-1}e^{-ax}dx, \quad \nu>0 \tag{1.32}$$

olur. Açıkça, (1.32) ifadesi bir elementer fonksiyon değildir. (1.19) ve (1.20) Mellin-Ross fonksiyonlar cinsinden (1.32) ifadesi

$$D^{-\nu}e^{at} = E_t(\nu,a) = t^{\nu}E_{1,\nu+1}(at)$$

şeklinde yazılabilir. Benzer olarak, kesirli integrallerin tanımının direk uygulamasıyla ve bazı değişken değiştirmelerle, aşağıdaki sonuçlar verilebilir:

$$D^{-\nu}\cos(at) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^t y^{\nu-1}\cos[a(t-y)]dy = C_t(\nu,a), \operatorname{Re}\nu>0$$

$$D^{-\nu}\sin(at) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^t y^{\nu-1}\sin[a(t-y)]dy = S_t(\nu,a), \operatorname{Re}\nu>0,$$

Özellikle, $\nu=\frac{1}{2}$ alırsak

$$x=\sqrt{\frac{2at}{\pi}}, \qquad c(x)=\int_0^x \cos t^2 dt \text{ ve } s(x)=\int_0^x \sin t^2 dt$$

olmak üzere,

$$D^{-\frac{1}{2}}e^{at} = E_t\left(\frac{1}{2},a\right) = a^{-\frac{1}{2}}e^{at}Erf\left(at\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$D^{-\frac{1}{2}}\cos(at) = C_t\left(\frac{1}{2},a\right) = \sqrt{\frac{2}{a}}\left[c(x)\cos(at) - s(x)\sin(at)\right]$$

$$D^{-\frac{1}{2}}\sin(at) = S_t\left(\frac{1}{2},a\right) = \sqrt{\frac{2}{a}}\left[c(x)\sin(at) - s(x)\cos(at)\right]$$

yazılır. Bazı durumlarda, diğer trigonometrik fonksiyonların kesirli integrallerinin hesaplaması için basit trigonometrik özdeşlikler kullanılır. Örneğin,

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

için

$$D^{-\nu}\cos^2(at) = \frac{t^{\nu}}{2\Gamma(\nu+1)} + \frac{1}{2}C_t(\nu,2a)$$

$$D^{-\nu}\sin^2(at) = \frac{t^{\nu}}{2\Gamma(\nu+1)} - \frac{1}{2}C_t(\nu,2a)$$

yazılır.

Daha çok kesirli integraller Riemann versiyonu

$$_{c}D_x^{-\nu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_c^t (t-x)^{\nu-1} f(x)dx$$

ve Liouville versiyonuda

$$_{-\infty}D_x^{-\nu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_{-\infty}^t (t-x)^{\nu-1} f(x)dx$$

ile gösterilir. $c = 0$ için

$$
{}_0D_x^{-\nu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-x)^{\nu-1} f(x)\, dx
$$

ifadesine Riemann-Liouville kesirli integrali denir. α ve β skaler sayıları için

$$
D[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha Df(t) + \beta Dg(t)
$$

olduğu kolayca gösterilir. Benzer olarak kesirli integraller de lineerlik özelliği kolayca gösterilebilir.

Kesirli integrallerinin elde edilişi için farklı bir yöntem olarak aşağıdaki şekilde de elde edilebilir. Bunun için n tane integrali alarak

$$
{}_cD_x^{-n} f(t) = \int_c^x dx_1 \int_c^{x_1} dx_2 \int_c^{x_2} dx_3 \ldots \int_c^{x_{n-1}} f(t)\, dt \tag{1.33}
$$

şeklinde yazılsın. (1.33) deki f fonksiyonu $x < b$ için $[c,b]$ üzerinde sürekli olduğu kabul edilsin. (1.33) ifadesi $K_n(x,t)$, n, x ve t in bir fonksiyonu olan bir çekirdek olmak üzere

$$
\int_c^x K_n(x,t) f(t)\, dt \tag{1.34}
$$

şeklinde bir tek integral olarak yazılabilir. n tam sayı olmadığında bile $K_n(x,t)$ anlamlı fonksiyon olacağı gösterilsin. Böylece, $\operatorname{Re}\nu > 0$ tüm ν için ${}_cD_x^{-\nu} f(t)$'i

$$
{}_cD_x^{-\nu} f(t) = \int_c^x K_\nu(x,t) f(t)\, dt
$$

şeklinde tanımlansın.

Şimdi bunları ispatlamak için $x < b$ olmak üzere $G(x,t)$, $[c,b] \times [c,b]$ üzerinde sürekli ise

$$\int_c^x dx_1 \int_c^{x_1} G(x,t)dt = \int_c^x dt \int_t^x G(x_1,t)dx_1$$

yazılabilir. Özel olarak $G(x_1,t) = f(t)$ ise

$$\int_c^x dx_1 \int_c^{x_1} f(t)dt = \int_c^x f(t)dt \int_t^x dx_1$$
$$= \int_c^x (x-t) f(t)dt$$

yazılır. Böylece iki integral bir tek integrale dönüşmüş olur. $n=3$ ise bu durumda

$$_cD_x^{-3} f(t) = \int_c^x dx_1 \left[\int_c^{x_1} (x_1 - t)\, f(t)dt \right]$$

olur. Benzer işlemler altında

$$_cD_x^{-3} f(t) = \int_c^x f(t)dt \int_t^x (x_1 - t)dx_1$$
$$= \int_c^x \frac{(x-t)^2}{2} f(t)dt$$

olacaktır. Dolayısıyla bu işlem n kez uygulandığında (1.33) ifadesi

$$K_n(x,t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

olmak üzere (1.34) indirgenmiş olacaktır. Böylece

$$_cD_x^{-n} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_c^x (x-t)^{n-1} f(t)dt \tag{1.35}$$

olarak yazılır. (1.35) ifadesinin sağ taraf sıfırdan büyük her n reel sayısı için anlamlı olacağından $\nu -$ci mertebeden f 'nin kesirli integralini

$$ {}_cD_x^{-\nu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x-t)^{\nu-1} f(t)\,dt, \quad \operatorname{Re}\nu > 0 $$

yazabiliriz.

Şimdi lineer diferansiyel denklemler teorisindeki yaklaşımlar yöntemiyle kesirli integralini yeniden elde edilsin. Bunun için $P_i(x)$ bir I aralığında sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$ L = D^n + P_1(x)D^{n-1} + \ldots + P_n(x)D^0 \tag{1.36} $$

lineer diferansiyel operatörü ele alınsın. Bu durumda f, I aralığında sürekli ve C, I da keyfi bir nokta ise

$$ \begin{aligned} &Ly(x) = f(x) \\ &D^k y(c) = 0, 0 \le k \le n-1 \end{aligned} \tag{1.37} $$

lineer diferansiyel sistemini göz önüne alınsın. (1.37) denkleminin $\forall x \in I$ için bir tek çözümünün H, L ile ilgili bir taraflı Green fonksiyonu olmak üzere

$$ y(x) = \int_c^x H(x,\xi)\, f(\xi)\,d\xi \tag{1.38} $$

verilsin.

$Ly(x) = 0$ homojen denkleminin herhangi temel çözüm kümesi $\{\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)\}$ ise H Green fonksiyonu

$$H(t,\xi)=\frac{(-1)^{n-1}}{W(\xi)}\begin{vmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) & \dots & \phi_n(x) \\ \phi_1(\xi) & \phi_2(\xi) & \dots & \phi_n(\xi) \\ D\phi_1(\xi) & D\phi_2(\xi) & \dots & D\phi_n(\xi) \\ D^2\phi_1(\xi) & D^2\phi_2(\xi) & \dots & D^n\phi_n(\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D^{n-2}\phi_1(\xi) & D^{n-2}\phi_2(\xi) & \dots & D^{n-2}\phi_n(\xi) \end{vmatrix}$$

yazılır. Burada W Wronskian determinant olup

$$W(\xi)=\begin{vmatrix} \phi_1(\xi) & \phi_2(\xi) & \dots & \phi_n(\xi) \\ D\phi_1(\xi) & D\phi_2(\xi) & \dots & D\phi_n(\xi) \\ D^2\phi_1(\xi) & D^2\phi_2(\xi) & \dots & D^n\phi_n(\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D^{n-1}\phi_1(\xi) & D^{n-1}\phi_2(\xi) & \dots & D^{n-1}\phi_n(\xi) \end{vmatrix}$$

dır. Şimdi kabul edilsin ki L, n-inci mertebeden bir operatör olsun. Yani

$$L \equiv D^n$$

olsun. Bu durumda (1.37) denklemi

$$\begin{aligned} &D^n y(x) = f(x) \\ &D^k y(c) = 0, 0 \le k \le n-1 \end{aligned} \tag{1.39}$$

ve $\{1, x, x^2, ..., x^{n-1}\}$ de $D^n y(x) = 0$ denkleminin temel çözüm kümesidir. Böylece $H(x,\xi)$ bir taraflı Green fonksiyonu olarak

$$H(x,\xi)=\frac{(-1)^{n-1}}{W(\xi)}\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ 1 & \xi & \xi^2 & \dots & \xi^{n-1} \\ 0 & 1 & 2\xi & \dots & (n-1)\xi^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (n-1)! \end{vmatrix}$$

olur. $W(\xi)$ Wronski determinant ise

$$W(\xi)=\begin{vmatrix} 1 & \xi & \xi^2 & \ldots & \xi^{n-1} \\ 0 & 1 & 2\xi & \ldots & (n-1)\xi^{n-2} \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & (n-1)(n-2)\xi^{n-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & (n-1)! \end{vmatrix}$$

dır. Buradan kolayca görülür ki Wronski determinant ξ den bağımsız olup

$$W(\xi)=\prod_{k=0}^{n-1} k!=(n-1)!!$$

olur. $H(x,\xi)$; x 'in, $n-1$-inci dereceden bir polinomu olarak yazılabilir. Bu fonksiyonun katsayıları

$$\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!!}\left[(-1)^{n+1}(n-2)!!\right]=\frac{1}{(n-1)!}$$

dır. Ancak direk bir hesaplamayla $k=0,1,..,(n-2)$ için

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k}H(x,\xi)\,\Big|_{x=\xi}=0$$

dır. Böylece

$$H(x,\xi)=\frac{1}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1} \tag{1.40}$$

olur. (1.38) ve (1.39) dan

$$y(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_c^x (x-\xi)^{n-1} f(\xi)d\xi \tag{1.41}$$

yazılır. f , y 'nin $n-$ci türevi olduğu için (1.41) ifadesini f 'in $n-$ci integrali olarak

$$y(x)=D^{-n}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_c^x (x-t)^{n-1}f(t)dt \tag{1.42}$$

yazılır. (1.42) ifadesinin sağ tarafı n, pozitif tam sayı ve $\operatorname{Re} n>0$ içinde anlamlıdır. Dolayısıyla elementer Laplace dönüşümünden biliyoruz ki (1.39) denklemi $Y(s)$ ve $F(s)$, $y(t)$ ve $f(t)$ in Laplace dönüşümleri olmak üzere

$$s^n Y(s)=F(s)$$

yazılır. Böylece

$$Y(s)=s^{-n}F(s)$$

olup konvolüsyon teoremi yardımıyla

$$y(t)=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^t (t-\xi)^{n-1}f(\xi)d\xi$$

bulunur. Burada tekrar Riemann-Liouville kesirli integralini elde etmiş oluruz.

Kesirli Türev

$D=\frac{d}{dx}$ türev operatörü ise $n\in Z^+$ için $D^n f(x)$, $f(x)$ in $n-$ci mertebeden türevi olarak bilinir. Bununla birlikte, n pozitif tam sayı değilse $\operatorname{Re}\nu>0$ için D^ν sembolü kullanılacaktır.

Kabul edelim ki $\operatorname{Re}\nu>0$ olsun. n, $\operatorname{Re}\nu$ dan büyük en küçük tam sayı ve $\upsilon=n-\nu$ olsun. Bu durumda $0<\operatorname{Re}\nu\le 1$ dır. $x>0$ için $\nu-$ci mertebeden $f(x)$ in kesirli türevini

$$_cD_x^\nu f(x)={}_cD_x^n\left[{}_cD_x^{-\upsilon}f(x)\right] \tag{1.43}$$

olarak tanımlanacaktır.

Örneğin, $c=0$ ve $\mu>-1$ için $f(x)=x^{\mu}$ ise (1.43) ifadesinde

$$ {}_0D_x^{\nu} f(x) = {}_0D_x^{n}\left[{}_0D_x^{-\upsilon} x^{\mu}\right] \tag{1.44}$$

olur. O halde ilk olarak $x>0$, $\operatorname{Re}\nu>0$ için

$$\begin{aligned} {}_0D_x^{-\nu} x^{\mu} &= \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^x (x-t)^{\nu-1} t^{\mu}\,dt \\ &= \frac{B(\mu+1,\nu)}{\Gamma(\nu)} x^{\mu+\nu} \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)} x^{\mu+\nu} \end{aligned} \tag{1.45}$$

dır. Böylece (1.44) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} {}_0D_x^{\nu} x^{\mu} &= D^{n}\left[\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)} x^{\mu+\nu}\right] \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu-n+1)} x^{\mu+\nu-n} \end{aligned} \tag{1.46}$$

bulunur. $\upsilon=n-\nu$ olduğundan (1.46) ifadesi

$$ {}_0D_x^{\nu} x^{\mu} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\nu+1)} x^{\mu-\nu}, \qquad \operatorname{Re}\nu>0, x>0 \tag{1.47}$$

yazılır. (1.45) ve (1.47) karşılaştırıldığında $\mu>-1$, $x>0$ ve herhangi bir u için

$$ {}_0D_x^{u} x^{\mu} = D^{n}\left[\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-u+1)} x^{\mu-u}\right] \tag{1.48}$$

olarak yazabiliriz.

Şimdi (1.43) kesirli türevin varlığı sorusuna geri dönülsün.

$$ {}_cD_x^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x-t)^{\nu-1} f(t)\,dt \tag{1.49} $$

Riemann kesirli integrali $\operatorname{Re}\nu > 0$ ve f parçalı sürekli ise vardır. Bununla birlikte, bu kesirli türevin varlığını garanti etmek için yeterli değildir. Örneğin, f sürekli ancak türevli olmasın (Weierstrass tipindeki fonksiyonlar gibi) ve $\nu = 1$ olsun. Bu durumda

$$ {}_cD_x^{-1} f(x) = \int_c^x f(t)\,dt $$

dır. $\upsilon = 1$ ise $n = 2$ ($\upsilon = n - \nu$ olduğundan) ve (1.43) den

$$ {}_cD_x^{1} f(x) = {}_c D_x^{2}\left[{}_cD_x^{-1} f(x)\right] = D^2 \int_c^x f(t)\,dt = Df(x) $$

olur. Ancak hipotezden $f(x)$ türevlenemezdir.

Diğer yandan, f, $n-$inci mertebeden sürekli türevlere sahip ise (1.43) ifadesi $x > 0$ için vardır.

Bu iddiayı ispat etmek için (1.49) ifadesinde $\lambda = \frac{1}{\nu}$ olmak üzere

$$ t = x - y^{\lambda} \tag{1.50} $$

değişken değiştirmesi yapılsın. O halde (1.49) ifadesi

$$ {}_cD_x^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \int_0^{(x-c)^{\nu}} f\left(x - y^{\lambda}\right) dy $$

olarak yazılır. Buradan da $D^n f(x)$ sürekli olarak kabul edildiğinde $x > c$ için

$$
{}_cD^n\left[{}_cD_x^{-\nu} f(x)\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{D^k f(c)}{\Gamma(\nu-n+k+1)}(x-c)^{\nu-n+k}+\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\int_0^{(x-c)^\nu}\frac{\partial^n}{\partial x^n}f\left(x-y^{\lambda}\right)dy
$$

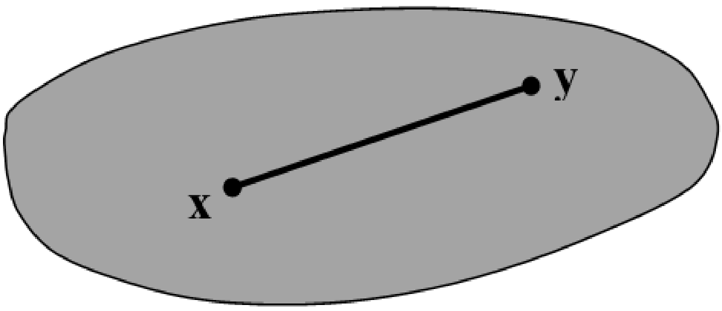
vardır.

1.2. GENEL KAVRAMLAR

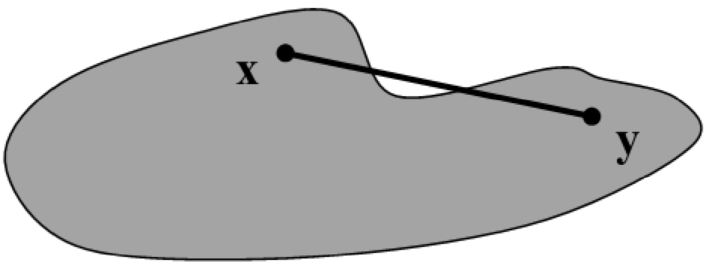
Tanım 1.2.1. (Konveks Küme) L bir lineer uzay $A\subseteq L$ ve $x,y\in A$ keyfi olmak üzere

$$
B=\{z\in L\;:\;z=\alpha x+(1-\alpha)y,\quad 0\le\alpha\le 1\}\subseteq A
$$

ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $z\in B$ ise $z=\alpha x+(1-\alpha)y$ eşitliğinde x ve y' nin katsayıları için $\alpha+(1-\alpha)=1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $(1-\alpha)$, α yerine $\alpha+\beta=1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan α,β reel sayılarını alabiliriz. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir (Bayraktar 2000).



Şekil 1.1. Konveks Küme



Şekil 1.2. Konveks Olmayan Küme

Tanım 1.2.2. (J-Konveks Fonksiyon) I, $\mathbb{R}$'de bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna I üzerinde Jensen anlamında konveks veya $J-$ konveks fonksiyon denir (Mitrinović 1970).

Tanım 1.2.3. (Kesin J-Konveks Fonksiyon) I, $\mathbb{R}$'de bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $x \neq y$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

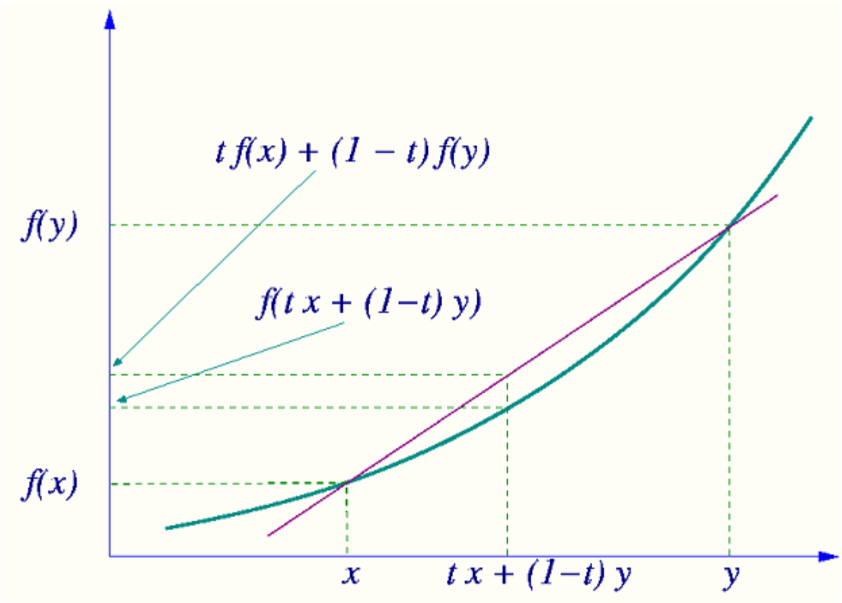
oluyorsa f fonksiyonuna I üzerinde kesin $J-$ konveks fonksiyon denir. (Mitrinović 1970).

Tanım 1.2.4. (Konveks Fonksiyon) I, $\mathbb{R}$'de bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \tag{1.51}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Eğer (1.51) eşitsizliği $x \neq y$ ve $\alpha \in (0,1)$ için kesin ise bu durumda f fonksiyonuna kesin konvekstir denir. (Pečarić 1992).

I üzerinde tanımlı bir f fonksiyonunun kesin konveksliğinin geometrik anlamı $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarını içeren I üzerindeki doğru parçasının f'nin grafiğinin üst kısımda yer almasıdır. (Bakınız Şekil 1.3)



Şekil 1.3. Aralık Üzerinde Konveks Fonksiyon

Tanım 1.2.5. $E : \mathrm{R}^n \rightarrow \mathrm{R}^n$ bir operatör olmak üzere her $x, y \in M$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$\lambda E_x + (1-\lambda) E_y \in M$$

oluyorsa $M \subseteq \mathrm{R}^n$ kümesine $E-$ konveks küme denir. (Youness 1999).

Önerme 1.2.1. Her $M \subset \mathrm{R}^n$ konveks kümesi $E-$konvekstir. $E : \mathrm{R}^n \rightarrow \mathrm{R}^n$ özdeş operatörü verildiğinde ispat açıktır.

Tanım 1.2.6. $E : \mathrm{R}^n \rightarrow \mathrm{R}^n$ bir operatör olmak üzere her $x, y \in M$ ve $\lambda, \alpha \in [0,1]$ için

$$\lambda(\alpha x + E_x) + (1-\lambda)(\alpha y + E_y) \in M$$

oluyorsa $M \subseteq \mathrm{R}^n$ kümesine güçlü $E-$konveks küme denir. (Youness ve Emam 2005).

Önerme 1.2.2. $E(M)$ kümesi konveks ve $E(M) \subseteq M$ olsun. Bu durumda, M kümesi $E-$konvekstir.

İspat. Varsayılsın ki $x, y \in M$ olsun. Bu durumda, $E(x), E(y) \in E(M)$ dir. $E(M)$ nin konveksliğinden her bir $0 \le \lambda \le 1$ için

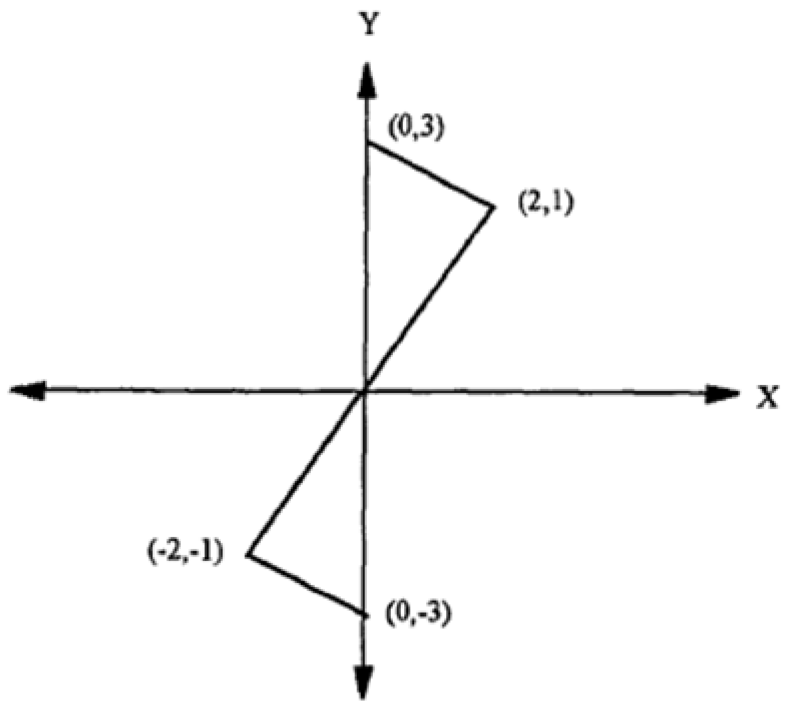
$$(1-\lambda)E(x) + \lambda E(y) \in E(M) \subseteq M$$

elde edilir. O halde, M kümesi $E-$ konvekstir.

$E-$ konveks olup konveks olmayan kümelere örnek verilebilir, Önerme 1.2.2 için bir örnek verilebilir.

Örnek 1.2.1. $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ fonksiyonu $E(x, y) = (0, y)$ olarak verilsin. Bu durumda, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ge 0$ ile $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 1$ olmak üzere M kümesi

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x, y) = \lambda_1(0,0) + \lambda_2(2,1) + \lambda_3(0,3)\}$$
$$\cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x, y) = \lambda_1(0,0) + \lambda_2(0,-3) + \lambda_3(-2,-1)\}$$



Şekil 1.4. Örnek Çizim

şeklinde tanımlansın. O halde M kümesi $E-$konvekstir. Fakat konveks değildir.

Örnek 1.2.2. $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ fonksiyonu $E(x,y) = (2y/3 - x/3, y/3 + 4x/3)$ olacak şekilde tanımlı olsun. Örnek 1.2.1 de verilen M kümesi göz önüne alınırsa $E(M) = M$ dir. Ayrıca bu küme konveks fakat $E-$konveks değildir. Çünkü $0 < \lambda < 1$ için

$$\lambda E(0,3) + (1-\lambda) E(-2,-1) \notin M$$

dir. (bkz Şekil 1.4)

Tanım 1.2.7. M, $E-$konveks bir küme ve M üzerinde $E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bir operatör olmak üzere her $x, y \in M$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda E_x + (1-\lambda) E_y) \leq \lambda f(E_x) + (1-\lambda) f(E_y)$$

oluyorsa $M \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna $E-$ konveks fonksiyon denir (Youness 1999).

Uyarı 1.2.1. Her konveks fonksiyon M konveks küme üzerinde, $E-$konveks fonksiyondur. Burada E nin özdeş fonksiyon olarak alınması yeterlidir.

Örnek 1.2.3. $M \subset \mathbb{R}^n$ olacak şekilde

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x,y) = a_1(0,0) + a_2(0,3) + a_3(2,1)\}$$

$a_i > 0$ verilsin. $\sum_{i=1}^{3} a_i = 1$ ve $E(x,y) = (0,y)$ olacak şekilde $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ fonksiyonu tanımlı olsun. Bu fonksiyon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ile tanımlı

$$f(x,y) = \begin{cases} x^3, & y < 1 \text{ ise,} \\ xy^3, & y \geq 1 \text{ ise,} \end{cases}$$

M üzerinde $E-$ konvekstir. Fakat konveks değildir.

Teorem 1.2.1. (Hermite-Hadamard Eşitsizliği) I, $\mathbb{R}$'de bir aralık, $a, b \in I$ ve $a < b$

olmak üzere $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{1.52}$$

olur (Pečarić 1992).

Teorem 1.2.2. (Hölder Eşitsizliği) $a=(a_1,...,a_n)$ ve $b=(b_1,...,b_n)$ reel veya kompleks sayıların iki $n-$lisi olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

olmak üzere

(a) $p>1$ ise,

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

(b) $p<0$ veya $q<0$ ise,

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k b_k| \geq \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Mitronović 1970).

Teorem 1.2.3. (İntegraller İçin Hölder Eşitsizliği) $p>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olsun. f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitronović 1970).

Benzer şekilde iki katlı integraller için Hölder eşitsizliği aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\int_a^b \int_a^b |f(x,y)g(x,y)|dxdy \leq \left(\int_a^b \int_a^b |f(x,y)|^p dxdy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b \int_a^b |g(x,y)|^q dxdy\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Ayrıca Hölder eşitsizliğinin bir sonucu olan power mean eşitsizliği de aşağıdaki gibi ifade edilir.

Sonuç 1.2.1. (Power Mean Eşitsizliği) $q \geq 1$ olsun. f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)| \, dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Benzer şekilde, iki katlı integraller için power mean eşitsizliği aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\int_a^b \int_a^b |f(x,y)g(x,y)|dxdy \leq \left(\int_a^b \int_a^b |f(x,y)| \, dxdy\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b \int_a^b |f(x,y)||g(x,y)|^q dxdy\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Reel sayılar için temel eşitsizliklerden bir tanesi de üçgen eşitsizliğidir.

Teorem 1.2.4. (Üçgen Eşitsizliği İntegral Versiyonu) f, $[a,b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \qquad (a < b)$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitronović 1993).

Tanım 1.2.8. Bir $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu için, Δ ve ∇ operatörleri her $t\in\mathbb{Z}$ olmak üzere,

$$\Delta f(t)=f(t+1)-f(t)$$

ve

$$\nabla f(t)=f(t)-f(t-1),$$

şeklinde tanımlıdır. Hatırlatalım ki $\Delta^2 f(t)=\Delta(\Delta f(t))$ dir.

Tanım 1.2.9. Γ, Gamma fonksiyonudur ve falling faktöriyel

$$t^{(\mu)}=\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-\mu)}$$

olarak tanımlıdır. $t+1-\mu\in\{0,-1,\ldots,-k,\ldots\}$ olduğunu varsayarsak, bu durumda $t^{(\mu)}=0$ dır ve $s,\nu\in\mathbb{R}$ olmak üzere aşağıdaki özdeşlikler sağlanır.

(i) $\nu^{\underline{\nu}}=\Gamma(\nu+1)$

(ii) $\Delta s^{\underline{\nu}}=\nu s^{\underline{\nu-1}}$

(iii) $s^{\underline{\nu+1}}=(s-\nu)s^{\underline{\nu}}$

dır (Atıcı ve Eloe 2007).

Tanım 1.2.10. (ν. Nabla Kesirli Toplamı) $\nu\in\mathbb{R}\setminus\{\ldots,-2,-1,0\}$ den

$$\nabla_a^{-\nu} f(t)=\sum_{s=a}^{t}\frac{(t-\rho(s))^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)}f(s)$$

dır (Atıcı ve Eloe 2007).

Tanım 1.2.11. (ν. Delta Kesirli Toplamı) $\nu\in\mathbb{R}\setminus\{\ldots,-2,-1,0\}$ den

$$ {}_b\Delta^{-\nu} f(t) = \sum_{s=t+\nu}^{b} \frac{(s-\sigma(t))^{(\nu-1)}}{\Gamma(\nu)} f(s) $$

dır (Atıcı ve Eloe 2007).

Tanım 1.2.12. α , reel bir sayı olsun. Bu durumda $t \in \mathbb{R} \setminus \{\ldots,-2,-1,0\}$ ve $0^{\overline{\alpha}} = 0$ dan

$$ t^{\overline{\alpha}} = \frac{\Gamma(t+\alpha)}{\Gamma(t)} $$

ifadesi t in α rising olarak bilinir (Atıcı ve Eloe 2007).

Teorem 1.2.6. (Ortalama Değer Teoremi) f , $[a,b]$ aralığında sürekli ve (a,b) açık aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise,

$$ f^{'}(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} $$

olacak şekilde (a,b) aralığında en az bir c sayısı vardır.

Teorem 1.2.7. ($\mathbb{T}$ üzerinde Ortalama Değer Teoremi) f , $[a,b]$ aralığında sürekli ve $[a,b)$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $\xi, \tau \in [a,b)$ varsa

$$ f^{\Delta}(\tau) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f^{\Delta}(\xi) $$

ifadesi sağlanır (Bohner ve Peterson 2001).

2. KESİRLİ İNTEGRAL

2.1. RİEMANN-LİOUVİLLE KESİRLİ İNTEGRALİ

Birinci kısımdaki açıklamalardan sonra, kesirli integral kavramı, kesirli analizin matematiksel gelişimi ile başlar. Fonksiyonların sınıfını dikkatlice belirleyen bu operatör fonksiyoneller için Riemann-Liouville kesirli integrallerin resmi bir tanımı ile başlamıştır. Çok sayıda örnekler, bazı önemsiz ve çok temel olmayan ifadeler verilmiş ve tartışılmıştır. Bu analiz $E_t(\nu, a)$, $C_t(\nu, a)$ ve $S_t(\nu, a)$ gibi bazı yeni fonksiyonlar, fonksiyonel hesabı ve kısmi diferansiyel denklemlerde önemli bir rol oynamaktadır. (Bu fonksiyonların bazı özellikleri de ayrıntılı olarak verilecektir.)

Bazı teknikler daha karmaşık fonksiyonların kesirli integrallerinin hesaplanmasında kolaylık sağlamıştır. İleri ki bölümlerde Dirichlet formulü ve bunun sonuçları ile bazı analizleri düşünülür. En önemlisi kesirli integraller için üslü ifade kuralının kullanılmasıdır. Yani, tüm μ ve ν pozitif sayısı için ${}_0D_t^{-\mu}\left(D_t^{-\nu}\right) = {}_0D_t^{-m-\nu}$ gösterilecektir. Ayrıca bu özellik elementer olmayan fonksiyonların kesirli integrallerini elde etmek için kullanılacaktır.

Kesirli İntegralin Tanımı

Daha önce belirttiğimiz gibi amacımız Riemann-Liouville kesirli integralini çeşitli yönleriyle araştırmaktadır.

x pozitif bir sayı ve f de $[0, x]$ de sürekli olsun. Bu durumda $\nu \geq 1$ ise $\forall t \in [0, x]$ için

$$\int_0^t (t-\xi)^{\nu-1} f(\xi)\, d\xi \tag{2.1}$$

Riemann integrali olarak vardır. Elbette (2.1) daha genel sonuçlar altında var olacaktır. Örneğin, f, $[0, x]$ üzerinde sürekli ve $0 < \operatorname{Re}\nu < 1$ ise orjinin bir komşuluğunda

$-1<\lambda<0$ için t^{λ} gibi davranıyorsa (2.1) genelleşmiş Riemann integrali vardır. Bununla birlikte aşağıdaki tanım bizim amacımız için yeterince geniştir.

Tanım 2.1.1. $\mathrm{Re}\,\nu>0$ ve f, $J' = (0,\infty)$ aralığında parçalı sürekli ve $J=[0,\infty]$'un herhangi sonlu alt aralığında integrallenebilir olsun. Bu durumda, $t>0$ için f'in $\nu-$ i mertebeden kesirli integrali

$$ {}_0D_t^{-\nu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-\xi)^{\nu-1} f(\xi)\, d\xi \tag{2.2} $$

ile tanımlanır.

Bu tanımdan bahsedilsin. Yukarıda ifade edildiği gibi eğer $0<\mathrm{Re}\,\nu<1$ ise (2.2) bir genelleşmiş integraldir. Orjinin bir komşuluğunda ($-1<\mu<0$) t^{μ} veya $\ln t$ gibi davranan fonksiyonları karşılamak için f'in $J' = (0,\infty)$ aralığında sadece parçalı sürekli olması gerekir. Tanımda tanımlanan fonksiyonların sınıfı C ile gösterilecektir. Örneğin, $\lambda>-1$, $0<a<t$, $f(t)=|t-a|^{\lambda}$ gibi fonksiyonlar bu C sınıfına girecek şekilde genişletilebilir. Yine bir örnek olarak, $\mu>-1$, $f(t)=t^{\mu}$ ise bu durumda

$$ {}_0D_t^{-\mu} t^{\mu} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)} t^{\mu+\nu}, t>0 \tag{2.3} $$

dır.

$\mu+\mathrm{Re}\,\nu$ negatif olabileceğinden, kesirli integralin tanımından $t>0$ uyarısının neden önemli olduğu örnekte görülür. (Elbette, $\mu\geq 0$ ise (2.3) ifadesi J de süreklidir)

Kesirli hesap ile ilgili olmayan küçük matematiksel komplikasyonları önlemek için ve genellikle daha az hatayla pratik olması açısından ν reel olarak kabul edilecektir. Zaman zaman $\nu>0$ yerine formüllerde sadece $\mathrm{Re}\,\nu>0$ geçerli olduğunu göstereceğiz. (2.2) ifadesi Stieltjes integrali olarak

$$ {}_0D_t^{-\nu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \int_0^t f(\xi) d\alpha(\xi) $$

yazılır. Burada

$$ \alpha(\xi) = -(t-\xi)^{\nu} \tag{2.4} $$

$[0,t]$ üzerinde monoton artan fonksiyondur. f, $[0,t]$ sürekli ise birinci ortalama değer teoreminden bazı $x \in [0,t]$ için

$$ \int_0^t f(\xi) d\alpha(\xi) = f(t) t^{\nu} $$

olur. Böylece

$$ \lim_{t \to 0} {}_0D_t^{-\nu} f(t) = 0 \tag{2.5} $$

dır. Eğer f sürekli değilse, (2.5) in doğru olması gerekmez. Gerçekten, $\nu > 0$, $\mu > -1$ için (2.3) ifadesinden

$$ \lim_{t \to 0} {}_0D_t^{-\nu} t^{\mu} = \begin{cases} 0 & , \mu+\nu > 0 \\ \Gamma(\mu+1), & \mu+\nu = 0 \\ \infty & , \mu+\nu < 0 \end{cases} $$

dır.

Ayrıca, (2.3) ifadesinden f'in sürekli olması bile $t=0$ da ${}_0D_t^{-\nu} f(t)$'nin diferansiyellenebilirliğini garanti etmez. (Örneğin, $\mu > 0$ ve $\mu + \nu < 1$ olsun)

Zaman zaman C'in bazı alt sınıflarını dikkate almak uygun olabilir. Örneğin daha sonraki bölümlerde $\eta(t)$ analitik ve $\lambda > -1$ olmak üzere $t^{\lambda}\eta(t)$ şeklindeki fonksiyonlar içeren bir fonksiyonlar sınıfı tanımlanacaktır. Böyle durumlarda f üslü mertebeden olması gerekir. Esas olarak (2.2) ifadesindeki integrali ele almaktan daha önce yapıldığı gibi ${}_0D_t^{-\nu}$ üzerinde indisleri 0 ile t arasındaki indisleri kaldırarak basitleştireceğiz.

Kesirli İntegrallerin Bazı Örnekleri

Kesirli integrallerin teorik analizine girişmeden önce bir kaç elementer fonksiyonun kesirli integrali hesaplanılsın. (2.3) ifadesinde

$$D^{-\nu}t^{\mu} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)}t^{\mu+\nu}, \quad \nu>0, \mu>-1, t>0 \tag{2.6}$$

olduğunu göstermiştik. Özellikle, $\mu=0$ ise sabit K nın $\nu-$i mertebeden kesirli integrali

$$D^{-\nu}K = \frac{K}{\Gamma(\nu+1)}t^{\nu}, \quad \nu>0 \tag{2.7}$$

dır.

a sabit olmak üzere $f(t)=e^{at}$ fonksiyonu ele alınsın. e^{at},C sınıfında olduğu aşikardır. O halde,

$$D^{-\nu}e^{at} = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^t (t-\xi)^{\nu-1}e^{a\xi}d\xi, \qquad \nu>0 \tag{2.8}$$

dır. (2.8) ifadesinde $x=t-\xi$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$D^{-\nu}e^{at} = \frac{e^{at}}{\Gamma(\nu)}\int_0^t x^{\nu-1}e^{-ax}dx, \quad \nu>0 \tag{2.9}$$

olur. Açıkça, (2.9) bir elementer fonksiyon değildir. Ancak tam olmayan gamma fonksiyonu olarak bilinen işlevsel bir fonksiyon ile ilgilidir. $\mathrm{Re}\,\nu>0$ için $\gamma^*(\nu,t)$ gamma fonksiyonu

$$\gamma^*(\nu,t)=\frac{1}{\Gamma(\nu)t^\nu}\int_0^t \xi^{\nu-1}e^{-\xi}d\xi \tag{2.10}$$

olarak tanımlanabilir. Böylece (2.9) ifadesini

$$D^{-\nu}e^{at}=t^\nu e^{at}\gamma^*(\nu,at) \tag{2.11}$$

olarak yazabiliriz.

(2.11) ifadesinin sağ tarafı üstel ifadenin kesirli integrali olduğundan, bu fonksiyon kesirli hesaplamalarda ortaya çıkması şaşırtıcı olmayacaktır. O halde $E_t(\nu,a)$

$$E_t(\nu,a)=t^\nu e^{at}\gamma^*(\nu,at) \tag{2.12}$$

olarak tanımlanır.

Kesirli integralin tanımının direk uygulanmasından

$$D^{-\nu}\cos at=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^t \xi^{\nu-1}\cos a(t-\xi)d\xi, \qquad \nu>0 \tag{2.13}$$

ve

$$D^{-\nu}\sin at=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^t \xi^{\nu-1}\sin a(t-\xi)d\xi, \qquad \nu>0 \tag{2.14}$$

yazılır. (2.13) ve (2.14) ifadelerinin sağ taraflarını sırasıyla, $C_t(\nu,a)$ ve $S_t(\nu,a)$ olarak tanımlanır. Böylece (2.12), (2.13) ve (2.14) den $\nu>0$ için

$$D^{-\nu}e^{at}=E_t(\nu,a)$$

$$D^{-\nu}\cos at=C_t(\nu,a) \tag{2.15}$$

$$D^{-\nu}\sin at=S_t(\nu,a)$$

şeklinde formulize edilebilir. Özel olarak , $\nu = \frac{1}{2}$ için $Erf(x)$ hata fonksiyonu olmak üzere $x = \sqrt{\frac{2at}{\pi}}$ ve $c(x)$ ve $s(x)$ sıklık integralleri olmak üzere

$$D^{-\frac{1}{2}} \cos at = C_t\left(\frac{1}{2}, a\right) = \sqrt{\frac{2}{a}}\left[(\cos at)c(x) + (\sin at)s(x)\right] \tag{2.16}$$

ve

$$D^{-\frac{1}{2}} \sin at = S_t\left(\frac{1}{2}, a\right) = \sqrt{\frac{2}{a}}\left[(\sin at)c(x) - (\cos at)s(x)\right] \tag{2.17}$$

yazılır. Diğer yandan,

$$s(x) = \int_0^x \sin t^2 dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!}$$

ve

$$c(x) = \int_0^x \cos t^2 dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$$

$$\int_0^{\infty} \sin(x^a) dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2a}\right)}{a}$$

trigonometrik fonksiyonların kesirli integrallerini hesaplamak için bazı basit trigonometrik özdeşliklerden yararlanılır. Örneğin,

$$\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 = 1 - 2\sin^2 \theta$$

dan,

$$D^{-\nu} \cos^2 at = \frac{t^{\nu}}{2\Gamma(\nu+1)} + \frac{1}{2} C_t(\nu, 2a) \tag{2.18}$$

ve

$$D^{-\nu}\sin^2 at = \frac{t^{\nu}}{2\Gamma(\nu+1)} - \frac{1}{2}C_t(\nu, 2a) \tag{2.19}$$

bulunur. Şimdi $a > t > 0$ için $f(t) = (a-t)^{\lambda}$ fonksiyonu ele alınsın. $f \in C$ olup tanımdan

$$D^{-\nu}(a-t)^{\lambda} = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^t (t-\xi)^{\nu-1}(a-\xi)^{\lambda}\,d\xi \tag{2.20}$$

yazılır. (2.20) integralinde $x = \dfrac{t-\xi}{a-\xi}$ dönüşümü yapılırsa,

$$D^{-\nu}(a-t)^{\lambda} = \frac{(a-t)^{\lambda+\nu}}{\Gamma(\nu)}\int_0^{\frac{t}{a}} x^{\nu-1}(1-x)^{-\nu-\lambda-1}dx$$

elde edilir. Ancak sağdaki integral tam olmayan beta fonksiyonu olup

$$D^{-\nu}(a-t)^{\lambda} = \frac{1}{\Gamma(\nu)}(a-t)^{\lambda+\nu}B_{\frac{t}{a}}(\nu-\lambda-\nu) \tag{2.21}$$

yazılır. Özel olarak $a=1$, $\nu = \frac{1}{2}$ ve $\lambda = -\frac{1}{2}$ alırsak, direk integralde

$$D^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-t}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\ln\frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}}, \quad 0 < t < 1 \tag{2.22}$$

bulunur. Şimdi, $f(x) = \ln x$ fonksiyonu ele alınsın. $f \in C$ olup $\nu -$i mertebeden kesirli integrali

$$D^{-\nu}\ln t = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^t (t-\xi)^{\nu-1}\ln\xi d\xi, \quad \nu > 0$$

dır. Burada $\xi = tx$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$D^{-\nu} \ln t = \frac{t^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)} \ln t + \frac{t^{\nu}}{\Gamma(\nu)} \int_0^1 (1-x)^{\nu-1} \ln x dx \tag{2.23}$$

olur. B beta fonksiyonu ve F digamma fonksiyonu olmak üzere

$$\begin{gathered} \int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1} \ln x dx = B(\mu,\nu)\left[F(\mu) - F(\mu+\nu)\right] \\ \left(F(x) = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \right) \end{gathered} \tag{2.24}$$

dır. Böylece (2.24) de $\mu = 1$ alırsak, $\gamma -$ Euler sabiti olmak üzere

$$D^{-\nu} \ln t = \frac{t^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)} \left[\ln t - \gamma - F(\nu+1)\right] \tag{2.25}$$

elde edilir. Özel olarak $\nu = \frac{1}{2}$ ise, $F\left(\frac{3}{2}\right) = 2 - \lambda - \ln 4$ ve

$$D^{-\frac{1}{2}} \ln t = \frac{2t^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \left[\ln 4t - 2\right] \tag{2.26}$$

olur.

Şimdi, $f(t) = e^{-\frac{1}{t}}$ fonksiyonu göz önüne alınsın. Bu fonksiyon $t = 0$ da analitik değildir. $\lambda > -1$, $f(t) = t^{\lambda} e^{-\frac{a}{t}}$ şeklinde daha genel bir fonksiyonun kesirli integrali hesaplansın. Tanımda, $\nu > 0$ ve $t > 0$ için

$$D^{-\nu}\left[t^{\lambda} e^{-\frac{a}{t}}\right] = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-\xi)^{\nu-1} \xi^{\lambda} e^{-\frac{a}{\xi}} d\xi$$

olur. $\xi = \dfrac{t}{x+1}$ değişken değiştirmesi yapılırsa, $\nu > 0$, $\lambda > -1$, $t > 0$ için

$$D^{-\nu}\left[t^{\lambda} e^{-\frac{a}{t}} \right] = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^{\infty} x^{\nu-1} (1+x)^{-\lambda-\nu-1} e^{-\frac{a}{t}} dx$$

dır. (Kummer fonksiyonu)

Bir f fonksiyonunun kesirli integralini hesaplamak için genelde

$$\int_0^t (t-\xi)^{\nu-1} f(\xi) d\xi, \quad \nu > 0 \tag{2.27}$$

integralini hesaplayabilme yeteneğine bağlıdır. Ancak, (2.27) deki $(t-\xi)^{\nu-1}$ çekirdeğin doğasından dolayı en az çaba ile fonksiyonlarının büyük bir sınıfının kesirli integralini hesaplamak için bize imkan verecek bazı analitik teknikler geliştirilmesi için yardımı olur. Şimdi böyle bir teknik ele alınsın.

f in kesirli integralindeki $f(t)$ fonksiyonunun t kez olan integral kuvvetinin kesirli integralini ifade edecek bir sistem oluşturalım, yani

$$D^{-\nu} t e^{at} = tE_t(\nu, a) - \nu E_t(\nu+1, a) \tag{2.28}$$

olduğunu göstermeliyiz.

$f \in C$ ise kesirli integralin tanımından

$$D^{-\nu}[tf(t)] = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-\xi)^{\nu-1} [\xi f(\xi)] d\xi, \nu > 0 \tag{2.29}$$

yazılır. (2.29) ifadesinde $\xi f(\xi)$ yerine $[t-(t-\xi)] f(\xi)$ alırsak,

$$D^{-\nu}[tf(t)] = tD^{-\nu} f(t) - \nu D^{-\nu-1} f(t) \tag{2.30}$$

elde edilir. $f(t)=e^{at}$ olması halinde (2.30) ifadesi (2.28) ifadesine dönüşür. Benzer olarak (2.30) ifadesinden

$$D^{-\nu}[t\cos at]=tC_{\nu}(\nu,a)-\nu C_{t}(\nu+1,a), \quad \nu>0$$

ve

$$D^{-\nu}[t\sin at]=tS_{\nu}(\nu,a)-\nu S_{t}(\nu+1,a), \quad \nu>0$$

bulunur. Dolayısıyla, (2.30) ifadesini aşağıdaki şekilde genelleştirebiliriz. $p\in Z^{+}$ ise

$$D^{-\nu}\left[t^{p} f(t)\right]=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_{0}^{t}(t-\xi)^{\nu-1}\left[\xi^{p} f(\xi)\right]d\xi, \quad \nu>0 \tag{2.31}$$

vardır. Burada

$$\xi^{p}=[t-(t-\xi)]^{p}=\sum_{k=0}^{p}(-1)^{k}\binom{p}{k}t^{p-k}(t-\xi)^{k}$$

ifadesini kullanırsak,

$$\begin{aligned}D^{-\nu}\left[t^{p} f(t)\right]&=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\sum_{k=0}^{p}(-1)^{k}\binom{p}{k}t^{p-k}\int_{0}^{t}(t-\xi)^{\nu+k-1\ p} f(\xi)d\xi\\&=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\sum_{k=0}^{p}(-1)^{k}\binom{p}{k}\Gamma(\nu+k)t^{p-k}D^{-(\nu+k)} f(t)\end{aligned} \tag{2.32}$$

elde edilir. $n\in Z^{+}$ ise

$$\binom{-z}{n}=\frac{\Gamma(1-z)}{n!\Gamma(1-z-n)}=(-1)^{n}\frac{\Gamma(z+n)}{n!\Gamma(z)}=(-1)^{n}\binom{z+n-1}{n}$$

bağıntısı kullanılarak, (2.32) ifadesi

$$D^{-\nu}\left(t^{p}f(t)\right)=\sum_{k=0}^{p}\binom{-\nu}{k}\left[D^{k}t^{p}\right]\left[D^{-\nu-k}f(t)\right] \tag{2.33}$$

olarak elde edilir.

Örneğin,

$$D^{-\nu}\left[t^{p}e^{at}\right]=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\sum_{k=0}^{p}(-1)^{k}\binom{p}{k}\Gamma(\nu+k)t^{p-k}E_{t}(\nu+k,a)$$

bulunur.

Teknikleri daha da geliştirerek daha karmaşık fonksiyonların kesirli integrallerini hesaplamamızda bize kolaylık sağlayacaktır. Örneğin, $\nu>0$ ve $\mu>-1$ için

$$D^{-\nu}E_{t}(\mu,\alpha)=E_{t}(\mu+\nu,a)$$

olduğu gösterilsin.

Şimdi, integrasyonun alt sınırının sıfır olmadığında kesirli integraller için bir kaç örnek verilsin. f , $[c,\infty)$ üzerinde $D^{-\nu}\left[f(t)-R_{p}(t)\right]=D^{-\nu-p}\left[D^{p}f(t)\right]$ sınıfına ait bir fonksiyon olmak üzere

$${}_{c}D_{t}^{-\nu}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_{c}^{t}(t-\xi)^{\nu-1}f(\xi)d\xi,\quad \nu>0,0\leq c<t \tag{2.34}$$

olarak ele alınsın. O halde $\xi=t(1-x)$ değişken değiştirmesi yapılırsa, (2.34) ifadesi $\tau=\dfrac{t-c}{t}$ olmak üzere

$${}_{c}D_{t}^{-\nu}f(t)=\frac{t^{\nu}}{\Gamma(\nu)}\int_{0}^{\tau}x^{\nu-1}f(t-tx)dx \tag{2.35}$$

olur. Örneğin, $c=0$ ise $\mu>-1$ ve $c>0$ ise μ keyfi olmak üzere $f(t)=t^{\mu}$ fonksiyonu ele alınsın. Bu fonksiyon (2.35) da yerine yazarsak,

$$ {}_cD_t^{-\nu}t^{\mu} = \frac{t^{\mu+\nu}}{\Gamma(\nu)}\int_0^{\tau} x^{\nu-1}(1-x)^{\mu}\,dx $$

olur. Buradan da sağdaki integral tam olmayan beta fonksiyonu olduğundan

$$ {}_cD_t^{-\nu}t^{\mu} = \frac{t^{\mu+\nu}}{\Gamma(\nu)}B_{\tau}(\nu,\mu+1) \tag{2.36} $$

dır. $c=0$ ise (2.36) ifadesi (2.3) ifadesine dönüşür.
Ayrıca (2.35) ifadesinden

$$ \begin{aligned} {}_cD_t^{-\nu}e^{at} &= e^{ac}E_{t-c}(\nu,a) \\ {}_cD_t^{-\nu}\cos at &= (\cos ac)C_{t-c}(\nu,a)-(\sin ac)S_{t-c}(\nu,a) \\ {}_cD_t^{-\nu}\sin at &= (\sin ac)C_{t-c}(\nu,a)+(\cos ac)S_{t-c}(\nu,a) \end{aligned} \tag{2.37} $$

yazılır.

2.2. AYRIK KESİRLİ İNTEGRAL

Bu bölümde, Ayrık Delta ve Ayrık Nabla integralleri hakkında temel tanım ve teoremler verilecektir. İlk olarak Ayrık Delta integralini vererek başlayacağız.

Tanım 2.2.1. (Ayrık Delta İntegral) $f:\mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ ve $c,d\in\mathbb{N}_a$ olsun. Bu durumda,

$$ \int_c^d f(t)\Delta t := \begin{cases} \sum_{t=c}^{d-1} f(t) & ,d>c \\ 0 & ,d\le c. \end{cases} $$

dır.
Şimdi de Ayrık Delta integrali için temel özelliklerini aşağıdaki teorem ile verilsin.

Teorem 2.2.1. $f,g:\mathbb{N}_a\to\mathbb{R}$ ve $b,c,d\in\mathbb{N}_a$, $b<c<d$ ve $\alpha\in\mathbb{R}$ olsun. Bu durumda,

$(i)\ \int_b^c \alpha f(t)\Delta t = \alpha \int_b^c f(t)\Delta t;$

$(ii)\ \int_b^c [f(t)+g(t)]\Delta t = \int_b^c f(t)\Delta t + \int_b^c g(t)\Delta t;$

$(iii)\ \int_b^b f(t)\Delta t = 0;$

$(iv)\ \int_b^d \alpha f(t)\Delta t = \int_b^c f(t)\Delta t + \int_c^d f(t)\Delta t;$

$(v)\ \left|\int_b^c f(t)\Delta t\right| \le \int_b^c |f(t)|\Delta t;$

(vi) Eğer $t \in \mathbb{N}_b^{\,c}$ için $F(t) := \int_b^t f(s)\Delta s$ ise $t \in \mathbb{N}_b^{\,c-1}$ için

$$\Delta F(t) = f(t)$$

dir.

(vii) $t \in \{c, c+1, ..., d-1\}$ için $f(t) \ge g(t)$ ise

$$\int_b^c f(t)\Delta t > \int_b^c g(t)\Delta t$$

dir.

Teorem 2.2.2. (Kısmi İntegrasyon) $u, v : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ verilmiş fonksiyonlar ve $b, c \in \mathbb{N}_a$, $b < c$ olsun. Bu durumda,

$$\int_b^c u(t)\Delta v(t)\Delta t = u(t)v(t)\Big|_b^{\,c} - \int_b^c v(\delta(t))\Delta u(t)\Delta t$$

ve

$$\int_b^c u(\delta(t))\Delta v(t)\Delta t = u(t)v(t)\Big|_b^{\,c} - \int_b^c v(t)\Delta u(t)\Delta t$$

dir.

Tanım 2.2.2. $f : \mathbb{N}_a^{\,b} \to \mathbb{R}$ olsun. $t \in \mathbb{N}_a^{\,b-1}$ için $\Delta F(t) = f(t)$ ise $F(t)$ ye $\mathbb{N}_a^{\,b}$ de $f(t)$ nin anti türevi denir.

Teorem 2.2.3. $f : \mathbb{N}_a^b \to \mathbb{R}$, $G(t)$, $\mathbb{N}_a^b$ de $f(t)$ nin anti türevi ise $F(t)=G(t)+c$ de $f(t)$ nin bir genel anti türevidir.

Teorem 2.2.4. c keyfi bir sabit olmak üzere aşağıdakiler gerçeklenir:

(i) $\int (t-\alpha)^{\underline{n}} \Delta t = \frac{1}{n+1}(t-\alpha)^{\underline{n+1}} + c, \; n \in \mathbb{N}_0;$

(ii) $\int \cosh_p(t,a)\Delta t = \frac{1}{p}\sinh_p(t,a) + c, \quad p \neq 0, \mp 1;$

(iii) $\int \sinh_p(t,a)\Delta t = \frac{1}{p}\cosh_p(t,a) + c, \quad p \neq 0, \mp 1;$

(iv) $\int \cos_p(t,a)\Delta t = \frac{1}{p}\sin_p(t,a) + c, \quad p \neq 0, \mp i;$

(v) $\int \sin_p(t,a)\Delta t = -\frac{1}{p}\cos_p(t,a) + c, \quad p \neq 0, \mp i;$

(vi) $\int h_n(t,a) = h_{n+1}(t,a) + c;$

(vii) $\int (\alpha - \delta(t))^{\underline{r}} \Delta t = -\frac{1}{r+1}(\alpha - t)^{\underline{r+1}} + c, \; r \neq -1;$

$(viii)$ $\int \binom{t}{r}\Delta t = \binom{t}{r+1} + c,$

(ix) $\int \binom{r+t}{t}\Delta t = \binom{r+t}{t-1} + c,$

Tanım 2.2.3. Eğer $f : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ ise

$$\int f(t)\Delta t = F(t) + c$$

dir. Buradan c keyfi bir sabittir. Buna f in delta belirsiz integrali denir.

Teorem 2.2.5. (İntegral Hesabın Temel Teoremi) $f : \mathbb{N}_a^b \to \mathbb{R}$, $F(t)$, $f(t)$ nin $\mathbb{N}_a^b$ de herhangi bir antidifference olsun. Bu durumda,

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^b \Delta F(t)\Delta t = F(t)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

dır.

Teorem 2.2.6. $f : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda,

$$\int_a^t \int_a^{\sigma_1} \dots \int_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n)\Delta\sigma_n \dots \Delta\sigma_2 \Delta\sigma_1 = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t \left(t - \delta(\sigma_1)\right)^{\underline{n-1}} f(\sigma_1)\Delta\sigma_1 .$$

dır.

Tanım 2.2.4. $f : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ ve $\nu > 0$, N, $N-1 < \nu < N^a$ olacak şekilde bir pozitif tamsayı olsun. Bu durumda, $\nu -$üncü kesirli farkı $t \in \mathbb{N}_{a+N-\nu}$ olmak üzere

$$\Delta_a^{\ \nu} f(t) := \Delta^N \Delta_a^{\ -(N-\nu)} f(t)$$

şeklinde tanımlanır.
Bu durumda, herhangi bir $\nu = N \in \mathbb{N}_0$ için, $t \in \mathbb{N}_a$ olmak üzere

$$\Delta_a^{\ \nu} f(t) := \Delta^N \Delta_a^{\ -(N-\nu)} f(t) = \Delta^N \Delta_a^{\ 0} f(t)$$
$$\Delta_a^{\ \nu} f(t) = \Delta^N f(t)$$

dir. (Bohner ve Peterson 2001)

Örnek. Tanım 2.2.4 ü kullanarak, $\Delta_0^{\ 1/2} 1$ i hesaplayınız.

$$\Delta_0^{\ 1/2} 1 = \Delta^1 \Delta_0^{\ -(1-1/2)} 1 = \Delta\Delta_0^{\ -1/2} 1 = \Delta\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} t^{\underline{1/2}}\right)$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Delta t^{\underline{1/2}}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} t^{\underline{-1/2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma\left(t + \frac{3}{2}\right)}$$

Teorem 2.2.7. (Varlık-Teklik Teoremi) $q, f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, $\nu > 0$ ve $N \in \mathbb{Z}^+$, $N - 1 < \nu \le N$ olsun. Bu durumda,

$$\Delta_{\nu-N}{}^{\nu} y(t) + q(t)y(t + \nu - N) = f(t), t \in \mathbb{N}_0 \tag{2.38}$$

$$y(t + \nu - i) = A_i, 0 \le i \le N - 1 \tag{2.39}$$

başlangıç değer probleminin $N_{\nu-N}$ de bir tek çözümü vardır. Burada A_i ler $0 \le i \le N - 1$ de verilen sabitlerdir.

Teorem 2.2.8. (Kesirli Toplam Kuvvet Kuralı) $\mu \ge 0$, $\nu > 0$ olsun. Eğer $t \in \mathbb{N}_a$ ise $t \in \mathbb{N}_{a+\mu+\nu}$ için

$$\Delta_{a+\mu}{}^{-\nu} (t - a)^{\underline{\mu}} = \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\mu + \nu + 1)} (t - a)^{\underline{\mu+\nu}} \tag{2.40}$$

dır.

Teorem 2.2.9. (Kesirli Farkta Kuvvet Kuralı) $f : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{N}_{a+\mu-\nu}$ için

$$\Delta_{a+\mu}{}^{\nu} (t - a)^{\underline{\mu}} = \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\mu - \nu + 1)} (t - a)^{\underline{\mu-\nu}} \tag{2.41}$$

dır. Burada $\mu \ge 0$, $\nu > 0$ dır.

Teorem 2.2.10. (Kesirli Toplamların Birleşimi) f, $\mathbb{N}_a$ da tanımlı olsun. μ, ν pozitif sabitler olmak üzere $t \in \mathbb{N}_{a+\mu+\nu}$ için

$$\left[\Delta_{a+\mu}{}^{-\mu} \left(\Delta_a{}^{-\nu} f\right)\right](t) = \left(\Delta_a{}^{-(\mu+\nu)} f\right)(t) = \left[\Delta_{a+\mu}{}^{-\nu} \left(\Delta_a{}^{-\mu} f\right)\right](t) \tag{2.42}$$

dır.

Şimdi de Ayrık Nabla integralinden bahsedilsin.

Tanım 2.2.5. (Ayrık Nabla İntegral) $f : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ ve $c, d \in \mathbb{N}_a$ olsun. Bu durumda,

$$\int_c^d f(t)\nabla t := \begin{cases} \sum_{t=c+1}^{d} f(t) & , d > c \\ 0 & , d < c. \end{cases}$$

dır.

Şimdi de Ayrık Nabla integrali için temel özellikleri bir teorem altında verilsin.

Teorem 2.2.11. $f, g : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ ve $b, c, d \in \mathbb{N}_a$, $b < c < d$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda,

(i) $\int_b^c \alpha f(t)\nabla t = \alpha \int_b^c f(t)\nabla t;$

(ii) $\int_b^c [f(t) + g(t)]\nabla t = \int_b^c f(t)\nabla t + \int_b^c g(t)\nabla t;$

(iii) $\int_b^b f(t)\nabla t = 0;$

(iv) $\int_b^d \alpha f(t)\nabla t = \int_b^c f(t)\nabla t + \int_c^d f(t)\nabla t;$

(v) $\left| \int_b^c f(t)\nabla t \right| \leq \int_b^c |f(t)|\nabla t;$

(vi) Eğer $t \in \mathbb{N}_b{}^c$ için $F(t) := \int_b^t f(s)\nabla s$ ise $t \in \mathbb{N}_{b+1}{}^c$ için

$$\nabla F(t) = f(t)$$

dir.

(vii) $t \in \{c, c+1, \ldots, d-1\}$ için $f(t) \geq g(t)$ ise

$$\int_b^c f(t)\nabla t > \int_b^c g(t)\nabla t$$

dir.

Teorem 2.2.12. (Kısmi İntegrasyon) $u, v : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ verilmiş fonksiyonlar ve $b, c \in \mathbb{N}_a$, $b < c$ olsun. Bu durumda,

$$\int_b^c u(t)\nabla v(t)\nabla t = u(t)v(t)\big|_b^c - \int_b^c v(\rho(t))\nabla u(t)\nabla t$$

ve

$$\int_b^c u(\rho(t))\nabla v(t)\nabla t = u(t)v(t)\big|_b^c - \int_b^c v(t)\nabla u(t)\nabla t$$

dir.

Tanım 2.2.6. $f : \mathbb{N}_a^b \to \mathbb{R}$ olsun. $t \in \mathbb{N}_{a+1}^b$ için $\nabla F(t) = f(t)$ ise $F(t)$ ye $\mathbb{N}_a^b$ de $f(t)$ nin bir nabla anti türevi denir.

Teorem 2.2.13. Eğer $f : \mathbb{N}_a^b \to \mathbb{R}$, $G(t)$, $f(t)$ nin $\mathbb{N}_a^b$ deki bir nabla anti türevi ise $F(t) = G(t) + c$ de $f(t)$ nin bir genel nabla anti türevidir.

Teorem 2.2.14. Aşağıdakiler integraller vardır.

(i) $\int \alpha^{t+\beta}\nabla t = \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}\alpha^{t+\beta} + c, \ \ \alpha \neq 1;$

(ii) $\int (t-\alpha)^{\overline{r}}\nabla t = \dfrac{1}{r+1}(t-\alpha)^{\overline{r+1}} + c, \ \ r \neq -1;$

(iii) $\int \sinh_p(t,a)\Delta t = \dfrac{1}{p}\cosh_p(t,a) + c, \ \ r \neq -1;$

(iv) $\int E_p(t,a)\nabla t = \dfrac{1}{p}E_p(t,a) + c, \ \ p \neq 0,1;$

(v) $\int \cosh_p(t,a)\Delta t = \dfrac{1}{p}\sinh_p(t,a) + c, \ \ p \neq 0, \mp 1;$

(vi) $\int \sinh_p(t,a)\Delta t = \dfrac{1}{p}\cosh_p(t,a) + c, \ \ p \neq 0, \mp 1;$

(vii) $\int \cos_p(t,a)\Delta t = \dfrac{1}{p}\sin_p(t,a) + c, \ \ p \neq 0, \mp i;$

$(viii)$ $\int \sin_p(t,a)\Delta t = -\frac{1}{p}\cos_p(t,a) + c, \quad p \neq 0, \mp i;$

Teorem 2.2.15. (Nabla Analizin Temel Teoremi) $f : \mathbb{N}_a^b \to \mathbb{R}$, $F(t)$, $f(t)$ nin $\mathbb{N}_a^b$ de herhangi bir nabla anti türevi olsun. Bu durumda,

$$\int_a^b f(t)\nabla t = \int_a^b \nabla F(t)\nabla t = F(t)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

dır.

Teorem 2.2.16. $f : \mathbb{N}_{a+1} \to \mathbb{R}$ verilmiş olsun. $n \in \mathbb{N}_1$ için

$$\nabla_a^{-n} f(t) := \int_a^t H_{n+1}(t, \rho(s)) f(s)\nabla s, \quad t \in \mathbb{N}_a$$

dır. $\nabla^{-0} f(t) := f(t)$, eğer $n \in \mathbb{N}_1$ ise $H_n(t,a) = \frac{(t-a)^{\overline{n}}}{n!} = \frac{(t-a)^{\overline{n}}}{\Gamma(n+1)}$ dir.

Tanım 2.2.7. Kesirli nabla integrali için $f : \mathbb{N}_{a+1} \to \mathbb{R}$ ve $\mu \in \mathbb{R}^+$ olsun. Bu durumda

$$\Delta_a^{-\mu} f(t) := \int_a^t H_{\mu-1}(t, \rho(s)) f(s)\nabla s$$

dir.

Örnek. Tanım 2.2.7 ü kullanarak $\Delta_a^{-\mu} 1$ i hesaplayınız. O halde,

$$\Delta_a^{-\mu} 1 = \int_a^t H_{\mu-1}(t, \rho(s))\nabla s = H_\mu(t,a)$$

dır.

3. BULGULAR

Bu bölümde, üç alt başlık altında araştırmada elde edilen bazı bulgulara yer verilecektir. İlk olarak, kesirli integrallerden yararlanılarak kesirli integraller için Hermite-Hadamard-Fejer tipli eşitsizliğe; ikinci olarak, kesirli integrallerden yararlanılarak $\varphi-$konveks fonksiyon için Hermite-Hadamard tipli eşitsizliğe; üçüncü olarak ise de öncelikle ayrık konveks tanımının ardından ayrık bölge üzerinde Hermite-Hadamard tipli eşitsizlik ve sonunda ise ayrık bölge üzerinde ayrık kesirli integraller için Hermite-Hadamard tipli eşitsizliği içeren tanım, teoremler ve ispatları verilmiştir.

Şimdi bulgularımız için yararlanmış olduğumuz bazı lemma ve teoremler verilsin.

Dragomir ve Agarwal (1998); (1.52) ifadesinin sağ kısmı ile alakalı aşağıdaki eşitliği ispatlamıştır.

Lemma 3.1. $f : I^{\circ} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a,b \in I^{\circ}$ ile $a<b$ olmak üzere f fonksiyonu I° (I°, I nın içi) üzerinde diferansiyellenebilir bölge içinde olsun. $f' \in L([a,b])$ ise, bu durumda aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\begin{aligned} &\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \\ &=\frac{(b-a)}{2}\left[\int_0^1 (1-2t)f'(ta+(1-t)b)dt\right]. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Şimdi de Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı için bulunan ve (3.1) eşitliğinden yararlanılarak aşağıda ki teorem verildi.

Teorem 3.1. $f : I^{\circ} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a,b \in I^{\circ}$ ile $a<b$ olmak üzere f fonksiyonu I° (I°, I nın içi) üzerinde diferansiyellenebilir bir bölge içinde olsun. $|f'|$, $[a,b]$ üzerinde konveks ise bu durumda,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\leq\frac{b-a}{8}\left(|f'(a)|+|f'(b)|\right). \tag{3.2}$$

dır. (3.2) eşitsizliğine literatürde trapezoid eşitsizlik adı verilir. Şimdi de benzer olarak literatürde midpoint eşitsizliği olarak adlandırılan eşitsizlik aşağıda ki teoremde verildi.

Teorem 3.2. $f : I^{\circ}\subset \mathrm{R}\to\mathrm{R}$, $a,b\in I^{\circ}$ ile $a<b$ olmak üzere f fonksiyonu I° (I°, I nın içi) üzerinde diferansiyellenebilir bir bölge içinde olsun. $|f'|$, $[a,b]$ üzerinde konveks ise bu durumda,

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\leq\frac{b-a}{8}\left(|f'(a)|+|f'(b)|\right). \tag{3.3}$$

dır.

Fejer (1906) tarafından Hermite-Hadamard eşitsizliğinin ağırlıklı Fejer tipli eşitsizliği ispatlandı. Bu teorem aşağıda verildi.

Teorem 3.3. $f : [a,b]\subset\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ fonksiyonu konveks fonksiyon ve $w:[a,b]\to R$ fonksiyonu negatif olmayan, integrallenebilir ve $x=\dfrac{a+b}{2}$ ye göre simetrik ($w(x)=w(a+b-x)$) olsun. Bu durumda,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b w(x)dx\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)w(x)dx\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b w(x)dx$$

eşitsizliğine ağırlıklı Fejer tipli eşitsizlik adı verilir.

Kırmacının (2004) bulduğu lemma aşağıda verilmiştir.

Lemma 3.2. $f : I^{\circ}\subset\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ fonksiyonu I° (I°; I nın içi) üzerinde diferansiyellenebilir ve $a,b\in I^{\circ}$ ile $a<b$ olsun. $f^{'}\in L([a,b])$ ise,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) = (b-a)\left[\int_0^{\frac{1}{2}} tf'(ta+(1-t)b)dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1}(t-1)f'(ta+(1-t)b)dt\right].$$

ifadesi sağlanır.

Aşağıda ki verilen tanım sağ ve sol taraflı Riemann-Liouville kesirli integral tanımıdır.

Tanım 3.1. $f \in L_1[a,b]$ olsun. $\alpha > 0$ ile $a \geq 0$ olmak üzere $J_{a+}^{\alpha} f$ ve $J_{b-}^{\alpha} f$ ile verilen sağ ve sol Riemann-Liouville kesirli integralleri sırasıyla

$$J_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad x > a$$

ve

$$J_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad x < b$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $\Gamma(\alpha)$ ifadesi Gamma fonksiyonu ve $J_{a+}^{0} f(x) = J_{b-}^{0} f(x) = f(x)$ dir.

Şimdi de yüksek lisans tezimin son kısmı olan ve aynı zamanda indeksli bir dergide yayımlanmış çalışma içindeki lemma ve teorem verilsin.

Lemma 3.3. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $a < b$ ile (a,b) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir bir bölge olsun. $f' \in L([a,b])$ ise, bu durumda kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\begin{aligned}&\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha} f(b) + J_{b^-}^{\alpha} f(a)\right] \\ &= \frac{(b-a)}{2}\left[\int_0^1 \left[(1-t)^{\alpha} - t^{\alpha}\right] f'(ta+(1-t)b)dt\right].\end{aligned} \tag{3.4}$$

Teorem 3.4. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $0 \le a < b$ ile $f \in L_1[a,b]$ ve pozitif fonksiyon olsun. f, $[a,b]$ üzerinde konveks ise, bu durumda $\alpha > 0$ ise kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a+}^{\alpha} f(b) + J_{b-}^{\alpha} f(a)\right] \le \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3.5}$$

Sarıkaya ve arkadaşları (2013), ilk kez (3.3) de ki Riemann-Liouville kesirli integralleri için Hermite-Hadamard tipli eşitsizliğini bulmuştur.
$\varphi - konveks$ fonksiyon Youness (1999) tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 3.2. $\varphi : [a,b] \subset \mathbb{R} \to [a,b]$ ve $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde $\varphi - konveks$ fonksiyon olsun. Her $x, y \in [a,b]$ ve $\lambda \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$f(\lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y)) \le \lambda f(\varphi(x)) + (1-\lambda) f(\varphi(y))$$

Yukarıdaki tanımda $\varphi(x) = x$ seçersek, bilinen konveks eşitsizlik tanımı elde edilir.
Aşağıda ki verilen teorem $\varphi - konveks$ fonksiyon için Hermite-Hadamard tipli eşitsizliktir.

Teorem 3.5. $a < b$, $a, b \in J$, J bir aralık ve $\varphi : J \to \mathbb{R}$ sürekli artan fonksiyon olsun. $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $I = [a,b]$ üzerinde φ -konveks fonksiyon, bu durumda

$$f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right) \le \frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(x)) d\varphi(x) \le \frac{f(\varphi(a))+f(\varphi(b))}{2}. \tag{3.6}$$

dır.

3. 1. HERMİTE-HADAMARD-FEJER TİPLİ EŞİTSİZLİK

Bu çalışmada amacımız Riemann-Liouville kesirli integrali için Hermite-Hadamard-Fejer tipli eşitsizlikler elde etmek için bir özdeşlik verip, bu özdeşlik üzerine istediğimiz tipte yeni eşitsizlikler elde edilecektir.

Şimdi yukarıda verilen çalışmalardan yararlanılarak bulunmuş olan lemma ve ispatı aşağıda verilsin.

$g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu için $\|g\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]}|g(x)|$, olsun.

Lemma 3.1.1. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b)üzerinde diferansiyellenebilir ve $f' \in L([a,b])$, $a < b$ olsun. $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu integrallenebilirse, $\alpha > 0$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[J_{a^+}^{\alpha} g(b) + J_{b^-}^{\alpha} g(a)\right] - \left[J_{a^+}^{\alpha}(fg)(b) + J_{b^-}^{\alpha}(fg)(a)\right]$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\{\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left[\int_a^t (s-a)^{\alpha-1} g(s)ds + \int_a^t (b-s)^{\alpha-1} g(s)ds\right] f'(t)dt\right. \tag{3.7}$$

$$\left. + \int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left[\int_b^t (s-a)^{\alpha-1} g(s)ds + \int_b^t (b-s)^{\alpha-1} g(s)ds\right] f'(t)dt\right\},$$

dır. Burada Γ, gamma fonksiyonudur.

İspat. Kısalık için (3.7) eşitliğinin sağ tarafına I denilsin. Buradan,

$$I = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\{\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left[\int_a^t (s-a)^{\alpha-1} g(s)ds + \int_a^t (b-s)^{\alpha-1} g(s)ds\right] f'(t)dt\right.$$

$$\left. + \int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left[\int_b^t (s-a)^{\alpha-1} g(s)ds + \int_b^t (b-s)^{\alpha-1} g(s)ds\right] f'(t)dt\right\} \tag{3.8}$$

$$= I_1 + I_2,$$

yazılır. Bu durumda, kısmi integrasyon yardımıyla,

$$I_1 = \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left[\int_a^t (s-a)^{\alpha-1} g(s)ds + \int_a^t (b-s)^{\alpha-1} g(s)ds \right] f'(t)dt$$

$$= \left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} (s-a)^{\alpha-1} g(s)ds + \int_a^{\frac{a+b}{2}} (b-s)^{\alpha-1} g(s)ds \right) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{3.9}$$

$$- \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left((t-a)^{\alpha-1} + (b-t)^{\alpha-1}\right) g(t) f(t)dt$$

ve benzer şekilde,

$$I_2 = \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} \left[\int_b^t (s-a)^{\alpha-1} g(s)ds + \int_b^t (b-s)^{\alpha-1} g(s)ds \right] f'(t)dt$$

$$= \left(\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} (s-a)^{\alpha-1} g(s)ds + \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} (b-s)^{\alpha-1} g(s)ds \right) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{3.10}$$

$$- \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} \left((t-a)^{\alpha-1} + (b-t)^{\alpha-1}\right) g(t) f(t)dt$$

olur. Burada (3.9) ve (3.10) numaralı eşitlikleri toplayıp; (3.8) numaralı eşitlikte yerine yazılırsa,

$$I = I_1 + I_2$$

$$= \Gamma(\alpha)\left\{ f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[J_{a^+}^{\alpha} g(b) + J_{b^-}^{\alpha} g(a)\right] \right. \tag{3.11}$$

$$\left. -\left[J_{a^+}^{\alpha}(fg)(b) + J_{b^-}^{\alpha}(fg)(a)\right]\right\}.$$

elde edilir. (3.11) eşitliğini $(\Gamma(\alpha))^{-1}$, ile çarptığımızda istenilen lemma yani (3.7) eşitliği elde edilir.

Teorem 3.1.1. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) üzerinde diferansiyellenebilir ve $f' \in L([a,b])$, $a < b$ olsun. $|f'|$, $[a,b]$ aralığında konveks ve $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $x = \dfrac{a+b}{2}$ ye göre simetrik ise $\alpha > 0$ için

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[J_{a^+}^{\alpha} g(b) + J_{b^-}^{\alpha} g(a)\right] - \left[J_{a^+}^{\alpha}(fg)(b) + J_{b^-}^{\alpha}(fg)(a)\right] \right|$$

$$\le \frac{\|g\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}(b-a)^{\alpha+1}\left(\frac{1}{2^\alpha \alpha(\alpha+1)} + \frac{1}{(\alpha+1)} - \frac{1}{2\alpha}\right)\left[\left|f'(a)\right| + \left|f'(b)\right|\right] \tag{3.12}$$

dır.

İspat. Lemma 3.1.1 den yararlanarak,

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[J_{a^+}^{\alpha} g(b) + J_{b^-}^{\alpha} g(a)\right] - \left[J_{a^+}^{\alpha}(fg)(b) + J_{b^-}^{\alpha}(fg)(a)\right] \right|$$

$$\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left| \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left[\int_a^t (s-a)^{\alpha-1} g(s)\,ds + \int_a^t (b-s)^{\alpha-1} g(s)\,ds\right] f'(t)\,dt \right. \tag{3.13}$$

$$\left. \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} \left[\int_b^t (s-a)^{\alpha-1} g(s)\,ds + \int_b^t (b-s)^{\alpha-1} g(s)\,ds\right] f'(t)\,dt \right|$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\{\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left|\int_a^t\left((s-a)^{\alpha-1}+(b-s)^{\alpha-1}\right)g(s)ds\right|\left|f^{'}(t)\right|dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left|\int_b^t\left((s-a)^{\alpha-1}+(b-s)^{\alpha-1}\right)g(s)ds\right|\left|f^{'}(t)\right|dt\right\}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}(K_1+K_2),$$

yazılır. $\left|f^{'}\right|$, $[a,b]$ aralığında konveks olduğundan ve $t\in[a,b]$ için

$$\left|f^{'}(t)\right|=\left|f^{'}\left(\frac{b-t}{b-a}a+\frac{t-a}{b-a}b\right)\right|\leq\frac{b-t}{b-a}\left|f^{'}(a)\right|+\frac{t-a}{b-a}\left|f^{'}(b)\right|,$$

dır. $g:[a,b]\rightarrow \mathrm{R}$ fonksiyonu sürekli ve $x=\dfrac{a+b}{2}$ ye göre simetrik olduğundan, $\|g\|_{\infty,\left[a,\frac{a+b}{2}\right]}=\|g\|_{\infty,\left[\frac{a+b}{2},b\right]}=\|g\|_{\infty}$, için ve integrasyon sınır değişim kuralından yararlanarak,

$$\begin{aligned}
K_1 &= \int_a^{\frac{a+b}{2}}\left|\int_a^t\left((s-a)^{\alpha-1}+(b-s)^{\alpha-1}\right)g(s)ds\right|\left|f^{'}(t)\right|dt\\
&\leq \int_a^{\frac{a+b}{2}}\left((s-a)^{\alpha-1}+(b-s)^{\alpha-1}\right)|g(s)|\left(\int_s^{\frac{a+b}{2}}\left|f^{'}(t)\right|dt\right)ds\\
&\leq \|g\|_{\infty}\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left((s-a)^{\alpha-1}+(b-s)^{\alpha-1}\right)\\
&\quad\times\left(\int_s^{\frac{a+b}{2}}\left[\frac{b-t}{b-a}\left|f^{'}(a)\right|+\frac{t-a}{b-a}\left|f^{'}(b)\right|\right]dt\right)ds
\end{aligned}\tag{3.14}$$

$$= \|g\|_{\infty} (b-a)^{\alpha+1}$$

$$\times\left\{\left[\frac{1}{2^{\alpha+1}\alpha(\alpha+1)}+\frac{1}{2(\alpha+2)}-\frac{1}{8\alpha}\right]\left|f^{'}(a)\right|\right.$$

$$\left.+\left[\frac{1}{2^{\alpha+1}\alpha(\alpha+1)}+\frac{1}{2(\alpha+2)}+\frac{1}{\alpha+1}-\frac{3}{8\alpha}\right]\left|f^{'}(b)\right|\right\}$$

olup ve benzer şekilde

$$K_2 = \int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left|\int_{b}^{t}\left((s-a)^{\alpha-1}+(b-s)^{\alpha-1}\right)g(s)ds\right|\left|f^{'}(t)\right|dt$$

$$\leq \int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left((s-a)^{\alpha-1}+(b-s)^{\alpha-1}\right)\left|g(s)\right|\left(\int_{s}^{\frac{a+b}{2}}\left|f^{'}(t)\right|dt\right)ds$$

$$\leq \|g\|_{\infty}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left((s-a)^{\alpha-1}+(b-s)^{\alpha-1}\right)\left(\int_{s}^{\frac{a+b}{2}}\left[\frac{b-t}{b-a}\left|f^{'}(a)\right|+\frac{t-a}{b-a}\left|f^{'}(b)\right|\right]dt\right)ds$$

$$= \|g\|_{\infty} (b-a)^{\alpha+1}$$

$$\times\left\{\left[\frac{1}{2^{\alpha+1}\alpha(\alpha+1)}+\frac{1}{\alpha+1}-\frac{1}{2(\alpha+2)}-\frac{3}{8\alpha}\right]\left|f^{'}(a)\right|\right.$$

$$\left.+\left[\frac{1}{2^{\alpha+1}\alpha(\alpha+1)}+\frac{1}{2(\alpha+2)}-\frac{1}{8\alpha}\right]\left|f^{'}(b)\right|\right\} \tag{3.15}$$

bulunur. Buradan da, (3.14) ve (3.15) ifadelerini toplayıp (3.13) de yerleştirdiğimizde (3.12) eşitsizliği elde edilir.

3.2. KESİRLİ İNTEGRALLERDEN YARARLANILARAK $\varphi -$ KONVEKS FONKSİYON İÇİN HERMİTE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİK

Bu çalışmada amacımız φ-konveks fonksiyonlar kullanılarak, Riemann-Liouville kesirli integrali için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikleri vererek ve daha sonra yeni integral eşitsizlikleri elde etmek için önemli bir özdeşlik verilecektir. Bu özdeşlik yardımıyla önemli genelleştirmeler yapılacaktır.

Teorem 3.2.1. $a < b$, $a,b \in J$ olmak üzere J bir aralık ve $\varphi : J \to \mathbb{R}$ sürekli artan fonksiyon olsun. $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $I = [a,b]$ üzerinde φ -konveks fonksiyon olsun. Bu durumda $\alpha > 0$ olmak üzere kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right) \\ & \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(\varphi(b)-\varphi(a))^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{\varphi(a)^{+}} f(\varphi(b)) + J^{\alpha}_{\varphi(b)^{-}} f(\varphi(a))\right] \qquad (3.16) \\ & \leq \frac{f(\varphi(a))+f(\varphi(b))}{2}. \end{aligned}$$

İspat. f , $[a,b]$ üzerinde φ -konveks fonksiyon ise, $\lambda = \frac{1}{2}$ ile $\varphi(x), \varphi(y) \in [\varphi(a), \varphi(b)]$ olmak üzere

$$f\left(\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}\right) \leq \frac{f(\varphi(x))+f(\varphi(y))}{2} \qquad (3.17)$$

dır. $\varphi(x) = t\varphi(a) + (1-t)\varphi(b)$, $\varphi(y) = (1-t)\varphi(a) + t\varphi(b)$ olarak seçelim. O halde (3.17) ifadesi

$$2f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right) \leq f(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)) + f((1-t)\varphi(a)+t\varphi(b)) \qquad (3.18)$$

olur. Burada (3.18) ifadesini $t^{\alpha-1}$ ile çarpar ve daha sonra t'ye göre [0,1] aralığında integre edilirse,

$$\frac{2}{\alpha} f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)$$

$$\leq \int_0^1 t^{\alpha-1} f\left(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)\right)dt + \int_0^1 t^{\alpha-1} f\left((1-t)\varphi(a)+t\varphi(b)\right)dt$$

$$= \int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} \left(\frac{\varphi(b)-\varphi(u)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\right)^{\alpha-1} f(\varphi(u)) \frac{d\varphi(u)}{\varphi(a)-\varphi(b)}$$

$$+ \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \left(\frac{\varphi(v)-\varphi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\right)^{\alpha-1} f(\varphi(v)) \frac{d\varphi(v)}{\varphi(b)-\varphi(a)}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)}{(\varphi(b)-\varphi(a))^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{\varphi(a)^+} f(\varphi(b)) + J^{\alpha}_{\varphi(b)^-} f(\varphi(a))\right]$$

den

$$f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(\varphi(b)-\varphi(a))^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{\varphi(a)^+} f(\varphi(b)) + J^{\alpha}_{\varphi(b)^-} f(\varphi(a))\right]$$

olup buda birinci kısmın ispatı olur.

İkinci kısmın ispatı için, $t \in [0,1]$ ve f fonksiyonu φ -konveks fonksiyon ise

$$f\left(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)\right) \leq tf(\varphi(a)) + (1-t) f(\varphi(b))$$

ve

$$f\left((1-t)\varphi(a)+t\varphi(b)\right) \leq (1-t) f(\varphi(a)) + tf(\varphi(b))$$

yazılabilir. Yukarıda ki bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$
\begin{aligned}
& f\left(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)\right)+f\left((1-t)\varphi(a)+t\varphi(b)\right) \\
& \leq tf(\varphi(a))+(1-t)f(\varphi(b))+(1-t)f(\varphi(a))+tf(\varphi(b))
\end{aligned} \tag{3.19}
$$

elde ederiz. Burada (3.19) eşitsizliğinin her iki tarafını $t^{\alpha-1}$ ile çarpar ve daha sonra t ye göre $[0,1]$ aralığında integre edilirse,

$$
\begin{aligned}
& \int_0^1 t^{\alpha-1} f\left(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)\right)dt+\int_0^1 t^{\alpha-1} f\left((1-t)\varphi(a)+t\varphi(b)\right)dt \\
& \leq \left[f(\varphi(a))+f(\varphi(b))\right]\int_0^1 t^{\alpha-1}dt
\end{aligned}
$$

den

$$
\frac{\Gamma(\alpha)}{(\varphi(b)-\varphi(a))^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{\varphi(a)^+} f(\varphi(b))+J^{\alpha}_{\varphi(b)^-} f(\varphi(a))\right]\leq \frac{f(\varphi(a))+f(\varphi(b))}{\alpha}.
$$

elde edilir.

Hatırlatma 3.2.1. Teorem 3.2.1 de $\alpha=1$ aldığımızda, (3.16) eşitsizliği Teorem 3.5 de ki (3.6) eşitsizliğine dönüşür.
Hermite-Hadamard tipli eşitsizliğin sağ tarafı için yeni sonuçlar elde etmemize yardımcı olacak önemli bir özdeşliği aşağıdaki lemma ile verilsin.

Lemma 3.2.1. $a,b\in J$, $0\leq a<b$ olmak üzere J bir aralık ve $\varphi : J\to \mathbb{R}$ sürekli artan fonksiyon olsun. Ayrıca $f : I\subseteq \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I° (I 'nın içi) üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. $\varphi(a),\varphi(b)\in I$ için $f'\in L_1[\varphi(a),\varphi(b)]$ ise, $\alpha>0$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$
\begin{aligned}
& \frac{f(\varphi(a))+f(\varphi(b))}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(\varphi(b)-\varphi(a))^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{\varphi(a)^+} f(\varphi(b))+J^{\alpha}_{\varphi(b)^-} f(\varphi(a))\right] \\
& =\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2}\int_0^1\left[(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right]f'\left(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)\right)dt
\end{aligned} \tag{3.20}
$$

İspat. Lemma' nın ispatını yapmak için,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left[(1-t)^{\alpha} - t^{\alpha}\right] f'\left(t\varphi(a) + (1-t)\varphi(b)\right) dt \\ &= \left[\int_0^1 (1-t)^{\alpha} f'\left(t\varphi(a) + (1-t)\varphi(b)\right) dt\right] \\ &\quad + \left[-\int_0^1 t^{\alpha} f'\left(t\varphi(a) + (1-t)\varphi(b)\right) dt\right] \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned} \tag{3.21}$$

integralini çözmek yeterli olacaktır. Kısmi integrasyon yardımıyla

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 (1-t)^{\alpha} f'\left(t\varphi(a) + (1-t)\varphi(b)\right) dt \\ &= (1-t)^{\alpha} \frac{f\left(t\varphi(a) + (1-t)\varphi(b)\right)}{\varphi(a) - \varphi(b)}\Bigg|_0^1 + \int_0^1 \alpha (1-t)^{\alpha} \frac{f\left(t\varphi(a) + (1-t)\varphi(b)\right)}{\varphi(a) - \varphi(b)} dt \\ &= \frac{f(\varphi(b))}{\varphi(b) - \varphi(a)} - \frac{\alpha}{\varphi(b) - \varphi(a)} \int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} \left(\frac{\varphi(a) - \varphi(x)}{\varphi(a) - \varphi(b)}\right)^{\alpha-1} \frac{f(\varphi(x))}{\varphi(a) - \varphi(b)} d\varphi(x) \\ &= \frac{f(\varphi(b))}{\varphi(b) - \varphi(a)} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\varphi(b) - \varphi(a))^{\alpha+1}} J_{\varphi(b)^-}^{\alpha} f(\varphi(a)) \end{aligned} \tag{3.22}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned} I_2 &= -\int_0^1 t^{\alpha} f'\left(t\varphi(a) + (1-t)\varphi(b)\right) dt \\ &= -\frac{t^{\alpha} f\left(t\varphi(a) + (1-t)\varphi(b)\right)}{\varphi(a) - \varphi(b)}\Bigg|_0^1 + \alpha \int_0^1 t^{\alpha-1} \frac{f\left(t\varphi(a) + (1-t)\varphi(b)\right)}{\varphi(a) - \varphi(b)} dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{f(\varphi(a))}{\varphi(b)-\varphi(a)} - \frac{\alpha}{\varphi(b)-\varphi(a)} \int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} \left(\frac{\varphi(b)-\varphi(x)}{\varphi(b)-\varphi(a)} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\varphi(x))}{\varphi(a)-\varphi(b)} d\varphi(x) \\
&= \frac{f(\varphi(a))}{\varphi(b)-\varphi(a)} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\varphi(b)-\varphi(a))^{\alpha+1}} J^{\alpha}_{\varphi(a)^+} f(\varphi(b))
\end{aligned} \tag{3.23}
$$

bulunur. Dolayısıyla, (3.22) ve (3.23) eşitliklerini (3.21) de yerleştirdiğimizde ve verilen tanımlardan,

$$
I = \frac{f(\varphi(a)) + f(\varphi(b))}{\varphi(b)-\varphi(a)} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\varphi(b)-\varphi(a))^{\alpha+1}} \left[J^{\alpha}_{\varphi(a)^+} f(\varphi(b)) + J^{\alpha}_{\varphi(b)^-} f(\varphi(a)) \right]
$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafını $\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2}$ ile çarptığımızda ispat tamamlanır.
Bu Lemma'yı kullanarak aşağıda kesirli integral eşitsizlikleri elde edilecektir.

Teorem 3.2.3. $a,b \in J$, $0 \le a < b$ olmak üzere J bir aralık ve $\varphi : J \to \mathbb{R}$ sürekli artan fonksiyon olsun. Ayrıca $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I° (I 'nın içi) üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. $\varphi(a), \varphi(b) \in I$ için $f' \in L_1[\varphi(a), \varphi(b)]$ ve $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında φ -konveks , $q \ge 1$ ise, $\alpha > 0$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$
\begin{aligned}
&\left| \frac{f(\varphi(a)) + f(\varphi(b))}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(\varphi(b)-\varphi(a))^{\alpha}} \left[J^{\alpha}_{(\varphi(a))^+} f(\varphi(b)) + J^{\alpha}_{(\varphi(b))^-} f(\varphi(a)) \right] \right| \\
&\le \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2^{\frac{2-q}{q}}} \left[\frac{1}{\alpha+1} \left(1 - \frac{1}{2^{\alpha}} \right) \right] \left[|f'(\varphi(a))|^q + |f'(\varphi(b))|^q \right]^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned} \tag{3.24}
$$

İspat. İlk olarak ispatı $q = 1$ için ele alınsın. Lemma 3.2.1 ve $|f'|$ nin φ -konveks olduğu kullanılarak,

$$\left|\frac{f(\varphi(a))+f(\varphi(b))}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(\varphi(b)-\varphi(a))^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{(\varphi(a))^{+}}f(\varphi(b))+J^{\alpha}_{(\varphi(b))^{-}}f(\varphi(a))\right]\right|$$

$$\leq\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2}\int_0^1\left|(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right|\left|f'\left[t(\varphi(a))+(1-t)(\varphi(b))\right]\right|dt$$

$$\leq\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2}\int_0^1\left|(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right|\left[t\left|f'(\varphi(a))\right|+(1-t)\left|f'(\varphi(b))\right|\right]dt$$

$$=\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}}\left[(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right]\left[t\left|f'(\varphi(a))\right|+(1-t)\left|f'(\varphi(b))\right|\right]dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left[t^{\alpha}-(1-t)^{\alpha}\right]\left[t\left|f'(\varphi(a))\right|+(1-t)\left|f'(\varphi(b))\right|\right]dt\right\} \tag{3.25}$$

$$=\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2}\left\{K_1+K_2\right\}.$$

yazılır. Dolayısıyla, K_1 ve K_2 ’yi ayrı ayrı hesaplanılsın. Böylece,

$$K_1=\int_0^{\frac{1}{2}}\left[(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right]\left[t\left|f'(\varphi(a))\right|+(1-t)\left|f'(\varphi(b))\right|\right]dt$$

$$=\left|f'(\varphi(a))\right|\int_0^{\frac{1}{2}}\left[(1-t)^{\alpha}t-t^{\alpha+1}\right]dt+\left|f'(\varphi(b))\right|\int_0^{\frac{1}{2}}\left[(1-t)^{\alpha+1}-t^{\alpha}(1-t)\right]dt \tag{3.26}$$

$$=\left|f'(\varphi(a))\right|\left[\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}-\frac{1}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)}\right]+\left|f'(\varphi(b))\right|\left[\frac{1}{\alpha+2}-\frac{1}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)}\right]$$

ve

K_2

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left[t^{\alpha} - (1-t)^{\alpha}\right]\left[t\left|f'(\varphi(a))\right| + (1-t)\left|f'(\varphi(b))\right|\right]dt \tag{3.27}$$

$$= \left|f'(\varphi(a))\right|\left[\frac{1}{\alpha+2} - \frac{1}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)}\right] + \left|f'(\varphi(b))\right|\left[\frac{1}{(\alpha+2)(\alpha+1)} - \frac{1}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)}\right]$$

elde edilir. Buradan da (3.26) ve (3.27) ifadelerini (3.25) de yerleştirdiğimizde,

$$\left|\frac{f(\varphi(a)) + f(\varphi(b))}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(\varphi(b)-\varphi(a))^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{(\varphi(a))^+} f(\varphi(b)) + J^{\alpha}_{(\varphi(b))^-} f(\varphi(a))\right]\right|$$

$$\leq \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2}\frac{1}{\alpha+1}\left[1 - \frac{1}{2^{\alpha}}\right]\left[\left|f'(\varphi(a))\right| + \left|f'(\varphi(b))\right|\right].$$

elde edilir.

Şimdi de ispatı $q > 1$ için ele alınsın. Lemma 3.2.1 ve power mean eşitsizliğini kullandığımızda,

$$\int_0^1 \left|(1-t)^{\alpha} - t^{\alpha}\right|\left|f'\left[t(\varphi(a)) + (1-t)(\varphi(b))\right]\right| dt$$

$$\leq \left(\int_0^1 \left|(1-t)^{\alpha} - t^{\alpha}\right| dt\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \left|(1-t)^{\alpha} - t^{\alpha}\right|\left|f'\left[t(\varphi(a)) + (1-t)(\varphi(b))\right]\right|^{q} dt\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.28}$$

olur. $\left|f'\right|^{q}$, φ -konveks olduğundan

$$\left|\frac{f(\varphi(a))+f(\varphi(b))}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(\varphi(b)-\varphi(a))^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{(\varphi(a))^{+}}f(\varphi(b))+J^{\alpha}_{(\varphi(b))^{-}}f(\varphi(a))\right]\right|$$

$$\leq\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2}\left(\int_0^1\left|(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left(\int_0^1\left|(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right|\left|f'[t(\varphi(a))+(1-t)(\varphi(b))]\right|^{q}dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left[(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right]dt+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left[t^{\alpha}-(1-t)^{\alpha}\right]dt\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left(\int_0^1\left|(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right|\left[t\left|f'(\varphi(a))\right|^{q}+(1-t)\left|f'(\varphi(b))\right|^{q}\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2}2^{\frac{q-1}{q}}\left[\frac{1}{\alpha+1}\left(1-\frac{1}{2^{\alpha}}\right)\right]\left[\left|f'(\varphi(a))\right|^{q}+\left|f'(\varphi(b))\right|^{q}\right]^{\frac{1}{q}}.$$

elde ederiz. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.4. $a,b\in J$, $0\leq a<b$ olmak üzere J bir aralık ve $\varphi: J\to\mathbb{R}$ sürekli artan fonksiyon olsun. Ayrıca $f: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I° (I 'nın içi) üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. $\varphi(a),\varphi(b)\in I$ için $f'\in L_1[\varphi(a),\varphi(b)]$ ve $|f'|^{q}$, $[a,b]$ aralığında φ -konveks , $q>1$ ise, $\alpha>0$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\left|\frac{f(\varphi(a))+f(\varphi(b))}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(\varphi(b)-\varphi(a))^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{\varphi(a)^{+}}f(\varphi(b))+J^{\alpha}_{\varphi(b)^{-}}f(\varphi(a))\right]\right|$$

$$\leq\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2}\left[\frac{2}{\alpha p+1}\left(1-\frac{1}{2^{\alpha p}}\right)\right]^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\left|f'(\varphi(a))\right|^{q}+\left|f'(\varphi(b))\right|^{q}}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.29}$$

İspat. Lemma 3.2.1 deki (3.20) ifadesi $|f'|^q$, φ -konveks olduğunu ve Hölder eşitsizliği kullanılarak,

$$\left|\frac{f(\varphi(a))+f(\varphi(b))}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(\varphi(b)-\varphi(a))^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{\varphi(a)^+}f(\varphi(b))+J^{\alpha}_{\varphi(b)^-}f(\varphi(a))\right]\right|$$

$$\leq \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2}\int_0^1\left|(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right|\left|f'[t(\varphi(a))+(1-t)(\varphi(b))]\right|dt$$

$$\leq \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2}\left(\int_0^1\left|(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f'[t(\varphi(a))+(1-t)(\varphi(b))]\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left[(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right]^p dt+\int_{\frac{1}{2}}^1\left[t^{\alpha}-(1-t)^{\alpha}\right]^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left(\int_0^1\left[t|f'(\varphi(a))|^q+(1-t)|f'(\varphi(b))|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left[(1-t)^{\alpha p}-t^{\alpha p}\right]dt+\int_{\frac{1}{2}}^1\left[t^{\alpha p}-(1-t)^{\alpha p}\right]dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left(\frac{|f'(\varphi(a))|^q+|f'(\varphi(b))|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2}\left[\frac{2}{\alpha p+1}\left(1-\frac{1}{2^{\alpha p}}\right)\right]^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f'(\varphi(a))|^q+|f'(\varphi(b))|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

elde edilir. Burada, her $A>B\geq 0$, $p\geq 1$ için $(A-B)^p\leq A^p-B^p$ eşitsizliği kullanıldı.

Teorem 3.2.5. $a,b \in J$, $0 \le a < b$ olmak üzere J bir aralık ve $\varphi : J \to \mathrm{R}$ sürekli artan fonksiyon olsun. Ayrıca $f : I \subseteq \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ fonksiyonu I° (I 'nın içi) üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. $\varphi(a), \varphi(b) \in I$ için $f' \in L_1[\varphi(a), \varphi(b)]$ ve $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında φ -konveks , $q \ge 1$ ise, $\alpha > 0$ için aşağıdaki kesirli integraller için eşitsizlik sağlanır.

$$\left| \frac{f(\varphi(a)) + f(\varphi(b))}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(\varphi(b)-\varphi(a))^{\alpha}} \left[J^{\alpha}_{\varphi(a)^+} f(\varphi(b)) + J^{\alpha}_{\varphi(b)^-} f(\varphi(a)) \right] \right|$$

$$\le \left[\frac{1}{q\alpha+1} \left(1 - \frac{1}{2^{q\alpha+1}} \right) \right]^{\frac{1}{q}} \left(\frac{|f'(\varphi(a))|^q + |f'(\varphi(b))|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.30}$$

İspat. Lemma 3.2.1 deki (3.20) ifadesi, $|f'|^q$, φ -konveks olduğunu ve Hölder eşitsizliği kullanılarak,

$$\left| \frac{f(\varphi(a)) + f(\varphi(b))}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(\varphi(b)-\varphi(a))^{\alpha}} \left[J^{\alpha}_{\varphi(a)^+} f(\varphi(b)) + J^{\alpha}_{\varphi(b)^-} f(\varphi(b)) \right] \right|$$

$$\le \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2} \int_0^1 \left| (1-t)^{\alpha} - t^{\alpha} \right| \left| f'[t(\varphi(a)) + (1-t)(\varphi(b))] \right| dt$$

$$\le \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2} \left(\int_0^1 1^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| (1-t)^{\alpha} - t^{\alpha} \right|^q \left| f'[t(\varphi(a)) + (1-t)(\varphi(b))]^q \right| dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left[(1-t)^{\alpha} - t^{\alpha} \right]^q \left| f'[t(\varphi(a)) + (1-t)(\varphi(b)] \right|^q dt \right.$$

$$\left. + \int_0^{\frac{1}{2}} \left[t^{\alpha} - (1-t)^{\alpha} \right]^q \left| f'[t(\varphi(a)) + (1-t)(\varphi(b))] \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2}\left(|f'(\varphi(a))|^{q} \int_{0}^{\frac{1}{2}} \left[(1-t)^{q\alpha} t - t^{q\alpha+1} \right] dt \right.$$

$$+ |f'(\varphi(b))|^{q} \int_{0}^{\frac{1}{2}} \left[(1-t)^{q\alpha+1} - t^{q\alpha}(1-t) \right] dt$$

$$+ |f'(\varphi(a))|^{q} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left[t^{q\alpha+1} - (1-t)^{q\alpha} t \right] dt$$

$$\left. + |f'(\varphi(b))|^{q} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left[t^{q\alpha}(1-t) - (1-t)^{q\alpha+1} \right] dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2}\left(\frac{1}{\alpha+1}\left[1-\frac{1}{2^{\alpha}} \right] \right)^{\frac{1}{q}} \left[|f'(\varphi(a))| + |f'(\varphi(b))| \right]^{\frac{1}{q}}$$

bulunur. Burada, her $A > B \geq 0$, $p \geq 1$ için $(A-B)^{p} \leq A^{p} - B^{p}$ eşitsizliği kullanıldı.

3.3. AYRIK KESİRLİ İNTEGRAL İÇİN HERMİTE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİK

$\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi olmak üzere $a, b \in \mathbb{Z}$ ile $a < b$ ve $[a,b]_{\mathbb{Z}}$; ($[a,b] \cap \mathbb{Z}$) olsun. O halde

$$\mathbb{T}_{[a.b]} = \left\{ u \;\middle|\; u = \frac{t-b}{a-b}; t \in [a,b]_{\mathbb{Z}} \; için \right\}$$

ifadesini tanımlayalım.

$\mathbb{T}_{[a.b]}$ ifadesinin $[0,1]$ aralığının bir alt kümesi olduğuna dikkat etmeliyiz. $\mathbb{R}$, Reel sayılar kümesinin herhangi bir boş olmayan kapalı alt kümesine, bir zaman skalası olarak adlandırılır. Dolayısıyla, düşünebiliriz ki $\mathbb{T}_{[a.b]}$, zaman skalası içerisinde bütün izole edilmiş noktalar aynı zamanda sağ ve sol aralıklardır. Zaman Skalası Analizi hakkında daha fazla bilgi için Bohner and Peterson (2001) e bakabilirsiniz.

Şimdi, tanım kümesi $\mathbb{Z}$ yani tamsayılar kümesi üzerinde olan fonksiyonlar için konvekslik tanımı verilecektir.

Tanım 3.3.1. $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu her $x,y\in\mathbb{Z}$ ile $x<y$ ve $\lambda\in\mathbb{T}_{[x,y]}$ için

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonu $\mathbb{Z}$ üzerinde konvekstir denir.

Tanım 3.3.2. $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu her $a,b\in\mathbb{Z}$ ile $a+b$ toplamı çiftse

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliğine Jensen eşitsizliği ya da midpoint koşulu denir. Vereceğimiz ilk teoremin ispatı için Ayrık Taylor Teoremi önemli bir rol oynar. Aşağıda Ayrık Taylor Teoremi verilsin.

Teorem 3.3.3. (Ayrık Taylor Teoremi) [Agarwal (2000)] $u(k)$, $\mathbb{N}_a$ üzerinde tanımlı olsun. Tüm $k\in\mathbb{N}_a$ ve $n\geq 1$ için, $\mathbb{N}_a=\{a,a+1.....\}$ den,

$$u(k)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(k-a)^{(i)}}{i!}\Delta^i u(a)+\frac{1}{(n-1)!}\sum_{l=a}^{k-n}(k-(l+1))^{l}\Delta^n u(l),$$

dır.

Şimdi, ayrık fonksiyonlar için konveksliğin sağladığını aşağıdaki teoremi vererek ispat edilecektir.

Teorem 3.3.4. $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

(i) f , $\mathbb{Z}$ üzerinde konvekstir.

(ii) f , midpoint koşulunu gerektirir.

(iii) Tüm $t \in \mathbb{Z}$ için $\Delta^2 f(t) \geq 0$ dır.

İspat. $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$ olduğunu ispat edeceğiz.

$(i) \Rightarrow (ii)$: $a, b \in \mathbb{Z}$ ile $a < b$ ve $a + b$ toplamı çift olsun. Bu durum, $\frac{1}{2} \in \mathrm{T}_{[a,b]}$ anlamına gelir. Bunun sonucu olarak, $\lambda = \frac{1}{2}$ seçerek midpoint koşulunu elde ederiz.

(ii) den (iii) ye geçişi elde edelim. $t \in \mathbb{Z}$ olsun. $[t, t+2]_{\mathbb{Z}}$ ayrık aralığı düşünülsün. $\mathrm{T}_{[t,t+2]} = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ olduğunu kolayca görebiliriz. $\lambda = \frac{1}{2}$, $a = t$ ve $b = t + 2$ seçtiğimizde midpoint koşulunu sağlar. Bu durumda,

$$f(t+1) = f\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}(t+2)\right) \leq \frac{1}{2} f(t) + \frac{1}{2} f(t+2)$$

elde ederiz. Yukarıda ki ifadeyi düzenlediğimizde,

$$f(t+1) - 2f(t+1) + f(t) \geq 0$$

dır. Yani, $\Delta^2 f(t) \geq 0$ dır.

Şimdi, (iii) den (i) ye geçişi ispat edilsin.

$x, y \in \mathbb{Z}$ ile $x < y$ olsun. Tüm $\lambda \in \mathrm{T}_{[x,y]}$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

ispat etmeye ihtiyacımız var. Öncelikle, Ayrık Ortalama Değer teoremini kullanarak, $\exists \tau, c \in [x, x_0)$ olacak şekilde

$$\Delta f(c) \leq \frac{f(x_0) - f(x)}{x - x_0} \leq \Delta f(\tau) \tag{3.31}$$

dır. $\Delta^2 f(t) \geq 0$ olduğundan Δf artandır. Bu demektir ki

$$\Delta f(\tau) \leq \Delta f(x_0)$$

dır. Buradan hareketle, (3.31) eşitsizliğini kullanarak

$$f(x_0) - (x_0 - x)\Delta f(x_0) \leq f(x_0) - (x_0 - x)\Delta f(\tau) \leq f(x)$$

elde ederiz. Yani

$$f(x_0) - (x_0 - x)\Delta f(x_0) \leq f(x)$$

yazabiliriz. Buradan da,

$$f(x) \geq f(x_0) + (x - x_0)\Delta f(x_0) \tag{3.32}$$

elde edilir.

Şimdi de Teorem 3.3.3 de ki Ayrık Taylor teoremini kullanarak; x_0 da

$$f(y) = \sum_{i=0}^{1} \frac{(y - x_0)^{(i)}}{i!} \Delta^i f(x_0) + \frac{1}{1!} \sum_{l=0}^{y-2} (y - (l+1))^{(1)} \Delta^{(2)} f(l)$$

açılımı yapılır. Dolayısıyla, Z üzerinde $\Delta^2 f(t) \geq 0$ olduğundan ve Teorem 1.2.7 deki Ortalama Değer Teoremini kullanarak,

$$f(y) \geq f(x_0) + (y - x_0)\Delta f(x_0) \tag{3.33}$$

yazabiliriz. Buradan, (3.32) eşitsizliğini λ ile (3.33) eşitsizliğini $1-\lambda$ ile çarpıp ortaya çıkan iki eşitsizliği taraf tarafa toplandığında, tüm $\lambda \in \mathsf{T}_{[x,y]}$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

$\mathbb{Z}$ üzerinde tanımlı olan konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizliği aşağıda ki teoremde ispatlayacağız.

Vereceğimiz teoremlerin ispatı için aşağıda verilen zaman skalası üzerinde integraller için değişken değiştirme metodu önemli rol oynamaktadır.

Teorem 3.3.5. (Zaman Skalası Üzerinde Değişken Değiştirme Metodu)[Eloe, Sheng and Henderson (2003)] Varsayalım ki $\nu : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ kesinlikle artan ve $\tilde{\mathbb{T}} : \nu(\mathbb{T})$ bir zaman skalası olsun. Eğer $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon, ν diferansiyellenebilir ve türevi sürekli ise; $a, b \in \mathbb{T}$ için

$$\int_a^b f(t)\nu^{\Delta}(t)\Delta t = \int_{\nu(a)}^{\nu(b)} \left(f \circ \nu^{-1}\right)(s)\tilde{\Delta}(s)$$

veya

$$\int_a^b f(t)\nu^{\nabla}(t)\nabla t = \int_{\nu(a)}^{\nu(b)} \left(f \circ \nu^{-1}\right)(s)\tilde{\nabla}(s)$$

dır.

Şimdi zaman skalasında Hermite-Hadamard eşitsizliği verilsin.

Teorem 3.3.6. Farz edelim ki $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]_{\mathbb{Z}}$ üzerinde bir konveks fonksiyon ve $a, b \in \mathbb{Z}$, $a < b$ ile $a + b$ toplamı çift olsun. Bu durumda

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2(b-a)}\left[\int_a^b f(t)\Delta t + \int_a^b f(t)\nabla t\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{3.34}$$

dır.

İspat. $t \in \mathbb{T}_{[a,b]} \setminus \{0,1\}$ alalım ve

$$x = ta + (1-t)b$$

$$y = (1-t)a + tb$$

şeklinde tanımlanılsın.

Kolayca görülüyor ki $x, y \in [a,b]_{\mathrm{Z}}$ ve $x + y$ toplamı çifttir. Bunun sonucu ile $\frac{1}{2} \in \mathrm{T}_{[x,y]}$ (veya $\mathrm{T}_{[y,x]}$) dır. f , $[x,y]_{\mathrm{Z}}$ (veya $[y,x]_{\mathrm{Z}}$) üzerinde konveks olduğundan

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

eşitsizliği yazılır. Buradan, x ve y ' yi yerleştirdiğimizde;

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left[f\left(tb + (1-t)a\right) + f\left((1-t)a + tb\right)\right] \tag{3.35}$$

yazabiliriz. (3.35) eşitsizliğinin her iki tarafını $\mathrm{T}_{[a,b]}$ üzerinde integre ettiğimizde

$$\int_{\mathrm{T}_{[a,b]}} f\left(\frac{a+b}{2}\right)\tilde{\Delta} t \leq \frac{1}{2}\left[\int_{\mathrm{T}_{[a,b]}} f\left(ta + (1-t)b\right)\tilde{\Delta} t + \int_{\mathrm{T}_{[a,b]}} f\left((1-t)a + tb\right)\tilde{\Delta} t\right]$$

elde edilir.

Şimdi ilk olarak,

$$\int_{\mathrm{T}_{[a,b]}} f\left(tb + (1-t)a\right)\tilde{\Delta} t$$

integralinin eşitini bulalım. $\nu(t) = \dfrac{t-a}{b-a}$ fonksiyonu seçilsin. Bu durumda

$$f\left(tb + (1-t)a\right) = \left(f \circ \nu^{-1}\right)(t)$$

yazılır. ν , kesinlikle artandır ve

$$\nu\left([a,b]_{\mathbb{Z}}\right)=\mathbb{T}_{[a,b]}$$

dir. Teorem 3.3.5 den yararlanarak zaman skalası üzerinde değişken değiştirme metodunu kullanarak ve $\nu^{\Delta}(t)=\dfrac{1}{b-a}$ olduğundan

$$\int_{\mathbb{T}_{[a,b]}} f\left(tb+(1-t)a\right)\tilde{\Delta}t=\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]_{\mathbb{Z}}} f(t)\Delta t;$$

olur. Diğer integralin ispatı için;

$$\int_{\mathbb{T}_{[a,b]}} f\left(ta+(1-t)b\right)\tilde{\Delta}t=\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]_{\mathbb{Z}}} f(t)\nabla t, \tag{3.36}$$

şeklinde alınsın. Caputo (2010) tarafından verilen tanımda, dual zaman skalası ifadesini kullanarak (3.36) ifadesini ispat edeceğiz.

$\nu(t)=\dfrac{t-b}{a-b}$ şeklinde tanımlayalım. (3.36) ifadesinin sol tarafı için

$$\begin{aligned}
\left(f\circ\nu^{-1}\right)*(s) &= f\left(\nu^{-1}(-s)\right)\\
&= f\left(\left(\nu^{-1}\circ u\right)(s)\right)\\
&= f\left(\left(u^{-1}\circ\nu\right)^{-1}(s)\right)
\end{aligned}$$

ve $u(s)=-s$ den

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}_{[a,b]}} f\left(ta+(1-t)b\right)\tilde{\Delta}t &= \int_{\mathbb{T}_{[a,b]}}\left(f\circ\nu^{-1}\right)(s)\tilde{\Delta}s\\
&= \int_0^1\left(f\circ\nu^{-1}\right)(t)\tilde{\Delta}t\\
&= \int_{-1}^0\left(f\circ\nu^{-1}\right)*(t)\tilde{\nabla}t\\
&= \int_{-1=\left(u^{-1}\circ\nu\right)(a)}^{0=\left(u^{-1}\circ\nu\right)(b)} f\left(\left(u^{-1}\circ\nu\right)^{-1}(t)\right)\tilde{\nabla}t
\end{aligned} \tag{3.37}$$

elde ederiz. Aynı zamanda,

$$\left(u^{-1}\circ v\right)(s)=u^{-1}(v(s))=u^{-1}\left(\frac{s-b}{a-b}\right)=\frac{b-s}{a-b},$$

dır ve $\left(u^{-1}\circ v\right)^{\nabla}(s)=\dfrac{1}{b-a}>0\Rightarrow u^{-1}\circ v$ kesinlikle artandır.

(3.37) için Teorem 3.3.5 deki değişken değiştirme metodunu kullanarak

$$\int_{-1}^{0} f\left(u^{-1}\circ v\right)^{-1}(t)\tilde{\nabla}t=\int_{a}^{b} f(t)\frac{1}{b-a}\nabla t$$

isteneni elde etmiş oluruz.

Ayrıca, (3.34) ifadesinin diğer tarafındaki eşitsizliği ispatlamak için, fonksiyonun konveksliğini kullanarak ispat edeceğiz. Bunun için

$$f(ta+(1-t)b)\leq tf(a)+(1-t)f(b)$$

$$f((1-t)a+tb)\leq(1-t)f(a)+tf(b)$$

eşitsizliklerini yazabiliriz. Bu iki eşitsizliği ilk olarak taraf tarafa topladığımızda

$$f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)\leq f(a)+f(b)$$

elde ederiz. Elde edilen eşitsizliğin her iki tarafını $\mathrm{T}_{[a,b]}$ üzerinde integre ettiğimizde

$$\int_{\mathrm{T}_{[a,b]}}\left(f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)\right)\tilde{\Delta}t\leq\int_{\mathrm{T}_{[a,b]}}\left(f(a)+f(b)\right)\tilde{\Delta}t$$

yazılır. Yukarıda ki benzer çözümlerle

$$\frac{1}{b-a}\left(\int_{a}^{b} f(t)\Delta(t)+\int_{a}^{b} f(t)\nabla t\right)\leq f(a)+f(b).$$

elde edilir. Dolayısıyla, ispat tamamlanmış olur.

Şimdi de $\mathbb{Z}$ üzerinde tanımlı olan konveks fonksiyonlar için Ayrık Kesirli İntegraller için Hermite-Hadamard tipli eşitsizliği aşağıda ki teoremde ispatlanılacaktır.

Teorem 3.3.7. Farz edelim ki $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]_{\mathbb{Z}}$ üzerinde bir konveks fonksiyon ve $a,b\in\mathbb{Z}$, $a<b$ ile $a+b$ toplamı çift olsun. Bu durumda

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{\Gamma(\alpha)}{2\beta(b-a)}\left[{}_{b-1}\Delta^{-\alpha}f(t)|_{t=a-\alpha}+\nabla_{a+1}^{-\alpha}f(t)|_{t=b}\right]\leq\frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3.38}$$

dır ve

$$\beta=\int_{\mathbb{T}_{[a,b]}}((b-a)t+(\alpha-1))^{\overline{\alpha-1}}\Delta t,$$

ve α, pozitif bir reel sayıdır.

İspat . $t\in\mathbb{T}_{[a,b]}\backslash\{0,1\}$ ele alınsın.

$$x=ta+(1-t)b$$
$$y=(1-t)a+tb$$

şeklinde tanımlayalım.

Kolayca görülüyor ki $x,y\in[a,b]_{\mathbb{Z}}$ ve $x+y$ toplamı çifttir. Aynı zamanda f fonksiyonu $[x,y]_{\mathbb{Z}}$ (veya $[y,x]_{\mathbb{Z}}$) üzerinde konveks ise biz $\lambda=\frac{1}{2}$ seçebiliriz. Bu durumda

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq\frac{f(x)+f(y)}{2}$$

eşitsizliğini yazarız. Buradan, x ve y ' yi yerleştirdiğimizde;

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{1}{2}\left[f(tb+(1-t)a)+f((1-t)a+tb)\right]$$

elde edilir. Yukarıda ki eşitsizliğin her iki tarafını $((b-a)t+(\alpha-1))^{\underline{\alpha-1}}$ ile çarpıp daha sonar $\mathbb{T}_{[a,b]}$ üzerinde integre ettiğimizde

$$\int_{\mathbb{T}_{[a,b]}} ((b-a)t+(\alpha-1))^{\underline{\alpha-1}} f\left(\frac{a+b}{2}\right)\tilde{\Delta}t$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[\int_{\mathbb{T}_{[a,b]}} ((b-a)t+(\alpha-1))^{\underline{\alpha-1}} f(ta+(1-t)b)\tilde{\Delta}t\right.$$

$$\left.+\int_{\mathbb{T}_{[a,b]}} ((b-a)t+(\alpha-1))^{\underline{\alpha-1}} f((1-t)a+tb)\tilde{\Delta}t\right]$$

elde edilir. Açık olarak ifade edildiğinde

$$\int_{\mathbb{T}_{[a,b]}} ((b-a)t+(\alpha-1))^{\underline{\alpha-1}} f((1-t)a+tb)\tilde{\Delta}t$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha)}{b-a}\,{}_{b-1}\Delta^{-\alpha} f(t)|_{t=a-\alpha}$$

eşit olduğunu iddia ediyoruz. İddiamızı ispatlamak için $g(t)=(t-a+(\alpha-1))^{\underline{\alpha-1}}$, $\nu(t)=\dfrac{t-a}{b-a}$ ve $F(t)=f(t)g(t)$ şeklinde tanımlanılsın. Bu durumda

$$\begin{aligned} F(\nu^{-1}(t))=(gf)(\nu^{-1}(t)) &= g(\nu^{-1}(t))f(\nu^{-1}(t)) \\ &= (\nu^{-1}(t)-a+(\alpha-1))^{\underline{\alpha-1}} f((1-t)a+tb) \\ &= ((b-a)t+(\alpha-1))^{\underline{\alpha-1}} f((1-t)a+tb) \end{aligned}$$

olduğunu fark edebiliriz. İntegral hesabı için bir önceki teoremin ispatında ki gibi değişken değiştirme metodunu kullanarak,

$$\int_{\mathbb{T}_{[a,b]}} ((b-a)t+\alpha-1)^{\underline{\alpha-1}} f((1-t)a+tb)\tilde{\Delta}t$$

$$=\int_a^b F(t)\nu^{\Delta}(t)\Delta t=\frac{1}{b-a}\sum_{t=a}^{b-1}(t-a+\alpha-1)^{\underline{\alpha-1}} f(t)$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha)}{b-a}\,{}_{b-1}\Delta^{-\alpha} f(t)|_{t=a-\alpha}$$

elde ederiz. Bu durumda iddiamız ispatlanmış olur. Diğer iddiamız

$$\int_{\mathbb{T}_{[a,b]}} ((b-a)t+\alpha-1)^{\underline{\alpha-1}} f(ta+(1-t)b)\tilde{\Delta}t=\frac{\Gamma(\alpha)}{b-a}\nabla_{a+1}^{-\alpha} f(t)|_{t=b}$$

ifadesinin eşit olduğunu bulmaktır. Bu iddianın ispatı için [Caputo (2010)] dual zaman skalasının sonucu ve bilinen notasyonları kullanılacaktır.

Gerçekten, $F(t)=f(t)g(t)$, $g(t)=(b-t+(\alpha-1))^{\underline{\alpha-1}}$, $\nu(t)=\dfrac{t-b}{a-b}$ ve $u(s)=-s$ den

$$\int_{\mathbb{T}_{[a,b]}} ((b-a)t+\alpha-1)^{\underline{\alpha-1}} f(ta+(1-t)b)\tilde{\Delta}t$$

$$=\int_{\mathbb{T}_{[a,b]}} (F\circ\nu^{-1})(t)\tilde{\Delta}t=\int_{-1}^{0}(F\circ\nu^{-1})*(s)\tilde{\nabla}s,$$

yazılır. Aynı zamanda,

$$(u^{-1}\circ\nu)(s)=u^{-1}(\nu(s))=u^{-1}\left(\frac{s-b}{a-b}\right)=\frac{b-s}{a-b},$$

dır ve $(u^{-1}\circ\nu)^{\nabla}(s)=\dfrac{1}{b-a}>0\Rightarrow u^{-1}\circ\nu$ kesinlikle artandır.

Teorem 3.3.5 deki değişken değiştirme metodunu kullanarak,

$$\int_{-1}^{0}\left(F\circ\nu^{-1}\right)^{*}(s)\nabla^{*}s \;=\; \int_{-1}^{0}F\left(\left(u^{-1}\circ\nu\right)^{-1}\right)(s)\nabla^{*}s$$

$$= \int_{a}^{b}F(t)\frac{1}{b-a}\nabla t$$

yazabiliriz. Burada integralin içinde $F(t)$ ‘yi geri yerine koyduğumuzda ve $(b-s+\alpha-1)^{\underline{\alpha-1}}=(b-s+\alpha+1)^{\overline{\alpha-1}}$ eşitliğini kullanarak

$$\int_{a}^{b}F(t)\frac{1}{b-a}\nabla t \;=\; \frac{1}{b-a}\sum_{s=a+1}^{b}(b-s+\alpha-1)^{\underline{\alpha-1}}f(s)$$

$$= \frac{1}{b-a}\sum_{s=a+1}^{b}(b-\rho(s))^{\overline{\alpha-1}}f(s)$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)}{b-a}\nabla_{a+1}^{\alpha}f(t)|_{t=b},$$

elde ederiz. İkinci iddiamızı da ispatlamış oluruz. Yani

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{\Gamma(a)}{2\beta(b-a)}\left[{}_{b-1}\Delta^{-\alpha}f(t)|_{t=a-\alpha}+\nabla_{a+1}^{-\alpha}f(t)|_{t=b}\right]$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Ayrıca, (3.38) eşitsizliğinin diğer tarafını ispatlamak için tekrar f fonksiyonun $[x,y]_{Z}$ üzerinde konveksliğini kullanarak,

$$f(ta+(1-t)b)\le tf(a)+(1-t)f(b)$$

$$f((1-t)a+tb)\le(1-t)f(a)+tf(b)$$

eşitsizliklerini yazabiliriz. Bu iki eşitsizlikleri taraf tarafa topladığımızda

$$f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)\le f(a)+f(b)$$

elde ederiz. Elde edilen eşitsizliğin her iki tarafını öncelikle $\left((b-a)t+(\alpha-1)\right)^{\underline{\alpha-1}}$ ile çarpıp daha sonra $\mathbb{T}_{[a,b]}$ üzerinde integre ettiğimizde

$$\int_{\mathbb{T}_{[a,b]}} \left((b-a)t+\alpha-1\right)^{\underline{\alpha-1}} f\left(ta+(1-t)b\right)\tilde{\Delta} t+\int_{\mathbb{T}_{[a,b]}} \left((b-a)t+\alpha-1\right)^{\underline{\alpha-1}} f\left((1-t)a+tb\right)\tilde{\Delta} t$$

$$\leq \int_{\mathbb{T}_{[a,b]}} \left((b-a)t+\alpha-1\right)^{\underline{\alpha-1}} \left(f(a)+f(b)\right)\tilde{\Delta} t$$

yazılır. Buradan

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{2\beta(b-a)}\left[{}_{b-1}\Delta^{-\alpha} f(t)|_{t=a-\alpha}+\nabla_{a+1}^{-\alpha} f(t)|_{t=b}\right]\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.3.1. Teorem 3.3.7 deki (3.38) eşitsizliğinde α yerine 1 seçersek, Teorem 3.3.6 deki (3.34) eşitsizliğini elde etmiş oluruz.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

4.1. SONUÇLAR

(3). Bölüm bulgular kısmında; (3.1) Hermite-Hadamard-Fejer Tipli Eşitsizlik alt başlıklı çalışma, Hermite-Hadamard-Fejer Type Inequality adı altında "**Applied and Computational Mathematics**" adlı dergide incelenmektedir. (3.2) Kesirli İntegrallerden Yaralanılarak $\varphi-$Konveks Fonksiyon İçin Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlik alt başlıklı çalışma, On Hermite-Hadamard Type Inequalities for $\varphi-$Convex Functions Via Fractional Integrals adı altında "**Malaysian Journal of Mathematical Sciences**" adlı dergide basılmıştır. Basım bilgileri 9(2): 243-258 (2015) şeklindedir. (3.3) Ayrık Kesirli İntegral İçin Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlik alt başlıklı çalışma, Convex Functions On Discrete Time Domains adı altında "**Canadian Mathematical Bulletin**" adlı dergide basılmıştır. Basım bilgileri http://dx.doi.org/10.4153/CMB-2015-065-6 şeklindedir.

4.2. ÖNERİLER

(3). Bölüm altında bulunan çalışmalardan hareketle açık problemler verilebilir. Yani, (3.1) kısmının son teoreminde bazı farklı türden konveks fonksiyonlar için Hölder ve power mean eşitsizlikleri kullanılarak ve kesirli integrallerden yararlanılarak Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilebilir. (3.2) kısmın da ise integral içinde farklı fonksiyonlar alınarak, $\varphi-$konveks fonksiyonlar için yeni bir lemma elde edilip bu lemmadan hareketle $|f'|$ nin $\varphi-$konveks olduğu kullanılarak kesirli integrallerden yararlanılarak, Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilebilir. (3.3) alt başlıklı kısımda ise söyleyebiliriz ki $\mathbb{R}$ üzerinde yapılan çalışmalar uygun koşullarda $\mathbb{Z}$ üzerinde çalışılarak discrete konveks fonksiyonlar için öncelikle bir lemma tanımlanıp bu lemmadan hareketle ayrık kesirli integrallerden yararlanılarak yeni tip Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilebilir. Söylemiş olduğumuz bilgilere göre örnek verecek olursak;

$$\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{2(b-a)}\left(\int_a^b f(t)\Delta t+\int_a^b f(t)\nabla t\right)\right]$$

$$=\frac{b-a}{4}\left[\int_0^1 (1-2\tilde{\rho}(t))f^{\Delta}(ta+(1-t)b)\tilde{\nabla}t+\int_0^1 (1-2\tilde{\tau}(t))f^{\nabla}(ta+(1-t)b)\tilde{\Delta}t\right].$$

şeklinde ki lemma uygun şartlara göre çözümlenip; arkasından bu lemmaya göre ayrık konveks fonksiyon tanımından yararlanılarak Hermite-Hadamard tipli eşisizlikler elde edilebilir.

5. KAYNAKLAR

Abdeljawad T., Baleanu D., Jarad F., Agarwal R., Fractional Sums and Differences with Binomial Coefficients, *Discrete Dyn. Nat. Soc.*, Art. ID 104173, 6 pp, **(2013)**.

Agrawal R., Om P., Formulation of Euler-Lagrange Equations for Fractional Variational Problems, *J. Math. Anal. Appl*, 272, **(2002)**, 368-379.

Agarwal R. P., *Difference Equations and Inequalities; Theory, Methods and Applications*, Second Edition, (revised and expanded.) Pure and Applied Mathematics A Series of Monographs and Textbooks, **(2000)**.

Alomari M.and Darus M., On the Hadamard's inequality for log-convex functions on the coordinates, *Journal of Inequalities and Applications*, vol. 2009, Article ID 283147, 13 pages, **(2009)**.

Anastassiou G., Hooshmandasl M.R, Ghasemi A. and Moftakharzadeh F., Montogomery identities for fractional integrals and related fractional inequalities, *J. Ineq. Pure and Appl. Math.*, Art. 97, 10(4) **(2009)**.

Atıcı F. M. and Eloe P. W., A Transform Method in Discrete Fractional Calculus, *International Journal of Differ. Equ.*, 2, **(2007)**, 165-176.

Atıcı F. M. and Eloe P. W., Discrete Fractional Calculus with the Nabla Operator, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, Spec. Ed I, No.3, **(2009)**, 1–12.

Atıcı F. M. and Eloe P. W., Initial Value Problems in Discrete Fractional Calculus, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 137, **(2009)**,981-989.

Azpeitia A.G., Convex functions and the Hadamard inequality, *Rev. Colombiana Math.*, 28, **(1994)**, 7-12.

Babakhani A., Daftardar-Gejji V., On Calculus of Local Fractional Derivatives, *J. Math. Anal. Appl.*, 270, **(2002)**, 66-79.

Bakula M. K. and Pečarić J., Note on some Hadamard-type inequalities, *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, vol. 5, no. 3, article 74, **(2004)**.

Bakula M.K., Özdemir M.E, Pečarić J., Hadamard tpye inequalities for m-convex and (α,m)-convex functions, *J. Ineq. Pure and Appl. Math.*, Art. 96, 9(4) **(2008)**.

Bayraktar M., *Fonksiyonel Analiz*, ISBN 975-442-035-1,**(2000)**.

Belarbi S. and Dahmani Z., On some new fractional integral inequalities, *J. Ineq. Pure and Appl. Math.*, Art. 86, 10(3) **(2009)**.

Bertram R., *Fractional Calculus and Its Applications*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg , **(1975)**.

Bohner M. and Peterson A., *Dynamic Equations on Time Scales*, Birkh¨auser, Boston, **(2001)**.

Butzer P.L., Westphal U., *An Introduction to Fractional Calculus*, in: R. Hilfer (Ed.), Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific, New Jersey, **(2000)**.

Caputo M. C., Time Scales: From Nabla Calculus to Delta Calculus and Vice Verse via Duality, *Int. J.Difference Equ.*, 5(1), **(2010)**, 25–40.

Dahmani Z., New inequalities in fractional integrals, *International Journal of Nonlinear Scinece*, 9(4) **(2010)**, 493-497.

Dahmani Z., On Minkowski and Hermite-Hadamard integral inequalities via fractional integration, *Ann. Funct. Anal.*, 1(1) **(2010)**, 51-58.

Dahmani Z., Tabharit L., Taf S., Some fractional integral inequalities, *Nonl. Sci. Lett. A*, 1(2) **(2010)**, 155-160.

Dahmani Z., Tabharit L., Taf S., New generalizations of Gruss inequality using Riemann-Liouville fractional integrals, *Bull. Math. Anal. Appl.*, 2(3), **(2010),** 93-99.

Dragomir S. S. and Agarwal R.P., Two inequalities for diferentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula, *Appl. Math. lett.*, 11(5) **(1998)** , 91-95.

Dragomir S. S. and Pearce C. E. M., *Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications*, RGMIA Monographs, Victoria University, **(2000)**.

Dragomir S.S., On some new inequalities of Hermite-Hadamard type for m- convex functions, *Tamkang J. Math.*, 3(1) **(2002)**.

Diaz JB and Olser TJ, Differences of Fractional Order, *Mathematics of Computation*, 28 **(1974)**.

Eloe P. W., Sheng Q. and Henderson J., Notes on Crossed Symmetry Solutions of the Two-point Boundary Value Problems on Time Scales, *J. Difference Equ. Appl.*, 9(1), **(2003)**,29–48**.**

Fejér L., *Uber die Fourierreihen*, II, Math. Naturwise. AnzUngar. Akad., Wiss, 24,(in Hungarian) **(1906),** 369–390.

Gill P. M., Pearce C. E. M., and Pečarić J., Hadamard's inequality for r-convex functions, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 215, no. 2, **(1997)**, 461—470.

Gray H. and Zhang N., On a New Definition of the Fractional Difference, *Mathematics of Computation*, 50, **(1988)**,513-529**.**

Gorenflo R., Mainardi F., Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order, *Springer Verlag* ,Wien **(1997)**, 223-276.

Kelley W. and Peterson A.C., Difference Equations: *An Introduction with Applications*, Academic Press,**(2004)**.

Kırmacı U.S., Inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to midpoint formula, *Appl. Math. Comp.*, 147 **(2004)**, 137-146.

Kırmacı U.S. and Özdemir M.E., On some inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to midpoint formula, *Appl. Math. Comp.*, 153, **(2004)**, 361-368.

Kırmacı U.S., Bakula M.K.,.Özdemir M.E, Pečarić J., Hadamard-type inequalities for s-convex functions, *Appl. Math. and Comp.*, 193 **(2007)**, 26-35.

Kilbas Anatoly A., Srivastava Hari M. and Trujillo Juan J., "*Theory and Applications of Fractional Differential Equations*".

Miller K. S. and Ross B., *An introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, John Wiley & Sons, USA, p.2, **(1993)**.

Miller K.S., Ross B., *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, John Wiley & Sons, New York, **(1974)**.

Miller K. S. and Ross B., Fractional difference calculus, in Univalent Functions, Fractional Calculus, and Their Applications (Koriyama, 1988), *Ellis Horwood Ser. Math. Appl.*, Chichester, **(1989)**, 139–152.

Mitrinović D.S., *Analytic Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin **(1970)**.

Mitrinović D.S., Pečarić J.E. and Fink A.M., *Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London **(1993)**.

Noor M. Aslam, Noor K. Inayat and Awan M. Uzair, Hermite-Hadamard Type Inequalities For φ -Convex Functions Via Fractional Integrals, *J. Adv. Math. Stud. Vol.* , No. 1,7 **(2014)**, 14-26**.**

Pachpatte B.G., "*Analytic Inequalities*". Atlantis Press, **(2012).**

Pečarić J.E., Proschan F.and Tong Y.L., *Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications*, Academic Press, Boston, **(1992)**.

Podlubny I., *Fractional Differential Equations*, Academic Press, London, **(1999)**.

Oldham K.B., Spainer, J., *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York and London, **(1974)**.

Özdemir M. E., Avci M., and Set E., On some inequalities of Hermite-Hadamard type via m-convexity, *Applied Mathematics Letters*, vol. 23, no. 9,**(2010)** , 1065-1070.

Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I., *Fractional Integrals and Derivatives – Theory and Applications*, Gordon and Breach, Longhorne, PA, **(1993)**.

Sarikaya M.Z. and Ogunmez H., On new inequalities via Riemann-Liouville fractional integration, *Abstract and Applied Analysis*, Volume 2012, Article ID 428983, 10 pages, **(2012)**.

Sarikaya M. Z., Buyukeken M. and Kiris M. E., On some generalized integral inequalities for φ -convex functions, *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.*, No. 3, 60 **(2015)** , 367–377.

Sarikaya M. Z., Set E., Yaldiz H. and Basak N., Hermite -Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities, *Mathematical and Computer Modelling*, DOI:10.1016/j.mcm.2011.12.048, 57, (**2013**) , 2403—2407.

Sarikaya M.Z. and Yaldiz H., On Weighted Montogomery Identities for Riemann-Liouville Fractional Integrals, *Konuralp Journal of Mathematics*, Vol.1 **(2013)**, 48–53.

Sarikaya M.Z. and Yaldiz H., On Generalization Integral Inequalities for Fractional Integrals, *Nihonkai Math. J.*,Vol.25 **(2014)** , 93–104**.**

Set E., Özdemir M. E., and Dragomir S. S., On the Hermite-Hadamard inequality and other integral inequalities involving two functions, *Journal of Inequalities and Applications*, Article ID 148102, 9 pages, **(2010)**.

Set E., Özdemir M. E., and Dragomir S. S., On Hadamard-Type inequalities involving several kinds of convexity, *Journal of Inequalities and Applications*, Article ID 286845, 12 pages, **(2010).**

Youness E. A., E -convex sets, E -convex functions and E -convex programming, *J. of Optim. Theory and Appl.*, 102, No. 2, **(1999)**, 439-450.

Youness E. A. and Emam T., Strongly E -convex sets and strongly E -convex functions, *J. of Inter. Math.*, 8(1), **(2005)**, 107-117.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: Hatice YALDIZ
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	:02.04.1987 Merkez\OSMANİYE
Telefon	: +90 546 578 7800
E-posta	: yaldizhatice@gmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Yüksek Lisans	Düzce Üniversitesi	2012
Lisans	Afyon Kocatepe Üniversitesi	2010

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2012-2013	İMKB Anadolu Lisesi Gümüşova\DÜZCE	Matematik Öğretmenliği

Yabancı Dil

İngilizce (IELTS : 60)

Yayınlar

1. M. Zeki Sarikaya, Hatice Yaldiz and Hakan Bozkurt, On The Hermite-Hadamard Type Integral Inequalities Involving Several Log-Convex Functions, *International Journal of Open Problems in Computer Science and Mathematics (IJOPCM)*, 5(3), pp:61-67, **2012**.

2. M. Zeki Sarikaya and Hatice Yaldiz, On weighted Montogomery identities for

Riemann-Liouville fractional Integrals, *Konuralp Journal of Mathematics,*Volume 1 No.1 pp.48-53, **2013**.

3. M. Zeki Sarikaya, Erhan Set, Hatice Yaldiz and Nagihan Basak, Hermite-Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities, *Mathematical and Computer Modelling*, doi:10.1016/j.mcm.2011.12.048, 57 2403-2407, **2013**.

4. M. Zeki Sarikaya and Hatice Yaldiz, On Hermite-Hadamard type inequalities for strongly log-convex functions, *International Journal of Modern Mathematical Sciences,* 5(3):92-98, **2013**.

5. M. Zeki Sarikaya and Hatice Yaldiz, New generalization fractional inequalities of Ostrowski-Gruss type, *Lobachevskii Journal of Math,* Vol. 34, No. 4, pp.326-331, **2013**.

6. M. Zeki Sarikaya and Hatice Yaldiz, On the Hadamard's type inequalities for L-Lipschitzian mapping, *Konuralp Journal of Mathematics,* Volume 1 No.2 pp.33-40, **2013**.

7. M. Zeki Sarikaya, Hatice Yaldiz and Nagihan Basak, New Fractional Inequalities of Ostrowski-Gruss type, *Le Matematiche,* Vol. LXIX-Fasc. I, pp. 227-235, **2014**.

8. M. Zeki Sarikaya, Hatice Yaldiz and Erhan Set, On fractional inequalities via Montgomery identities, *International Journal of Open Problems Complex Analysis,* 6(2), pp:36-43, **2014**.

9. M. Zeki Sarikaya, Huseyin Budak and Hatice Yaldiz, Cebysev type inequalities for co-ordinated convex functions, *Pure and Applied Mathematics Letters*, 2(2014)36-40, **2014**.

10. M. Zeki Sarikaya, Huseyin Budak and Hatice Yaldiz, Some new Ostrowski type inequalities for co-ordinated convex functions, *Turkish Journal of Analysis Number Theory*, Vol. 2 No. 5, 176-182, **2014**.

11. M. Zeki Sarikaya, Hatice Yaldiz and Samet Erden, On the weighted Ostrowski type inequalities for double integrals, *Kragujevac Journal of Mathematics*, 38(2)303-314, **2014**.

12. Hatice Yaldiz and M. Zeki Sarikaya, On Generalized Hermite-Hadamard Type Integral Inequalities Involving Riemann-Liouville Fractional Integrals, *Nihonkai Mathematical Journal*, Vol. 25 93-104, **2014**.

13. M. Zeki Sarikaya, Hatice Yaldiz and Samet Erden, Some inequalities associated with the Hermite-Hadamard-Fejer type for convex functions, *Mathematical Sciences*, DOI 10.1007/s40096-014-013 6-3, **2015**.

14. M. Zeki Sarikaya, Hatice Yaldiz and Hakan Bozkurt, On the Hadamard type integral inequalities involving several Fi-r-convex functions, *Journal of Interdisciplinary Mathematics*, Vol. 18 No. 1&2, pp. 1-8, **2015**.

15. M. Zeki Sarikaya and Hatice Yaldiz, On Hermite-Hadamard type inequalities for fi convex functions via fractional integrals, *Malaysian Journal Mathematical Sciences*, 9(2)243-258, **2015**.

16. M. Zeki Sarikaya, Samet Erden and Hatice Yaldiz, On power Pompeiu's type inequalities for double integrals, *South Bohemia Mathematical Letters*, Vol.23 No.1, 73-85, **2015**.

17. M. Zeki Sarikaya, Hatice Yaldiz and Huseyin Budak, Some integral inequalities for convex stochastic processes, *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, Vol. LXXXV, 1, pp. 155–164, **2016**.

18. Ferhan Atıcı and Hatice Yaldız, Convex Functions On Discrete Time Domains, *Canadian Mathematical Bulletin*, http://dx.doi.org/10.4153/CMB-2015-065-6, **2016**.

19. M. Zeki Sarikaya, Tuba Tunc, and Hatice Yaldiz, On Hermite Hadamard-type inequalities depending on the metric functions, *AIP Conference Proceedings* 1726, 020074; doi: 10.1063/1.4945900, **2016**.

Ulusal ve Uluslararası Sempozyum ve Kongreler

Bildirili

1. M. Zeki Sarikaya ve Hatice Yaldiz, “Güçlü log-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler”, 7. Ankara Matematik Günleri, Bildiri Özetleri Kitabı, syf. 15, Bilkent Üniversitesi, Ankara, 2012.

2. M. Zeki Sarikaya ve Hatice Yaldiz, “ Kesirli İntegraller İçin Genelleştirilmiş İntegral Eşitsizlikleri”, 9. Ankara Matematik Günleri, Bildiri Özetleri Kitabı, syf. 99, Atılım Üniversitesi, Ankara, 2014.

3. M. Zeki Sarikaya ve Hatice Yaldiz, “ On Hermite-Hadamard Type Inequalities For Fi Convex Functions via Fractional Integrals”, International Congress in Honour of Ravi P. Agarwal, Bildiri Özetleri Kitabı, syf. 100, Uludağ Üniversitesi, Bursa, 2014.

4. Hatice Yaldiz, “Hermite-Hadamard-Fejer Inequalities”, International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics, syf. 247, 6-9 November, Antalya TURKEY, 2014.

5. Mehmet Zeki Sarikaya, Hatice Yaldiz and Samet Erden, “Some Inequalities Associated with the Hermite-Hadamard-Fejer type Convex Function”, International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics, syf. 213, 6-9 November, Antalya TURKEY, 2014.

6.Hatice Yaldiz, Coauthors: M. Zeki Sarikaya, “ Hermite-Hadamard’s inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities”, Seventh International Conference on Dynamic Systems and Applications & Fifth International Conference on Neural, Parallel, and Scientific Computations to be held during May 27-30, in Morehouse College, Atlanta, Georgia, USA, 2015.

7. Hatice Yaldiz and Ferhan Atici, “Convex Functions on Discrete Time Domains”, Mathematical Inequalities and Applications, November 11-15, Mostar, Bosnia and

Herzegovina, 2015.

8. M. Zeki Sarikaya, Tuba Tunc, and Hatice Yaldiz, "On Hermite Hadamard-type inequalities depending on the metric functions", April 21-23, INTERNATIONAL CONFERENCE on ADVANCES in NATURAL and APPLIED SCIENCES (ICANAS), Belek, Antalya, TURKEY, 2016.

9. M. Zeki Sarikaya and Hatice Yaldiz, "On Weighted Iyengar type Inequalities Conformable Fractional Integrals", July 12-15, International Conference on Analysis and Its Applications (ICAA), Kırşehir, TURKEY, 2016.