T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KONVEKS DÖNÜŞÜMLER İÇİN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

LOKMAN GÖKÇE

TEMMUZ 2015

DÜZCE

KABUL VE ONAY BELGESİ

Lokman Gökçe tarafından hazırlanan Konveks Dönüşümler İçin İntegral Eşitsizlikleri isimli lisansüstü tez çalışması, Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 22.06.2015 tarih ve 2015/570 sayılı kararı ile oluşturulan jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Üye
Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Düzce Üniversitesi

Üye
Doç. Dr. Nesip AKTAN
Düzce Üniversitesi

Üye
Yrd. Doç. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Tezin Savunulduğu Tarih: 21.07.2015

ONAY

Bu tez ile Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Lokman GÖKÇE'nin Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans derecesini almasını onamıştır.

Prof. Dr. Haldun MÜDERRİSOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

Temmuz 2015

(İmza)

Lokman GÖKÇE

Sevgili eşime ve kızlarıma

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim ve bu tezin hazırlanmasında süresince gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA'ya en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme ve çalışma arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

21 Temmuz 2015 **Lokman GÖKÇE**

İÇİNDEKİLER **Sayfa**

SİMGELER VE KISALTMALAR

f'	f in birinci türevi
f''	f in ikinci türevi
$\lvert f\rvert$	f in mutlak değeri
H.-H.	Hermite-Hadamard
I	$\mathbb{R}$ nin içinde bir aralık
I^o	I nın içi
K_s^1	Birinci anlamda s-konveks fonksiyon
K_s^2	İkinci anlamda s-konveks fonksiyon
$L[a,b]$	$[a,b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonların kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^n$	n boyutlu Öklid Uzayı

ÖZET

KONVEKS DÖNÜŞÜMLER İÇİN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Lokman GÖKÇE
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Temmuz 2015, 44 sayfa

Bu çalışmada, reel sayıların bir aralığında türevinin mutlak değeri s-konveks olan rassal değişkenli olasılık yoğunluk fonksiyonları için bazı yeni eşitsizlikler geliştirilmiştir. Burada elde edilen sonuçlar, daha önce bunlarla ilgili yapılmış çalışmaların genelleştirilmiş halleridir.

Anahtar sözcükler: Hermite-Hadamard eşitsizliği, Trapezoid eşitsizliği, s-konveks fonksiyon, Hölder Eşitsizliği, Varyans.

ABSTRACT

ON INTEGRAL INEQUALITIES FOR CONVEX FUNCTION

Lokman GÖKÇE
Duzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Departmant of Mathematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
July 2015, 44 pages

In this paper, we improve some new inequalities for random variables whose probability density functions whose their derivatives absolute are s-convex on the interval of real numbers. The results presented here would provide extensions of those given in earlier works.

Keywords: Hermite-Hadamard inequality, Trapezoidal inequality, s-convex function, Hölder inequality, Variance.

EXTENDED ABSTRACT

ON INTEGRAL INEQUALITIES FOR CONVEX FUNCTION

Lokman GÖKÇE
Duzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Departmant of Mathematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
July 2015, 44 pages

1. INTRODUCTION:

Distribution functions and density functions provide complete descriptions of the distribution of probality for a given random variable. However, they do not allow us to easily make comparisons between two diferent distributions. The set of moments that uniquely characterizes the distribution under reasonable conditions are useful in making comparisons. Knowing the probability function, we can determine moments if they exist. Applying the mathematical inequalities, some estimations for the moments of random variables were recently studied.

2. MATERIAL AND METHODS:

s-convex functions have been introduced by Breckner in (Breckner 1978) and they play an important role in optimization theory and mathematical economics. Various properties and applicatins of them can be found in (Dragomir and Fitzpatrik 1999).

3. RESULTS AND DISCUSSIONS:

Over the past two decades or so, the field of inequalities has undergone explosive growth. Concerning numerous analytic inequalities, in particular a great many research papers have been written related to the inequalities associated to the names of Trapezoid, Ostrowski, Hermite-Hadamard and Hölder. A number of surveys and monographs published during the past few years described much of the progress.

4. CONCLUSION AND OUTLOOK:

In this thesis, using functions whose derivatives absolute values are s-convex functions, we obtained new inequalities related to generalized trpezoid type Ostrowski type integral inequalities for s-conveks functions via probablity theory.

1. GİRİŞ

1.1. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Verilen bir rassal değişken için dağılım fonksiyonları ve yoğunluk fonksiyonlarının tanımlarını vereceğiz. Ancak bunlar, iki farklı dağılım arasında karşılaştırma yapmak için bir kolaylık sağlamaz. Uygun şartlar altında dağılımı karakterize eden momentler kümesi, karşılaştırma yapmak için kullanışlıdır. Bilinen bir olasılık fonksiyonu için momentler mevcutsa bunları belirleyebiliriz. Matematiksel eşitsizlikler uygulanarak, rassal değişkenlerin momentleri için son zamanlarda bazı tahminler incelendi. (N.S. Barnett, P. Cerone, S.S. Dragomir, J. Roumeliotis, 2001)

Tanım 1.1.1. (Örnek Uzay) Bir deneyin tüm mümkün sonuçlarının kümesine *örnek uzay* denir. (Cengiz, 1984).

Tanım 1.1.2. (Olay) Bir örnek uzayın her bir alt kümesine bir *olay* denir. (Cengiz, 1984).

Tanım 1.1.3. (Rassal Değişken) Bir örnek uzaydaki her olaya sayısal bir değer atayan bir fonksiyondur. Rassal değişkenler X, Y, Z … gibi büyük harflerle gösterilir. Bir X rassal değişkeninin mümkün değerlerinin sayısı sayılabilir ise X'e *kesikli rassal değişken* denir. Bir X rassal değişkeninin mümkün değerleri bir aralıktan ya da aralıkların birleşiminden oluşuyorsa X'e *sürekli rassal değişken* denir. (Cengiz, 1984).

Tanım 1.1.4. (Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu) X sürekli bir rassal değişken olsun. Özel bir $X = x$ noktasındaki olasılığı $P(X = x)$ ile gösterelim. X rassal değişkeninin a ve b değerleri arasında olma olasılığı

$$P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

integraliyle tanımlanır. Buradaki f fonksiyonuna *X'in olasılık yoğunluk fonksiyonu* denir. Bir f fonksiyonunun, bir X rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu olabilmesi için şu şartlar sağlanmalıdır:

$$\text{her } x \text{ için } \; f(x) \geq 0 \quad \text{ve} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 .$$

(Cengiz, 1984).

Tanım 1.1.5 (Birikimli Dağılım Fonksiyonu) *X* sürekli rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu *f* olmak üzere

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

biçiminde tanımlanan *F* fonksiyonuna *X* rassal değişkeninin *birikimli dağılım fonksiyonu* denir. (Cengiz, 1984).

Tanım 1.1.6. (Beklenen Değer) Bir rassal değişkenin veya bir fonksiyonun beklenen değeri, değişkenin veya fonksiyonun bütün olası değerleri üzerinden alınan ortalama değerdir. $f(X)$ ve $E(X)$, *X*'in sırasıyla olasılık yoğunluk fonksiyonu ve beklenen değeri olmak üzere

$$E(X) = \sum_{x} xf(x), \; x \text{ kesikli rassal değişken ise}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, \; x \text{ sürekli rassal değişken ise}$$

biçiminde tanımlanır. (Cengiz, 1984)

Tanım 1.1.7. (Moment) Bir rassal değişkenin yoğunluğunun kesin biçimini belirleyen büyüklüklere moment denir. Bir *X* rassal değişkeninin $x = a$ noktası etrafındaki *r*-inci momenti

$$\mu_r(a) = \sum_{x} (x-a)^r f(x), \; x \text{ kesikli rassal değişken ise}$$

$$\mu_r(a) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^r f(x)dx, \; x \text{ sürekli rassal değişken ise}$$

biçiminde tanımlanır. (Cengiz, 1984)

$E(X) = \mu$ olsun. $x = \mu$ beklenen değeri etrafındaki birinci ve ikinci momentlere bakalım:

$$\mu_1(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^1 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx - \mu \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \mu - \mu = 0 \; \text{ ve}$$

$$\mu_2(\mu)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx-2\mu\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx+\mu^2=E(X^2)-E(X)^2=\text{var}(X)$$

olur. Görüldüğü gibi beklenen değer etrafındaki ikinci moment varyansı verir.

Tanım 1.1.8. (Konveks Fonksiyon) I, $\mathbb{R}$ de bir aralık ve $f:I\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x,y\in I$ ve $\alpha\in[0,1]$ için,

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y)\le\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. (Pecaric ve diğ. 1992).

Tanım 1.1.9. (Birinci Anlamda *s*-Konveks Fonksiyon) $\mathbb{R}_+=[0,\infty)$, $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ ve $0<s\le1$ olsun. $\alpha^s+\beta^s=1$ olmak üzere her $u,v\in\mathbb{R}_+$ ve her $\alpha,\beta\ge0$ için,

$$f(\alpha u+\beta v)\le\alpha^s f(u)+\beta^s f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna birinci anlamda *s*-konveks fonksiyon denir. (Breckner 1978).

Tanım 1.1.10. (İkinci Anlamda *s*-Konveks Fonksiyon) $\mathbb{R}_+=[0,\infty)$, $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ ve $0<s\le1$ olsun. $\alpha+\beta=1$, $\alpha,\beta\ge0$ olmak üzere her $u,v\in\mathbb{R}_+$ için,

$$f(\alpha u+\beta v)\le\alpha^s f(u)+\beta^s f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna ikinci anlamda *s*-konveks fonksiyon denir.
Yukarıda verilen her iki *s*-konvekslik tanımı da $s=1$ için bilinen konveksliğe dönüşür. (Hudzik ve Maligranda 1994).

Tanım 1.1.11. (Mutlak Süreklilik) $I=[a,b]$ biçiminde bir aralık, $f:I\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $k=1,2,\dots,n$ olmak üzere, I aralığının aşağıdaki şartı sağlayan sonlu sayıdaki (a_k,b_k) alt aralıklar dizisi bulunabiliyorsa f fonksiyonuna $I=[a,b]$ üzerinde mutlak süreklidir denir:

$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan her $\varepsilon>0$ sayısına karşılık $\sum_{k=1}^{n}|b_k-a_k|<\delta$ olacak biçimde bir $\delta>0$ sayısı bulunabilir. (Carter ve Brunt, 2000).

Teorem 1.1.12. (İntegral Analizinin Temel Teoremi) $I=[a,b]$ aralığında tanımlı reel değerli f fonksiyonunu alalım. Şu üç şart birbirine denktir:

(1) f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde mutlak süreklidir.

(2) f fonksiyonu $[a,b]$ üzerindeki hemen hemen her noktada f' türevine sahip, f' fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde Lebesgue anlamında integrallenebilir ve her $x \in [a,b]$ için $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(x)dx$ dir.

(3) Her $x \in [a,b]$ için $f(x) = f(a) + \int_a^x g(x)dx$ olacak biçimde Lebesgue anlamında integrallenebilir bir g fonksiyonu vardır. (Carter ve Brunt, 2000).

Teorem 1.1.13. (İntegraller İçin Üçgen Eşitsizliği) f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında integrallenebilir olsun. Bu durumda $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$ dir.

İspat. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reel sayıları için $|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \le |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$ üçgen eşitsizliğini biliyoruz. $[a,b]$ aralığının bir parçalanışı $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, … , $[x_{n-1}, x_n]$ ve $|P| = \max\{x_i - x_{i-1}:\ i = 1,2,\ldots,n\}$ olsun. Her $i = 1,2,\ldots,n$ için bir $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ noktası alarak $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$ Riemann toplamını oluşturalım. Üçgen eşitsizliğinden, limit özelliklerinden ve f integrallenebilir iken $|f|$ nin de integrallenebilir oluşundan

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \left|\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i\right| \le \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i^*)|\Delta x_i = \int_a^b |f(x)|dx$$

elde edilir. (Mitrinovic, 1970).

Teorem 1.1.14. (Young Eşitsizliği) $a,b \ge 0$, $p,q > 0$ reel sayılar olmak üzere $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise,

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

dir. Eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart $a^p = b^q$ olmasıdır.

İspat. $a = 0$ veya $b = 0$ halinde eşitsizliğin doğruluğu açıktır. $a,b > 0$ kabul edelim.

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ eşitliği, $p>1$, $q>1$ ve $(p-1)(q-1)=1$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla $u=t^{p-1} \Leftrightarrow t=t^{q-1}$ dir. Oluşan dikdörtgenin alanı ab dir. Buradan $ab \leq \int_0^a t^{p-1}dt+\int_0^b u^{q-1}du=\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$ elde edilir. (Mitrinovic, 1970).

Teorem 1.1.15. (Artan Fonksiyonlar İçin Young Eşitsizliği) f reel değerli fonksiyonu, $c>0$ için $[0,c]$ aralığında sürekli, kesin monoton artan ve $f(0)=0$ olsun. Bu durumda her $a\in[0,c]$, $b\in[0,f(c)]$ için $ab\leq\int_0^a f(x)dx+\int_0^b f^{-1}(x)dx$ dir. Eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart $f(a)=b$ olmasıdır.

İspat. Dikdörtgenin alanıyla, integrallerin belirttiği bölgelerin alanları toplamını karşılaştırmak yeterlidir. (Mitrinovic, 1970).

Teorem 1.1.16. (Hölder Eşitsizliği) f ve g, $[a,b]$ aralığında integrallenebilir iki fonksiyon olsun. $p,q>0$ reel sayılar olmak üzere $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ise,

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

dir. Eşitlik durumu, her $x\in[a,b]$ için $\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p}=\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}$ iken sağlanır. Burada $\|f\|_p=\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$, $\|g\|_q=\left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$ dir.

İspat. $m,n\geq 0$ sayıları için, $mn\leq\frac{m^p}{p}+\frac{n^q}{q}$ şeklinde yazılabilen Young eşitsizliğinde $m=\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}$ ve $n=\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$ seçersek $\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p\|g\|_q}\leq\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p\, p}+\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q\, q}$ olur. Bu eşitsizliğin her iki tarafının $[a,b]$ üzerinde integralini alırsak

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

(Mitrinovic, 1970).

Teorem 1.1.17. (Trapezoid Tipli Eşitsizlik) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığında diferansiyellenebilir olsun. Ayrıca $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir ve konveks bir olsun. Bu durumda

$$\left|\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]\right|\le\frac{(b-a)^2\left(|f'(a)|+|f'(b)|\right)}{8}.$$

(Pachpatte, 2005).

Teorem 1.1.18. (Hermite-Hadamard Eşitsizliği) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks olsun. Bu durumda

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

dir. Ayrıca *f* fonksiyonu konkav olursa eşitsizlik tersine döner. (Pachpatte 2005).

Teorem 1.1.19. (Ostrowski Eşitsiziği) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığında türevlenebilir ve her $t\in(a,b)$ için $|f'(t)|\le M$ olsun. Bu durumda her $x\in[a,b]$ için

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|\le\left[\frac{1}{4}+\frac{(x-(a+b)/2)^2}{(b-a)^2}\right](b-a)M$$

eşitsizliği sağlanır. $1/4$ sabiti, mümkün olan en iyi değerdir. Eşitsizlikte $1/4$ ten daha küçük bir sayı yazılamaz.

Ostrowski eşitsizliğinin kolay bir ispatı literatürde *Montgomery özdeşliği* olarak bilinen

$$f(x)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt+\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)f'(t)dt,\ x\in[a,b]$$

özdeşliği kullanılarak elde edilebilir. Burada $p(x,t)$ çekirdeği

$$p(x,t):=\begin{cases} t-a, & a\le t\le x\\ t-b, & x<t\le b\end{cases}$$

biçiminde tanımlanmıştır. (Barnett ve Dragomir, 2002).

Teorem 1.1.20. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde mutlak sürekli bir fonksiyon olsun. Her $x\in[a,b]$ için

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$

$$\leq\begin{cases}\left[\frac{1}{4}+\frac{(x-(a+b)/2)^2}{(b-a)^2}\right](b-a)\|f'\|_\infty, & f'\in L_\infty[a,b] \text{ ise}\\ \frac{1}{(p+1)^{1/p}}\left[\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{p+1}+\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{p+1}\right]^{1/p}(b-a)^{1/p}\|f'\|_q, & f'\in L_q[a,b] \text{ ise}\\ & \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ p>1\\ \left[\frac{1}{2}+\left|\frac{x-(a+b)/2}{b-a}\right|\right]\|f'\|_1, & f'\in L_1[a,b] \text{ ise}\end{cases}$$

eşitsizlikleri vardır. Burada $\|\cdot\|_r\ (r\in[1,\infty])$, $L_r[a,b]$ üstündeki alışılmış Lebesgue normudur. $1/4$, $1/(p+1)^{1/p}$ ve $1/2$ sabitleri en iyi sabitlerdir. (Barnett ve Dragomir, 2002).

Teorem 1.1.21. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu r-H Hölder tipli, yani her $x,y\in[a,b]$ için $|f(x)-f(y)|\leq H|x-y|^r$ olsun. Burada $r\in(0,1]$, $H>0$ sabitlerdir. Bu durumda her $x\in[a,b]$ için,

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|\leq\frac{H}{r+1}\left[\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{r+1}+\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{r+1}\right](b-a)^r$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca $\frac{1}{r+1}$ en iyi sabittir.

$r=1$ alınırsa, yani f Lipschitz sürekliliğine sahipse bu durumda Ostrowski eşitsizliğinin Lipschitzyen fonksiyonlar için bir versiyonu olan (H yerine L alınarak)

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|\leq\left[\frac{1}{4}+\left(\frac{x-(a+b)/2}{b-a}\right)^2\right](b-a)L$$

yazılır. Burada $\frac{1}{4}$ en iyi sabittir. (Barnett ve Dragomir, 2002).

Eğer sınırlı varyasyonlu f fonksiyonuna süreklilik şartı eklenirse aşağıdaki sonuç verilir:

Teorem 1.1.22. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ bir sınırlı varyasyon fonksiyon olsun ve toplam varyasyonu da $\bigvee_a^b$ ile gösterelim. Bu halde her $x\in[a,b]$ için

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|\leq\left[\frac{1}{2}+\left|\frac{x-(a+b)/2}{b-a}\right|\right](b-a)\bigvee_a^b(f)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\frac{1}{2}$ en iyi sabittir. (Barnett ve Dragomir, 2002).

1.2. BİRİKİMLİ DAĞILIM FONKSİYONLARI İÇİN OSTROWSKİ TİPLİ BİR EŞİTSİZLİK

$F(x)=\Pr(X\leq x)$ birikimli dağılım fonksiyonuna sahip X rassal değişkeni $[a,b]$ aralığında değerler alsın. Aşağıdaki teorem sağlanır:

Teorem 1.2.1. X ve F daha yukarıda tanımladığımızın gibi olsun. Her $x\in[a,b]$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned}\left|\Pr(X\leq x)-\frac{b-E(X)}{b-a}\right|&\leq\frac{1}{b-a}\left[\left[2x-(a+b)\right]\Pr(X\leq x)+\int_a^b \operatorname{sgn}(t-x)F(t)dt\right]\\&\leq\frac{1}{b-a}\left[(b-x)\Pr\left(X\geq x\right)+(x-a)\Pr\left(X\leq x\right)\right]\\&\leq\frac{1}{2}+\frac{\left|x-(a+b)/2\right|}{(b-a)}.\end{aligned}\tag{1.1}$$

İspat. $p:[a,b]^2\to\mathbb{R}$,

$$p(x,t):=\begin{cases}t-a, & a\leq t\leq x\\ t-b, & x<t\leq b\end{cases}\tag{1.2}$$

çekirdeğini göz önüne alalım. Bu halde herhangi bir $x\in[a,b]$ için $\int_a^b p(x,t)dF(t)$ Riemann-Stieltjes integrali vardır ve kısmi integrasyon ile

$$\int_a^b p(x,t)dF(t)=\int_a^x (t-a)dF(t)+\int_x^b (t-b)dF(t)=(b-a)F(x)-\int_a^b F(t)dt \qquad (1.3)$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$E(X):=\int_a^b t dF(t)=tF(t)\Big|_a^b-\int_a^b F(t)dt$$

$$=bF(b)-aF(a)-\int_a^b F(t)dt=b-\int_a^b F(t)dt \qquad (1.4)$$

eşitliği vardır. Şimdi (1.3) ve (1.4) eşitliklerini kullanarak her $x\in[a,b]$ için

$$(b-a)F(x)+E(x)-b=\int_a^b p(x,t)F(t)dt \qquad (1.5)$$

elde edilir.

Şimdi $\Delta_n : a=x_0^{(n)}<x_1^{(n)}<\cdots<x_{n-1}^{(n)}<x_n^{(n)}=b$ dizisinin, $n\to\infty$ için $\nu(\Delta_n)\to 0$ olan bir parçalanış olduğunu varsayalım. Burada

$$\nu(\Delta_n):=\max\left\{x_{i+1}^{(n)}-x_i^{(n)} : i=0,1,\ldots,n-1\right\}$$

biçiminde tanımlanmaktadır.

$p:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sürekli ve $\nu:[a,b]\to\mathbb{R}$ monoton azalmayan ise $\int_a^b p(x)d\nu(x)$ Riemann-Stieltjes integrali vardır ve

$$\left|\int_a^b p(x)d\nu(x)\right|=\left|\lim_{\nu(\Delta_n)\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} p\left(\xi_i^{(n)}\right)\left[\nu\left(x_{i+1}^{(n)}\right)-\nu\left(x_i^{(n)}\right)\right]\right|$$

$$\leq \lim_{\nu(\Delta_n)\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\left|p\left(\xi_i^{(n)}\right)\right|\left(\nu\left(x_{i+1}^{(n)}\right)-\nu\left(x_i^{(n)}\right)\right)$$

$$=\int_a^b |p(x)|d\nu(x). \qquad (1.6)$$

(1.6) eşitsizliğini kullanarak

$$\left|\int_a^b p(x,t)dF(t)\right|=\left|\int_a^x (t-a)dF(t)+\int_x^b (t-b)dF(t)\right|$$

$$\leq\left|\int_a^x (t-a)dF(t)\right|+\left|\int_x^b (t-b)dF(t)\right|$$

$$\leq \int_a^x |t-a|\, dF(t) + \int_x^b |t-b|\, dF(t)$$

$$= \int_a^x (t-a)dF(t) + \int_x^b (b-t)dF(t)$$

$$= (t-a)F(t)\Big|_a^x - \int_a^x F(t)dt - (b-t)F(t)\Big|_x^b + \int_x^b F(t)dt$$

$$= \left[2x-(a+b)\right]F(x) - \int_a^x F(t)dt + \int_x^b F(t)dt$$

$$= \left[2x-(a+b)\right]F(x) + \int_a^b \operatorname{sgn}(t-x)F(t)dt\,. \tag{1.7}$$

(1.5) özdeşliğini ve (1.7) eşitsizliğini kullanarak (1.1) eşitsizliğinin ilk kısmını elde ederiz. Burada biliyoruz ki

$$\int_a^b \operatorname{sgn}(t-x)F(t)dt = -\int_a^x F(t)dt + \int_x^b F(t)dt\,.$$

F , $[a,b]$ üzerinde monoton azalmayan bir fonksiyon olduğundan

$$\int_a^x F(t)dt \geq (x-a)F(a) = 0$$

$$\int_x^b F(t)dt \leq (b-x)F(b) = b-x$$

eşitsizlikleri vardır. Dolayısıyla her $x \in [a,b]$ için

$$\int_a^b \operatorname{sgn}(t-x)F(t)dt \leq b-x$$

elde edilir. Böylece

$$\left[2x-(a+b)\right]F(x) + \int_a^b \operatorname{sgn}(t-x)F(t)dt \leq \left[2x-(a+b)\right]F(x) + (b-x)$$

$$= (b-x)(1-F(X)) + (x-a)F(x)$$

$$= (b-x)\Pr(X \geq x) + (x-a)\Pr(X \leq x)$$

olup (1.1) eşitsizliğinin ikinci kısmı da ispatlanır. Nihayetinde,

$$(b-x)\Pr(X \geq x) + (x-a)\Pr(X \leq x) \leq \max\{b-x, x-a\}\left[\Pr(X \geq x) + \Pr(X \leq x)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(b-a) + \left|x - \frac{a+b}{2}\right|$$

olup (1.1) in son kısmı da ispatlanır.

(1.1) eşitsizliğinin $\frac{1}{2}$ yerine bir $c>0$ sabiti için sağlandığını kabul edelim. Bu durumda her $x\in[a,b]$ için

$$\begin{aligned}\left|\Pr(X\le x)-\frac{b-E(X)}{b-a}\right| &\le \frac{1}{b-a}\left[\left[2x-(a+b)\right]\Pr(X\le x)+\int_a^b \operatorname{sgn}(t-x)F(t)dt\right]\\ &\le \frac{1}{b-a}\left[(b-x)\Pr\left(X\ge x\right)+(x-a)\Pr\left(X\le x\right)\right]\\ &\le c+\frac{\left|x-(a+b)/2\right|}{(b-a)} \qquad (1.8)\end{aligned}$$

olur. X rassal değişkeni için $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ birikimli dağılım fonksiyonunu

$$F(x):=\begin{cases}0, & x=0 \text{ ise}\\ 1, & x\in(0,1] \text{ ise}\end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım. $E(X)=0$, $\int_0^1 \operatorname{sgn}(t)F(t)dt=1$ dir. (1.8) de $x=0$ için $1\le c+\frac{1}{2}$ elde ederiz. Bu ise $c=\frac{1}{2}$ nin en iyi değer olduğunu gösterir. (Barnett ve Dragomir, 2002).

Uyarı 1.2.2. $\Pr\left(X\ge x\right)=1-\Pr\left(X\le x\right)$ eşitliğini (1.1) de kullanırsak her $x\in[a,b]$ için

$$\begin{aligned}\left|\Pr(X\ge x)-\frac{E(X)-a}{b-a}\right| &\le \frac{1}{b-a}\left[\left[2x-(a+b)\right]\Pr(X\le x)+\int_a^b \operatorname{sgn}(t-x)F(t)dt\right]\\ &\le \frac{1}{b-a}\left[(b-x)\Pr\left(X\ge x\right)+(x-a)\Pr\left(X\le x\right)\right]\\ &\le \frac{1}{2}+\frac{\left|x-(a+b)/2\right|}{(b-a)}. \qquad (1.9)\end{aligned}$$

eşitsizlikleri vardır. (Barnett ve Dragomir, 2002).

Uyarı 1.2.3. Aşağıdaki özel durumlar ilginçtir:

$$\left|\Pr(X \le \frac{a+b}{2}) - \frac{E(X)-a}{b-a}\right| \le \int_a^b \operatorname{sgn}\left(t - \frac{a+b}{2}\right) F(t)dt \le \frac{1}{2}. \tag{1.10}$$

$$\left|\Pr(X \ge \frac{a+b}{2}) - \frac{b-E(X)}{b-a}\right| \le \int_a^b \operatorname{sgn}\left(t - \frac{a+b}{2}\right) F(t)dt \le \frac{1}{2}. \tag{1.11}$$

(Barnett ve Dragomir, 2002).

Sonuç 1.2.4. Yukarıdaki kabuller altında

$$\frac{1}{b-a}\left[\frac{a+b}{2} - E(x)\right] \le \Pr\left(X \le \frac{a+b}{2}\right) \frac{1}{b-a}\left[\frac{a+b}{2} - E(x)\right] + 1. \tag{1.12}$$

İspat. (1.10) eşitsizliğinden

$$-\frac{1}{2} + \frac{b-E(X)}{b-a} \le \Pr\left(X \le \frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{2} + \frac{b-E(X)}{b-a}$$

yazabiliriz. Ayrıca

$$-\frac{1}{2} + \frac{b-E(X)}{b-a} = \frac{-b+a+2b-2E(X)}{2(b-a)} = \frac{1}{b-a}\left[\frac{a+b}{2} - E(X)\right],$$

$$\frac{1}{2} + \frac{b-E(X)}{b-a} = 1 + \frac{b-E(X)}{2(b-a)} - \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{b-a}\left[\frac{a+b}{2} - E(X)\right]$$

olduğundan istenen eşitsizlik hemen elde edilir.

Uyarı 1.2.5. $1 \ge \varepsilon \ge 0$ olsun ve

$$E(X) \ge \frac{a+b}{2} + (1-\varepsilon)(b-a) \tag{1.13}$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\Pr\left(X \le \frac{a+b}{2}\right) \le \varepsilon \tag{1.14}$$

olur. Gerçekten (1.13) sağlandığında (1.12) nin sağ tarafından

$$\Pr\left(X \le \frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{b-a}\left[\frac{a+b}{2} - E(X)\right] + 1 \le \frac{(\varepsilon-1)(b-a)}{(b-a)} + 1 = \varepsilon$$

sonucuna ulaşırız. (Barnett ve Dragomir, 2002).

Uyarı 1.2.6. Ayrıca

$$E(X) \le \frac{a+b}{2} - \varepsilon(b-a) \tag{1.15}$$

ise, (1.12) nin sağ tarafından $\Pr\left(X \le \frac{a+b}{2} \right) \ge \frac{1}{b-a}\left[\frac{a+b}{2} - E(X) \right] \ge \frac{\varepsilon(b-a)}{(b-a)} = \varepsilon$ olup

$$\Pr\left(X \le \frac{a+b}{2} \right) \ge \varepsilon, \ \varepsilon \in [0,1] \tag{1.16}$$

olur. (Barnett ve Dragomir, 2002).

Sonuç 1.2.7. Teorem 1.2.1'in şartları altında her $x \in (a,b)$ için,

$$\frac{1}{b-x}\int_a^b \left[\frac{1+\operatorname{sgn}(t-x)}{2} \right] F(t)dt \ge \Pr(X \ge x) \ge \frac{1}{x-a}\int_a^b \left[\frac{1-\operatorname{sgn}(t-x)}{2} \right] F(t)dt. \tag{1.17}$$

İspat. (1.1) eşitsizliğinden

$$\Pr(X \le x) - \frac{b-E(X)}{b-a} \le \frac{1}{b-a}\left[[2x-(a+b)]\Pr(X \le x) + \int_a^b \operatorname{sgn}(t-x)F(t)dt \right]$$

yazarız. Bu eşitsizlik

$$(b-a)\Pr(X \le x) - [2x-(a+b)]\Pr(X \le x) \le b - E(X) + \int_a^b \operatorname{sgn}(t-x)F(t)dt$$

eşitsizliğine denktir. Yani

$$2(b-a)\Pr(X \le x) \le b - E(X) + \int_a^b \operatorname{sgn}(t-x)F(t)dt.$$

$b - E(X) = \int_a^b F(t)dt$ olduğundan yukarıdaki eşitsizlikten, (1.17) nin ilk kısmını elde ederiz. İkinci kısımda da benzer düşünceyle

$$\Pr(X \le x) - \frac{b-E(X)}{b-a} \ge -\frac{1}{b-a}\left[[2x-(a+b)]\Pr(X \le x) + \int_a^b \operatorname{sgn}(t-x)F(t)dt \right]$$

elde edilir. (Barnett ve Dragomir, 2002).

Sonuç 1.2.8. (1.17) de $x=(a+b)/2$ koyulursa,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b\left[1+\operatorname{sgn}(t-(a+b)/2)\right]F(t)dt \geq \Pr\left(X \geq (a+b)/2\right)$$

$$\geq \frac{1}{b-a}\int_a^b\left[1-\operatorname{sgn}(t-(a+b)/2)\right]F(t)dt \tag{1.18}$$

elde edilir. (Barnett ve Dragomir, 2002).

1.3. BETA RASSAL DEĞİŞKENİ İÇİN UYGULAMALAR

X rassal değişken ve (p,q) parametreleri

$$f(x;p,q):=\frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{B(p,q)};\quad 0<x<1$$

biçiminde tanımlı olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip ise X ’e beta rassal değişkeni denir. Burada $p,q>0$ ve $B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$ olarak tanımlı beta fonksiyonudur.

$$E(X)=\frac{1}{B(p,q)}\int_0^1 x\cdot x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\frac{B(p+1,q)}{B(p,q)}$$

olduğundan

$$E(X)=\frac{p}{p+q}$$

olur.

X, (p,q) parametreli bir beta rassal değişkeni olsun. (1.1) den, her $x\in[0,1]$ için

$$\left|\Pr(X\leq x)-\frac{q}{p+q}\right|\leq\frac{1}{2}+\left|x-\frac{1}{2}\right|$$

$$\left|\Pr(X\geq x)-\frac{p}{p+q}\right|\leq\frac{1}{2}+\left|x-\frac{1}{2}\right|$$

$$\left|\Pr(X\leq 1/2)-\frac{q}{p+q}\right|\leq\frac{1}{2}$$

$$\left|\Pr(X\geq 1/2)-\frac{p}{p+q}\right|\leq\frac{1}{2}$$

bulunur. (Barnett ve Dragomir, 2002).

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. OLASILIK YOĞUNLUK FONKSİYONU $L_p[a,b]$, $p>1$ UZAYINA AİT OLAN RASSAL DEĞİŞKENER İÇİN OSTROWSKİ TİPLİ BİR EŞİTSİZLİK

Teorem 2.1.1. X, $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna ve $F(x)=\Pr(X\le x)$ birikimli dağılım fonksiyonuna sahip bir rassal değişken olsun. $p>1$ ve $1/p+1/q=1$ olmak üzere $f\in L_p[a,b]$ ise, her $x\in[a,b]$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|\Pr(X\le x)-\frac{b-E(X)}{b-a}\right|\le\frac{q}{q+1}\|f\|_p(b-a)^{1/q}\left[\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{(1+q)/q}+\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{(1+q)/q}\right]$$

$$\le\frac{q}{q+1}\|f\|_p(b-a)^{1/q}. \tag{2.1}$$

İspat. Hölder eşitsizliğinden $x,y\in[a,b]$ için,

$$|F(x)-F(y)|=\left|\int_x^y f(t)dt\right|\le\left|\int_x^y dt\right|^{1/q}\left|\int_x^y |f(t)|^p\,dt\right|^{1/p}\le|x-y|^{1/q}\|f\|_p \tag{2.2}$$

olur. Burada $\|f\|_p$, $L_p[a,b]$ uzayı üzerinde $\|f\|_p:=\left(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$ biçiminde tanımlanan alışılmış p-normudur. $r=1/q\in(0,1)$, $0<H=\|f\|_p$ olsun. (2.2) eşitsizliği bize $F(\cdot)$ dönüşümünün her $x\in[a,b]$ için r-H Hölder tipli, yani

$$|F(x)-F(y)|\le H\,|x-y|^r \tag{2.3}$$

olduğunu gösterir.

(2.2) eşitsizliğinin $y\in[a,b]$ üzerinden integrali alınırsa her $x\in[a,b]$ için

$$\left|F(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b F(y)dy\right|\le\frac{1}{b-a}\int_a^b|F(x)-F(y)|dy\le\frac{1}{b-a}\|f\|_p\int_a^b|x-y|^{1/q}\,dy$$

$$=\frac{1}{b-a}\|f\|_p\left[\int_a^x(x-y)^{1/q}dy+\int_x^b(y-x)^{1/q}dy\right]$$

$$= \frac{1}{b-a}\| f\|_p \left[\frac{(x-a)^{1/q+1}}{1/q+1} + \frac{(b-x)^{1/q+1}}{1/q+1} \right]$$

$$= \frac{q}{q+1}\| f\|_p (b-a)^{1/q} \left[\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{1/q+1} + \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{1/q+1} \right] \tag{2.4}$$

olur. $E(X) = b - \int_a^b F(t)dt$ olduğunu (2.4) de kullanırsak (2.1) eşitsizliğinin ilk kısmı elde edilir. Her $x \in [a,b]$ için

$$\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{1/q+1} + \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{1/q+1} \leq 1$$

olup (2.1) eşitsizliğinin ikinci kısmı da ispatlanır. (Barnett ve Dragomir, 2002).

Uyarı 2.1.2. (2.1) eşitsizliği her $x \in [a,b]$ için,

$$\left| \Pr(X \geq x) - \frac{E(X)-a}{b-a} \right| \leq \frac{q}{q+1}\| f\|_p (b-a)^{1/q} \left[\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{(1+q)/q} + \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{(1+q)/q} \right]$$

$$\leq \frac{q}{q+1}\| f\|_p (b-a)^{1/q} . \tag{2.5}$$

eşitsizliğine denktir. (Barnett ve Dragomir, 2002).

Sonuç 2.1.3. Yukarıdaki kabuller altında

$$b - \frac{q}{q+1}\| f\|_p (b-a)^{1+1/q} \leq E(X) \leq a + \frac{q}{q+1}\| f\|_p (b-a)^{1+1/q} \tag{2.6}$$

İspat. $a \leq E(X) \leq b$ olduğunu biliyoruz. (2.1) de $x = a$ seçersek

$$\left| \frac{b-E(X)}{b-a} \right| \leq \frac{q}{q+1}\| f\|_p (b-a)^{1/q}$$

veya

$$b - E(X) \leq \frac{q}{q+1}\| f\|_p (b-a)^{1/q+1}$$

olur. Bu ise (2.6) eşitsizliğinin ilk kısmını verir. Şimdi de (2.1) de $x = b$ seçersek

$$\left| 1 - \frac{b-E(X)}{b-a} \right| \leq \frac{q}{q+1}\| f\|_p (b-a)^{1/q}$$

veya

$$E(X)-a\leq \frac{q}{q+1}\|f\|_p\,(b-a)^{1/q+1}$$

olup (2.6) eşitsizliğinin ikinci kısmı da ispatlanmış olur.(Barnett ve Dragomir, 2002)

Uyarı 2.1.4. Hölder integral eşitsizliğinden

$$1=\int_a^b f(t)dt\leq (b-a)^{1/q}\,\|f\|_p$$

olup

$$\|f\|_p\geq \frac{1}{(b-a)^{1/q}}$$

yazılır. Şimdi $\|f\|_p$ değerinin çok büyük olmadığını kabul edebiliriz.

$$\|f\|_p\leq \frac{q}{q+1}\frac{1}{(b-a)^{1/q}} \tag{2.7}$$

olsun. Bu halde

$$a+\frac{q}{q+1}\|f\|_p\,(b-a)^{1+1/q}\leq b$$

$$b-\frac{q}{q+1}\|f\|_p\,(b-a)^{1+1/q}\geq a$$

olur. Bu bize (2.7) eşitsizliği sağlandığında (2.6) eşitsizliğinin $a\leq E(X)\leq b$ den daha dar olduğunu gösterir. (Barnett ve Dragomir, 2002).

Sonuç 2.1.5. Yukarıdaki kabuller altında

$$\left|E(X)-\frac{a+b}{2}\right|\leq (b-a)\left[\frac{q}{q+1}\|f\|_p\,(b-a)^{1/q}-\frac{1}{2}\right]. \tag{2.8}$$

İspat. (2.6) dan

$$b-\frac{a+b}{2}-\frac{q}{q+1}\|f\|_p\,(b-a)^{1+1/q}\leq E(X)-\frac{a+b}{2}\leq a-\frac{a+b}{2}+\frac{q}{q+1}\|f\|_p\,(b-a)^{1+1/q}$$

veya

$$\frac{b-a}{2}-\frac{q}{q+1}\|f\|_p\,(b-a)^{1+1/q}\leq E(X)-\frac{a+b}{2}\leq -\frac{b-a}{2}+\frac{q}{q+1}\|f\|_p\,(b-a)^{1+1/q}$$

yazılabilir. Buradan

$$\left|E(X)-\frac{a+b}{2}\right|\leq \frac{q}{q+1}\|f\|_p\,(b-a)^{1+1/q}-\frac{b-a}{2}=(b-a)\left[\frac{q}{q+1}\|f\|_p\,(b-a)^{1/q}-\frac{1}{2}\right]$$

elde edilerek (2.8) eşitsizliği ispatlanır.

Aşağıdaki sonuç bize $E(X)$ beklenen değerinin, aralığın orta noktası olan $(a+b)/2$ ye yakın olması için, $\|f\|_p$ türünden ($p>1$) yeterli bir şart bulma imkanı sağlar. (Barnett ve Dragomir, 2002).

Sonuç 2.1.6. X ile f yukarıdaki gibi ve $\varepsilon > 0$ olsun. Eğer

$$\|f\|_p \le \frac{q+1}{2q} \cdot \frac{1}{(b-a)^{1/q}} + \frac{\varepsilon(q+1)}{q(b-a)^{1+1/q}}$$

ise, bu durumda aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left| E(X) - \frac{a+b}{2} \right| \le \varepsilon .$$

Sonuç 2.1.7. X ile f yukarıdaki gibi olsun. Aşağıdaki eşitsizlik sağlanır

$$\left| \Pr\left(X \le \frac{a+b}{2} \right) - \frac{1}{2} \right| \le \frac{q}{2^{1/q}(q+1)} \|f\|_p (b-a)^{1/q} + \frac{1}{b-a} \left| E(X) - \frac{a+b}{2} \right| .$$

İspat. (2.1) eşitsizliğinde $x = (a+b)/2$ yazılırsa

$$\left| \Pr\left(X \le \frac{a+b}{2} \right) - \frac{b-E(X)}{b-a} \right| \le \frac{q}{2^{1/q}(q+1)} \|f\|_p (b-a)^{1/q}$$

olur. Bu eşitsizliğe denk olarak

$$\left| \Pr\left(X \le \frac{a+b}{2} \right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{b-a}\left(E(X) - \frac{a+b}{2} \right) \right| \le \frac{q}{2^{1/q}(q+1)} \|f\|_p (b-a)^{1/q}$$

yazılır. Üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
&\left| \Pr\left(X \le \frac{a+b}{2} \right) - \frac{1}{2} \right| \\
&= \left| \Pr\left(X \le \frac{a+b}{2} \right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{b-a}\left(E(X) - \frac{a+b}{2} \right) - \frac{1}{b-a}\left(E(X) - \frac{a+b}{2} \right) \right| \\
&\le \left| \Pr\left(X \le \frac{a+b}{2} \right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{b-a}\left(E(X) - \frac{a+b}{2} \right) \right| + \frac{1}{b-a}\left| E(X) - \frac{a+b}{2} \right| \\
&\le \frac{q}{2^{1/q}(q+1)} \|f\|_p (b-a)^{1/q} + \frac{1}{b-a}\left| E(X) - \frac{a+b}{2} \right|
\end{aligned}$$

olup istenen sonuca ulaşılır. (Barnett ve Dragomir, 2002).

Son olarak aşağıdaki sonuç da sağlanır:

Sonuç 2.1.8. Yukarıdaki kabuller altında

$$\left|E(X)-\frac{a+b}{2}\right| \le \frac{q}{2^{1/q}(q+1)}\|f\|_p (b-a)^{1+1/q} + (b-a)\left|\Pr\left(X \le \frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{2}\right|$$

eşitsizliği sağlanır.(Barnett ve Dragomir, 2002).

Bu sonucun ispatı önceki sonuca benzer biçimde yapılabildiği için detaylara girmeden bırakıyoruz.

2.2. OLASILIK YOĞUNLUK FONKSİYONU $L_\infty[a,b]$ UZAYINDA OLAN RASSAL DEĞİŞKENLER İÇİN OSTROWSKİ TİPLİ BİR EŞİTSİZLİK

X rassal değişkeni $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna ve $F(x)=\Pr(X \le x)$ birikimli dağılım fonksiyonuna sahip olsun. Aşağıdaki teorem sağlanır.

Teorem 2.2.1. $f \in L_\infty[a,b]$ ve $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} f(t) < \infty$ olsun. Her $x\in[a,b]$ için

$$\left|P(X \le x)-\frac{b-E(X)}{b-a}\right| \le \left[\frac{1}{4}+\frac{(x-(a+b)/2)^2}{(b-a)^2}\right](b-a)\|f\|_\infty \tag{2.9}$$

$$\left|P(X \ge x)-\frac{E(X)-a}{b-a}\right| \le \left[\frac{1}{4}+\frac{(x-(a+b)/2)^2}{(b-a)^2}\right](b-a)\|f\|_\infty \tag{2.10}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Burada $1/4$ en iyi sabittir.

İspat. $x,y\in[a,b]$ olsun. Bu durumda

$$|F(x)-F(y)| = \left|\int_x^y f(t)dt\right| \le |x-y|\|f\|_\infty$$

olur. Bu ise F nin $[a,b]$ üzerinde $\|f\|_\infty$-Lipschitzyen olduğunu gösterir.

$p:[a,b]^2 \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$p(x,t) := \begin{cases} t-a, & a \le t \le x \\ t-b, & x < t \le b \end{cases}$$

çekirdeğini göz önüne alalım. Herhangi bir $x\in[a,b]$ için $\int_x^y p(x,t)dF(t)$ Riemann-

Stieltjes integrali vardır ve kısmi integrasyon formülünden

$$\int_a^b p(x,t)dF(t) = (b-a)F(x) - \int_a^b F(t)dt \tag{2.11}$$

$$E(X) = b - \int_a^b F(t)dt \tag{2.12}$$

eşitlikleri elde edilebilir. (2.21) ve (2.12) den her $x \in [a,b]$ için,

$$(b-a)F(x) + E(X) - b = \int_a^b p(x,t)dF(t) \tag{2.13}$$

Şimdi $\Delta_n : a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_{n-1}^{(n)} < x_n^{(n)} = b$ dizisinin, $n \to \infty$ için $\nu(\Delta_n) \to 0$ olan bir parçalanış olduğunu varsayalım. Burada

$$\nu(\Delta_n) := \max\left\{x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)} : i = 0,1,\ldots,n-1\right\}$$

biçiminde tanımlanmaktadır.

$p:[a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $[a,b]$ üzerinde Riemann integrali olsun ve $\nu:[a,b] \to \mathbb{R}$ L-Lipschitzyen (L bir sabit) ise

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b p(x)d\nu(x)\right| &= \left|\lim_{\nu(\Delta_n)\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} p\left(\xi_i^{(n)}\right)\left[\nu\left(x_{i+1}^{(n)}\right) - \nu\left(x_i^{(n)}\right)\right]\right| \\
&\le \lim_{\nu(\Delta_n)\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left|p\left(\xi_i^{(n)}\right)\right|\left(x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)}\right)\left(\frac{\nu\left(x_{i+1}^{(n)}\right) - \nu\left(x_i^{(n)}\right)}{x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)}}\right) \\
&\le L \lim_{\nu(\Delta_n)\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left|p\left(\xi_i^{(n)}\right)\right|\left(x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)}\right) = L\int_a^b |p(x)|\, d\nu(x).
\end{aligned} \tag{2.14}$$

(2.14) eşitsizliğini $p(x,\cdot)$ ve F için uygularsak her $x \in [a,b]$ için

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b p(x,t)dF(t)\right| &\le \|f\|_\infty \int_a^b |p(x,t)|\, dt \\
&= \|f\|_\infty \left[\int_a^x (t-a)dt + \int_x^b (b-t)dt\right] \\
&= \left[\frac{1}{4}(b-a)^2 + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\right]\|f\|_\infty .
\end{aligned}$$

Son olarak (2.13) özdeşliğinden her $x \in [a,b]$ için

$$\left| F(x) - \frac{b - E(X)}{b-a} \right| \le \left[\frac{1}{4} + \frac{(x-(a+b)/2)^2}{(b-a)^2} \right] (b-a) \| f \|_\infty$$

yazılarak (2.9) ispatlanır. $\Pr(X \ge x) = 1 - \Pr(X \le x)$ olduğu kullanılırsa (2.10) elde edilir. $1/4$ ün en iyi sabit olduğunu ispatlayalım. (1.19) eşitsizliğinin bir $c > 0$ için sağlandığını kabul edelim. Yani,

$$\left| P(X \le x) - \frac{b - E(X)}{b-a} \right| \le \left[c + \frac{(x-(a+b)/2)^2}{(b-a)^2} \right] (b-a) \| f \|_\infty \tag{2.15}$$

olsun. X rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunun $f:[0,1] \to \mathbb{R}$, $f(t) = 1$ biçiminde olduğunu varsayalım. Bu halde,

$$\Pr(X \ge x) = x, \quad x \in [0,1], \quad E(X) = \frac{1}{2}, \quad \| f \|_\infty = 1$$

bulunur. (2.15) ten, her $x \in [a,b]$ için

$$\left| x - \frac{1}{2} \right| \le c + \left(x - \frac{1}{2} \right)^2$$

olmalıdır. $x = 0$ seçilirse $c \ge \frac{1}{4}$ bulunur. Böylece istenen sonuç ispatlanmıştır. (Barnett ve Dragomir, 2002).

Yukarıdaki teorem, X in beklenen değeri için bazı ilginç sonuçlar verir.

Sonuç 2.2.2. Yukarıdaki kabuller altında şu eşitsizlikler vardır:

$$b - \frac{1}{2}(b-a)^2 \| f \|_\infty \le E(X) \le a + \frac{1}{2}(b-a)^2 \| f \|_\infty . \tag{2.16}$$

İspat. $a \le E(X) \le b$ olduğunu biliyoruz. (2.9) da $x = a$ seçersek

$$\left| \frac{b - E(X)}{b-a} \right| \le \frac{1}{2}(b-a) \| f \|_\infty .$$

Yani,

$$b - E(X) \leq \frac{1}{2}(b-a)^2 \| f \|_\infty$$

olup (2.16) eşitsizliğinin ilk kısmı elde edilir. Şimdi de (1.19) da $x = b$ seçersek

$$\left| 1 - \frac{b - E(X)}{b-a} \right| \frac{1}{2}(b-a) \| f \|_\infty$$

olup buradan

$$E(X) - a \leq \frac{1}{2}(b-a)^2 \| f \|_\infty$$

yazılır. Böylece (2.16) nın ikinci kısmı da elde edilmiş olur. (Barnett ve Dragomir, 2002).

Uyarı 2.2.3. $1 = \int_a^b f(x)dx \leq (b-a) \| f \|_\infty$ olduğunu biliyoruz. Buna göre

$$\| f \|_\infty \geq \frac{1}{b-a}$$

olur. $\| f \|_\infty$ değerinin çok büyük olmadığını kabul edelim ve

$$\| f \|_\infty \leq \frac{2}{b-a} \tag{2.17}$$

diyelim. Bu durumda

$$a + \frac{1}{2}(b-a)^2 \| f \|_\infty \leq b$$

$$b - \frac{1}{2}(b-a)^2 \| f \|_\infty \geq a$$

olur. Bu bize (2.17) sağlanırken (2.16) eşitsizliğinin daha dar biçimde yazılabileceğini göstermektedir.(Barnett ve Dragomir, 2002).

Sonuç 2.2.4. Yukarıdaki kabuller altında

$$\left|E(X)-\frac{a+b}{2}\right| \le \frac{(b-a)^2}{2}\left(\|f\|_\infty - \frac{1}{b-a}\right). \tag{2.18}$$

İspat. (2.16) eşitsizliğinden

$$b-\frac{a+b}{2}-\frac{1}{2}(b-a)^2\|f\|_\infty \le E(X)-\frac{a+b}{2} \le a-\frac{a+b}{2}+\frac{1}{2}(b-a)^2\|f\|_\infty$$

olup

$$-\frac{1}{2}(b-a)^2\left(\|f\|_\infty-\frac{1}{b-a}\right) \le E(X)-\frac{a+b}{2} \le \frac{1}{2}(b-a)^2\left(\|f\|_\infty-\frac{1}{b-a}\right)$$

elde edilir. Bu eşitsizlik tam olarak (2.18) dir.

Bu sonuç, $\|f\|_\infty$ veya $E(X)$ beklenen değeri aralığın orta noktası olan $(a+b)/2$ ye yakınken, yeterli koşullar bulmak için mekanizma sağlar.(Barnett ve Dragomir, 2002).

Sonuç 2.2.5. X ile f yukarıdaki gibi ve $\varepsilon > 0$ olsun.

$$\|f\|_\infty \le \frac{1}{b-a}+\frac{2\varepsilon}{(b-a)^2} \tag{2.19}$$

ise

$$\left|E(X)-\frac{a+b}{2}\right| \le \varepsilon$$

olur. (Barnett ve Dragomir, 2002).

Ayrıca Teorem 2.2.1'in aşağıdaki sonucu sağlanır.

Sonuç 2.2.6. X ile f yukarıdaki gibi olsun. Bu durumda

$$\left|\Pr\left(X \le \frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{2}\right| \le \frac{1}{4}(b-a)\|f\|_\infty + \frac{1}{b-a}\left|E(X)-\frac{a+b}{2}\right|$$

$$\leq \frac{3}{4}(b-a)\|f\|_\infty - \frac{1}{2}. \tag{2.20}$$

İspat. (2.9) da $x=(a+b)/2$ seçersek

$$\left|\Pr\left(X \leq \frac{a+b}{2}\right) - \frac{b-E(x)}{(b-a)}\right| \leq \frac{1}{4}(b-a)\|f\|_\infty$$

olur. Bu ise aşağıdaki eşitsizliğe denktir:

$$\left|\Pr\left(X \leq \frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{b-a}\left(E(X) - \frac{a+b}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{4}(b-a)\|f\|_\infty .$$

Üçgen eşitsizliğinden ve (2.8) eşitsizliğinden

$$\left|\Pr\left(X \leq \frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2}\right|$$

$$= \left|\Pr\left(X \leq \frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{b-a}\left(E(X) - \frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\left(E(X) - \frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq \left|\Pr\left(X \leq \frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{b-a}\left(E(X) - \frac{a+b}{2}\right)\right| + \left|\frac{1}{b-a}\left(E(X) - \frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{1}{4}(b-a)\|f\|_\infty + \frac{1}{b-a}\left|E(X) - \frac{a+b}{2}\right| \leq \frac{3}{4}(b-a)\|f\|_\infty - \frac{1}{2}.$$

elde edilir. (Barnett ve Dragomir, 2002).

Uyarı 2.2.7. Benzer bir sonuç $\Pr\left(X \geq \frac{a+b}{2}\right)$ için uygulanarak elde edilir. (Barnett ve Dragomir, 2002).

Sonuç 2.2.8. X ile f yukarıdaki gibi olsun. Bu durumda

$$\left|E(X) - \frac{a+b}{2}\right| \leq \frac{1}{4}(b-a)^2\|f\|_\infty + (b-a)\left|\Pr\left(X \leq \frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2}\right|. \tag{2.21}$$

İspat. Yukarıdaki sonuçta yaptığımız işlemlerle benzer biçimde

$$\frac{1}{b-a}\left|E(X)-\frac{a+b}{2}\right|$$

$$\leq\left|\Pr\left(X\leq\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{2}+\frac{1}{b-a}\left(E(X)-\frac{a+b}{2}\right)\right|+\left|\Pr\left(X\leq\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{2}\right|$$

$$\leq\frac{1}{4}(b-a)\|f\|_{\infty}+\left|\Pr\left(X\leq\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{2}\right|$$

elde edilir.(Barnett ve Dragomir, 2002).

Uyarı 2.2.9. f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sürekli olsun. Bu durumda F, (a,b) üzerinde diferansiyellenebilir olup Ostrowski eşitsizliğinden her $x\in[a,b]$ için

$$\left|F(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b F(t)dt\right|\leq\left[\frac{1}{4}+\frac{(x-(a+b)/2)}{(b-a)^2}\right](b-a)\|f\|_{\infty}.$$

(2.12) özdeşliğini kullanarak, olasılık yoğunluk fonksiyonları $[a,b]$ üzerinde sürekli olan rassal değişkenler için geçerli olan (2.9) ve (2.10) eşitsizliklerini hatırlatalım. (Barnett ve Dragomir, 2002).

Teorem 2.2.10. (p,q) parametreli bir X beta rassal değişkeni için olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x;p,q):=\frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{B(p,q)};\quad 0<x<1$$

olmak üzere

$$0<p<1 \text{ için} \|f(\,\cdot\,,p,q)\|_{\infty}=\infty$$

$$p,q\geq 1 \text{ için} \|f(\,\cdot\,,p,q)\|_{\infty}=\frac{(p-1)^{p-1}(q-1)^{q-1}}{B(p,q)(p+q-2)^{p+q-2}}.$$

İspat. $0 < p < 1$ için $\| f(\ \cdot\ , p,q)\|_\infty = \sup_{x\in(0,1]}\left[\dfrac{x^{p-1}(x-1)^{q-1}}{B(p,q)}\right] = \infty$ olur.

$p,q > 1$ olsun. $\dfrac{df(x,p,q)}{dx} = \dfrac{x^{p-2}(1-x)^{q-2}}{B(p,q)}\left[-(p+q-2)x+(p-1)\right]$ dır. $\dfrac{df(x,p,q)}{dx} = 0$ olması için gerek ve yeter şart $x_0 = (p-1)/(p+q-2)$ olmasıdır. Ayrıca $(0,x_0)$ aralığında $\dfrac{df(x,p,q)}{dx} > 0$ ve $(x_0,1)$ aralığında $\dfrac{df(x,p,q)}{dx} < 0$ dır. Böylece

$$\| f(\ \cdot\ , p,q)\|_\infty = f(x_0,p,q) = \frac{(p-1)^{p-1}(q-1)^{q-1}}{B(p,q)(p+q-2)^{p+q-2}}$$

elde edilir.(Barnett ve Dragomir, 2002).

Teorem 2.2.11. $(p,q)\in[1,\infty)\times[1,\infty)$ olmak üzere *X*, (p,q) parametreli bir beta rassal değişkeni olsun. Her $x\in[0,1]$ için

$$\left|\Pr(X \le x) - \frac{q}{p+q}\right| \le \left[\frac{1}{4}+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right]\times\frac{(p-1)^{p-1}(q-1)^{q-1}}{B(p,q)(p+q-2)^{p+q-2}}$$

$$\left|\Pr(X \ge x) - \frac{p}{p+q}\right| \le \left[\frac{1}{4}+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right]\times\frac{(p-1)^{p-1}(q-1)^{q-1}}{B(p,q)(p+q-2)^{p+q-2}}$$

ve özel olarak

$$\left|\Pr\left(X \le \frac{1}{2}\right) - \frac{q}{p+q}\right| \le \frac{1}{4}\cdot\frac{(p-1)^{p-1}(q-1)^{q-1}}{B(p,q)(p+q-2)^{p+q-2}}$$

$$\left|\Pr\left(X \ge \frac{1}{2}\right) - \frac{p}{p+q}\right| \le \frac{1}{4}\cdot\frac{(p-1)^{p-1}(q-1)^{q-1}}{B(p,q)(p+q-2)^{p+q-2}}$$

eşitsizlikleri vardır. İspatı Teorem 2.2.10'den kolayca elde edilir, detaylara girmiyoruz. (Barnett ve Dragomir, 2002).

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

Gerçel sayıların bir aralığı *I*; $a,b\in I$ ($a<b$); $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ *I* üzerinde konveks fonksiyonu *X* ile gösterilen rassal değişkenin olasılık fonksiyonu olsun. *X* rassal değişkeninin keyfi bir *x* noktasındaki *r*-inci momenti ($r\geq 0$) $M_r(x)=\int_a^b (u-x)^r f(u)du,\ r=0,1,2,\ldots$ şeklinde tanımlanır. Ayrıca *X*'in ortalama ve varyansları

$$M_0(x)=\int_a^b f(u)du\,,\ M_1(x)=\int_a^b (u-x)f(u)du\,,\ M_2(x)=\int_a^b (u-x)^2 f(u)du$$

biçiminde tanımlıdır. Belirli bir dağılımın *r*-inci momenti referans alınırken bu dağılım için kullanılan integralin yakınsak olduğunu varsayacağız.
$w:[a,b]\to\mathbb{R}$ negatif olmayan ve $[a,b]$ üzerinde sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$\mu_w(f)=\int_a^b w(t)f(t)dt$$

tanımlamasını yapalım.
Barnett ve Drogomir sürekli bir rassal değişkenin varyans ve beklenen değeri için çeşitli sınırlar elde ettiler. $m_1=\int_a^b uf(u)du$ olmak üzere sonlu bir aralık üzerinde

$$\int_a^b (t-m_1)^2 f(t)dt+(m_1-b)(m_1-a)=\int_a^b (t-a)(t-b)f(t)dt$$

özdeşliğini tanımladılar. (Barnett ve Drogomir, 2001).

Tanım 3.1.1. $s\in(0,1]$ bir gerçel sayı olsun. $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ fonksiyonu her $x,y\in[0,\infty)$ ve $\alpha\in[0,1]$ için $f(\alpha x+(1-\alpha)y)\leq\alpha^s f(x)+(1-\alpha)^s f(y)$ oluyorsa *f* ye ikinci tür *s*-konveks fonksiyon denir ya da *f*, K_s^2 sınıfına aittir denir. (Hudzik ve Maligranda, 1994).

Drogomir ve Fitzpatrick 1999'da, Hadamard eşitsizliğinin bir varyantını ikinci tür *s*-konveks fonksiyonlar için ispatladı. (Drogomir ve Fitzpatrick, 1999.)

Teorem 3.1.2. $s\in(0,1]$ ve $a,b\in[0,\infty)$, $a<b$ olmak üzere $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ fonksiyonunun ikinci tür *s*-konveks olduğunu kabul edelim. $f\in L^1([a,b])$ ise, bu durumda aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$2^{s-1}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le\frac{f(a)+f(b)}{s+1}. \tag{3.1}$$

(3.1) de ikinci eşitsizlikteki $k=\dfrac{1}{s+1}$ sabiti mümkün olan en iyi değerdir. (Drogomir ve Fitzpatrick, 1999.)

Lemma 3.1.3. *X*, bir *f* olasılık yoğunluk fonksiyonunun rassal değişkeni olsun. $f:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ fonksiyonu I^o üzerinde iki kez diferansiyellenebilir ve $a,b\in I^o$, $a<b$ olsun. f'' fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde mutlak sürekli ve $w:[a,b]\to\mathbb{R}$ negatif olmayan, $[a,b]$ üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki özdeşlik sağlanır:

$$M_1(x)f'(x)+M_0f(x)-\mu_w(f)=\int_a^b P_w(x,t)f''(t)dt. \tag{3.2}$$

Burada $P_w(x,t)$ çekirdeği,

$$P_w(x,t):=\begin{cases}\int_a^t(u-t)w(u)du, & a\le t<x \quad \text{ise}\\ \int_b^t(u-t)w(u)du, & x\le t\le b \quad \text{ise}\end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır. (Sarikaya ve diğ, 2014).

Teorem 3.1.4. Lemma 3.1.3'ün tüm şartlarının sağlandığını kabul edelim. Buna ilave olarak $|f''|$ fonksiyonunun $[a,b]$ üzerinde s-konveks olduğunu varsayalım. Bu durumda her $x\in[a,b]$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned}&\left|M_1(x)f'(x)+M_0f(x)-\mu_w(f)\right|\\ &\le\frac{\|w\|_{[a,x],\infty}}{2(b-a)^s}\left((b-a)^{s+3}B_{\frac{x-a}{b-a}}(3,s+1)\left|f''(a)\right|+\frac{(x-a)^{s+3}}{s+3}\left|f''(b)\right|\right)\\ &+\frac{\|w\|_{[x,b],\infty}}{2(b-a)^s}\left(\frac{(b-x)^{s+3}}{s+3}\left|f''(a)\right|+(b-x)^{s+3}B_{\frac{b-x}{b-a}}(3,s+1)\left|f''(b)\right|\right)\end{aligned}$$

$$\leq \frac{\|w\|_{[a,b],\infty}}{2(b-a)^s}\left[\left((b-a)^{s+3} B_{\frac{x-a}{b-a}}(3,s+1)+\frac{(b-x)^{s+3}}{s+3}\right)\left|f''(a)\right|\right.$$

$$\left.+\left((b-a)^{s+3} B_{\frac{b-x}{b-a}}(3,s+1)+\frac{(x-a)^{s+3}}{s+3}\right)\left|f''(b)\right|\right].$$

Burada $s\in(0,1]$, $\|w\|_\infty=\sup_{t\in[a,b]}|w(t)|$ ve B_x,

$$B_x(m,n)=\int_0^x t^{m-1}(1-t)^{n-1}dt\,,\quad m,n>0\,,\quad 0<x\leq 1$$

biçiminde tanımlanan tam olmayan beta fonksiyonudur.

İspat. (3.2) özdeşliğinden, modül özelliklerinden ve *w* dönüşümünün sınırlı oluşundan

$$\left|M_1(x)f'(x)+M_0 f(x)-\mu_w(f)\right|$$

$$\leq \frac{\|w\|_{[a,x],\infty}}{2}\int_a^x (t-a)^2\left|f''(t)\right|dt+\frac{\|w\|_{[x,b],\infty}}{2}\int_a^x (b-t)^2\left|f''(t)\right|dt$$

yazılır. $\left|f''(t)\right|$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde s-konveks olduğundan

$$\left|f''\left(\frac{b-t}{b-a}a+\frac{t-a}{b-a}b\right)\right|\leq\left(\frac{b-t}{b-a}\right)^s\left|f''(a)\right|+\left(\frac{t-a}{b-a}\right)^s\left|f''(b)\right| \tag{3.3}$$

eşitsizliğini yazarız. (3.3) den,

$$\left|M_1(x)f'(x)+M_0 f(x)-\mu_w(f)\right|$$

$$\leq \frac{\|w\|_{[a,x],\infty}}{2(b-a)^s}\left((b-a)^{s+3}B_{\frac{x-a}{b-a}}(3,s+1)\left|f''(a)\right|+\frac{(x-a)^{s+3}}{s+3}\left|f''(b)\right|\right)$$

$$+\frac{\|w\|_{[x,b],\infty}}{2(b-a)^s}\left(\frac{(b-x)^{s+3}}{s+3}\left|f''(a)\right|+(b-x)^{s+3}B_{\frac{b-x}{b-a}}(3,s+1)\left|f''(b)\right|\right)$$

$$\leq \frac{\|w\|_{[a,b],\infty}}{2(b-a)^s}\left[\left((b-a)^{s+3} B_{\frac{x-a}{b-a}}(3,s+1)+\frac{(b-x)^{s+3}}{s+3}\right)\left|f''(a)\right|\right.$$

$$\left.+\left((b-a)^{s+3} B_{\frac{b-x}{b-a}}(3,s+1)+\frac{(x-a)^{s+3}}{s+3}\right)\left|f''(b)\right|\right]$$

elde ederiz ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1.5. Teorem 3.1.4'deki aynı kabuller altında $w(x)=1$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|\left(\frac{a+b}{2}-x\right)f'(x)+f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$

$$\leq \frac{1}{2(b-a)^s}\left[\left((b-a)^{s+3}B_{\frac{x-a}{b-a}}(3,s+1)+\frac{(b-x)^{s+3}}{s+3}\right)\left|f''(a)\right|\right.$$

$$\left.+\left((b-a)^{s+3}B_{\frac{b-x}{b-a}}(3,s+1)+\frac{(x-a)^{s+3}}{s+3}\right)\left|f''(b)\right|\right]. \tag{3.4}$$

Uyarı 3.1.6. (3.4) eşitsizliğinde $s=1$ alınırsa

$$\left|\left(\frac{a+b}{2}-x\right)f'(x)+f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$

$$\leq \frac{1}{2(b-a)^2}\left[\left((b-a)\frac{(x-a)^3}{3}+\frac{(b-x)^4-(x-a)^4}{4}\right)\left|f''(a)\right|\right.$$

$$\left.+\frac{(x-a)^4-(b-x)^4}{4}+(b-a)\frac{(b-x)^3}{3}\right]$$

olur. Bu eşitsizlik Sarıkaya tarafından 2014'de ispatlanmıştır.

Sonuç 3.1.7. Teorem 3.1.4'deki aynı kabuller altında $w(x)=1$ ve $x=(a+b)/2$ iken aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$

$$\leq (b-a)^3\left(B_{\frac{1}{2}}(3,s+1)+\frac{1}{(s+3)2^{s+3}}\right)\left(\frac{\left|f''(a)\right|+\left|f''(b)\right|}{2}\right). \tag{3.5}$$

Uyarı 3.1.8. (3.5) eşitsizliğinde $s=1$ alırsak,

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|\leq\frac{(b-a)^2}{24}\left(\frac{\left|f''(a)\right|+\left|f''(b)\right|}{2}\right)$$

eşitsizliği elde edilir. (Sarıkaya, 2012).

Teorem 3.1.8. Lemma 3.1.3'ün tüm şartlarının sağlandığını kabul edelim. Buna ilave olarak $[a,b]$ üzerinde, $q>1$ için $|f''|^q$ s-konveks fonksiyon olsun. Bu durumda her $x\in[a,b]$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|M_1(x)f'(x)+M_0 f(x)-\mu_w(f)\right|$$

$$\leq \frac{\|w\|_{[a,x],\infty}}{2(b-a)^{\frac{s}{q}}}\frac{(x-a)^{2+\frac{1}{p}}}{(2p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\frac{(b-a)^{s+1}-(b-x)^{s+1}}{s+1}|f''(a)|^q+\frac{(x-a)^{s+1}}{s+1}|f''(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{\|w\|_{[x,b],\infty}}{2(b-a)^{\frac{s}{q}}}\frac{(b-x)^{2+\frac{1}{p}}}{(2p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\frac{(b-x)^{s+1}}{s+1}|f''(a)|^q+\frac{(b-a)^{s+1}-(x-a)^{s+1}}{s+1}|f''(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{\|w\|_{[a,b],\infty}}{2(b-a)^{\frac{s}{q}}(2p+1)^{\frac{1}{p}}}\left\{(x-a)^{2+\frac{1}{p}}\left[\frac{(b-a)^{s+1}-(b-x)^{s+1}}{s+1}|f''(a)|^q+\frac{(x-a)^{s+1}}{s+1}|f''(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+(b-x)^{2+\frac{1}{p}}\left[\frac{(b-x)^{s+1}}{s+1}|f''(a)|^q+\frac{(b-a)^{s+1}-(x-a)^{s+1}}{s+1}|f''(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\}.$$

Burada $s\in(0,1]$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve $\|w\|_\infty=\sup_{t\in[a,b]}|w(t)|$ dir.

İspat. Teorem 3.1.4'ün ispatına benzer yöntemlerle ve Hölder eşitsizliğinden

$$\left|M_1(x)f'(x)+M_0 f(x)-\mu_w(f)\right|$$

$$\leq \frac{\|w\|_{[a,x],\infty}}{2}\int_a^x (t-a)^2\,|f''(t)|\,dt+\frac{\|w\|_{[x,b],\infty}}{2}\int_x^b (b-t)^2\,|f''(t)|\,dt$$

$$\leq \frac{\|w\|_{[a,x],\infty}}{2}\left(\int_a^x (t-a)^{2p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^x |f''(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{\|w\|_{[x,b],\infty}}{2}\left(\int_x^b (b-t)^{2p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_x^b |f''(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

yazarız. $|f''(t)|^q$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde s-konveks olduğundan

$$\left|f''\left(\frac{b-t}{b-a}a+\frac{t-a}{b-a}b\right)\right|^q \leq \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^s|f''(a)|^q+\left(\frac{t-a}{b-a}\right)^s|f''(b)|^q \tag{3.6}$$

eşitsizliği vardır. Böylece (3.6) dan

$$\left|M_1(x)f'(x)+M_0 f(x)-\mu_w(f)\right|$$

$$\leq \frac{\|w\|_{[a,x],\infty}}{2}\frac{(x-a)^{2+\frac{1}{p}}}{(2p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_a^x\left[\left(\frac{b-t}{b-a}\right)^s|f''(a)|^q+\left(\frac{t-a}{b-a}\right)^s|f''(b)|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{\|w\|_{[x,b],\infty}}{2}\frac{(b-x)^{2+\frac{1}{p}}}{(2p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_x^b\left[\left(\frac{b-t}{b-a}\right)^s|f''(a)|^q+\left(\frac{t-a}{b-a}\right)^s|f''(b)|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\frac{\|w\|_{[a,x],\infty}}{2(b-a)^{\frac{s}{q}}}\frac{(x-a)^{2+\frac{1}{p}}}{(2p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\frac{(b-a)^{s+1}-(b-x)^{s+1}}{s+1}|f''(a)|^q+\frac{(x-a)^{s+1}}{s+1}|f''(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{\|w\|_{[x,b],\infty}}{2(b-a)^{\frac{s}{q}}}\frac{(b-x)^{2+\frac{1}{p}}}{(2p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\frac{(b-x)^{s+1}}{s+1}|f''(a)|^q+\frac{(b-a)^{s+1}-(x-a)^{s+1}}{s+1}|f''(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq\frac{\|w\|_{[a,b],\infty}}{2(b-a)^{\frac{s}{q}}(2p+1)^{\frac{1}{p}}}\left\{(x-a)^{2+\frac{1}{p}}\left[\frac{(b-a)^{s+1}-(b-x)^{s+1}}{s+1}|f''(a)|^q+\frac{(x-a)^{s+1}}{s+1}|f''(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+(b-x)^{2+\frac{1}{p}}\left[\frac{(b-x)^{s+1}}{s+1}|f''(a)|^q+\frac{(b-a)^{s+1}-(x-a)^{s+1}}{s+1}|f''(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\}.$$

Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1.9. Teorem 3.1.8’in şartları altında $w(x)=1$ alınırsa,

$$\left|\left(\frac{a+b}{2}-x\right)f'(x)+f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$

$$\leq\frac{1}{2(b-a)^{\frac{s}{q}+1}(2p+1)^{\frac{1}{p}}}$$

$$\times\left\{(x-a)^{2+\frac{1}{p}}\left[\frac{(b-a)^{s+1}-(b-x)^{s+1}}{s+1}|f''(a)|^q+\frac{(x-a)^{s+1}}{s+1}|f''(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+(b-x)^{2+\frac{1}{p}}\left[\frac{(b-x)^{s+1}}{s+1}|f''(a)|^q+\frac{(b-a)^{s+1}-(x-a)^{s+1}}{s+1}|f''(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\}. \tag{3.7}$$

Uyarı 3.1.10. (3.7) de $s=1$ alınırsa,

$$\left|\left(\frac{a+b}{2}-x\right)f'(x)+f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$

$$\leq \frac{1}{2(b-a)^{\frac{1}{q}+1}(2p+1)^{\frac{1}{p}}}$$

$$\times\left\{(x-a)^{2+\frac{1}{p}}\left[\frac{(b-a)^2-(b-x)^2}{2}|f''(a)|^q+\frac{(x-a)^2}{2}|f''(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+(b-x)^{2+\frac{1}{p}}\left[\frac{(b-x)^2}{2}|f''(a)|^q+\frac{(b-a)^2-(x-a)^2}{2}|f''(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

elde edilir. (Sarıkaya, 2014).

Sonuç 3.1.11. Teorem 3.1.8'in şartları altında $w(x)=1$, $x=(a+b)/2$ alınırsa

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{8(4p+2)^{\frac{1}{p}}(s+1)^{\frac{1}{q}}}$$

$$\times\left\{\left[\left(1-\frac{1}{2^{s+1}}\right)|f''(a)|^q+\frac{1}{2^{s+1}}|f''(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left[\frac{1}{2^{s+1}}|f''(a)|^q+\left(1-\frac{1}{2^{s+1}}\right)|f''(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\}. \tag{3.8}$$

Uyarı 3.1.12. (3.8) eşitsizliğinde $s=1$ alınırsa

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{16(2p+1)^{\frac{1}{p}}}\left\{\left[\frac{3|f''(a)|^q+|f''(b)|^q}{4}\right]^{\frac{1}{q}}+\left[\frac{|f''(a)|^q+3|f''(b)|^q}{4}\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

elde edilir. (Sarıkaya, 2012)

Teorem 3.1.13. Lemma 3.1.3 ün tüm şartlarının sağlandığını kabul edelim. Buna ilave olarak $[a,b]$ üzerinde, $q>1$ için $|f''|^q$ s-konveks fonksiyon olsun. Bu durumda her $x\in[a,b]$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|M_1(x)f'(x)+M_0 f(x)-\mu_w(f)\right|$$
$$\leq \frac{\|w\|_{[a,b],\infty}}{2(2p+1)^{\frac{1}{p}}}(b-a)^{\frac{1}{q}}\left[(x-a)^{2p+1}+(b-x)^{2p+1}\right]^{\frac{1}{p}}\left[\frac{|f''(a)|^q+|f''(b)|^q}{s+1}\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Burada $s\in(0,1]$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve $\|w\|_\infty=\sup_{t\in[a,b]}|w(t)|$ dir.

İspat. Lemma 3.1.3'ten, (3.6) dan, modül özelliklerinden ve Hölder eşitsizliğinden

$$\left|M_1(x)f'(x)+M_0 f(x)-\mu_w(f)\right|$$
$$\leq\left[\int_a^x\left(\int_a^t(u-t)w(u)du\right)^p dt+\int_x^b\left(\int_t^b(u-t)w(u)du\right)^p dt\right]^{\frac{1}{p}}\left(\int_t^b|f''(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq\left[\frac{\|w\|_{[a,x],\infty}^p}{2^p}\frac{(x-a)^{2p+1}}{2p+1}+\frac{\|w\|_{[x,b],\infty}^p}{2^p}\frac{(b-x)^{2p+1}}{2p+1}\right]^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b|f''(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq\left[\frac{\|w\|_{[a,x],\infty}^p}{2^p}\frac{(x-a)^{2p+1}}{2p+1}+\frac{\|w\|_{[x,b],\infty}^p}{2^p}\frac{(b-x)^{2p+1}}{2p+1}\right]^{\frac{1}{p}}$$
$$\times\left(\int_a^b\left[\left(\frac{b-t}{b-a}\right)^s|f''(a)|^q+\left(\frac{t-a}{b-a}\right)^s|f''(b)|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq\frac{\|w\|_{[a,b],\infty}}{2(2p+1)^{\frac{1}{p}}}(b-a)^{\frac{1}{q}}\left[(x-a)^{2p+1}+(b-x)^{2p+1}\right]^{\frac{1}{p}}\left[\frac{|f''(a)|^q+|f''(b)|^q}{s+1}\right]^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir.

Sonuç 3.1.14. Teorem 3.1.13'deki kabuller altında $w(x)=1$ alınırsa

$$\left|\left(\frac{a+b}{2}-x\right)f'(x)+f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$

$$\leq \frac{1}{2(2p+1)^{\frac{1}{p}}(b-a)^{\frac{1}{p}}}\left[(x-a)^{2p+1}-(b-x)^{2p+1}\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left[\frac{|f''(a)|^q+|f''(b)|^q}{s+1}\right]^{\frac{1}{q}}. \tag{3.9}$$

Sonuç 3.1.15. Teorem 3.1.13'deki kabuller altında $w(x)=1$, $x=(a+b)/2$ alınırsa

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|\leq\frac{(b-a)^2}{8(2p+1)^{\frac{1}{p}}}\times\left[\frac{|f''(a)|^q+|f''(b)|^q}{s+1}\right]^{\frac{1}{q}}. \tag{3.10}$$

Uyarı 3.1.16. (3.10) da $s=1$ alınırsa

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|\leq\frac{(b-a)^2}{8(2p+1)^{\frac{1}{p}}}\times\left[\frac{|f''(a)|^q+|f''(b)|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}}$$

olur. (Sarıkaya, 2012)

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Trapezoid eşitsizliği ve Ostrowski eşitsizliği eşitsizliği son zamanlarda matematiğin birçok alanında oldukça yaygın bir şekilde kullanılmaya başlanan ve bir çok araştırmacının da ilgisini çekmiştir. Bu alanlardan birisi de olasılık ve istatistiktir. Buradaki amacımız bu eşitsizliklerin olasılık teorisinde ne tür uygulamalar yapılabileceğini göstermektir. Ayrıca bir çok yeni sonuçlar elde ederek bu sonuçları da uluslar arası prestijli bir dergide de yayınlattık. Lemma 3.1.3’de verdiğimiz özdeşliği ve s-konveks fonksiyonları kullanılarak elde ettiğimiz sonuçların daha da genelleştirilmesi özellikle h-konveks fonksiyonlar içinde yapılabilir. Diğer konvekslik türleri için de yeni eşitsizlikler elde edilebilir. Bu anlamda bu çalışmalar açık problem olarak okuyuculara ve araştırmacılara bırakılmıştır.

5. KAYNAKLAR

Barnett N.S., Cerone P., Dragomir S.S. and Roumeliotis J., *Some inequalities for the dispersion of a random variabl ewhose pdf is defined on a finite interval*, J. Ineq. Pure Appl. Math, 2 (1). **(2001)**.

Barnett N.S. and Dragomir S.S., *Some inequalities for probablity ,expectation and variance of a random variables defined over a finite interval*, Pergamon Computers And Math. With App., 43. **(2002)**.

Breckner W. W., *Stetigkeitsaussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer funktionen in topologischen linearen Raumen*, Pupl. Inst. Math. 23, **(1978)**, 13-20.

Carter M. and Brunt B., *The Lebesque-Stieltjes integral: a partical introduction*, Springer-Verlag. **(2000)**, 55-57.

Cengiz N., *Olasılık*, Ege Ünv. Yay. **(1984)**, 6-13.

Hudzik H., Maligranda L., *Some remarks on s-convex functions*, Aequationes Math., 48 **(1994)**, 100-111.

Mitrinovic D. S., *Analytic inequalities*, Springer-Verlag, **(1970)**, 48-50.

Pecaric J, Proschan F. And Tong T. L., *Convex functions, partial orderings and statistical applications*, Academic Press, Inc., **(1992)**, 92-95.

Sarıkaya M. Z., Yaldız H. And Budak H., *Some inequalities associated with the for the probability density function*, Basımda, **(2014)**.

Sarıkaya M. Z. And Gökce L.,*Some inequalities for the probablity density funcions using s-convex function*, Caspian Journal of Applied Math., Basımda, **(2015)**.

6. EKLER

EK-1. YAYIN BİLGİSİ

Bu tezin oluşumunda önemli rol oynayan s-konveks fonksiyonun kullanıldığı olasılık yoğunluk fonksiyonu için elde ettiğimiz bazı eşitsizlikler aşağıdaki dergide belirtildiği gibi basım aşamasındadır:

1) M. Z. Sarikaya and L. Gokce, Some inequalities for the probablity density funcions using s-convex function, Caspian Journal of Applied Math. Basımda, **(2015)**.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: Gökçe, Lokman
Uyruğu	:T.C
Doğum tarihi ve yeri	:15.05.1982, Adana
Telefon	:0505 5827632
Faks	:
E-posta	:lokmangokce@gmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek Lisans	Düzce Üniversitesi/Matematik Bölümü	2015
Lisans	Atatürk Üniversitesi/Matematik Bölümü	2002
Lise	Borsa Lisesi (Adana) 2013	

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2009-2011	Özel Aziziye Eğitim Kurumları	Mat. Öğr.
2011-2015	Özel Düzce Fatih Eğitim Kurumları	Mat. Öğr.

Yabancı Dil

İngilizce (YDS: 36,25)

Yayınlar

1. M. Z. Sarikaya and L. Gokce, Some inequalities for the probablity density funcions using s-convex function, CaspianJournal of Applied Math., Basımda, **(2015)**

2. L. Gökçe, Ulusal ve Uluslararası Olimpiyatlar İçin Düzlem Geometri Problemleri, Altınnokta Yayınevi.,2011,