T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HEMEN HEMEN KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLARIN YARI-İNVARYANT ALTMANİFOLDLARI

YÜKSEK LİSANS

KADİR MEŞELİ

ŞUBAT 2016

DÜZCE

KABUL VE ONAY BELGESİ

Kadir MEŞELİ tarafından hazırlanan Hemen Hemen Kosimplektik Manifoldların Yarı-İnvaryant Altmanifoldları isimli lisansüstü tez çalışması, Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 08.02.2016 tarih ve 2016/162 sayılı kararı ile oluşturulan jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Üye
(Tez Danışmanı)
Prof.Dr.Nesip AKTAN
Necmettin Erbakan Üniversitesi

Üye
Doç.Dr.M.Zeki SARIKAYA
Düzce Üniversitesi

Üye
Doç.Dr.Erdal ÖZÜSAĞLAM
Aksaray Üniversitesi

Tezin Savunulduğu Tarih : 18 .02.2016

ONAY

Bu tez ile Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Kadir MEŞELİ'nin Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans derecesini almasını onamıştır.

Prof. Dr. Haldun MÜDERRİSOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

18 Şubat 2016

Kadir MEŞELİ

Sevgili Aileme

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim ve bu tezin hazırlanması süresince gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Prof. Dr. Nesip AKTAN'a en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme ve çalışma arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

18 Şubat 2016 **Kadir Meşeli**

İÇİNDEKİLER **Sayfa**

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\tilde{M}$	Manifold
M	Alt Manifold
$\tilde{M}(C)$	Uzay Formu
g	Metrik Tensörü
$[\,,]$	Lie Parantez Operatörü
T_pM	Tanjant Uzay
$\chi(M)$	Vektör Alanları Uzayı
φ	Tensör Alanı
ξ	Birim Vektör Alanı
η	1-Form
$\tilde{\nabla}$	Levi-Civita Koneksiyonu
∇	Altmanifoldun Levi-Civita Koneksiyonu
$\overset{\circ}{\nabla}$	Çeyrek-simetrik Metrik Koneksiyon
$\overline{\nabla}$	Van der Waerden Bortolotti Koneksiyonu
$\nabla^{\perp}$	Normal Koneksiyon
Δ	Laplace Dönüşümü
h	2. Temel Form
B	2. Temel Form
A_N	Şekil Operatörü
$\|h\|$	2.Temel Formun Boyu
H	Ortalama Eğrilik
$\tilde{H}$	Hiperyüzeylerin 2. Temel Tensörü
$\tilde{R}$	Riemann-Christoffel Eğrilik Tensörü
R	Altmanifoldun Riemann-Christoffel Eğrilik Tensörü
$\overset{\circ}{R}$	Çeyrek simetrik Metrik Koneksiyonun Riemann Christoffel Eğrilik Tensörü
S	Ricci Tensörü
$\overset{\circ}{S}$	Çeyrek-simetrik Metrik Koneksiyonun Ricci Tensörü

r	Skaler Eğrilik
$\overset{\circ}{r}$	Çeyrek-simetrik Metrik Koneksiyonun Skaler Eğriliği
$B\times F$	Çarpım Manifoldu
$B\times_f F$	Katlı Çarpım Manifoldu
$\wedge A$	Endomorfizm
$\otimes$	Tensör Çarpımı

ÖZET

HEMEN HEMEN KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLARIN YARI-İNVARYANT ALTMANİFOLDLARI

Kadir MEŞELİ
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Prof. Dr. Nesip AKTAN
Şubat 2016, 42 sayfa

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmı olup, bu bölüm konuyla ilgili literatür bilgisi içermektedir. İkinci bölümde temel tanım ve kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde hemen hemen kosimplektik manifoldların yarı-invaryant altmanifoldları tanıtılmış, çeşitli özellikleri verilmiş ve integrallenebilme koşulları araştırılmıştır. Ayrıca altmanifoldun karışık total geodezik olmasının koşulu verilmiştir. Son bölüm ise sonuç ve önerilere ayrılmıştır.

Anahtar sözcükler: Hemen hemen kosimplektik manifold, Yarı-invaryant altmanifold İntegrallenebilme koşulları

ABSTRACT

SEMI-INVARIANT SUBMANIFOLDS OF ALMOST COSYMPLECTIC MANIFOLDS

Kadir MEŞELİ
Duzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Departmant of Mathematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Nesip AKTAN
February 2016, 42 pages

This thesis consists of four chapters. The first chapter is introduction. This chapter provides a general knowledge of literature. In the second chapter, we give the basic definitions and concepts. In the third chapter we introduce semi-invariant submanifolds of almost cosymplectic manifolds and we give several properties and search integrability conditions. We also focus mixed totally geodesic of semi-invariant submanifolds of an almost cosymplectic manifold. The last chapter is devoted into results and suggestions.

Keywords: Almost cosymplectic manifold, Semi-invariant submanifold, Integrability conditions

EXTENDED ABSTRACT

SEMI-INVARIANT SUBMANIFOLDS OF ALMOST COSYMPLECTIC MANIFOLDS

Kadir MEŞELİ
Duzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Departmant of Mathematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Nesip AKTAN
February 2016, 42 pages

1. INTRODUCTION:

A normal almost contact metric manifold is said to be cosymplectic if its fundamental 2-form and contact form are both closed. Cosymplectic manifolds and their submanifolds have been studied by D.E.Blair [1], G.D.Ludden [2], S.I.Goldberg [3], S.S.Eum, K.Yano and U-H.Ki [4] and others.

The notion of an almost cosymplectic manifold was introduced by Goldberg and Yano in 1969 [3]. The simplest examples of such manifolds are those being the product (possibly local) of almost Kaehlerian manifolds and the real line R or the circle S^1 . In particular, cosymplectic manifolds in the sense of Blair [1] are of this type. The notion of CR-submanifold of a Kaehler manifold was introduced by Bejancu [5]. Later CR-submanifolds of a Sasakian manifold was studied by Shadid, Sharfuddin and Husain [6], Kobayashi [6], Matsumoto [8] and many others. Submanifolds of cosymplectic manifolds have been studied by Ludden [2], A.Cabras, A. Ianus and G.H.Pitis [9].

Later the subject was considered for Riemannian manifolds with an almost contact structure. In this sense A. Bejancu and N. Papaghiuc study semi-invariant submanifolds of a Sasakian space form[10-13] and C.L. Bejan, A. Cabras and P. Matzeu study them on cosymplectic manifolds[14-15].

2. MATERIAL AND METHODS:

In this study by using the basis of studies mentioned above, we introduce some fundamental concept of manifold theory. In the first subsection we give some basic properties of Riemannian manifolds. In subsection two we introduce to almost contact metric manifolds and in the last subsection we give submanifolds.

3. RESULTS AND DISCUSSIONS:

In this section, we introduce properties of semi-invariant submanifolds of an almost cosymplectic manifold. Then we rewiew basic formulas and definitions for almost cosymplectic manifolds and we define semi-invariant submanifolds of an almost cosymplectic manifold. We obtain some basic results for semi-invariant submanifolds of an almost cosymplectic manifold. We investigate the integrability of the distributions in the definition of a semi-invariant submanifold. Then we focus mixed totally geodesic of semi-invariant submanifolds of an almost cosymplectic manifold.

4. CONCLUSION AND OUTLOOK:

In this study we have some basic results for semi-invariant submanifolds of an almost cosymplectic manifold and we investigate the integrability of the distributions. Semi-invariant submanifolds of almost cosymplectic manifolds are open problems, so very importent results can be obtained.

Keywords: Almost cosymplectic manifold, Semi-invariant submanifold, Integrability conditions

1. GİRİŞ

Manifold teorisinde hemen hemen değme manifoldları çok önemli bir yere sahiptir. İlk olarak, 1959 yılında J.Gray tek boyutlu manifoldlar üzerinde yaptığı çalışmada $U(n)\times 1$ yapısal grubunun bir indirgenmesiyle hemen hemen değme yapıları tanımlamıştır. Buna göre, $(2n+1)-$boyutlu bir hemen hemen değme yapısı

$$\eta(\xi)=1$$
$$\varphi^2=-I+\eta\otimes\xi$$

denklemlerini sağlayan $(1,1)-$tipinde bir φ tensör alanı, bir ξ vektör alanı ve bir η ile oluşturulan (φ,ξ,η) üçlüsüyle ifade edilir. 1960 yılında Sasaki (φ,ξ,η) hemen hemen değme yapısı üzerinde

$$\eta(X)=g(X,\xi)$$
$$g(\varphi X,\varphi Y)=g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y)$$

ifadeleriyle verilen uygun bir g metriği tanımlamış ve yapıyı tam olarak ifade etmiştir. 1961 yılında Sasaki ve Hatakeyama hemen hemen değme manifoldlar için normallik şartının J kompleks yapısının integrallenebilmesi olduğunu göstermiştir.

Hemen hemen değme yapıya bağlı kalarak Goldberg ve Yano 1969 yılında kosimplektik manifoldu tanımlamışlardır.İleriki yıllarda ise özellikle Olszak kosimplektik manifoldlar üzerine birçok çalışma yapmıştır[16-17].

Sonraki yıllarda ise A. Bejancu, N. Papaghiuc, C. L. Bejan, A. Cabras, ve P. Matzeu Sasakian manifoldlarının yarı-invaryant altmanifoldları üzerine çalışmalar yapmışlardır[10-15].

Bu tez çalışmasında hemen hemen kosimplektik manifoldların yarı-invaryant alt manifoldları üzerine çalışılmış ve çeşitli özellikler elde edilmiştir.

Birinci bölüm olan giriş bölümünde konuyla ilgili literatür bilgisi verilmiştir.

İkinci bölümde temel tanım ve kavramlar verilmiştir. Bu bölümün alt bölümlerinde sırasıyla Riemann manifoldları, hemen hemen değme metrik manifoldları ve alt manifoldlar ile ilgili temel bilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde hemen hemen kosimplektik manifoldların yarı-invaryant altmanifoldları tanıtılmış, çeşitli özellikler elde edilmiş ve integrallenebilme koşulları araştırılmıştır. Ayrıca altmanifoldun karışık total geodezik olmasının koşulu verilmiştir.

Son bölüm ise sonuç ve önerilere ayrılmıştır.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, diğer bölümlerde çalışmamız için gerekli olan temel kavramlar verilmiştir.

2.1. RİEMANN MANİFOLDLARI

Tanım 2.1.1. M, $n-$boyutlu, diferensiyellenebilir C^{∞} bir manifold olsun. M üzerindeki C^{∞} vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve M 'den R 'ye C^{∞} fonksiyonların uzayı $C^{\infty}(M,R)$ olmak üzere, M üzerinde

$$g:\chi(M)\times\chi(M)\to C^{\infty}(M,R)$$

şeklinde tanımlanan pozitif, simetrik ve $2-$lineer g Riemann metriği ile birlikte M 'ye bir Riemann manifoldu adı verilir ve (M,g) şeklinde gösterilir[18].

M manifoldunun herhangi iki p ve q noktası için; M üzerinde bu noktaları birleştiren bir eğri bulunabilirse M 'ye bağlantılı manifold adı verilir[19].

Tanım 2.1.2. M, $n-$boyutlu, diferensiyellenebilir bir manifold ve M üzerindeki

$$\nabla:\chi(M)\times\chi(M)\to\chi(M)$$
$$(X,Y)\to\nabla(X,Y)=\nabla_X Y$$

dönüşümü $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$ ve $\forall \mathrm{f},\mathrm{g}\in \mathrm{C}^{\infty}(M,R)$ için

(i) $\nabla_X(Y+Z)=\nabla_X Y+\nabla_X Z$

(ii) $\nabla_{fX+gY}Z=f\nabla_X Z+g\nabla_Y Z$

(iii) $\nabla_X(fY)=f\nabla_X Y+X(f)Y$

özelliklerini sağlıyor ise ∇ 'ya M üzerinde bir Afin Koneksiyon adı verilir[20].

Tanım 2.1.3. (M,g), $n-$boyutlu bir Riemann manifoldu ve ∇ 'da M üzerinde tanımlanan bir afin koneksiyonu olmak üzere;

(i) $\nabla_X Y-\nabla_Y X=[X,Y]$ $\forall X,Y\in\chi(M)$

(ii) $Xg(Y,Z)=g(\nabla_X Y,Z)+g(Y,\nabla_X Z)$ $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$

şartlarını sağladığında ∇ 'ya M üzerinde sıfır torsiyonlu Riemann Koneksiyon veya M 'nin Levi-Civita Koneksiyonu adı verilir[20].

Tanım 2.1.4. (M,g), $n-$boyutlu bir Riemann manifoldu ve ∇'da M üzerinde tanımlanan Levi-Civita koneksiyonu olmak üzere $\forall\, X,Y,Z \in \chi(M)$ için;

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y,Z) &= Xg(Y,Z)+Yg(Z,X)-Zg(X,Y) \\ &\quad -g(X,[Y,Z])-g(Y,[X,Z])+g(Z,[X,Y]) \end{aligned}$$

ile tanımlanan ifadeye Kozsul formülü adı verilir[20].

Tanım 2.1.5. (M,g), $n-$boyutlu bir Riemann manifoldu, $\forall\, X,Y,Z \in \chi(M)$ ve ∇'da M üzerindeki Levi-Civita koneksiyonu olmak üzere

$$R:\chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M)\to\chi(M)$$

$$R(X,Y)Z=\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z \tag{2. 1}$$

ile tanımlanan R fonksiyonu M üzerinde $(1,3)-$tipinde bir tensör alanıdır ve M'nin Riemann eğrilik tensörü olarak adlandırılır. Ayrıca

$$R(X,Y,Z,W)=g(R(X,Y)Z,W)$$

tensörüne M'nin Riemann-Christoffel eğrilik tensörü adı verilir[19].

X,Y,Z,V ve $W\in\chi(M)$ için Riemann eğrilik tensörü R olmak üzere

(i) $R(X,Y)Z=-R(Y,X)Z$

(ii) $R(X,Y)Z+R(Y,Z)X+R(Z,X)Y=0$

(iii) $g(R(X,Y)V,W)=-g(R(X,Y)W,V)$

(iv) $g(R(X,Y)V,W)=g(R(V,W)X,Y)$

özelliklerine sahiptir[19].

Tanım 2.1.6. M, $n-$boyutlu, diferensiyellenebilir bir manifold ve M üzerinde $(r,s)-$tipinde simetrik bir tensör A olsun. Bu durumda, $1\le a<b\le s$ reel sayıları ve keyfi bir r değeri için;

$$\mathrm{C}_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{r}}:\chi_s(M)\to\chi_{s-2}(M)$$

$$(\mathrm{C}_{\mathrm{ab}}\mathrm{A})^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_{s-2}}=\sum_{p,q} g^{p,q} A^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots \underset{\text{a.bileşen}}{p} \ldots \underset{\text{b.bileşen}}{q} \ldots j_{s-2}}$$

biçiminde tanımlanan C_{ab} operatörüne a**.** ve b**.** bileşenlere göre A tensörünün metrik kontraksiyonu adı verilir. Böylece kontraksiyon operatörü, $(r,s)-$tipindeki bir tensörü $(r-1,s-1)-$tipinde bir tensöre dönüştürür [20].

Tanım 2.1.7. (M,g), $n-$boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ lokal ortonormal vektör alanları $\chi(M)$ nin bir bazı olmak üzere

$$S:\chi(M)\times\chi(M)\to C^{\infty}(M,R)$$

$$(X,Y)\to S(X,Y)=\sum_{i=1}^{n} g(R(e_i,X)Y,e_i) \qquad ; X,Y\in\chi(M) \tag{2. 2}$$

şeklinde tanımlı $(0,2)-$tipindeki S tensör alanına, M üzerinde Ricci eğrilik tensörü adı verilir. Ayrıca Q Ricci operatörü

$$g(QX,Y)=S(X,Y)$$

biçiminde tanımlanır[21].

Tanım 2.1.8. (M,g), $n-$boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. $p\in M$ noktasındaki T_pM tanjant uzayının $2-$boyutlu alt uzayı $\prod$ olmak üzere; $V,W\in\prod$ tanjant vektörleri üzerine kurulan paralelkenarın alanı;

$$Q(V,W)=g(V,V)g(W,W)-g(V,W)^2\neq 0$$

olmak üzere;

$$K(V,W)=\frac{\mathrm{g(R(V,\ W)W,V)}}{\mathrm{Q(V,\ W)}}$$

ifadesine $\prod$'nin kesitsel eğriliği denir ve $K(\prod)$ ile gösterilir[19].

Tanım 2.1.9. (M,g), $n\geq 2$ boyutlu bir Riemann manifoldu ve S'de M'nin Ricci tensörü olsun. Böylece, M üzerinde bir $\lambda:M\to R$ fonksiyonu için;

$$S(X,Y)=\lambda g(X,Y) \qquad ; \qquad \forall\, X,Y\in\chi(M)$$

eşitliği sağlanıyorsa M'ye bir Einstein manifold adı verilir[22].

M üzerinde bir birim tanjant vektör alanı U olmak üzere, A $1-$formunu

$$g(X,U)=A(X)$$

biçiminde tanımlayalım. Burada U vektör alanına A $1-$formunun üreteci adı verilir. Eğer (M,g) $n-$boyutlu Riemann manifoldunun Ricci tensörü S, $\forall\, X,Y\in\chi(M)$) için;

$$S(X,Y)=ag(X,Y)+bA(X)A(Y) \qquad ; \qquad a,b\in C(M,R)$$

koşulunu sağlıyorsa M'ye yarı-Einstein manifold adı verilir [23].

Eğer $b=0$ ise (M,g) manifoldu bir Einstein manifolda dönüşür.

M üzerinde birim tanjant vektör alanları U ve V olmak üzere, A ve B $1-$formlarını

$A(X) = g(X,U)$ ve $B(X) = g(X,V)$

biçiminde tanımlayalım. Burada U vektör alanı A 1-formunun, V vektör alanı ise B $1-$formunun üreteci olup U ile V birbirlerine dik vektör alanlarıdır.

Eğer (M,g) $n-$boyutlu Riemann manifoldunun S Ricci tensörü $\forall X,Y \in \chi(M)$ için

$$S(X,Y) = ag(X,Y) + bA(X)A(Y) + cB(X)B(Y) \quad , \quad a,b,c \in C(M,R) \tag{2.3}$$

koşulunu sağlıyorsa M 'ye Genelleştirilmiş Yarı-Einstein Manifold denir[24].

Eğer $c = 0$ ise (M,g) manifoldu yarı-Einstein manifolda dönüşür.

Tanım 2.1.10. (M,g), $n-$boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ lokal ortonormal vektör alanları $\chi(M)$ nin bir bazı olmak üzere;

$$r = \sum_{i=1}^{n} S(e_i, e_i) \tag{2.4}$$

fonksiyonuna M 'nin skaler eğrilik fonksiyonu adı verilir[22].

Tanım 2.1.11. (M,g), $n-$boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Eğer, M 'nin kesitsel eğrilik fonksiyonu sabit ise M 'ye sabit eğrilikli uzay denir ve $M(c)$ ile gösterilir[20].

Sonuç 2.1.12. (M,g), $n-$boyutlu, c sabit eğrilikli bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda M 'nin R eğrilik tensörü, $\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için;

$$R(X,Y,Z,W) = c\{g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)\}$$

biçimindedir[20].

Tanım 2.1.13. Sabit eğrilikli, tam, bağlantılı manifoldlara uzay form adı verilir ve $n-$boyutlu bir M uzay formu $M(c)$ ile gösterilir. Eğer;

$c = 0$ ise $M(c) \cong E^n$ Öklid uzayı,

$c = \frac{1}{r^2}$ ise $M(c) \cong S^n(r)$ küresi,

$c = \frac{-1}{r^2}$ ise $M(c) \cong H^n(r)$ Hiperbolik Uzay

dır[25].

Tanım 2.1.14. (M,g), $n-$boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. M üzerinde L ve N tensörlerini sırasıyla $\forall\, X,Y \in \chi(M)$ için;

$$L(X,Y) = -\frac{1}{n-2} S(X,Y) + \frac{n}{2.(n-2)} r g(X,Y)$$

ve

$$g(NX,Y) = L(X,Y)$$

biçiminde tanımlayalım. Böylece $\forall\, X,Y,Z \in \chi(M)$ için Weyl konformal eğrilik tensörü ve D tensörü sırasıyla;

$$C(X,Y)Z = R(X,Y)Z + L(Y,Z)X - L(X,Z)Y + g(Y,Z)NX - g(X,Z)NY$$

ve

$$D(X,Y,Z) = (\nabla_X L)(Y,Z) - (\nabla_Y L)(X,Z)$$

ile tanımlanır [26].

Eğer M manifoldu üzerinde $n>3$ için $c=0$ ve $n=3$ için $D=0$ oluyorsa M 'ye düzlemsel konformaldir denir[22].

Tanım 2.1.15. M, $n \geq 2$ boyutlu, bağlantılı bir Riemann manifoldu olsun. A, M üzerinde tanımlı $(0,2)-$tipinde simetrik bir tensör alanı olmak üzere $\wedge_A$ endomorfizmi $\forall\, X,Y,Z \in \chi(M)$ için;

$$\wedge_A : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

$$(X \wedge_A Y)Z = A(Y,Z)X - A(X,Z)Y$$

biçiminde tanımlanır. Eğer $A = g$ alınırsa (2. 7) denklemi

$$(X \wedge_g Y)Z = g(Y,Z)X - g(X,Z)Y$$

biçimine indirgenir.

Bundan sonra $(X \wedge_g Y)$ yerine kısaca $(X \wedge Y)$ kullanılacaktır[21].

M Riemann manifoldu üzerinde $k \geq 1$ olmak üzere $(0,k)-$tipinde bir T tensör alanı ve $(0,2)-$tipinde simetrik bir A tensör alanı verildiğinde T 'nin kovaryant türevi ∇T;

$$(\nabla T)(X_1,X_2,...,X_k;X)=(\nabla_X T)(X_1,X_2,...,X_k)$$
$$=\nabla_X\left(T(X_1,X_2,...,X_k)\right)-\sum_{i=1}^{k}T(X_1,...,\nabla_X X_i,...,X_k)$$

ile $R\cdot T$ ve $Q(A,T)$ tensörleri de sırası ile;

$$(R\cdot T)(X_1,X_2,...,X_k;X,Y)=-T(R(X,Y)X_1,X_2,...,X_k)-...$$
$$-T(X_1,X_2,...,R(X,Y)X_k)$$

ve

$$Q(A,T)(X_1,X_2,...,X_k;X,Y)=-T((X\wedge_A Y)X_1,X_2,...,X_k)-...$$
$$-T(X_1,X_2,...,(X\wedge_A Y)X_k)$$

biçiminde tanımlanır[21].

Tanım 2.1.16. (M,g), $n-$boyutlu Riemann manifoldu üzerinde $(0,k)-$tipinden $(k\geq 1)$ bir T tensör alanının kovaryant türevi ∇T olsun. Eğer T tensör alanı, $\forall X, X_1, Y_1,..., X_k, Y_k \in \chi(M)$ için;

$$(\nabla T)(X_1,X_2,...,X_k;X)T(Y_1,Y_2,...,Y_k)=(\nabla T)(Y_1,Y_2,...,Y_k;X)T(X_1,X_2,...,X_k)$$

koşulunu sağlıyorsa T 'ye rekürent tensör alanı adı verilir[27].
Burada ∇, M Riemann manifoldu üzerindeki Levi-Civita koneksiyonudur.

Tanım 2.1.17. (M,g), $n-$boyutlu bir Riemann manifoldu üzerinde $(0,k)-$tipinden $(k\geq 1)$ bir T tensör alanının kovaryant türevi ∇T olsun. Eğer T tensör alanı, $\forall X,Y,X_1,Y_1,...,X_k$ ve $Y_k\in\chi(M)$ için;

$$(\nabla^2 T)(X_1,...,X_k;X,Y)T(Y_1,...,Y_k)=(\nabla^2 T)(Y_1,...,Y_k;X,Y)T(X_1,...,X_k)$$

koşulunu sağlıyorsa T 'ye 2-rekürent tensör alanı adı verilir[27].

Burada ∇, M Riemann manifoldu üzerindeki Levi-Civita koneksiyonudur $\cdot$
Bu tanıma denk olarak bir $p\in M$ noktasının bir W komşuluğunda sıfırdan farklı bir $2-$rekürent T tensör alanı için, W kümesi üzerinde

$$\nabla^2 T=T\otimes\psi$$

eşitliği sağlanır.
Burada ψ, $(0,2)-$tipinde bir tensördür[27].

Eğer T tensör alanı M üzerinde, $\forall X, Y, X_1, Y_1, ..., X_k$ ve $Y_k \in \chi(M)$ için;

$$(\nabla^2 T)(X_1,...,X_k; X,Y) - (\nabla T \otimes \phi)(X_1,...,X_k; X,Y)T(Y_1,...,Y_k)$$
$$= (\nabla^2 T)(Y_1,...,Y_k; X,Y) - (\nabla T \otimes \phi)(Y_1,...,Y_k; X,Y)T(X_1,...,X_k)$$

koşulunu sağlıyorsa T 'ye genelleştirilmiş $2-$rekürent tensör alanı adı verilir[27].

Bu tanıma denk olarak bir $p \in M$ noktasının bir W komşuluğunda sıfırdan farklı bir genelleştirilmiş $2-$rekürent T tensör alanı için, W kümesi üzerinde

$$\nabla^2 T = \nabla T \otimes \phi + T \otimes \psi$$

eşitliği sağlanır.
Burada ψ, $(0,2)-$tipinde bir tensör ve ϕ bir $1-$formdur[27].

Tanım 2.1.18. (M,g), $n-$boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. M 'nin R eğrilik tensörü $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için;

$$(\nabla_X R)(Y,Z)W = 0$$

koşulunu sağlıyorsa M 'ye lokal simeteiktir denir[28].

2.2. HEMEN HEMEN DEĞME MANİFOLDLAR

Bu bölümde hemen hemen değme manifoldlarla ilgili temel kavramlarlar verilmiştir.

Tanım 2.2.1. M, $(2n+1)$ boyutlu bir manifold, φ,ξ,η 'da M üzerinde sırasıyla $(1,1)-$tipinde bir tensör alanı, bir vektör alanı ve 1-form olsunlar. Eğer φ,ξ,η için M üzerinde herhangi bir vektör alanı X olmak üzere

$$\eta(\xi) = 1 \qquad \text{ve} \qquad \varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi \tag{2.5}$$

eşitlikleri sağlanıyorsa (φ,ξ,η) üçlüsüne M üzerinde bir hemen hemen değme yapı ve bu yapıyla birlikte M 'ye bir hemen hemen değme manifold denir[26].

Teorem 2.2.1. (φ,ξ,η) hemen hemen değme yapısı ile birlikte verilen M manifoldu üzerinde

$$\begin{aligned} &\varphi\xi = 0 \\ &\eta \circ \varphi = 0 \\ &rank(\varphi) = 2n \end{aligned} \tag{2.6}$$

eşitlikleri sağlanır[26].

Tanım 2.2.2. $(2n+1)$ boyutlu M hemen hemen değme manifoldu üzerinde $\forall X,Y \in \chi(M)$ ve $\xi \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} \eta(X) &= g(X,\xi) \\ g(\varphi X,\varphi Y) &= g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y) \end{aligned} \tag{2.7}$$

koşullarını sağlayan bir g metriği varsa (φ,ξ,η,g) dörtlüsüne bir hemen hemen değme metrik yapı, bu yapı ile birlikte M 'ye de hemen hemen değme metrik manifold adı verilir[26].

Teorem 2.2.2. $(2n+1)$ boyutlu M hemen hemen değme manifoldu üzerinde $\forall X,Y \in \chi(M)$ için ;

$$g(\varphi X,\varphi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y) \tag{2.8}$$

olacak şekilde bir g Riemann metriği daima vardır[26].

Sonuç 2.2.1. $(2n+1)$ boyutlu M hemen hemen değme manifoldu üzerinde $\forall X,Y \in \chi(M)$ için ;

$$g(\varphi X,Y) = -g(X,\varphi Y) \tag{2.9}$$

dir.

Bu da φ 'nin g 'ye göre anti-simetrik bir tensör alanı olduğunu gösterir[26].

Teorem 2.2.3. $(2n+1)$ boyutlu M hemen hemen değme manifoldu üzerinde bir η kontakt yapısı verildiğinde, $\forall X,Y \in \chi(M)$ için ;

$$g(X,\varphi Y) = d\eta(X,Y)$$

olacak şekilde bir (φ,ξ,η,g) hemen hemen değme metrik yapısı vardır[26].

Tanım 2.2.3. M üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı (φ,ξ,η,g) olmak üzere $\forall X,Y \in \chi(M)$ için ;

$$\phi(X,Y) = g(\varphi X,Y) \tag{2.10}$$

şeklinde tanımlı ϕ dönüşümüne, hemen hemen değme metrik yapısının temel $2-$formu denir[26].

Tanım 2.2.4. M bir reel diferansiyellenebilir manifold olsun. Eğer her $p \in M$ noktası için $J^2 = -I$ olacak şekilde T_pM tanjant uzayının bir J endomorfizmi mevcut ise, M üzerindeki J tensör alanına bir hemen hemen kompleks yapı adı verilir.

Bir J hemen hemen kompleks yapısı ile birlikte verilen manifolda bir hemen hemen kompleks manifold denir.

M üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı (φ,ξ,η,g) ile verilsin. O zaman $M \times R$ üzerinde herhangi bir vektör alanı $(\mathrm{X},\mathrm{f}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}})$ şeklinde yazılabilir. Burada X, M manifolduna teğet bir vektör alanı; t, R 'nin bir koordinatı ve $\mathrm{f}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}$, $M \times R$ üzerinde bir C^{∞} fonksiyondur.

(φ,ξ,η,g), M üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapı olsun. Böylece $M \times R$ üzerindeki bir hemen hemen kompleks yapı

$$J(\mathrm{X},\mathrm{f}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}) = (\varphi\mathrm{X} - \mathrm{f}\xi, \eta(\mathrm{X})\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}})$$

biçiminde tanımlanır.

Buradan $J^2 = -I$ olduğu gösterilebilir[26].

Tanım 2.2.5. M diferansiyellenebilir bir manifold olmak üzere, M üzerinde $(1,1)-$tipinde bir tensör alanı F olsun. $\forall X,Y \in \chi(M)$ için ;

$$N_F(X,Y) = F^2[X,Y] + [FX,FY] - F[FX,Y] - F[X,FY]$$

şeklinde tanımlı N_F tensör alanına F tensör alanının Nijenhuis torsiyon tensörü adı verilir.

J, M üzerindeki bir hemen hemen kompleks yapı olmak üzere $F = J$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned} N_J(X,Y) &= J^2[X,Y] + [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] \\ &= -[X,Y] + [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir[26].

Tanım 2.2.6. (M,J) bir hemen hemen kompleks manifold olsun. Eğer M üzerinde ise $N_J = 0$ ise J dönüşümüne integrallenebilirdir denir[26].

Tanım 2.2.7. Eğer $M^{2n} \times R$ üzerindeki bir J hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir ise (φ, ξ, η) hemen hemen değme yapısına normaldir denir[26].

Önerme 2.2.1. M^{2n+1} üzerindeki bir (φ, ξ, η) hemen hemen değme yapısının normal olması için gerek ve yeter şart

$$\varphi^2[X,Y]+[\varphi X,\varphi Y]-\varphi[\varphi X,Y]-\varphi[X,\varphi Y]+2d\eta(X,Y)\xi \tag{2.11}$$

ifadesinin sıfıra eşit olması yani

$$N_{\varphi}(X,Y)+2d\eta(X,Y)\xi=0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır[26].

Tanım 2.2.8. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. d dış türev operatörü olmak üzere bu yapı

$$d\varphi = 0 \qquad \text{ve} \qquad d\eta = 0$$

şartlarını sağlıyorsa M manifolduna hemen hemen kosimplektik manifold denir. Eğer bir M hemen hemen kosimplektik manifoldu normal ise bu manifolda kosimplektik manifold denir[16].

Teorem 2.2.3. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. M^{2n+1} manifoldunun bir kosimplektik manifold olması için gerek ve yeter şart $\nabla\varphi$ ve $\nabla\eta$ kovaryant türevlerinin sıfıra eşit olmasıdır[16].

Önerme 2.2.2. M bir hemen hemen kosimplektik manifold olsun. Bu durumda Levi-Civita koneksiyonu her X, Y, Z vektör alanı için

$$2g((\nabla_X \varphi)Y, Z) = g(N(Y,Z), \varphi X) \tag{2.12}$$

eşitliği ile ifade edilir. Burada D dağılımı integrallenebilir olduğundan, her $X \in D$ için, $L_{\xi}\eta = 0$ ve $[X,\xi] \in D$ dir[29].

Önerme 2.2.3. Bir hemen hemen kosimplektik manifoldun D dağılımının integral altmanifoldlarının Kaehler yapıda olması için gerek ve yeter şart her X, Y vektör alanı için

$$(\nabla_X \varphi)Y = -g(\varphi AX, Y)\xi + \eta(Y)\varphi AX \tag{2.13}$$

olmasıdır.

Burada $AX = -\nabla_X \xi$ ve $h = \frac{1}{2}\left(L_\xi \varphi\right)$ olarak alınmıştır[30].

Bu koşul

$$(\nabla_X \varphi)Y = g(hX, Y)\xi - \eta(Y)hX \tag{2.14}$$

şeklinde de yazılabilir[31].

Önerme2.2.4. M bir hemen hemen kosimplektik manifold olsun. M üzerinde (1,1)-tipli A tensör alanı $A = -\nabla\xi$ şeklinde tanımlanırsa A bir simetrik operatördür ve

(i) $A(\xi) = 0$

(ii) $A \circ \varphi + \varphi \circ A = 0$

(iii) $tr(A) = 0$

(iv) $\nabla_X \xi = -\varphi hX$

ifadeleri sağlanır[29].

Önerme 2.2.5. M bir hemen hemen kosimplektik manifold olsun. M üzerinde (1,1)-tipli h tensör alanı $h = \frac{1}{2}\left(L_\xi \varphi\right)$ şeklinde tanımlanırsa h bir simetrik operatördür ve

(i) $h(\xi) = 0$

(ii) $h \circ \varphi + \varphi \circ h = 0$

(iii) $trh = 0$

(iv) $tr(\varphi h) = 0$

ifadeleri sağlanır[32].

Önerme 2.2.6. M bir hemen hemen kosimplektik manifold olsun. R, Riemann eğrilik tensörü ve S, Ricci tensör alanı olmak üzere M üzerindeki herhangi X, Y vektör alanları için

$$R(X,Y)\xi = (\nabla_Y \varphi h)X - (\nabla_X \varphi h)Y$$

$$R(X,\xi)\xi = -h^2 X + \varphi\left(\nabla_\xi h\right)X$$

$$R(\xi, X)\xi - \varphi R(\xi, \varphi X)\xi = 2h^2 X$$

$$S(X,\xi) = -(div(\varphi h))X$$

$$S(\xi,\xi) = -tr(h^2)$$

eşitlikleri sağlanır[29].

Önerme 2.2.7. M bir kosimplektik manifold ve $\widetilde{M}$, D dağılımının bir integral manifoldu olsun. Bu durumda $\widetilde{M}$ 'nin total geodezik olması için gerek ve yeter şart h'nin sıfır olmasıdır[29].

2.3. ALTMANİFOLDLAR

Tanım 2.3.1. M, $n-$boyutlu bir manifold, $\widetilde{M}$ ise $(n+d)-$boyutlu manifold olsun. $\forall p \in M$ noktası için $\widetilde{M}$ üzerinde bir $\widetilde{U}$, M üzerinde bir U komşuluğu mevcut ve

$U = \{m \in \widetilde{U} : \widetilde{x}_{n+1}(m) = ... = \widetilde{x}_{n+d}(m) = 0\}$

ise M'ye $\widetilde{M}$ 'nin bir altmanifoldu adı verilir. Burada $\{\widetilde{x}_1,...,\widetilde{x}_{n+d}\}$ koordinat sistemi $\widetilde{U}$ 'da $\{x_1,...,x_n\}$'de U üzerinde koordinat sistemleridir[20].

Tanım 2.3.2. M ve $\widetilde{M}$ sırası ile n ve $(n+d)-$boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere M, $\widetilde{M}$ 'nin altmanifoldu ve ∇ ile $\widetilde{\nabla}$ sırası ile M ve $\widetilde{M}$ 'de kovaryant türevler olsun. Böylece X, Y; M üzerinde vektör alanları olmak üzere Gauss eşitliği

$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X,Y)$

şeklindedir. Burada B'ye, M'nin 2.temel formu adı verilir. Eğer $\forall X, Y \in \chi(M)$ için $B(X,Y) = 0$ ise M manifolduna total geodeziktir denir[22].

Tanım 2.3.3. M ve $\widetilde{M}$ sırası ile n ve $(n+d)-$boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere M, $\widetilde{M}$ 'nin altmanifoldu olsun. M'ye normal bir birim vektör alanı N olsun. $\widetilde{\nabla}_X N$ nin teğet ve normal bileşenleri sırasıyla $-A_N X$ ve $\nabla^{\perp}_X N$ olmak üzere

$\mathrm{A} : \chi(\mathrm{M}) \mathrm{x} \chi^{\perp}(\mathrm{M}) \rightarrow \chi(\mathrm{M})$

dönüşümü iyi tanımlıdır. Böylece

$\widetilde{\nabla}_X \mathrm{N} = -A_N X + \nabla^{\perp}_X N$

biçiminde Weingarten eşitliği elde edilir. Burada A_N 'ye şekil operatörü, $\nabla^{\perp}$ 'e de M' nin $T^{\perp}M$ normal demetindeki (normal) koneksiyon adı verilir.

M'nin şekil operatörü $\mathrm{A_N}$ ile ikinci temel form B arasında;

$\mathrm{g(A_N X, Y) = g(B(X, Y), N)}$

bağıntısı vardır[22].

3.BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde hemen hemen kosimplektik manifoldların yarı-invaryant altmanifoldları tanıtılmış, çeşitli özellikleri verilmiş ve integrallenebilme koşulları araştırılmıştır.

3.1. HEMEN HEMEN KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLARIN YARI-İNVARYANT ALTMANİFOLDLARI

Bu kısımda hemen hemen kosimplektik manifoldların yarı-invaryant altmanifoldları ile ilgili gerekli literatür bilgisi, bazı yardımcı teoremler ve ispatları verilmiştir.

Tanım 3.1.1. Bir $\widetilde{M}$ hemen hemen kosimplektik manifoldunun bir altmanifoldu M olsun. Eğer M 'de diferansiyellenebilir dağılımların bir $D, D^{\perp}$ ortogonal çifti için

(i) $TM = D \oplus D^{\perp} \oplus \{\xi\}$

(ii) D dağılımı φ 'ye göre invaryanttır , yani $\forall x \in M$ için $\varphi D_X = D_X$ dir.

(iii) $D^{\perp}$ dağılımı φ 'ye göre anti-invaryanttır yani $\forall x \in M$ için $\varphi D_X{}^{\perp} \subset T_X M^{\perp}$ dir.

ifadeleri sağlanıyorsa M 'ye yarı-invaryant denir.

D ve $D^{\perp}$ dağılımlarına sırasıyla yatay ve dikey dağılımlar denir. Bir M yarı-invaryant altmanifoldunda $\forall x \in M$ için $D_x{}^{\perp} = 0$ ve $D_x = 0$ olduğunda M 'ye sırasıyla invaryant ve anti-invaryant denir. M manifoldu ne invaryant ne de anti-invaryant ise bu durumda M 'ye has yarı-invaryant altmanifold denir [33].

Şimdi ileride kullanacağımız bazı ifadeleri verelim.

M ve $\widetilde{M}$ manifoldları üzerindeki metrikler için aynı g sembolü kullanılır.

TM nin D ve $D^{\perp}$ dağılımlarının projeksiyon morfizmlerini sırasıyla P ve Q ile gösterirsek $\forall X \in TM$ ve $\forall N \in TM^{\perp}$ için

$$X = PX + QX + \eta(X)\xi \tag{3.1}$$

$$\varphi N = CN + DN \tag{3.2}$$

ve

$$hX = tX + fX \tag{3.3}$$

dir.

Burada CN ve tX sırasıyla φN ve hX 'in teğet kısımlarını, DN ve fX ise φN ve hX 'in normal kısımlarını göstermektedir.

Tanım 3.1.2. M ve $\tilde{M}$ Riemann manifoldları olmak üzere M , $\tilde{M}$ 'nın altmanifoldu olsun. ∇ ve $\tilde{\nabla}$ sırasıyla M ve $\tilde{M}$ 'nın Levi-Civita koneksiyonları olmak üzere Gauss ve Weingarten eşitlikleri sırasıyla

$$\tilde{\nabla}_X \mathrm{Y} = \nabla_X Y + B(X,Y) \tag{3.4}$$

$$\tilde{\nabla}_X \mathrm{N} = - A_N X + \nabla^{\perp}_X N \tag{3.5}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada B ikinci temel form, A_N şekil operatörü, $\nabla^{\perp}$ de

M 'nin $T^{\perp}M$ normal demetindeki (normal) koneksiyonudur[22].

Sonuç 3.1.1. $\forall X,Y \in TM$ ve $N \in TM^{\perp}$ için

$$g\big(B(X,Y),N\big) = g(A_N X,Y) \tag{3.6}$$

dir[33].

İspat: $A_N X = \nabla^{\perp}_X N - \tilde{\nabla}_X \mathrm{N}$ olduğundan

$$\begin{aligned} g(A_N X,Y) &= g\big(\nabla^{\perp}_X N - \tilde{\nabla}_X \mathrm{N},\mathrm{Y}\big) \\ &= g\big(\nabla^{\perp}_X N,\mathrm{Y}\big) - g\big(\tilde{\nabla}_X \mathrm{N},\mathrm{Y}\big) \\ &= 0 - g\big(\tilde{\nabla}_X \mathrm{N},\mathrm{Y}\big) \\ &= g\big(N,\tilde{\nabla}_X \mathrm{Y}\big) \\ &= g\big(N,\nabla_X \mathrm{Y} + \mathrm{B(X,Y)}\big) \\ &= g\big(N,\nabla_X \mathrm{Y}) + g(N,\mathrm{B(X,Y)}\big) \\ &= g(N,\mathrm{B(X,Y)}) \end{aligned}$$

Şimdi herhangi $X, Y \in TM$ için

$$u(X,Y) = \nabla_X \varphi PY - A_{\varphi QY} X \tag{3.7}$$

alarak aşağıdaki yardımcı teoremleri verelim.

Yardımcı Teorem 3.1.1. M manifoldu, $\tilde{M}$ hemen hemen kosimplektik manifoldunun yarı-invaryant bir altmanifoldu olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$P(u(X,Y)) = \varphi P \nabla_X Y - \eta(Y) PtX \tag{3.8}$$

$$Q(u(X,Y)) = CB(X.Y) - \eta(Y) QtX \tag{3.9}$$

$$B(X, \varphi PY) + \nabla_X^{\perp} \varphi QY = \varphi Q \nabla_X Y + DB(X,Y) - \eta(Y) fX \tag{3.10}$$

$$\eta(u(X,Y))\xi = g(hX,Y)\xi - \eta(Y)\eta(tX)\xi \tag{3.11}$$

İspat:

(3.1) kullanılarak

$$Y = PY + QY + \eta(Y)\xi \Rightarrow \varphi Y = \varphi PY + \varphi QY + \eta(Y)\varphi\xi$$

$$\Rightarrow \varphi Y = \varphi PY + \varphi QY$$

elde edilir. Buradan

$$(\tilde{\nabla}_X \varphi) Y = \tilde{\nabla}_X \varphi Y - \varphi \tilde{\nabla}_X Y$$

$$= \tilde{\nabla}_X (\varphi PY + \varphi QY) - \varphi \tilde{\nabla}_X Y$$

olup (3.4) kullanılırsa

$$(\tilde{\nabla}_X \varphi) Y = \tilde{\nabla}_X \varphi PY + \tilde{\nabla}_X \varphi QY - \varphi\left(\nabla_X Y + B(X,Y)\right)$$

$$= \tilde{\nabla}_X \varphi PY + \tilde{\nabla}_X \varphi QY - \varphi(\nabla_X Y) - \varphi B(X,Y) \tag{3.12}$$

elde edilir.

$$Y \in TM \Rightarrow PY \in D \text{ ve } \varphi PY \in D$$

olur ve bu ifade (3.4)'te ki $\tilde{\nabla}_X \mathrm{Y} = \nabla_X Y + B(X,Y)$ 'de yazılırsa

$$\tilde{\nabla}_X \varphi \mathrm{PY} = \nabla_X \varphi PY + B(X, \varphi PY) \tag{3.13}$$

$Y \in TM \Rightarrow QY \in D^{\perp}$ ve $\varphi QY \in T^{\perp}M$ olup (3.5) kullanılırsa

$$\tilde{\nabla}_X \mathrm{N} = - A_N X + \nabla_X^{\perp} N$$

$$\tilde{\nabla}_X \varphi \mathrm{QY} = - A_{\varphi QY} X + \nabla_X^{\perp} \varphi QY \tag{3.14}$$

elde edilir.

(3.13) ve (3.14) ifadeleri (3.12)'de yazılırsa

$$(\tilde{\nabla}_X \varphi)Y = \tilde{\nabla}_X \varphi PY + B(X,\varphi PY) - A_{\varphi QY}X + \nabla^{\perp}_X \varphi QY - \varphi\nabla_X Y - \varphi B(X,Y) \tag{3.15}$$

olur.

$Y \in TM$ için $Y = PY + QY + \eta(Y)\xi$ olduğundan $\nabla_X \varphi PY \in TM$ için

$$\nabla_X \varphi PY = P\nabla_X \varphi PY + Q\nabla_X \varphi PY + \eta(\nabla_X \varphi PY)\xi \tag{3.16}$$

$A_{\varphi QY}X \in TM$ için

$$A_{\varphi QY}X = PA_{\varphi QY}X + QA_{\varphi QY}X + \eta(A_{\varphi QY}X)\xi \tag{3.17}$$

ve yine $\varphi\nabla_X Y \in TM$ için

$$\begin{aligned}\varphi\nabla_X Y &= \varphi P\nabla_X Y + \varphi Q\nabla_X Y + \eta(\nabla_X Y)\varphi\xi \\ &= \varphi P\nabla_X Y + \varphi Q\nabla_X Y\end{aligned} \tag{3.18}$$

elde edilir.

Diğer taraftan (3.2) kullanılırsa $\forall N \in TM^{\perp}$ için $\varphi N = CN + DN$ olup buradan

$$\varphi B(X,Y) = CB(X,Y) + DB(X,Y) \tag{3.19}$$

dir.

Böylece (3.15) ifadesinde (3.16), (3.17), (3.18) ve (3.19) yazılırsa

$$\begin{aligned}(\tilde{\nabla}_X \varphi)Y &= P\nabla_X \varphi PY + Q\nabla_X \varphi PY + \eta(\nabla_X \varphi PY)\xi + B(X,\varphi PY) - PA_{\varphi QY}X - QA_{\varphi QY}X \\ &\quad + \nabla^{\perp}_X \varphi QY - \eta(A_{\varphi QY}X)\xi - \varphi P\nabla_X Y - \varphi Q\nabla_X Y - CB(X,Y) - DB(X,Y)\end{aligned} \tag{3.20}$$

elde edilir.

Diğer taraftan (3.1), (3.2) ve (3.3) ifadeleri (2.14)'te yazılırsa

$$\begin{aligned}(\tilde{\nabla}_X \varphi)Y &= -\eta(Y)\varphi PX - \eta(Y)\varphi QX + g(hX,Y)\xi - \eta(Y)hX \\ &= -\eta(Y)\varphi PX - \eta(Y)\varphi QX + g(hX,Y)\xi - \eta(Y)PtX - \eta(Y)QtX \\ &\quad - \eta(Y)\eta(tX)\xi - \eta(Y)fX\end{aligned} \tag{3.21}$$

elde edilir.

(3.20) ve (3.21) deki D, ξ, $D^{\perp}$ ve $TM^{\perp}$'e ait bileşenleri karşılıklı eşleştirirsek istenenler elde edilir.

Yardımcı Teorem 3.1.2. M manifoldu, $\tilde{M}$ hemen hemen kosimplektik manifoldunun yarı-invaryant bir altmanifoldu olsun. Bu durumda $\forall X \in TM$ ve $N \in TM^{\perp}$ için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$\varphi P(A_N X) + P(\nabla_X CN) = P(A_{DN} X) \tag{3.22}$$

$$\mathrm{Q}\left(\nabla_X CN - A_{DN} X\right) = \mathrm{C}\nabla_{\mathrm{X}}^{\perp} N \tag{3.23}$$

$$\eta(A_{DN} X - \nabla_X CN) = 0 \tag{3.24}$$

$$B(X, CN) + \varphi Q(A_N X) + \nabla_X^{\perp} DN = D\nabla_X^{\perp} N \tag{3.25}$$

İspat: (3.1), (3.2) ifadeleri ile (3.4) ve (3.5)'teki Gauss ve Weingarten denklemlerini kullanalım.

$\forall N \in T^{\perp}M$ için $\varphi N = CN + DN$ olduğundan $X \in D$ olmak üzere

$$\tilde{\nabla}_X (\varphi N) = \tilde{\nabla}_X (CN + DN) = \tilde{\nabla}_X (CN) + \tilde{\nabla}_X (DN)$$

$CN \in TM$ olduğundan

$$\tilde{\nabla}_X (CN) = \nabla_X (CN) + B(X, CN)$$

ve $DN \in T^{\perp}M$ olduğundan

$$\tilde{\nabla}_X (\mathrm{DN}) = - A_{DN} X + \nabla_X^{\perp} (DN)$$

olur. Böylece

$$\tilde{\nabla}_X (\varphi N) = \nabla_X (CN) + B(X, CN) - A_{DN} X + \nabla_X^{\perp} (DN)$$

elde edilir.

$\nabla_X (CN) \in TM$ ve $A_{DN} X \in TM$ olduğundan (3.1)'den

$$\nabla_X (CN) = P\nabla_X (CN) + Q\nabla_X (CN) + \eta(\nabla_X (CN))\xi$$

ve

$$A_{DN} X = PA_{DN} X + QA_{DN} X + \eta(A_{DN} X)\xi$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_X (\varphi N) &= P\nabla_X (CN) + Q\nabla_X (CN) + \eta(\nabla_X (CN))\xi + B(X, CN) \\ &\quad - PA_{DN} X - QA_{DN} X - \eta(A_{DN} X)\xi + \nabla_X^{\perp} (DN)\end{aligned} \tag{3.26}$$

elde edilir.

Diğer taraftan, (2.14) nedeniyle

$$\left(\tilde{\nabla}_X \varphi\right)N = g\left(hX, N\right)\xi - \eta(N)hX$$

dir. $hX \in TM$ ve $N \in T^{\perp}M$ olduğundan $g(hX, N) = 0$ olur.

Ayrıca $\eta(N) = g(N, \xi) = 0$ olduğundan

$$\left(\tilde{\nabla}_X \varphi\right)N = 0$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_X(\varphi N) &= (\tilde{\nabla}_X \varphi)N + \varphi\tilde{\nabla}_X N \\ &= 0 + \varphi\tilde{\nabla}_X N \\ &= \varphi\tilde{\nabla}_X N \\ &= \varphi(-A_N X + \nabla^{\perp}_X N) \\ &= -\varphi(A_N X) + \varphi\nabla^{\perp}_X N\end{aligned}$$

elde edilir.

$A_N X \in TM$ olduğundan (3.1)'den

$$\begin{aligned}\varphi A_N X &= \varphi PA_N X + \varphi QA_N X + \eta(A_N X)\varphi\xi \\ &= \varphi PA_N X + \varphi QA_N X\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\tilde{\nabla}_X(\varphi N) = -\varphi PA_N X - \varphi QA_N X + \varphi\nabla^{\perp}_X N$$

elde edilir.

$\nabla^{\perp}_X N \in T^{\perp}M$ olduğundan (3.2) nedeniyle

$$\varphi\nabla^{\perp}_X N = C\nabla^{\perp}_X N + D\nabla^{\perp}_X N$$

dir. Böylece

$$\tilde{\nabla}_X(\varphi N) = -\varphi PA_N X - \varphi QA_N X + C\nabla^{\perp}_X N + D\nabla^{\perp}_X N \tag{3.27}$$

elde edilir.

(3.26) ve (3.27)'de $D, \xi, D^{\perp}$ ve $TM^{\perp}$'e ait bileşenleri karşılıklı eşleştirirsek istenenler elde edilir.

Yardımcı Teorem 3.1.3. M manifoldu, $\tilde{M}$ hemen hemen kosimplektik manifoldunun yarı-invaryant bir altmanifoldu olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$\nabla_X \xi = -\varphi t X - CfX \qquad \forall X \in \Gamma(D) \tag{3.28}$$

$$\nabla_X \xi = -\varphi t X - CfX \qquad \forall X \in \Gamma(D^{\perp}) \tag{3.29}$$

$$\nabla_\xi \xi = 0 \qquad B(X,\xi) = -DfX \tag{3.30}$$

İspat: $\forall X \in TM$ için (3.2), (3.3) ve (3.4) ifadeleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_X \xi = \nabla_X \xi + B(X,\xi) &= -\varphi h X \\ &= -\varphi t X - \varphi f X \\ &= -\varphi t X - CfX - DfX\end{aligned}$$

olur . Son elde edilen

$$\nabla_X \xi + B(X,\xi) = -\varphi t X - CfX - DfX$$

ifadesinde teğet ve normal kısımlar karşılıklı eşlenirse istenen eşitliklere ulaşılır.

Yardımcı Teorem 3.1.4. M manifoldu, $\tilde{M}$ hemen hemen kosimplektik manifoldunun yarı-invaryant bir altmanifoldu olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma(D^{\perp})$ için

$$A_{\varphi X} Y = A_{\varphi Y} X \tag{3.31}$$

olur.

İspat: $\forall X, Y \in \Gamma(D^{\perp})$ ve $Z \in \Gamma(TM)$ için (3.4) ve (3.6) kullanılırsa

$$\begin{aligned}g(A_{\varphi X} Y, Z) &= g(B(Y,Z), \varphi X) \\ &= g(\tilde{\nabla}_Z Y, \varphi X) \\ &= -g(\varphi \tilde{\nabla}_Z Y, X) \\ &= -g(\tilde{\nabla}_Z \varphi Y - (\tilde{\nabla}_Z \varphi) Y, X) \\ &= -g(\tilde{\nabla}_Z \varphi Y, X) \\ &= g(\varphi Y, \tilde{\nabla}_Z X) \\ &= g(\varphi Y, B(Z, X)) \\ &= g(A_{\varphi Y} X, Z)\end{aligned}$$

olup, istenen elde edilir.

Yardımcı Teorem 3.1.5. M manifoldu, $\tilde{M}$ hemen hemen kosimplektik manifoldunun yarı-invaryant bir altmanifoldu olsun. Bu durumda $\forall U \in \Gamma(D)$ ve $\forall V \in \Gamma(D^{\perp})$ için

$\nabla_{\xi} U \in \Gamma(D)$ $\qquad\qquad$ $\nabla_{\xi} V \in \Gamma(D^{\perp})$

$[U,\xi] \in \Gamma(D)$ $\qquad\qquad$ $[V,\xi] \in \Gamma(D^{\perp})$

olur.

İspat: $U \in \Gamma(D)$ ve $V \in \Gamma(D^{\perp})$ için

$$g(\nabla_{\xi} U,\xi) = \xi g(U,\xi) - g(U,\nabla_{\xi}\xi) = 0$$

ve

$$\begin{aligned} g(\nabla_{\xi} U,V) &= \xi g(U,V) - g(U,\nabla_{\xi} V) = g(\varphi^2 U,\nabla_{\xi} V) \\ &= -g(\varphi U,\varphi \nabla_{\xi} V) \\ &= -g(\varphi U,\nabla_{\xi} \varphi V) \\ &= g(\nabla_{\xi} \varphi U,\varphi V) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $\nabla_{\xi} U \in \Gamma(D)$ dir. Benzer şekilde $\nabla_{\xi} V \in \Gamma(D^{\perp})$ olduğu ispat edilir. Diğer taraftan, (3.28) ve (3.29) kullanılarak

$$g([U,\xi],\xi) = g(\nabla_U \xi - \nabla_{\xi} U,\xi) = 0$$

ve

$$g([U,\xi],V) = g(\nabla_U \xi,V) - g(\nabla_{\xi} U,V) = 0$$

olup ispat tamamlanır.

Yardımcı Teorem 3.1.6. M manifoldu, $\tilde{M}$ hemen hemen kosimplektik manifoldunun yarı-invaryant bir altmanifoldu olsun. Bu durumda $\forall X,Y \in \Gamma(M)$ için

$$g(X,tY) = g(tX,Y) \tag{3.32}$$

$$\varphi tX + t\varphi X + CfX = 0 \tag{3.33}$$

$$DfX + f\varphi X = 0 \tag{3.34}$$

ifadeleri sağlanır.

İspat: h simetrik olduğundan

$$g(X,hY) = g(hX,Y)$$

$$g(X,tY+fY)=g(tX,Y)+g(fX,Y)$$
$$g(X,tY)+g(X,fY)=g(tX,Y)+g(fX,Y)$$
yazılır ve (3.32) elde edilir.

Şimdi Önerme 2.2.5.'te h yerine hX alıp daha sonra (3.2) ile (3.3) ifadelerini kullanırsak

$$\varphi\circ X+h\circ\varphi=0\Rightarrow\varphi\circ hX+hX\circ\varphi=0$$
$$\Rightarrow\varphi\circ hX+hX\circ\varphi=0\Rightarrow ChX+DhX+hX\varphi=0$$
$$\Rightarrow ChX+DhX+tX\varphi+fX\varphi=0$$
$$\Rightarrow CtX+CfX+DtX+DfX+tX\varphi+fX\varphi=0$$
$$\Rightarrow CtX+DtX+CfX+DfX+tX\varphi+fX\varphi=0$$
$$\Rightarrow\varphi tX+t\varphi X+CfX+DfX+f\varphi X=0$$

elde edilir.

Bu ifadedeki teğet ve normal kısımlar karşılıklı eşlenirse ispat tamamlanır.

3.2. HEMEN HEMEN KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLARIN YARI-İNVARYANT ALTMANİFOLDLARI ÜZERİDEKİ DAĞILIMIN İNTEGRALLENEBİLİRLİĞİ

Bu bölümde hemen kosimplektik manifoldunların yarı-invaryant altmanifoldlarının dağılımının integrallenebilirliği incelenmiştir.

Teorem 3.2.1. M manifoldu, $\widetilde{M}$ hemen hemen kosimplektik manifoldunun yarı-invaryant bir altmanifoldu olsun. Bu durumda D dağılımı integrallenemezdir.

İspat: $\forall X,Y\in\Gamma(D)$ için

$$\begin{aligned}
g([X.Y],\xi)&=g(\nabla_X Y,\xi)-g(\nabla_Y X,\xi)\\
&=-g(Y,\nabla_X\xi)+g(X,\nabla_Y\xi)\\
&=-g(Y,-\varphi tX-CfX)+g(X,-\varphi tY-CfY)\\
&=g(Y,\varphi tX)+g(Y,CfX)-g(X,\varphi tY)-g(X,CfY)\\
&=g(Y,\varphi tX+CfX)-g(X,\varphi tY+CfY)\\
&=-g(Y,t\varphi X)+g(X,t\varphi Y)\\
&=-g(tY,\varphi X)+g(tX,\varphi Y)
\end{aligned}$$

$$= -g(Y, t\varphi X) - g(\varphi tX, Y)$$
$$= -g(Y, t\varphi X + \varphi tX)$$
$$= -g(Y, CfX)$$
$$\neq 0$$

olur. Dolayısıyla D dağılımı integrallenemezdir.

Sonuç 3.2.1. $D \oplus D^{\perp}$ dağılımı integrallenemezdir.

Teorem 3.2.2. M manifoldu, $\widetilde{M}$ hemen hemen kosimplektik manifoldunun yarı-invaryant bir altmanifoldu olsun. Bu durumda $D \oplus \{\xi\}$'nin integrallenebilmesi için gerek ve yeter şart

$$B(X, \varphi Y) = B(\varphi X, Y) \tag{3.35}$$

olmasıdır.

İspat: (3.10)'dan, $D \oplus \{\xi\}$'nin integrallenebilmesi için gerek ve yeter şart

$$B(X, \varphi Y) - B(Y, \varphi X) = \varphi Q[X, Y] = 0$$

ifadesinin sağlanmasıdır. Dolayısıyla

$$B(X, \varphi Y) = B(Y, \varphi X)$$

olur.

Teorem 3.2.3. M manifoldu, $\widetilde{M}$ hemen hemen kosimplektik manifoldunun yarı-invaryant bir altmanifoldu olsun. Bu durumda $D^{\perp}$ dağılımı integrallenebilirdir.

İspat: (3.7) den $X, Y \in \Gamma(D^{\perp})$ için

$$u(X, Y) = -A_{\varphi QY} X$$

elde edilir.

(3.8)'e φ'yi uygularsak $\forall X, Y \in \Gamma(D^{\perp})$

$$P\nabla_X Y = \varphi P(A_{\varphi Y} X) \tag{3.36}$$

olur.Yardımcı Teorem 3.1.4.'ün sonucu olarak (3.36)

$$P([X, Y]) = 0$$

şeklini alır ki bu da $[X, Y] \in \Gamma(D^{\perp})$ olduğunu ispatlar.

3.3. KARIŞIK TOTAL GEODEZİK YARI-İNVARYANT ALTMANİFOLDLAR

Tanım 3.3.1. M manifoldu, $\widetilde{M}$ hemen hemen kosimplektik manifoldunun yarı-invaryant bir altmanifoldu olsun. $X \in D$ ve $Y \in D^{\perp}$ için eğer $B(X,Y)=0$ ise M 'ye karışık total geodeziktir denir[29].

Teorem 3.3.1. M manifoldu, $\widetilde{M}$ hemen hemen kosimplektik manifoldunun yarı-invaryant bir altmanifoldu olsun. Bu durumda M 'nin karışık total geodezik olması için gerek ve yeter şart

$$A_V X \in \Gamma(D) \qquad \forall X \in \Gamma(D),\ V \in \Gamma(TM^{\perp}) \tag{3.37}$$

ve

$$A_V X \in \Gamma(D^{\perp}) \qquad \forall X \in \Gamma(D^{\perp}),\ V \in \Gamma(TM^{\perp}) \tag{3.38}$$

olmasıdır.

İspat: $A_V X$ 'i göz önüne alalım. $X \in \Gamma(D)$, $V \in \Gamma(TM^{\perp})$ ve $Y \in \Gamma(D^{\perp})$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} g(B(X,Y),V) &= g(A_V X, Y) \\ &= 0 \Leftrightarrow A_V X \in \Gamma(D) \end{aligned}$$

olur.

Diğer taraftan, eğer $A_V X \in \Gamma(D)$ ise

$$\begin{aligned} g(A_V X, Y) &= g(B(X,Y),V) \\ &= 0 \Leftrightarrow B(X,Y)=0 \end{aligned}$$

olup (3.37) ispatlanır.

Benzer şekilde (3.38)'da ispatlanır.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada hemen hemen kosimplektik manifoldların yarı-invaryant altmanifoldları ile ilgili çeşitli özellikler elde edilmiş ve integrallenebilme koşulları incelenmiştir. Son olarak da altmanifoldun karışık total geodezik olmasının koşulu verilmiştir. Özel koşullar altında araştırma yapılırsa çeşitli özellikler elde edilebilir.

5. KAYNAKLAR

[1] Blair D.E., The theory of quasi-sasakian structure, J.Differential Geometry 1(**1967**) 331-345.

[2] Ludden G.D., Submanifolds of cosymplectic manifolds, J.Differential Geometry 4(**1970**) 237-244.

[3] Goldberg S.I., Yano K., Integrability of almost contact structure, Pasific J.Math. 31(**1969**) 373-382.

[4] Yano K., Eum S.S., Ki H-H., On transversal hypersurfaces of an almost contact manifold, Kodai Math. Sem. Rep., 24(**1972**) 459-470.

[5] Bejancu A., CR-submanifolds of a Kaehler manifold, Proc. Amer. Math. Soc., (69)(**1978**) 135-142.

[6] Shahid M. H, Sharfuddin A., Husain S.I., CR-submanifolds of a Sasakian manifold, Review Research Fac. Sc., Yogoslavia,15(**1985**) 203-178.

[7] Kobayashi M., CR-submanifolds of a Sasakian manifold, Tensor N. S., 35(**1981**) 297-307.

[8] Matsumoto K., On contact CR-submanifolds of Sasakian manifolds, Inter J. Math. § Math. Sci, 16(**1983**) 313-326.

[9] Cabras A., Ianus A. and Pitis GH., Extrinsic spheres and parallel submanifolds in cosymplectic manifolds Math, J. Toyama Univ., 17(**1994**) 31-53.

[10] Bejancu A. and Papaghiuc N., Semi-invariant submanifolds a Sasakian manifold, An. Sti. Univ. 'Al. I. Cuza' Iasi Sect. Ia Mat., 27(**1981**) 163-170.

[11] Bejancu A. and Papaghiuc N., Semi-invariant submanifolds a Sasakian space form, Colloq. Math., 48(**1984**) 77-88.

[l2] Papaghiuc N., Almost semi-invariant submanifolds in Sasakian Space forms, An. Ştinţ. Univ. Iaşi. Mat., 29(**1983**) 5-10.

[13] Papaghiuc N., Some theorems on semi-invariant submanifolds of a Sasakian manifold, An. Ştinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaş. Mat., 32(**1986**) 73-76.

[14] C.-L., Almost semi-invariant submanifolds of a cosymplectic manifold, An. Sti. Univ. 'Al. I. Cuza' Iasi Sect. Ia Mat., 31(**1985**) 149-156.

[15] Cabras A. and Matzeu P., Almost semi-invariant submanifolds of a cosymplectic manifold, Demonstratio Math., 19(**1986**) 395-401.

[16] Olszak Z., On almost cosymplectic manifolds, Kodai Math, 4(2) (**1981**) 239-250.

[17] Olszak Z., Locally conformal almost cosymplectic manifolds, Coll. Math., 57 (**1989**) 73-87.

[18] Kobayashi, S., Nomizu, K., Foundations of differential geometry, John Wiley and Sons, Inc., New York (**1996**).

[19] O'Neill, B., Elementary differential geometry, Academic Press, New York-London (**1996**).

[20] O'neill B., Semi Riemannian Geometry, A. Press, London, (**1983**).

[21] Deszcz, R., "On pseudosymmetric spaces" Bull. Soc. Math. Belg. Ser. A 44, (**1992**) 1-34.

[22] Chen, B.Y, Geometry of submanifolds, Pure and Applied Mathematics, No. 22. Marcel Dekker, Inc., New York, (**1973**).

[23] Chaki, M. C. and Maity, R. K., ''On quasi Einstein manifolds'', Publ. Math. Debrecen **57** (2000), no. 3-4, 297-306.

[24] De, U. C.and Ghosh, G. C., ''On generalized quasi Einstein manifolds'', Kyungpook Math. J. 44 (**2004**), no. 4, 607-615.

[25] De, U. C. and Guha, N., ''On generalised recurrent manifolds'', Proc. Math. Soc. **7** (**1991**) 7-11.

[26] Yano, K. and Kon, M., Structures on manifolds, Series in Pure Mathematics, 3. World Scientific Publishing Co., Singapore, (**1984**).

[27] Roter, W., ''On conformally recurrent Ricci-recurrent manifolds'', Colloq. Math., 46 (**1982**) 45-57.

[28] Chaki, M. C., ''On pseudo symmetric manifolds'', An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi Sect. I a Mat. 33 (**1987**), no. 1, 53-58.

[29] Öztürk, H., Murathan, C., Aktan, N. ve Turgut Vanlı, A., ''Almost α-cosymplectic f-manifolds'', Analele Stiintiface Ale Universitati Al. I. Cuza Dın Iasi (S.N) Matematica Tomul LX (**2014**) f.1.

[30] Olszak Z., Dacko P., On conformally flat almost cosymplectic manifolds with Keahlerian leaves, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, (56) 1 (**1998**) 89-103.

[31] Kupeli Erken,I., Murathan, C., Dacko, P., Almost α-paracosymplectic manifolds, Submitted. Avaliable in arXiv:1402.6930v1[math.DG] (**2014**)

[32] Blair D. E., Contact manifolds in Riemannian Geometry, Springer-Verlag, NewYork (**1970)**.

[33] Matsumoto, K., Shadid, M.H. ve Ion, M., Semi-Invariant Submanifolds of Certain Almost Contact Manifolds (**1993)**

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: MEŞELİ, Kadir
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 26.08.1979 / BİLECİK
Telefon	: 0(530) 315 49 75
E-posta	: kadirmeseli11@gmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek Lisans	Düzce Ü. / Matematik B.	2016
Lisans	Pamukkale Ü. / Matematik B.	2001
Lise	Bilecik Anadolu Lisesi	1997

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2001-2002	Bilecik Dodurga Ç.P.L.	Matematik Öğretmeni
2002-2005	Muş Sütlüce İlköğretim Okulu	Matematik Öğretmeni
2005-2009	Kayseri İncili İlköğretim Okulu	Matematik Öğretmeni
2009-2010	Akçakoca Osmaniye İlköğretim Okulu	Matematik Öğretmeni
2010-2014	Akçakoca Anadolu Öğretmen Lisesi	Matematik Öğretmeni
2014-2016	Akçakoca Sosyal Bilimler Lisesi	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce (KPDS : 67)

Yayınlar

1. Aktan N., Meşeli K., Hemen Hemen Kosimplektik Manifoldların Yarı-invaryant Altmanifoldları, Akdeniz Üniversitesi 28.Ulusal Matematik Sempozyumu, Antalya, (2015)