T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ELİPTİK-SCHRÖDINGER DİFERANSİYEL VE FARK DENKLEMLERİ İÇİN LOKAL OLMAYAN SINIR-DEĞER PROBLEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MECRA ESER

AĞUSTOS 2015

DÜZCE

KABUL VE ONAY BELGESİ

Mecra ESER tarafından hazırlanan "ELİPTİK–SCHRÖDINGER DİFERANSİYEL VE FARK DENKLEMLERİ İÇİN LOKAL OLMAYAN SINIR–DEĞER PROBLEMLERİ" isimli Lisansüstü tez çalışmam, Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 14 /08/2015 tarih ve 2015/ sayılı kararı ile oluşturulan jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Üye
(Tez Danışmanı)
Yrd. Doç. Dr. Yıldırım ÖZDEMİR
Düzce Üniversitesi

Üye
Doç. Dr. İlhame AMİRALİ
Düzce Üniversitesi

Üye
Yrd. Doç. Dr. Yusuf CESUR
Abant İzzet Baysal Üniversitesi

Tezin Savunulduğu Tarih : 14.08.2015

ONAY

Bu tez ile Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Mecra ESER'in Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans derecesini almasını onaylamıştır.

Prof. Dr. Haldun MÜDERRİSOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

14/08/2015

Mecra ESER

Sevgili Aileme…

TEŞEKKÜR

Başlamış olduğum bu yolda, en başından sonuna dek tüm görüşlerini paylaşan, engin bilgi ve tecrübelerini hiçbir zaman esirgemeyen, bilim tutkusunu içinde barındıran, tüm sorularıma sabır ile yanıt veren ve her türlü konuda desteğini eksik etmeyerek, yanımda olduğunu hissettiğim abi niteliğindeki saygıdeğer hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Yıldırım ÖZDEMİR'e teşekkürü bir borç bilirim.

Tüm görüşlerini ve bilgisini herkes ile paylaşmaktan sakınmayan, bilgi ve deneyimleriyle sonuca ulaşmamda yol gösteren, herkese eşit tavrı ve işine tutku ile bağlı olan, hayatın her karesinde bana bir baba gibi sahip çıkan, kişiliği, tavırları ve edindiğim tecrübelerinden dolayı kendisine minnettar olduğum sayın Prof. Dr. Allaberen ASHYRALYEV'e çok teşekkür ederim.

Çalışmalarım boyunca yardımlarını esirgemeyen jüri üyesi, sayın Doç. Dr. İlhame AMİRALİ'ye çok teşekkür ederim.

Ayrıca diğer jüri üyesi sayın Yrd. Doç. Dr. Yusuf CESUR hocama göstermiş olduğu ilgi ve yol gösterici yardımlarından ötürü çok teşekkür ederim.

Tez dönemim boyunca moralimi en üst düzeyde tutan ve kendilerinden her fırsatta güç aldığım aileme müteşekkirim.

14 Ağustos 2015 **Mecra ESER**

İÇİNDEKİLER **Sayfa**

ŞEKİL LİSTESİ

ÖZET

ELİPTİK-SCHRÖDINGER DİFERANSİYEL VE FARK DENKLEMLERİ İÇİN LOKAL OLMAYAN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Mecra ESER
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Yıldırım ÖZDEMİR
Ağustos 2015, 60 sayfa

H Hilbert uzayında öz-eşlenik pozitif tanımlı A operatörlü diferansiyel denklemleri için lokal olmayan sınır-değer problemi

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u(t)}{dt^2} + Au(t) = g(t), (0 \leq t \leq 1), \\ \\ i\dfrac{du(t)}{dt} - Au(t) = f(t), (-1 \leq t \leq 0), \\ \\ u(1) = u(-1) + \mu \end{cases}$$

ele alınmıştır. Operatör yaklaşımı uygulanarak bu lokal olmayan sınır-değer problemi için kararlılık kestirimleri elde edilmiştir. Bu lokal olmayan sınır-değer problemlerinin yaklaşık çözümleri için fark şemalarının kararlılığı gösterilmiştir. Uygulamalarda bu sonuç, eliptik-Schrödinger denklemlerin fark şemalarının çözümü için kararlılık kestirimlerini elde etmemizi sağlamıştır. Bu fark şemalarının çözümü için yapılan teorik sonuçların doğruluğu, sayısal denemelerde desteklenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Eliptik-Schrödinger Denklem, Fark Şemaları, Kararlılık.

ABSTRACT

NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR ELLIPTIC-SCHRÖDINGER DIFFERENTIAL AND DIFFERENCE EQUATIONS

Mecra ESER
Duzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Assit. Prof. Yildirim OZDEMIR
August 2015, 60 pages

The abstract nonlocal boundary value problem

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u(t)}{dt^2} + Au(t) = g(t), (0 \le t \le 1), \\ \\ i\dfrac{du(t)}{dt} - Au(t) = f(t), (-1 \le t \le 0), \\ \\ u(1) = u(-1) + \mu \end{cases}$$

for differential equation in a Hilbert space H with the self-adjoint positive definite operator A is considered. Applying the operator approach the stability estimates for solution of this nonlocal boundary value problem are obtained. The stability of difference schemes for approximately solving this nonlocal boundary value problem is presented. In applications, this abstract results permit to obtain the stability estimates for the solution of the difference schemes for elliptic-Schrödinger equations. The theoretical statements for the solution of this difference schemes are supported by the results of numerical experiments.

Keywords: Elliptic-Schrödinger Equation, Difference Schemes, Stability.

EXTENDED ABSTRACT

NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR ELLIPTIC-SCHRÖDINGER DIFFERENTIAL EQUATIONS

Mecra ESER
Düzce University
Graduade School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Assist. Prof. Yildirim OZDEMIR
August 2015, 60 pages

1. INTRODUCTION:

The abstract nonlocal boundary value problem

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u(t)}{dt^2} + Au(t) = g(t), (0 \le t \le 1), \\ \\ i\dfrac{du(t)}{dt} - Au(t) = f(t), (-1 \le t \le 0), \\ \\ u(1) = u(-1) + \mu \end{cases}$$

for differential equation in a Hilbert space H with the self-adjoint positive definite operator A is considered. Applying the operator approach the stability estimates for solution of this nonlocal boundary value problem are obtained. The stability of difference schemes for approximately solving this nonlocal boundary value problem is presented. In applications, this abstract results permit to obtain the stability estimates for the solution of the difference schemes for elliptic-Schrödinger equations. The theoretical statements for the solution of this difference schemes are supported by the results of numerical experiments.

Methods of solutions of nonlocal boundary value problems for partial differential equations and partial differential equations of mixed type have been studied extensively by many researches (see [Salakhitdinov, M. S., 1974], [Djuraev, T. D., 1979], [Bazarov, D. and Soltanov, H., 1995], [Glazatov, S. N., 1998], [Ashyralyev, A. and Aggez, N., 2004], [Ashyralyev, A. and Ozdemir, Y., 2007], [Ashyralyev, A. and Gercek, O., 2008], [Ashyralyev, A. and Sirma, A., 2008], [Ashyralyev, A. and Yildirim, O., 2010], [Ashyralyev, A. and Hicdurmaz, B., 2011], [Ozdemir, Y. and Kucukunal, M., 2012], [Ozdemir, Y. and Alp, M., 2014], [Ozdemir, Y. and Eser, M., 2014] and the references given therein).

2. MATERIAL AND METHODS:

It is known that certain problems of modern physics and technology can be effectively described in terms of nonlocal problems for partial differential equations. These nonlocal conditions arise mainly when the data on the boundary cannot be measured directly.

3. RESULTS AND DISCUSSIONS:

This work is devoted to the study of the stability of the nonlocal boundary value problem for the elliptic-Schrödinger differential and difference equations. The following original results are obtained:

- The abstract theorem on the stability of the nonlocal boundary value problem for elliptic-Schrödinger equation in a Hilbert space is established.
- The stability inequalities for the solutions of the two nonlocal boundary value problems for elliptic-Schrödinger equations are obtained.
- The first and second order of accuracy difference schemes for the approximate solutions of the nonlocal boundary problem for elliptic-Schrödinger differential equations are presented.
- The abstract theorems on stability of the first and second order of accuracy difference schemes for the approximate solutions of the nonlocal boundary problem for elliptic-Schrödinger differential equation are given without proof.
- The theoretical statements of these difference schemes are supported by the results of numerical experiments.
- A full paper proceeding from this study is presented in an international conference.
- Two papers from this work are published in international journals.

4. CONCLUSION AND OUTLOOK:

Our goal in this work is to investigate the stability of the nonlocal boundary value problems for equations of elliptic-Schrödinger type.

1 GİRİŞ

Akışkanlar mekaniğindeki birçok problemde, ısı akışı, füzyon süreci, matematiksel biyoloji, modern fiziğin ve teknolojinin bazı problemlerinin etkili bir biçimde kısmi diferansiyel denklemler için lokal olmayan sınır-değer problemleri üzerinden ifade edilebilir olduğu bilinmektedir. Kısmi diferansiyel denklemler ve karma tipli kısmi diferansiyel denklemler için lokal olmayan sınır-değer problemlerinin çözüm yöntemleri üzerine, kapsamlı olarak bir çok araştırmacı tarafından çeşitli çalışmalar yapılmıştır. (bkz. [Salakhitdinov, M. S., 1974], [Djuraev, T. D., 1979], [Bazarov D. ve Soltanov H., 1995], [Glazatov, S. N., 1998], [Ashyralyev, A. ve Aggez, N., 2004], [Ashyralyev, A. ve Ozdemir, Y., 2007], [Ashyralyev, A. ve Gercek, O., 2008], [Ashyralyev, A. ve Sirma, A., 2008], [Ashyralyev, A. ve Yildirim, O., 2010], [Ashyralyev, A. ve Hicdurmaz, B., 2011], [Ozdemir, Y. ve Kucukunal, M., 2012], [Ozdemir, Y. ve Alp, M., 2014], [Ozdemir, Y. ve Eser, M., 2014] detaylar kaynaklar kısmında verilmiştir).

Bu çalışmadaki amacımız eliptik-Schöringer tipindeki denklemler için lokal olmayan sınır-değer problemlerinin kararlılığını incelemektir.

Bilindiği gibi bazı eliptik-Schrödinger denklemler için lokal olmayan sınır-değer problemleri analitik yöntemler ile çözülebilmektedir. Bunlardan bazıları, Fourier serileri yöntemi, Fourier dönüşümü yöntemi ve Laplace dönüşümü yöntemidir. Şimdi, bunlara birer örnek verelim.

İlk olarak eliptik-Schrödinger denklemi için

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = (-2 + t^2)\sin x, 0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq \pi, \\ iu_t - u_{xx} = (2i + t)t\sin x, -1 \leq t \leq 0, 0 \leq x \leq \pi, \\ u(1, x) = u(-1, x), 0 \leq x \leq \pi, \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, -1 \leq t \leq 1 \end{cases} \tag{1.1}$$

lokal olmayan sınır-değer problemini ele alalım.

(1.1) probleminin çözümü için, değişkenlerine ayırma yöntemini, ya da bilinen diğer adıyla, Fourier serileri yöntemini kullanalım. Öncelikle,

$$u(t, x) = v(t, x) + w(t, x)$$

şeklinde yazılır. Burada homojen kısmın çözümü için $v(t, x)$,

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = 0, 0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq \pi, \\ iv_t - v_{xx} = 0, -1 \leq t \leq 0, 0 \leq x \leq \pi, \\ v(1, x) = v(-1, x), 0 \leq x \leq \pi, \\ v(t, 0) = v(t, \pi) = 0, -1 \leq t \leq 1 \end{cases} \tag{1.2}$$

probleminin çözümü ve homojen olmayan kısmın çözümü $w\left(t,x\right)$ ise,

$$\begin{cases} w_{tt}-w_{xx}=\left(-2+t^{2}\right)\sin x, 0\leq t\leq 1, 0\leq x\leq \pi, \\ iw_{t}-w_{xx}=(2i+t)t\sin x, -1\leq t\leq 0, 0\leq x\leq \pi, \\ w(1,x)=w\left(-1,x\right), 0\leq x\leq \pi, \\ w(t,0)=w(t,\pi)=0, -1\leq t\leq 1 \end{cases} \tag{1.3}$$

probleminin çözümüdür.

Öncelikle, (1.2) probleminin çözümünü bulalım. $-1\leq t\leq 0$ için

$$v(t,x)=T(t)X(x)\neq 0$$

olsun. Bu durumda,

$$iT'(t)X(x)-T(t)X''(x)=0$$

elde ederiz. Buradan,

$$i\frac{T'(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-k^{2}=\lambda$$

yazılır. Öyleyse,

$$X''(x)+k^{2}X(x)=0$$

şeklinde olur. Ayrıca $v\left(t,0\right)=v\left(t,\pi\right)=0$ koşullarından $X\left(0\right)=X\left(\pi\right)=0$ elde edilir. O halde,

$$X_{k}(x)=\sin kx, k=1,2,\cdots$$

bulunur. $T\left(t\right)$ fonksiyonunu elde etmek için ise,

$$iT'(t)+k^{2}T(t)=0$$

ya da

$$T'(t)-ik^{2}T(t)=0$$

birinci mertebeden adi diferansiyel denklemini yazabiliriz. Bu denklemin genel çözümü

$$T_{k}(t)=A_{k}e^{ik^{2}t}, k=1,2,\cdots$$

dir. Böylece,

$$v(t,x)=T_{k}(t)X_{k}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}A_{k}e^{ik^{2}t}\sin kx$$

bulunur.

Benzer şekilde $0\leq t\leq 1$ aralığı için

$$v(t,x)=T(t)X(x)\neq 0$$

olsun. Bu durumda,

$$-T''(t)X(x)-T(t)X''(x)=0$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan,

$$-\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -k^2 = \lambda$$

ve sınır koşullarından $X\,(0) = X\,(\pi) = 0$ ve dolayısıyla

$$X_k(x) = \sin kx, k = 1, 2, \cdots$$

olarak yazılır. $T(t)$ fonksiyonunu bulmak için

$$T''(t) - k^2 T(t) = 0$$

birinci mertebeden adi diferansiyel denklemini çözelim. Buradan,

$$T_k(t) = B_k e^{kt} + C_k e^{-kt}, k = 1, 2, \cdots$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla,

$$v(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(B_k e^{kt} + C_k e^{-kt}\right) \sin kx$$

olarak bulunur.

Lokal olmayan sınır koşulu ve süreklilik koşulları

$$\begin{cases} v(1,x) = v(-1,x), \\ v(0^+,x) = v(0^-,x), \\ v_t(0^+,x) = v_t(0^-,x) \end{cases}$$

kullanılarak

$$\begin{cases} v(0^+,x) = v(0^-,x) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (B_k + C_k) \sin kx = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin kx, \\ v_t(0^+,x) = v_t(0^-,x) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (kB_k - kC_k) \sin kx = \sum_{k=1}^{\infty} ik^2 A_k \sin kx, \\ v\,(1,x) = v\,(-1,x) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \left(B_k e^{k} + C_k e^{-k}\right) \sin kx = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-k^2} \sin kx \end{cases}$$

$k = 1, 2, \cdots$ için

$$A_k = B_k = C_k = 0 \text{ ve } A_1 = B_1 = \frac{1}{e - e^{-1}} = \frac{2}{\sinh 1}, C_1 = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$v(t,x) \equiv \frac{2}{\sinh 1} e^t \sin x$$

elde edilir.

Şimdi, homojen olmayan kısmın, yani; (1.3) probleminin çözümünü bulalım. Öncelikle $0 \leq t \leq 1$ aralığını inceleyelim:

$$w(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \sin kx$$

olsun. Buradan,

$$w_{tt} - w_{xx} + w = -\sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k^{''}(t) - k^2 A_k(t) \right] \sin kx = (-2+t^2) \sin x$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left[-A_k^{''}(t) + k^2 A_k(t) \right] \sin kx = (-2+t^2) \sin x$$

yazılabilir. Yukarıdaki denklem

$$\begin{cases} -A_1^{''}(t) + A_1(t) = -2+t^2, k=1 \\ -A_k^{''}(t) + k^2 A_k(t) = 0, k \neq 1 \end{cases}$$

olduğunu gösterir. Bu denklemin çözümü için,

$$A_1(t) = A_1^h(t) + A_1^{ö}(t)$$

şeklinde yazılır. Buradan,

$$\begin{cases} A_1(t) = B_1 e^t + C_1 e^{-t} + t^2, k=1 \\ A_k(t) = B_k e^{kt} + C_k e^{-kt}, k \neq 1 \end{cases}$$

olup

$$w(t,x) = \left(B_1 e^t + C_1 e^{-t} + t^2 \right) \sin x + \sum_{k=2}^{\infty} \left(B_k e^{kt} + C_k e^{-kt} \right) \sin kx, 0 \leq t \leq 1$$

bulunur. Şimdi $-1 \leq t \leq 0$ aralığını ele alalım. Burada,

$$i w_t - w_{xx} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(i A_k^{'}(t) + k^2 A_k(t) \right) \sin kx = (2i+t) t \sin x$$

yazılabilir. Yukarıdaki denklem

$$\begin{cases} i A_1^{'}(t) + A_1(t) = 2it + t^2, k=1 \\ i A_k^{'}(t) + k^2 A_k(t) = 0, k \neq 1 \end{cases}$$

olduğunu gösterir. Bu iki denklem çözülecek olursa,

$$\begin{cases} A_1(t) = D_1 e^{it} + t^2, k = 1 \\ \\ A_k(t) = D_k e^{ik^2 t}, k \neq 1 \end{cases}$$

elde edilir. Buradan,

$$w(t,x) = \left(D_1 e^{it} + t^2\right) \sin x + \sum_{k=2}^{\infty} D_k e^{ik^2 t} \sin kx, -1 \leq t \leq 0$$

bulunur. Lokal olmayan sınır koşul ve süreklilik koşulları

$$\begin{cases} w(1,x) = w(-1,x), \\ \\ w(0^+,x) = w(0^-,x), \\ \\ w_t(0^+,x) = w_t(0^-,x) \end{cases}$$

kullanılarak

$$\begin{cases} (B_1 e + C_1 e^{-1} + 1) \sin x + \sum_{k=2}^{\infty} \left(B_k e^k + C_k e^{-k}\right) \sin kx = (D_1 e^i + 1) \sin x \\ \\ + \sum_{k=2}^{\infty} D_k e^{ik^2} \sin kx, \\ \\ (B_1 + C_1) \sin x + \sum_{k=2}^{\infty} (B_k + C_k) \sin kx = D_1 \sin x + \sum_{k=2}^{\infty} D_k \sin kx, \\ \\ (B_1 - C_1) \sin x + \sum_{k=2}^{\infty} (kB_k - kC_k) \sin kx = iD_1 \sin x + \sum_{k=2}^{\infty} ik^2 D_k \sin kx, \end{cases}$$

denklemleri yazılır. Buradan, $k = 1, 2, \cdots$ için

$$B_k = C_k = D_k = 0 \text{ ve } B_1 = C_1 = D_1 = -\frac{2}{\sinh 1}$$

elde edilir. Böylece,

$$w(t,x) = \left(-\frac{2}{\sinh 1} e^t + t^2\right) \sin x$$

bulunur. Dolayısıyla, $\forall t \in [-1,1]$ için

$$u(t,x) = v(t,x) + w(t,x) = \frac{2}{\sinh 1} e^t \sin x + \left(-\frac{2}{\sinh 1} e^t + t^2\right) \sin x$$

olup

$$u(t,x) = t^2 \sin x$$

(1.1) probleminin çözümüdür.

Benzer şekilde aşağıdaki

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} + \sum\limits_{r=1}^{n} \alpha_r \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_r^2} = g(t,x), \\ x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \overline{\Omega}, 0 \leq t \leq T, \\ i\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \sum\limits_{r=1}^{n} \alpha_r \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_r^2} = f\,(t,x)\,, \\ x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \overline{\Omega}, -T \leq t \leq 0, \\ u_t(0_+, x) = u_t(0_-, x), x \in \overline{\Omega}, \\ u(T,x) = u(-T,x) + \varphi(x), x \in \overline{\Omega}, \\ u(t,x) = 0, x \in S \end{cases}$$

çok boyutlu eliptik-Schrödinger denklemleri için lokal olmayan sınır-değer probleminin çözümü elde edilir. Burada $\alpha_r > 0$ ve $f(t,x)$ $(t \in [0,T]\,, x \in \overline{\Omega})$, $g(t,x)$ $(t \in [-T,0]\,, x \in \overline{\Omega})$, $\varphi(x)$, $(x \in \overline{\Omega})$ verilmiş düzgün fonksiyonlardır. Ayrıca Ω, $\mathbb{R}^n$ n-boyutlu Öklit uzayında S ve $\overline{\Omega} = \Omega \cup S$ ile sınırlandırılmış olan bir birim açık küp olup,

$$(x : x = (x_1, \cdots, x_n)\,, 0 < x_k < 1, 1 \leq k \leq n)$$

dir.

Ancak, değişkenlerine ayırma yöntemi yalnızca sabit katsayılı denklemlerin çözümünde kullanılabilmektedir. Ne var ki, değişken katsayılı kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için en kullanışlı olan yolun fark yöntemi olduğu çok iyi bilinmektedir.

İkinci olarak, eliptik-Schrödinger denklemi için

$$\begin{cases} -u_{tt} - u_{xx} = (-2 - t^2)\, e^{-x}, 0 < t < 1, 0 < x < \infty, \\ iu_t - u_{xx} = (2i - t)\, te^{-x}, -1 < t < 0, 0 < x < \infty, \\ u(1,x) = u(-1,x), 0 \leq x < \infty, \\ u(t,0) = t^2, u_x\,(t,0) = -t^2, -1 \leq t \leq 1, \end{cases} \tag{1.4}$$

bir başka lokal olmayan sınır-değer problemini alalım. (1.4) problemi Laplace dönüşümü yöntemi (x'e göre) ile çözülebilir. İlk olarak, $0 \leq t \leq 1$ aralığını göz önüne alalım. Verilen denklemin her iki yanına Laplace dönüşümünü uygulayalım. Bu durumda,

$$-L\left\{u_{tt}\right\} - L\left\{u_{xx}\right\} = \left(-2 - t^2\right) L\left\{e^{-x}\right\}$$

veya

$$-L\{u\}_{tt} - s^2 L\{u\} + su(t,0) + u'(t,0) = \frac{(-2-t^2)}{s+1} + t^2 - st^2$$

olacaktır. Burada,

$$L\{u(t,x)\} = u(t,s)$$

olarak gösterelim. Böylece denklem,

$$u_{tt}(t,s) + s^2 u(t,s) = \frac{2+s^2t^2}{s+1}$$

ikinci mertebeden adi diferansiyel denklem haline gelir. Bu denkleme karşılık gelen homojen denklem

$$u_{tt}(t,s) + s^2 u(t,s) = 0$$

dir ve genel çözümü

$$u_h(t,s) = c_1 \sin st + c_2 \cos st$$

bulunur. Homojen olmayan denklemin özel çözümü ise,

$$u_{ö}(t,s) = \frac{t^2}{s+1}$$

dir. Böylece,

$$u(t,s) = c_1 \sin st + c_2 \cos st + \frac{t^2}{s+1}$$

elde edilir.

Şimdi, $-1 \leq t \leq 0$ durumunu inceleyelim. Denklemin her iki tarafının Laplace dönüşümü alınırsa,

$$iL\{u_t\} - L\{u_{xx}\} = L\left\{(2i-t)\,te^{-x}\right\}$$

elde edilir. O halde,

$$iu_t(t,s) - s^2 u(t,s) + su(t,0) + u'(t,0) = \frac{(2i-t)\,t}{s+1}$$

veya

$$iu_t(t,s) - s^2 u(t,s) = \frac{2it - s^2t^2}{s+1}$$

yazılır. Bu diferansiyel denklemine karşılık gelen homojen denklemin genel çözümü

$$u_h(t,s) = c_3 e^{-is^2t}$$

dır. Homojen olmayan denklemin özel çözümü ise

$$u_{ö}(t,s) = \frac{t^2}{s+1}$$

dir. Buradan,

$$u(t,s) = c_3 e^{-is^2t} + \frac{t^2}{s+1}$$

elde edilir. Lokal olmayan sınır ve süreklilik koşulları,

$$\begin{cases} u(1,s) = u(-1,s), \\ u(0^+,s) = u(0^-,s), \\ u'(0^+,s) = u'(0^-,s) \end{cases}$$

uygulanırsa,

$$\begin{cases} u(t,s) = c_1 \sin st + c_2 \cos st + \dfrac{t^2}{s+1}, 0 \le t \le 1, \\ u(t,s) = c_3 e^{-is^2 t} + \dfrac{t^2}{s+1}, -1 \le t \le 0 \end{cases}$$

olup, buradan $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ elde edilir. Böylece

$$u\left(t,s\right) = \frac{t^2}{s+1}$$

elde edilir. Son olarak, ters Laplace dönüşümü uygulanırsa, (1.4) probleminin çözümü

$$u\left(t,x\right) = L^{-1}\left\{u\left(t,s\right)\right\} = L^{-1}\left\{\frac{t^2}{s+1}\right\}$$

ya da

$$u\left(t,x\right) = t^2 e^{-x}$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde aşağıdaki

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} + \displaystyle\sum_{r=1}^{n} \alpha_r \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_r^2} = f(t,x), \\ x = (x_1, \cdots, x_n) \in \overline{\Omega}^+, 0 \le t \le T, \\ i\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \displaystyle\sum_{r=1}^{n} \alpha_r \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_r^2} = g(t,x), \\ x = (x_1, \cdots, x_n) \in \overline{\Omega}^+, -T \le t \le 0, \\ u(T,x) = u(-T,x) + \varphi(x), \\ u_t(0+,x) = u_t(0-,x) + \varphi(x),\ x \in \overline{\Omega}^+, \\ u(t,x) = 0,\ x \in S^+ \end{cases}$$

çok boyutlu eliptik-Schrödinger denklemleri için lokal olmayan sınır-değer probleminin çözümü elde edilebilir. Burada, $\alpha_r > 0$ ve $f(t,x)$ $(t \in [0,T],\ x \in \overline{\Omega})$, $g(t,x)$ $(t \in$

$[-T,0]\,,\ x\in\overline{\Omega}),\varphi(x),\psi(x)\ (x\in\overline{\Omega})$ verilmiş düzgün fonksiyonlardır. Ayrıca Ω, $\mathbb{R}^n$ n-boyutlu Öklit uzayında S ve $\overline{\Omega}=\Omega\cup S$ ile sınırlandırılmış olan bir birim açık küp olup,

$$(x:x=(x_1,\cdots,x_n)\,,0<x_k<1,1\leq k\leq n)$$

dir.

Ancak, Laplace dönüşümü yöntemi (bazı özel durumlar hariç) yalnızca sabit katsayılı denklemlerin çözümünde kullanılabilen klasik bir yöntemdir. Buna karşılık fark şemaları yöntemi, katsayıların sabit olmadığı durumlarda da kullanılabilen oldukça yararlı bir yöntemdir.

Laplace dönüşümü, katsayıları polinomlar olan değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemlere de uygulanabilir. Bu durumda,

$$L\left\{x^n f(x)\right\}=(-1)^n\frac{d^nF}{ds^n}$$

formülünde $f(x)$ yerine $f^{(m)}(x)$ $(m=0,1,\cdots)$ koymak suretiyle elde edilen

$$L\left\{x^n f^{(m)}(x)\right\}=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}L\left\{f^{(m)}(x)\right\},\ \ (m=0,1,\cdots)$$

formülü kullanılır. Bu halde, Laplace dönüşümü uygunlandıktan sonra $L\{y\}$'ye göre bir adi diferansiyel denklem elde edilir.

Örnek 1.1. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}-y=0, y(0)=0, y'(0)=1$ başlangıç-değer problemini ele alalım. Denklemin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulayalım. Bu durumda,

$$L\left\{\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-y\right\}=L\{0\}$$

$$L\left\{\frac{d^2y}{dx^2}\right\}+L\left\{x\frac{dy}{dx}\right\}-L\{y\}=0$$

$$s^2L\{y\}-sy(0)-y'(0)-\frac{d}{ds}L\{y'\}-L\{y\}=0$$

$$s^2L\{y\}-1-s\frac{d}{ds}\left[sL\{y\}\right]-L\{y\}=0$$

$$s^2L\{y\}-1-s\frac{d}{ds}L\{y\}-L\{y\}=0$$

$$\frac{d}{ds}L\{y\}-\frac{s^2-2}{s}L\{y\}=-\frac{1}{s}$$

olarak bulunur. Bu, $L\{y\}$ bilinmeyenine göre birinci mertebeden bir lineer diferansiyel denklemdir. Genel çözümü

$$L\{y\}=\frac{1}{s^2}+\frac{c}{s^2}e^{s^2/2}$$

dir. Burada, c integrasyon sabitini belirtmek için, $s\to\infty$ için $L\{y\}\to 0$ gerçeğini kullanalım. Bu özellik, $c=0$ olmasını gerektirir. Böylece,

$$L\{y\}=\frac{1}{s^2}$$

ve buradan $y = x$ bulunur. (bkz. [Cagliyan, M., Celik, N. ve Dogan, S., 2008]).

Son olarak, Fourier dönüşümü yöntemi ile çözülecek olan

$$\begin{cases} -u_{tt} - u_{xx} = \left[-2 - \left(4x^2 - 2\right)t^2\right]e^{-x^2}, 0 < t < 1, -\infty < x < \infty, \\ iu_t - u_{xx} = \left[2it - \left(4x^2 - 2\right)t^2\right]e^{-x^2}, -1 < t < 0, -\infty < x < \infty, \\ u\left(1, x\right) = u\left(-1, x\right), -\infty < x < \infty \end{cases} \tag{1.5}$$

karma tipli lokal olmayan sınır-değer problemini ele alalım.

İlk olarak, $-1 < t < 0$ aralığını ele alalım. Verilen denklemin her iki yanına Fourier dönüşümü uygulanırsa,

$$F\left\{iu_t\right\} - F\left\{u_{xx}\right\} = F\left\{\left(2it - \left(4x^2 - 2\right)t^2\right)e^{-x^2}\right\}$$

eşitliği elde edilecektir. Burada,

$$F\left\{u\left(t, x\right)\right\} = u\left(t, s\right)$$

gösterimi ve

$$\left(e^{-x^2}\right)'' = \left(4x^2 - 2\right)e^{-x^2}$$

ifadesi kullanılacaktır. Böylece denklem,

$$iu_t\left(t, s\right) + s^2 u\left(t, s\right) = F\left\{2it - t^2(e^{-x^2})''\right\}$$

ya da

$$iu_t\left(t, s\right) + s^2 u\left(t, s\right) = (2it + t^2 s^2)F\left\{e^{-x^2}\right\}$$

şeklinde yazılır. Bu denkleme karşılık gelen homojen denklemin genel çözümü

$$u_h\left(t, s\right) = c_1 e^{is^2 t}$$

dir. Homojen olmayan denklemin özel çözümü ise

$$u_{ö}\left(t, s\right) = t^2 F\left\{e^{-x^2}\right\}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$u\left(t, s\right) = c_1 e^{is^2 t} + t^2 F\left\{e^{-x^2}\right\}$$

şeklinde bulunur.

Şimdi, $0 \leq t \leq 1$ aralığını göz önüne alalım. Her iki tarafın Fourier dönüşümü alınırsa,

$$-F\left\{u_{tt}\right\} - F\left\{u_{xx}\right\} = F\left\{\left(-2 - \left(4x^2 - 2\right)t^2\right)e^{-x^2}\right\}$$

eşitliği elde edilir. Burada,

$$F\left\{u\left(t, x\right)\right\} = u\left(t, s\right)$$

gösterimini ve

$$\left(e^{-x^2}\right)'' = \left(4x^2 - 2\right) e^{-x^2}$$

ifadesini kullanalım. Böylece denklem,

$$-u_{tt}(t,s) + s^2 u(t,s) = F\left\{-2 - t^2 \left(e^{-x^2}\right)''\right\}$$

ya da

$$-u_{tt}(t,s) + s^2 u(t,s) = \left(-2 - t^2 s^2\right) F\left\{e^{-x^2}\right\}$$

şeklinde yazılır. Bu denkleme karşılık gelen homojen denklemin genel çözümü

$$u_h(t,s) = c_2 e^{st} + c_3 e^{-st}$$

olur. Homojen olmayan denklemin özel çözümü ise

$$u_{ö}(t,s) = t^2 F\left\{e^{-x^2}\right\}$$

dir. Dolayısıyla,

$$u(t,s) = c_2 e^{st} + c_3 e^{-st} + t^2 F\left\{e^{-x^2}\right\}$$

şeklinde bulunur.

Süreklilik ve lokal olmayan sınır koşulları

$$\begin{cases} u(1,s) = u(-1,s), \\ u(0^+,s) = u(0^-,s), \\ u'(0^+,s) = u'(0^-,s) \end{cases}$$

bir arada kullanılarak

$$\begin{cases} c_2 e^{s} + c_3 e^{-s} + F\left\{e^{-x^2}\right\} = c_1 e^{-is^2} + F\left\{e^{-x^2}\right\}, \\ c_2 + c_3 = c_1, \\ sc_2 - sc_3 = is^2 c_1 \end{cases}$$

olup, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ bulunur.

O halde,

$$u(t,s) = t^2 F\left\{e^{-x^2}\right\}$$

elde edilir. Son olarak, ters Fourier dönüşümü uygulanırsa, (1.5) lokal olmayan sınır-değer probleminin tam çözümü

$$u(t,x) = t^2 e^{-x^2}$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde aşağıdaki

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \displaystyle\sum_{|r|=2m} a_r \dfrac{\partial^{|\tau|} u}{\partial x_1^{r_1} \cdots \partial x_n^{r_n}} = f(t,x), \\ \\ 0 \le t \le T, x, r \in \mathbb{R}^n, |r| = r_1 + \cdots + r_n, \\ \\ i\dfrac{\partial u}{\partial t} + \displaystyle\sum_{|r|=2m} a_r \dfrac{\partial^{|\tau|} u}{\partial x_1^{r_1} \cdots \partial x_n^{r_n}} = f(t,x), \\ \\ -T \le t \le 0, x, r \in \mathbb{R}^n, |r| = r_1 + \cdots + r_n, \\ \\ u(T,x) = u(-T,x) + \varphi(x), x \in \mathbb{R}^n, \\ \\ u_t(0_+,x) = u_t(0_-,x), \ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

çok boyutlu eliptik-Schrödinger denklemleri için lokal olmayan sınır-değer probleminin çözümü elde edilebilir. Burada α_r, $f(t,x)$ $(t \in [0,T], \ x \in R^n)$, $g(t,x)$ $(t \in [-T,0], x \in \overline{\Omega}^+)$, $\varphi(x)$ $(x \in \overline{\Omega}^+)$ verilmiş düzgün fonksiyonlardır. Ayrıca Ω, $\mathbb{R}^n$ n-boyutlu Öklit uzayında S ve $\overline{\Omega} = \Omega \cup S$ ile sınırlandırılmış olan bir birim açık küp olup,

$$(x : x = (x_1, \cdots, x_n), 0 < x_k < 1, 1 \le k \le n)$$

dir.

Ancak, Fourier dönüşümü yöntemi yalnızca sabit katsayılı denklemlerin çözümünde kullanılabilmektedir. Oysa ki değişken katsayılı kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için en kullanışlı yolun fark yöntemi olduğu çok iyi bilinmektedir.

Bu çalışmada bir H Hilbert uzayında verilen fark denklemlerinin, öz-eşlenik pozitif tanımlı A operatörlü lokal olmayan sınır-değer problemi

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2 u(t)}{dt^2} + Au(t) = f(t)\,(0 \le t \le 1), \\ \\ i\dfrac{du(t)}{dt} + Au(t) = g(t)\,(-1 \le t \le 0), \\ \\ u(1) = u(-1) + \mu, 0 < \mu \le 1 \end{cases} \tag{1.6}$$

ele alınmıştır. Bu lokal olmayan sınır-değer probleminin çözümü için kararlılık kestirimleri elde edilmiştir. Bu çalışmamızda esas olarak, birinci basamaktan doğruluklu fark şemaları kullanılarak (1.6) probleminin yaklaşık çözümleri elde edilmiştir. Bu sonuç lokal olmayan sınır koşulları tarafından oluşturulan fark operatörünün pozitifliğine dayanmaktadır. Bu fark şemalarının çözümü için yapılan teorik sonuçların doğruluğu sayısal denemelerle de desteklenmiştir.

2 MATERYAL VE YÖNTEM

Yaptığımız bu çalışma için herhangi bir materyale, teçhizata ya da laboratuvar ortamına ihtiyaç duyulmamakla beraber, araştırmamızda yöntem olarak, sırasıyla, operatör yaklaşımı ve sonlu fark yöntemleri kullanılmıştır. Ayrıca elde edilen teorik sonuçların geçerliliğini ve güvenilirliğini desteklemek adına yapılan nümerik denemelerde, iyileştirilmiş-Gauss yok etme yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntemi uygulamak için Intel(R) Core(TM)2 Duo CPU 2,93 GHz 2,00 GB RAM teknik özelliklerine sahip bir bilgisayar kullanılmıştır.

2.1 HİLBERT UZAYININ ELEMANLARI

Bu bölümde Hilbert uzayı teorisinin seçilmiş temel kavramları ve çalışmamızda kullanacağımız bazı temel kavramlar verilecektir (bkz. [Suhubi, E. S., 2001]).

Tanım 2.1. L ve L' aynı bir F cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $T : L \to L'$ operatörü,

(i) $\forall x, y \in L$, $T(x+y) = T(x) + T(y)$ (toplamsallık),

(ii) $\forall x \in L$ ve $\forall \alpha \in F$, $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ (homojenlik)

şartlarını sağlıyorsa *lineer dönüşüm* ya da *lineer operatör* adını alır.

Kolayca görüleceği gibi bu şartlar

$$T(\alpha x + \alpha y) = \alpha T(x) + \alpha T(y); \alpha, \beta \in F$$

şartına denktir.

Tanım 2.2. X boş olmayan bir küme olsun. Bu küme reel değerli, negatif olmayan bir $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu için,

(i) $\forall\ x, y \in X$ için $d(x,y) \geq 0$.

(ii) $\forall\ x, y \in X$ için ancak ve ancak $x = y$ ise $d(x,y) = 0$.

(iii) $\forall\ x, y \in X$ için $d(x,y) = d(y,x)$ (simetri özelliği)

(iv) $\forall\ x, y, z \in X$ için $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (üçgen eşitsizliği).

şartları sağlanıyorsa d ye X de bir *metrik* ve d ile birlikte X e *metrik uzay* denir ve genellikle (X,d) veya X_d ile gösterilir.

Tanım 2.3. (X,d) bir metrik uzay olsun. Bu uzaydaki her Cauchy dizisi yakınsaksa X bir *tam metrik uzay* adını alınır. Dolayısıyla bir tam metrik uzayda bir dizinin yakınsaklık testi Cauchy dizisi olma tesbitiyle örtüşür.

Örnek 2.1. $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ olarak tanımlanırsa

$$\begin{cases} d(x,y) = |x-y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Longleftrightarrow x = y, \\ \\ d(x,y) = |x-y| = |y-x| = d(y,x), \\ \\ d(x,y) = |x-y| = |x-z+z-y| \leq |x-z| + |z-y| = d(x,z) + d(z,y) \end{cases}$$

dir. Demek ki d, $\mathbb{R}$ de bir metrik ve $(\mathbb{R}, d)$ bir metrik uzaydır.

Örnek 2.2. $X = C[-2, 2]$ sürekli fonksiyonlar kümesi üzerinde d_1 metriğini göz önüne alalım. Bir $\{x_n(t)\}$ sürekli fonksiyonlar dizisini

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & -2 \leq t \leq 1 - (1/n), \\ nt + 1 - n, & 1 - (1/n) \leq t \leq 1, \\ 1, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

ile tanımlayalım. Bu dizi bir Cauchy dizisidir. Genellikten kaybetmeksizin $n > m$ alırsak

$$d_1(x_m, x_n) = \int_{-2}^{2} |x_n(t) - x_m(t)| \, dt$$

$$= \int_{1-(1/m)}^{1-(1/n)} (mt + 1 - m) \, dt + \int_{1-(1/n)}^{1} (n - m)(1 - t) \, dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)$$

elde ederiz. Dolayısıyla $m, n \to \infty$ için $d(x_m, x_n) \to 0$ buluruz. Yani $\{x_n(t)\}$ bir Cauchy dizisidir. Ancak bu dizinin limitini hemen görebileceğimiz gibi

$$x(t) = \begin{cases} 0, & -2 \leq t \leq 1, \\ 1, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

fonksiyonudur. Gerçekten

$$d_1(x_n, x) = \int_{1-(1/n)}^{1} (nt + 1 - n) \, dt = \frac{1}{2n}$$

bulunur ve $\lim\limits_{n \to \infty} d_1(x_n, x) = 0$ çıkar. Ancak limit fonksiyon süreksiz olduğundan X uzayının içinde değildir ve $\{x_n(t)\}$ dizisi (X, d_1) de yakınsamaz.

Tanım 2.4. Bir k cismi üzerinde, bir *vektör uzay* (ya da *lineer uzay*), vektör adını taşıyan, $x, y, \cdots$ elemanlarından oluşan ve üzerinde iki cebirsel işlem taşımlı, boş olmayan bir X kümesidir. Bu işlemler, vektör toplamı ve vektörlerin skalerlerle (yani k nın elemanlarıyla) çarpımı olarak adlandırılır.

Vektör toplamı, her sıralı (x, y) vektör çiftine, x ve y vektörlerinin toplamı adını taşıyan ve aşağıdaki özellikler gerçelenecek şekilde tanımlanan bir $x + y$ vektörü karşılık getirir. Vektör toplamı, öncelikle, değişme ve birleşme özelliğine sahiptir; yani bütün vektörler için,

$$x + y = y + x$$

ve

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

yazılır. Ayrıca, bütün vektörler

$$x + 0 = x$$

ve

$$x + (-x) = 0$$

olacak şekilde, sıfır vektörü olarak adlandırılan bir 0 vektörü ve her x vektörü için bir $-x$ vektörü vardır.

Skalerle çarpım ise, her x vektörü ve α skalerine, α ile x in çarpımı adını taşıyan ve bütün x, y vektörleri ve α, β skalerleri için, aşağıdaki özellikleri gerçekleyen bir αx vektörü karşılık getirir:

$$\begin{cases} \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \\ 1x = x \\ \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y \\ (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x \end{cases}$$

Tanım 2.5. N ile çoğunlukla kompleks sayılar cismi olarak seçeceğimiz bir F skalerler cismi üzerinde tanımlanmış bir lineer vektör uzayını gösterelim. Reel değerli, negatif olmayan bir $\|\cdot\| : N \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun x deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon için

(i) $\forall\, x \in N$ için $\|x\| \geq 0$ ve ancak ve ancak $\|x\| = 0$ ise $x = 0$ olur.

(ii) $\forall\, x \in N$ ve $\alpha \in F$ için $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$ olur.

(iii) $\forall\, x, y \in N$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

şartları sağlanıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna N de (veya N üzerinde) *norm* denir. Bir normla donatılmış bir vektör uzayına da *normlu lineer uzay* veya *normlu vektör uzayı* ya da sadece *normlu uzay* adını veririz. Normlu uzaylar $(N, \|\cdot\|)$ ile gösterilir.

Tanım 2.6. N normlu lineer uzay olsun. N, norm metriğine göre tam ise N ye *Banach uzayı* denir.

Tanım 2.7. X, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to F$ fonksiyonu,

i) $\forall\, x, y \in X$ için $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.

ii) $\forall\, x, y \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ için $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha \langle x, y\rangle$.

iii) $\forall\, x, y, z \in X$ için $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.

iv) $\forall\, x \in X, \langle x, x\rangle \geq 0$, $\langle x, x\rangle = 0$ ise $x = 0$

şartlarını sağlıyorsa bu fonksiyona *iç çarpım* (veya *iç çarpım fonksiyonu*) denir. Üzerinde iç çarpım fonksiyonunun tanımlandığı vektör uzayına *iç çarpım uzayı* (veya *ön-Hilbert uzayı*) denir. Şu halde bir iç çarpım uzayı bir vektör uzayı ile bir iç çarpım fonksiyonundan ibarettir. İç çarpım uzayını $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ veya kısaca X ile göstereceğiz.

İç çarpım kısaca *Schwarz*, daha doğru bir deyişle *Cauchy-Bunyakowski-Schwarz eşitsizliği* adını vereceğimiz bir bağıntıyı sağlar.

Örnek 2.3. $f,g \in C_{\mathbb{R}}[0,1]$ için

$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 e^t f(t)g(t)dt$$

olsun. Bunun $C_{\mathbb{R}}[0,1]$ uzayı üzerinde bir iç çarpım tanımlandığını gösteriniz.

Çözüm: İç çarpım aksiyomlarının hepsini kontrol etmek zorundayız:

i) Her $t \in [0,1]$ için $e^t\left(f(t)\right)^2 \geq 0$ olduğundan $\langle f,f\rangle = \int_0^1 e^t\left(f(t)\right)^2 dt \geq 0$ olur.

ii)

$$\langle f,f\rangle = 0 \Rightarrow \int_0^1 e^t\left(f(t)\right)^2 dt = 0$$

dır. Bu nedenle her $t \in [0,1]$ için

$$e^t\left(f(t)\right)^2 = 0$$

olur. Çünkü $e^t\left(f(t)\right)^2$, t nin sürekli bir fonksiyonudur ve böylece her t için $e^t > 0$ olduğundan $f(t) = 0$ bulunur. Diğer yönden, eğer $f(t) = 0$ ise

$$\langle f,f\rangle = \int_0^1 0dt = 0$$

dır.

iii) $f,g,h \in C_{\mathbb{R}}[0,1]$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\langle f+g,h\rangle = \int_0^1 e^t(f(t)+g(t))h(t)dt$$

$$= \int_0^1 e^t f(t)h(t)dt + \int_0^1 e^t g(t)h(t)dt$$

$$= \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$$

ve

$$\langle \alpha f, g \rangle = \int_0^1 e^t \alpha f(t) g(t) dt = \alpha \int_0^1 e^t f(t) g(t) dt = \alpha (f, g)$$

elde edilir.

Teorem 2.1. H bir iç çarpım uzayı ise sıfırdan farklı $\forall x, y \in H$ vektörü için $|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle}$ eşitsizliği sağlanır. Eşitlik ancak ve ancak x ve y vektörleri lineer bağımlıysa geçerlidir.

Teorem 2.2. H bir iç çarpım uzayı olsun. $\forall x \in H$ vektörü için $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ fonksiyonu H üzerinde bir *doğal norm*dur.

Norm tanımıyla Schwarz eşitsizliğini

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\| \tag{2.1}$$

şeklinde de ifade edebiliriz.

İç çarpımın ürettiği norma göre her iki vektör *paralelkenar kuralını* gerçekler. Böyle iki $x, y \in H$ vekörü için

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 \left(\|x\|^2 + \|y\|^2 \right) \tag{2.2}$$

elde ederiz.

İç çarpımdan üreyen *doğal norm* da H vektör uzayı üzerinde bir doğal metriği

$$d \langle x, y \rangle = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle} \tag{2.3}$$

fonksiyonu ile üretir. Doğal metriğe göre tam bir iç çarpım uzayı *Hilbert uzayı* adını alır. Bir Hilbert uzayının aynı zamanda bir *Banach uzayı* olacağı tartışma götürmez.

Örnek 2.4. $C[0, \pi/2]$ bir iç çarpım uzayı mıdır?

Çözüm: $x(t) \in C[a, b]$ olmak üzere, bu uzayda $x(t)$ nin normu

$$\|x\|_{\mathbb{C}[a,b]} = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|$$

olarak tanımlanır. Şimdi, $x(t) = \sin t$ ve $y(t) = \cos t$ olmak üzere $C[0, \pi/2]$ uzayının iki elemanını alalım. Burada,

$$\|x\|_{C[0,\pi/2]} = \max_{a \leq t \leq b} |\sin t| = 1$$

$$\|y\|_{C[0,\pi/2]} = \max_{a \leq t \leq b} |\cos t| = 1$$

olduğu açıktır. Daha sonra,

$$\|x+y\|_{C[0,\pi/2]} = \max_{0\leq t\leq \frac{\pi}{2}} |\sin t + \cos t| = \max\left\{\varphi(0), \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right), \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\} = \sqrt{2}$$

bulunur. Bunun nedeni,

$$\varphi(t) = \sin t + \cos t, \varphi(0) = 1, \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\varphi\prime(t) = \cos t - \sin t = 0 \Leftrightarrow \cos t = \sin t \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4}$$

$$\varphi(\frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

olmasıdır. Ayrıca,

$$\|x-y\|_{C[0,\pi/2]} = \max_{0\leq t\leq \frac{\pi}{2}} |\sin t - \cos t| = \max\left\{\varphi(0), \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\} = 1$$

dir. Dolayısıyla,

$$\|x+y\|^2_{C[0,\pi/2]} + \|x-y\|^2_{C[0,\pi/2]} = 2\left(\|x\|^2_{C[0,\pi/2]} + \|y\|^2_{C[0,\pi/2]}\right) \Rightarrow 3 \neq 4$$

paralelkenar kuralı sağlanmadığından, $C[0,\pi/2]$ uzayı bir iç çarpım uzayı değildir.

Tanım 2.8. Bir $T : N_1 \to N_2$ operatörü sınırlı kümeleri yine sınırlı kümelere dönüştürüyorsa *sınırlı operatör* adını alır.

Teorem 2.3. N_1 ve N_2 normlu uzay ve $T : N_1 \to N_2$ lineer bir operatör olsun. $\forall x \in N_1$ için

$$\|T(x)\|_{N_2} \leq K\|x\|_{N_1}$$

olacak şekilde bir $K \geq 0$ reel sayısı varsa T ye *sınırlı lineer operatör* denir.

Teorem 2.4. N_1 ve N_2 normlu uzay ve $T : N_1 \to N_2$ lineer bir dönüşüm ve $x_0 \in N_1$ ise $\varepsilon > 0$ verildiğinde

$$\|x-x_0\| < \delta \text{ için } \|T(x) - T(x_0)\|_{N_2} < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ reel sayısı varsa T, x_0 noktasında süreklidir. T, N_1 nin her noktasında sürekli ise *T ye N_1 de süreklidir* denir.

Tanım 2.9. Sınırlı bir A lineer operatörü söz konusu olduğunda K sayılarının en küçüğüne *operatörün normu* adı verilir:

$$\|A\| = \inf\{K > 0 : \|Au\|_V \leq K\|u\|_U, \forall u \in U\}.$$

Normun bu tanımı aşağıdaki tanımlara da eşdeğerdir:

$$\|A\| = \sup\{\|Au\|_V : \|u\|_U \leq 1\},$$

$$\|A\| = \sup\{\|Au\|_V : \|u\|_U = 1\},$$

$$\|A\| = \sup\left\{\frac{\|Au\|_V}{\|u\|_U} : u \in U, u \neq 0\right\}.$$

Örnek 2.5. $Ax = \int\limits_0^1 K(t,s)x(s)ds$ integral operatörünü ele alalım. Eğer,

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 |K(t,s)|^2 \, dsdt < \infty$$

ise, bu durumda $A : L_2\ [0,1] \to L_2\ [0,1]$ operatörünün sınırlı olduğunu ispatlayınız.

Çözüm: Öncelikle,

$$\int\limits_0^1 |x(t)|^2 \, dt < \infty \Rightarrow \int\limits_0^1 |Ax(t)|^2 \, dt < \infty \tag{2.4}$$

A operatörünün sınırlı olduğu, daha sonra ise

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay; \quad x \in L_2\ [0,1] \Rightarrow Ax \in L_2\ [0,1]$$

A operatörünün lineer olduğu gösterilecektir. $L_2\ [0,1]$ uzayında $Ax\,(t)$ nin normu

$$\left(\int\limits_0^1 |Ax(t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left[\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 |K(t,s)x(s)ds| \right)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

dir. Cauchy-Minkowski eşitsizliğinden,

$$\left(\int\limits_0^1 |Ax(t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left[\int\limits_0^1 \left\{ \left(\int\limits_0^1 |K\,(t,s)|^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_0^1 |x\,(s)|^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \right] dt$$

$$= \left[\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 |K\,(t,s)|^2 \, ds \right) \left(\int\limits_0^1 |x\,(s)|^2 \, ds \right) dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 |K\,(t,s)|^2 \, dsdt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_0^1 |x\,(s)|^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Böylece,

$$\int\limits_0^1 |Ax(t)|^2 \, dt < \infty \Longrightarrow Ax \in L_2\ [0,1]$$

olduğu kolayca görülecektir. Dolayısıyla, verilen operatör $L_2\ [0,1]$ de lineer operatördür.

Örnek 2.6. N normlu bir uzay ve $N \neq \{\theta\}$ olsun. $I : N \to N$, $I(x) = x$ operatörünün sınırlı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $I : N \to N$, $I(x) = x$ olarak tanımlandığında

$$I(\alpha x + \beta y) = \alpha x + \beta y = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

olduğundan T lineerdir.

$$\|I\| = \sup_{x \in N, x \neq 0} \left\{ \frac{\|I(x)\|}{\|x\|} \right\} = \sup_{x \in N, x \neq 0} \{1\} = 1$$

ve

$$\frac{\|I(x)\|}{\|x\|} \leq 1 \Rightarrow \|I(x)\| \leq \|x\|$$

olduğundan I sınırlıdır.

Tanım 2.10. $A : H_1 \to H_2$ olmak üzere sınırlı, lineer bir operatör olsun. Burada, H_1 ve H_2 herhangi iki Hilbert uzaylarıdır. $A^* : H_1 \to H_2$ olmak üzere $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle$ operatörüne A nın *eşleniği* denir.

Tanım 2.11. $A : H \to H$ sınırlı, lineer bir operatör olsun. Eğer $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ ise, bu durumda A ya *öz-eşlenik operatör* denir.

Tanım 2.12. $A : H \to H$ öz-eşlenik operatör olsun. Eğer $\langle Ax, x \rangle > \delta \langle x, x \rangle$ ise, bu durumda A'ya *pozitif tanımlı operatör* denir.

Tanım 2.13. $A : H \to H$ öz-eşlenik operatör olsun. $\forall x \in D(A)$ için eğer $\langle Ax, x \rangle > 0$ ise, bu durumda A ya *pozitif tanımlı* denir.

Tanım 2.14. $A : D(A) \to H$ ve $\overline{D(A)} = H$ olmak üzere bir lineer operatör olsun. Eğer $\forall x, y \in H$ için $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ ise, bu durumda A ya *simetrik operatör* denir.

Tanım 2.15. Eğer A bir simetrik operatör ve $D(A) = D(A^*)$ ise, bu durumda A ya *öz-eşlenik operatör* denir.

Örnek 2.7. $Ax(t) = -x''(t)$,

$$D(A) = \{x : x(t), x''(t) \in L_2[0,1] \text{ ve } x(0) = x(1) = 0\}$$

operatörünün öz-eşlenik, pozitif operatör olup olmadığını araştırınız.

Çözüm: L_2 $[0,1]$ uzayında iç çarpım

$$\langle x, y \rangle = \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}dt$$

ile tanımlanır. Simetrik olduğunu göstermek için $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ olduğunu göstermeliyiz. Burada,

$$\langle Ax, y \rangle = \int_0^1 Ax(t)\overline{y(t)}dt = -\int_0^1 x''(t)\overline{y(t)}dt$$

kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$= -x'(t)\overline{y(t)}\Big]_0^1 + \int_0^1 x'(t)\overline{y'(t)}dt$$

elde edilir. Tekrar kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\langle Ax, y\rangle = -x'(1)\overline{y(1)} + x'(0)\overline{y(0)} + x(t)\overline{y'(t)}\Big]_0^1 - \int_0^1 x(t)(\overline{-y''(t)})dt$$

$$= x(1)\overline{y'(1)} - x(0)\overline{y'(0)} + \int_0^1 x(t)(\overline{-y''(t)})dt = \langle x, Ay\rangle$$

bulunur. Böylece, A operatörünün $L_2\ [0,1]$ uzayında simetrik olduğunu göstermiş olduk. Şimdi, de A operatörünün pozitif tanımlı olduğunu gösterelim. Burada,

$$\langle Ax, x\rangle = -\int_0^1 x''(t)\overline{x(t)}dt$$

kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$= -x'(t)]_0^1 + \int_0^1 x'(t)\overline{x'(t)}dt = \int_0^1 |x'(t)|^2\, dt \geq \int_0^1 |x(t)|^2\, dt = \langle x, x\rangle$$

elde edilir. O halde,

$$\langle Ax, x\rangle \geq \langle x, x\rangle \Rightarrow \delta = 1 > 0$$

dır. Dolayısıyla, A operatörü $L_2\ [0,1]$ Hilbert uzayında pozitif tanımlıdır.

Örnek 2.8. H bir Hilbert uzay ve $A \in B(H)$ olsun. $F = \mathbb{C}$ ise bu durumda T öz-eşleniktir ancak ve ancak her $x \in H$ için (T_x, x) in reel olduğunu ispatlayınız.

Çözüm: Sırasıyla şartın gerekliliği ve şartın yeterliliğini ispatlayalım. Eğer T öz-eşlenik ise, bu durumda

$$(T_x, x) = (x, T_x) = \overline{(T_x, x)}$$

dir ve böylece $\forall x \in H$ için (T_x, x) reeldir. Diğer yönü göstermek için $F = \mathbb{C}$ ve $\forall x \in H$ için (T_x, x) nin reel olduğunu varsayalım. Bu durumda, $\forall x \in H$ için

$$(T_x^*, x) = (x, T_x) = (T_x, x)$$

olur. Bu nedenle, eğer

$$S = i\,(T^* - T)$$

ise bu durumda her x için

$$(S_x, x) = i\,(T_x^* - T_x, x) = 0$$

dır. $S^* = -i\,(T - T^*) = S$ dir. Yani, S öz-eşleniktir. $\forall x \in H$ için $(T_x, x) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $T = 0$ olduğundan S yerine T alarak, $S = 0$ bulunur. Böylece $i\,(T^* - T) = 0$; yani $T^* = T$ dir ve böylece T öz-eşleniktir.

3 ELİPTİK-SCHRÖDINGER DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ

3.1 Öncüller ve Motivasyon

H Hilbert uzayında öz-eşlenik pozitif tanımlı bir A operatörü ile

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u(t)}{dt^2} + Au(t) = g(t)\,(0 \le t \le 1), \\ i\dfrac{du(t)}{dt} - Au(t) = f(t)\,(-1 \le t \le 0), \\ u(1) = u(-1) + \varphi \end{cases} \tag{3.1}$$

lokal olmayan sınır değer problemini ele alalım.

Bilindiği gibi eliptik-Schrödinger denklemleri için lokal olmayan sınır-değer problemleri, (3.1) problemine indirgenebilmektedir.

Aşağıdaki şartların sağlanması durumunda, $u(t)$ fonksiyonuna (3.1) probleminin bir çözümüdür denilir.

(i) $u(t)$, $[0,1]$ aralığında sürekli iki kez türevlenebilir ve $[-1,1]$ arasında sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olmalıdır. Aralığın uç noktalarında türev tek taraflı türev anlamına gelmektedir.

(ii) $u(t)$ fonksiyonu, $\forall t \in [-1,1]$ için $D(A)$ (A nın tanım kümesi) nin elemanıdır ve $Au(t)$, $[-1,1]$ aralığında süreklidir.

(iii) $u(t)$ fonksiyonu, (3.1) probleminin denklemlerini ve lokal olmayan sınır koşulunu sağlar.

Burada önemli olan husus, (3.1) probleminin kararlı olmasıdır. Bu çalışmanın temelini oluşturan (3.1) probleminin kararlılık kestirimleri temel teorem kısmında verilmiştir. Uygulamalarda, karma tipli eliptik-Schrödinger denklemlerinin sınır-değer problemleri için kararlılık kestirimleri elde edilmiştir.

Bunlardan başka, eliptik ve Schrödinger denklemlerinin matematiğin diğer alanlarında ve fizik, mühendislik gibi alanlarında da önemli bir rol oynadığını belirtmek gerekir. (bkz. [Orlovsky, D. ve Piskarev, S., 2013], [Ashralyyev, C. ve Dedeturk, M., 2013], [Ashralyev, A. ve Urun, M., 2013], [Kozlowski, K. ve Kozlowska, J. M., 2010], [Quittner, P. ve Souplet, P., 2012], [Godet, N. ve Tzvetkov, N., 2012], [Liu, B. ve Ma, L., 2013]) (Ayrıntıları kaynaklar kısmında verilmiştir).

Ayrıca, başlangıç-değer problemleri ve Schrödinger denklemlerinin nümerik çözümleri, son 10 yılda kapsamlı bir araştırma alanı olmuştur. (bkz. [Tselios, K. ve Simos, T. E., 2005], [Sakas, D. P. ve Simos, T. E., 2005], [Psihosiyos, G. ve Simos, T. E., 2005], [Anastassi, Z. A. ve Simos, T. E., 2005], [Simos, T. E., 2009], [Stavroyiannis, S. ve Simos, T. E., 2009] detayları kaynaklar kısmında verilmiştir).

3.2 Temel Teorem

Teorem 3.1. $\varphi \in D(A)$ ve $f(0), g(0) \in H$ olsun. $f(t)$, $[-1,0]$ aralığında sürekli türevlenebilir ve $g(t)$, $[0,1]$ aralığında sürekli iki kez türevlenebilir fonksiyonlar olsunlar. Bu durumda, (3.1) probleminin tek çözümü vardır ve

$$\max_{-1\leq t\leq 1}\|u(t)\|_H \leq M\left[\|\varphi\|_H + \max_{-1\leq t\leq 0}\|f(t)\|_H\right. \tag{3.2}$$

$$\left.+\max_{0\leq t\leq 1}\left\|A^{-1/2}g(t)\right\|_H\right]$$

$$\max_{-1\leq t\leq 1}\left\|\frac{du(t)}{dt}\right\|_H + \max_{-1\leq t\leq 1}\left\|A^{1/2}u(t)\right\|_H \leq M\left[\left\|A^{1/2}\varphi\right\|_H\right. \tag{3.3}$$

$$\left.+\max_{-1\leq t\leq 0}\left\|A^{1/2}f(t)\right\|_H + \max_{0\leq t\leq 1}\|g(t)\|_H\right]$$

$$\max_{-1\leq t\leq 0}\left\|\frac{du(t)}{dt}\right\|_H + \max_{0\leq t\leq 1}\left\|\frac{d^2u(t)}{dt^2}\right\|_H + \max_{-1\leq t\leq 1}\|Au(t)\|_H \tag{3.4}$$

$$\leq M\left[\|A\varphi\|_H + \|g(0)\|_H + \|f(0)\|_H\right.$$

$$\left.+\max_{0\leq t\leq 1}\|g'(t)\|_H + \max_{-1\leq t\leq 0}\|f'(t)\|\right]$$

eşitsizlikleri sağlanır. Burada M, $f(t)$, $t\in[-1,0]$, $g(t)$, $t\in[0,1]$ ve φ fonksiyonlarından bağımsızdır.

İspat: Öncelikle, (3.1) probleminin çözümü için gerekli olan formülleri elde edeceğiz. [Krein, S. G., 1966] den bilindiği gibi başlangıç-değer problemlerinin

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u(t)}{dt^2} + Au(t) = g(t), (0\leq t\leq 1), \\ u(0) = u_0,\ u(1) = u_1, \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} i\dfrac{du(t)}{dt} - Au(t) = f(t), (-1\leq t\leq 0), \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{3.6}$$

tek çözümü vardır ve dolayısıyla,

$$u(t) = e^{-tA}u_0 - i\int_0^t e^{-i(t-s)A}f(s)\,ds, -1\leq t\leq 0 \tag{3.7}$$

ve

$$u(t) = \left(I - e^{-2A^{1/2}}\right)^{-1}\left[\left(e^{-tA^{1/2}} - e^{-(-t+2)A^{1/2}}\right)u_0\right. \tag{3.8}$$

$$\left.+\left(e^{-(1-t)A^{1/2}} - e^{-(t+1)A^{1/2}}\right)u_1\right] + \left(I - e^{-2A^{1/2}}\right)^{-1}$$

$$\times\left(e^{-(1-t)A^{1/2}} - e^{-(t+1)A^{1/2}}\right)$$

$$\times \int_0^1 A^{-1/2} 2^{-1} \left(e^{-(1-s)A^{1/2}} - e^{-(s+1)A^{1/2}} \right) g(s) ds$$

$$- \int_0^1 A^{-1/2} 2^{-1} \left(e^{-(t+s)A^{1/2}} - e^{-|t-s|A^{1/2}} \right) g(s) ds, 0 \leq t \leq 1,$$

formülleri sağlanır. (3.7), (3.8) formülleri ve

$$u(1) = u(-1) + \varphi$$

lokal olmayan sınır koşulu kullanılarak

$$u(t) = \left(I - e^{-2A^{1/2}} \right)^{-1} \left[\left(e^{-tA^{1/2}} - e^{-(-t+2)A^{1/2}} \right) u_0 \right. \tag{3.9}$$

$$\left. + \left(e^{-(1-t)A^{1/2}} - e^{-(t+1)A^{1/2}} \right) \left(e^{iA} u_0 - i \int_0^{-1} e^{i(1+s)A} f(s)\, ds + \varphi \right) \right]$$

$$+ \left(I - e^{-2A^{1/2}} \right)^{-1} \left(e^{-(1-t)A^{1/2}} - e^{-(t+1)A^{1/2}} \right)$$

$$\times \frac{1}{2} \int_0^1 \left(e^{-(1-s)A^{1/2}} - e^{-(s+1)A^{1/2}} \right) A^{-1/2} g(s)\, ds$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^1 \left(e^{-(t+s)A^{1/2}} - e^{-|t-s|A^{1/2}} \right) A^{-1/2} g(s)\, ds, 0 \leq t \leq 1$$

elde edilir. Şimdi,

$$u'(0_+) = \frac{1}{i} \left[Au(0) + f(0) \right],$$

sınır koşulu kullanılırsa,

$$\left\{ \left(I - e^{-2A^{1/2}} \right) + i \left(I + e^{-2A^{1/2}} \right) A^{-1/2} - 2iA^{-1/2} e^{-\left(A^{1/2} - iA\right)} \right\} u_0$$

$$= i \left\{ \left[-2A^{-1/2} e^{-A^{1/2}} \left(i \int_0^{-1} e^{iA(-1+s)} f(s)\, ds + \varphi \right) \right] \right.$$

$$+ A^{-1} e^{-A^{1/2}} \int_0^1 \left(e^{-(1-s)A^{1/2}} - e^{-(s+1)A^{1/2}} \right) g(s)\, ds$$

$$\left. + i \left(I - e^{-2A^{1/2}} \right) A^{-1} f(0) + A^{-1} \left(I - e^{-2A^{1/2}} \right) \int_0^1 e^{-sA^{1/2}} g(s)\, ds \right\}$$

operatör denklemi elde edilir. Burada,

$$\left(I - e^{-2A^{1/2}} \right) + iA^{-1/2} \left(I + e^{-2A^{1/2}} \right) - 2iA^{-1/2} e^{-\left(A^{1/2} - iA\right)}$$

operatörünün

$$T = \left[\left(I - e^{-2A^{1/2}} \right) + iA^{-1/2} \left(I + e^{-2A^{1/2}} \right) - 2iA^{-1/2} e^{-\left(A^{1/2} - iA\right)} \right]^{-1}$$

şeklinde tersi vardır ve

$$\left\|A^{-1/2}T\right\|_{H\to H}\leq M$$

eşitsizliği sağlanır.

(3.1) probleminin çözümü için gerekli olan, $u(0)$ için bir formül bulmaktır. Bunun için, T operatörünün sınırlı olduğu gösterilmelidir.

$A^{1/2}=B$ olsun. Burada,

$$\begin{aligned}A^{-1/2}T&=\left[\left(A^{1/2}-A^{1/2}e^{-2A^{1/2}}\right)+i\left(I+e^{-2A^{1/2}}\right)-2ie^{-\left(A^{1/2}-iA\right)}\right]^{-1}\\&=\left[\left(B-Be^{-2B}\right)+i\left(I+e^{-2B}\right)-2ie^{-\left(B-iB^2\right)}\right]^{-1}\end{aligned}$$

olduğundan

$$\left\|A^{-1/2}T\right\|_{H\to H}\leq\sup_{\delta\leq\mu<\infty}\frac{1}{\mu-\mu e^{-2\mu}+i\left(1+e^{-2\mu}\right)-2ie^{-\mu}e^{-i\mu^2}}$$

yazılır. Buradan, Euler formülü kullanılarak

$$\beta(\mu)=\mu-\mu e^{-2\mu}+2e^{-\mu}\sin\mu^2+i\left(I+e^{-2\mu}-2e^{-\mu}\cos\mu^2\right)$$

elde edilir. $\beta(\mu)$ fonksiyonun mutlak değeri alınırak

$$|\beta(\mu)|=\sqrt{\begin{array}{l}\mu^2+\mu^2e^{-4\mu}+4e^{-2\mu}\sin^2\mu^2-2\mu^2e^{-2\mu}+4\mu e^{-\mu}\sin\mu^2-4\mu e^{-3\mu}\sin\mu^2\\+1+e^{-4\mu}+4e^{-2\mu}\cos^2\mu^2+2e^{-2\mu}-4e^{-\mu}\cos\mu^2-4e^{-3\mu}\cos\mu^2\end{array}}$$

ya da

$$|\beta(\mu)|=\sqrt{\begin{array}{l}1+\mu^2+\left(1+\mu^2\right)e^{-\mu}+4e^{-2\mu}+2\left(1-\mu^2\right)e^{-2\mu}\\+4\sqrt{1+\mu^2}e^{-\mu}\left[\mu\left(\sqrt{1+\mu^2}\right)^{-1}\sin\mu^2-\left(\sqrt{1+\mu^2}\right)^{-1}\cos\mu^2\right]\\-4\sqrt{1+\mu^2}e^{-3\mu}\left[\mu\left(\sqrt{1+\mu^2}\right)^{-1}\sin\mu^2+\left(\sqrt{1+\mu^2}\right)^{-1}\cos\mu^2\right]\end{array}}$$

elde edilir. Burada,

$$\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}=\sin\alpha\quad\text{ve}\quad\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}=\cos\alpha$$

olarak seçilirse,

$$|\beta(\mu)|=\sqrt{\begin{array}{l}\left(1+\mu^2\right)+\left(1+\mu^2\right)e^{-4\mu}+4e^{-2\mu}+2\left(1-\mu^2\right)e^{-2\mu}\\-4\sqrt{1+\mu^2}e^{-\mu}\cos\left(\mu^2+\alpha\right)-4\sqrt{1+\mu^2}e^{-3\mu}\cos\left(\mu^2-\alpha\right)\end{array}}$$

$$\geq\sqrt{1+\mu^2+\left(1+\mu^2\right)e^{-4\mu}+2\left(1-\mu^2\right)e^{-2\mu}4\sqrt{1+\mu^2}e^{-\mu}-4\sqrt{1+\mu^2}e^{-3\mu}}$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi,

$$\psi(\mu)=\mu^2+\left(1+\mu^2\right)e^{-4\mu}+2\left(1-\mu^2\right)e^{-2\mu}4\sqrt{1+\mu^2}e^{-\mu}-4\sqrt{1+\mu^2}e^{-3\mu}$$

olarak gösterelim. O halde, $\mu \geq \delta$ için $\psi(\mu) > 0$ eşitsizliği göstermek yeterlidir. Yeterince büyük δ için söz konusu eşitsizliğin sağlandığı görülmektedir. Dolayısıyla,

$$\left\| A^{-1/2} T \right\|_{H \to H} \leq 1$$

olur. Böylece, $A^{-1/2}T$ operatörünün sınırlı olduğu ispatlanmıştır.

Öyleyse,

$$u(0) = A^{-1/2} T \left(I - e^{-2A^{1/2}} \right) \left\{ i \int_0^1 A^{-1/2} e^{-sA^{1/2}} g(s)\, ds - A^{-1/2} f(0) \right\} \tag{3.10}$$

$$+ T e^{-A^{1/2}} A^{-1/2} \left\{ 2 \int_0^{-1} e^{iA(-1+s)} f(s)\, ds - 2i\varphi \right.$$

$$\left. + \, i \int_0^1 \left(e^{-(1-s)A^{1/2}} - e^{-(s+1)A^{1/2}} \right) A^{-1/2} g(s)\, ds \right\}$$

dir. Böylece, (3.1) lokal olmayan sınır değer probleminin çözümü için (3.7), (3.9) ve (3.10) formülleri elde edilmiş olur.

Şimdi, Teorem 3.1 in ispatı verilecektir. İlk olarak, (3.2) kestirimi elde edilecektir. Öncelikle, (3.10) formülünü kullanarak

$$\| u(0) \|_H \leq \left\| A^{-1/2} T \right\|_{H \to H} \left\| I - e^{-2A^{1/2}} \right\|_{H \to H} \tag{3.11}$$

$$\times \left\{ |i| \int_0^1 \left\| e^{-sA^{1/2}} \right\|_{H \to H} \left\| A^{-1/2} g(s) \right\|_H ds + \left\| A^{-1/2} \right\|_{H \to H} \| f(0) \|_H \right\}$$

$$+ \left\| e^{-A^{1/2}} \right\|_{H \to H} \left\| A^{-1/2} T \right\|_{H \to H}$$

$$\times \left\{ 2 \int_0^{-1} \left\| e^{iA(-1+s)} \right\|_{H \to H} \| f(s) \|_H ds + 2 |i| \, \| \varphi \|_H \right.$$

$$\left. + \, |i| \int_0^1 \left(\left\| e^{-(1-s)A^{1/2}} \right\|_{H \to H} + \left\| e^{-(s+1)A^{1/2}} \right\|_{H \to H} \right) \left\| A^{-1/2} g(s) \right\|_H ds \right\}$$

ya da

$$\| u(0) \|_H \leq M \left[\| \varphi \|_H + \max_{-1 \leq t \leq 0} \| f(t) \|_H + \max_{0 \leq t \leq 1} \left\| A^{-1/2} g(t) \right\|_H \right] \tag{3.12}$$

eşitsizliği elde edilir. Sonra, (3.7) ve (3.9) formülleri kullanılarak

$$\| u(t) \|_H \leq \left\| e^{-tA} \right\|_{H \to H} \| u(0) \|_H + |i| \int_0^t \left\| e^{-i(t-s)A} \right\|_{H \to H} \| f(s) \|_H ds$$

$$\leq \| u(0) \|_H + \max_{-1 \leq t \leq 0} \| f(t) \|_H$$

$$\leq M \left[\| \varphi \|_H + \max_{-1 \leq t \leq 0} \| f(t) \|_H + \max_{0 \leq t \leq 1} \left\| A^{-1/2} g(t) \right\|_H \right], -1 \leq t \leq 0 \tag{3.13}$$

ve

$$\| u(t) \|_H \leq \left\| \left(I - e^{-2A^{1/2}} \right)^{-1} \right\|_{H \to H}$$

$$\times\left[\left(\left\|e^{-tA^{1/2}}\right\|_{H\to H}+\left\|e^{-(-t+2)A^{1/2}}\right\|_{H\to H}\right)\|u(0)\|_H\right.$$
$$+\left(\left\|e^{-(1-t)A^{1/2}}\right\|_{H\to H}+\left\|e^{-(t+1)A^{1/2}}\right\|_{H\to H}\right)$$
$$\left.\times\left(\left\|e^{iA}\right\|_{H\to H}\|u(0)\|_H+|i|\int_0^{-1}\left\|e^{i(1+s)A}\right\|_{H\to H}\|f(s)\|_H\,ds+\|\varphi\|_H\right)\right]$$
$$+\left\|\left(I-e^{-2A^{1/2}}\right)^{-1}\right\|_{H\to H}\left(\left\|e^{-(1-t)A^{1/2}}\right\|_{H\to H}+\left\|e^{-(t+1)A^{1/2}}\right\|_{H\to H}\right)$$
$$\times\frac{1}{2}\int_0^1\left(\left\|e^{-(1-s)A^{1/2}}\right\|_{H\to H}+\left\|e^{-(s+1)A^{1/2}}\right\|_{H\to H}\right)\left\|A^{-1/2}g(s)\right\|_{H\to H}ds$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^1\left(\left\|e^{-(t+s)A^{1/2}}\right\|_{H\to H}+\left\|e^{-|t-s|A^{1/2}}\right\|_{H\to H}\right)\left\|A^{-1/2}g(s)\right\|_H ds$$
$$\leq M\left[\|u(0)\|_H+\max_{-1\leq t\leq 0}\|f(t)\|_H+\|\varphi\|_H+\max_{0\leq t\leq 1}\left\|A^{-1/2}g(t)\right\|_H\right]$$
$$\leq M\left[\|\varphi\|_H+\max_{-1\leq t\leq 0}\|f(t)\|_H+\max_{0\leq t\leq 1}\left\|A^{-1/2}g(t)\right\|_H\right],0\leq t\leq 1 \tag{3.14}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Böylece, (3.13) ve (3.14) kestirimlerinin kullanılması ile (3.2) eşitsizliğinin sağlandığı ispat edilmiş olur.

İkinci olarak, (3.3) kestirimi elde edilecektir. Öncelikle, (3.10) formülüne $A^{1/2}$ operatörü uygulanırsa,

$$A^{1/2}u(0)=A^{-1/2}T\left(I-e^{-2A^{1/2}}\right)\left\{i\int_0^1 e^{-sA^{1/2}}g(s)\,ds-f(0)\right\} \tag{3.15}$$
$$+Te^{-A^{1/2}}A^{-1/2}\left\{2\int_0^{-1}e^{iA(-1+s)}A^{1/2}f(s)\,ds-2iA^{1/2}\varphi\right.$$
$$\left.+\,i\int_0^1\left(e^{-(1-s)A^{1/2}}-e^{-(s+1)A^{1/2}}\right)g(s)\,ds\right\}$$

denklemi elde edilir. (3.15) denkleminin normu alınırsa,

$$\left\|A^{1/2}u(0)\right\|_H\leq\left\|A^{-1/2}T\right\|_{H\to H}\left\|I-e^{-2A^{1/2}}\right\|_{H\to H}$$
$$\times\left\{|i|\int_0^1\left\|e^{-sA^{1/2}}\right\|_{H\to H}\|g(s)\|_H\,ds+\|f(0)\|_H\right\}$$
$$+\left\|e^{-A^{1/2}}\right\|_{H\to H}\left\|A^{-1/2}T\right\|_{H\to H}$$
$$\times\left\{2\int_0^{-1}\left\|e^{iA(-1+s)}\right\|_{H\to H}\left\|A^{1/2}f(s)\right\|_H ds+2|i|\left\|A^{1/2}\varphi\right\|_H\right.$$
$$\left.+\,|i|\int_0^1\left(\left\|e^{-(1-s)A^{1/2}}\right\|_{H\to H}+\left\|e^{-(s+1)A^{1/2}}\right\|_{H\to H}\right)\|g(s)\|_H\,ds\right\}$$
$$\leq M\left[\left\|A^{1/2}\varphi\right\|_H+\max_{-1\leq t\leq 0}\left\|A^{1/2}f(t)\right\|_H+\max_{0\leq t\leq 1}\|g(t)\|_H\right] \tag{3.16}$$

eşitsizliği bulunur. Daha sonra, (3.7) ve (3.9) formüllerine $A^{1/2}$ operatörü uygulanırsa,

$$A^{1/2}u(t) = e^{-tA}A^{1/2}u_0 - i\int_0^t e^{-i(t-s)A}A^{1/2}f(s)\,ds, -1 \le t \le 0 \tag{3.17}$$

ve

$$A^{1/2}u(t) = \left(I - e^{-2A^{1/2}}\right)^{-1}\left[\left(e^{-tA^{1/2}} - e^{-(-t+2)A^{1/2}}\right)A^{1/2}u_0\right. \tag{3.18}$$
$$\left. + \left(e^{-(1-t)A^{1/2}} - e^{-(t+1)A^{1/2}}\right)\left(e^{iA}A^{1/2}u_0 - i\int_0^{-1} e^{i(1+s)A}A^{1/2}f(s)\,ds + A^{1/2}\varphi\right)\right]$$
$$+ \left(I - e^{-2A^{1/2}}\right)^{-1}\left(e^{-(1-t)A^{1/2}} - e^{-(t+1)A^{1/2}}\right)$$
$$\times\frac{1}{2}\int_0^1\left(e^{-(1-s)A^{1/2}} - e^{-(s+1)A^{1/2}}\right)g(s)\,ds$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^1\left(e^{-(t+s)A^{1/2}} - e^{-|t-s|A^{1/2}}\right)g(s)\,ds, 0 \le t \le 1$$

denklemleri elde edilir. (3.17) ve (3.18) denklemlerinin normu alınırsa,

$$\left\|A^{1/2}u(t)\right\|_H \le \left\|e^{-tA}\right\|_{H\to H}\left\|A^{1/2}u(0)\right\|_H$$
$$+|i|\int_0^t \left\|e^{-i(t-s)A}\right\|_{H\to H}\left\|A^{1/2}f(s)\right\|_H ds$$
$$\le \left\|A^{1/2}u(0)\right\|_H + \max_{-1\le t\le 0}\left\|A^{1/2}f(t)\right\|_H$$
$$\le M\left[\left\|A^{1/2}\varphi\right\|_H + \max_{-1\le t\le 0}\left\|A^{1/2}f(t)\right\|_H + \max_{0\le t\le 1}\|g(t)\|_H\right], -1 \le t \le 0 \tag{3.19}$$

ve

$$\left\|A^{1/2}u(t)\right\|_H \le \left\|\left(I - e^{-2A^{1/2}}\right)^{-1}\right\|_{H\to H}$$
$$\times\left[\left(\left\|e^{-tA^{1/2}}\right\|_{H\to H} + \left\|e^{-(-t+2)A^{1/2}}\right\|_{H\to H}\right)\left\|A^{1/2}u(0)\right\|_H\right.$$
$$+\left(\left\|e^{-(1-t)A^{1/2}}\right\|_{H\to H} + \left\|e^{(t+1)A^{1/2}}\right\|_{H\to H}\right)$$
$$\times\left(\left\|e^{iA}\right\|_{H\to H}\left\|A^{1/2}u(0)\right\|_H\right.$$
$$\left.\left.\times\ |i|\int_0^{-1}\left\|e^{i(1+s)A}\right\|_{H\to H}\left\|A^{1/2}f(s)\right\|_H ds + \left\|A^{1/2}\varphi\right\|_H\right)\right]$$
$$+\left\|\left(I - e^{-2A^{1/2}}\right)^{-1}\right\|_{H\to H}\left(\left\|e^{-(1-t)A^{1/2}}\right\|_{H\to H} + \left\|e^{(t+1)A^{1/2}}\right\|_{H\to H}\right)$$
$$\times\frac{1}{2}\int_0^1\left(\left\|e^{-(1-s)A^{1/2}}\right\|_{H\to H} + \left\|e^{(s+1)A^{1/2}}\right\|_{H\to H}\right)\|g(s)\|_{H\to H}\,ds$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^1\left(\left\|e^{-(t+s)A^{1/2}}\right\|_{H\to H} + \left\|e^{-|t-s|A^{1/2}}\right\|_{H\to H}\right)\|g(s)\|_H\,ds$$

$$\leq M\left[\left\|A^{1/2}u\left(0\right)\right\|_{H}+\max_{-1\leq t\leq 0}\left\|A^{1/2}f\left(t\right)\right\|_{H}+\left\|A^{1/2}\varphi\right\|_{H}+\max_{0\leq t\leq 1}\left\|g\left(t\right)\right\|_{H}\right]$$

$$\leq M\left[\left\|A^{1/2}\varphi\right\|_{H}+\max_{-1\leq t\leq 0}\left\|A^{1/2}f\left(t\right)\right\|_{H}+\max_{0\leq t\leq 1}\left\|g\left(t\right)\right\|_{H},0\leq t\leq 1\right] \tag{3.20}$$

eşitsizlikleri elde edilir. (3.19) ve (3.20) kestirimleri birleştirilerek, (3.3) eşitsizliği ispatlanmış olur.

Üçüncü olarak, (3.4) kestirimi elde edilecektir. (3.7) formülüne kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$u\left(t\right)=e^{-tA}u_{0}-A^{-1}\left\{\left[f\left(t\right)-e^{-itA}f\left(0\right)\right]-\int_{0}^{t}e^{-i(t-s)}f'\left(s\right)ds\right\},-1\leq t\leq 0 \tag{3.21}$$

bulunur. (3.9) formülüne kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\begin{aligned}u\left(t\right)=\left(I-e^{-2A^{1/2}}\right)^{-1}&\left[\left(e^{-tA^{1/2}}-e^{-(-t+2)A^{1/2}}\right)u_{0}\right.\\&+\left(e^{-(1-t)A^{1/2}}-e^{-(t+1)A^{1/2}}\right)\\\times\left(e^{iA}u_{0}-A^{-1}\left\{\left[f\left(-1\right)-e^{iA}f\left(0\right)\right]\right.\right.&\left.\left.\left.-\int_{0}^{-1}e^{i(1+s)A}f'\left(s\right)ds+\varphi\right\}\right)\right]\\+\left(I-e^{-2A^{1/2}}\right)^{-1}&\left(e^{-(1-t)A^{1/2}}-e^{-(t+1)A^{1/2}}\right)\\\times\frac{1}{2}A^{-1}\left\{\left(I-e^{-2A^{1/2}}\right)g\left(1\right)\right.&\left.-\int_{0}^{1}\left(e^{-(1-s)A^{1/2}}-e^{-(s+1)A^{1/2}}\right)g'\left(s\right)ds\right\}\\-\frac{1}{2}A^{-1}&\left\{\left[e^{-(1+t)A^{1/2}}-e^{-|1-t|A^{1/2}}\right]g\left(1\right)\right.\\&\left.-\int_{0}^{1}\left(e^{-(t+s)A^{1/2}}-e^{-|t-s|A^{1/2}}\right)g'\left(s\right)ds\right\},0\leq t\leq 1\end{aligned} \tag{3.22}$$

elde edilir. Son olarak, (3.10) formülüne kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\begin{aligned}u\left(0\right)=A^{-1/2}T&\left(I-e^{-2A^{1/2}}\right)\\\times\left\{-iA^{-1}\left[\left(e^{-A^{1/2}}g\left(1\right)-g\left(0\right)\right)\right.\right.&\left.\left.-\int_{0}^{1}e^{-sA^{1/2}}g'\left(s\right)ds\right]-A^{-1/2}f\left(0\right)\right\}\\+A^{-1/2}Te^{-A^{1/2}}&\left\{2A^{-1}\left[\left(e^{-2iA}f\left(-1\right)-e^{-iA}f\left(0\right)\right)\right.\right.\\&\left.-\int_{0}^{-1}e^{iA(-1+s)}f'\left(s\right)ds\right]-2i\varphi\\+\frac{iA^{-1}}{2}\left[\left(I-e^{-2A^{1/2}}\right)g\left(1\right)\right.&\left.\left.-\int_{0}^{1}\left(e^{-(1-s)A^{1/2}}-e^{-(s+1)A^{1/2}}\right)g'\left(s\right)ds\right]\right\}\end{aligned} \tag{3.23}$$

denklemi yazılır. Şimdi, (3.21), (3.22) ve (3.23) denklemlerine, sırasıyla, A operatörünü uygulayalım. Böylece,

$$Au\left(t\right)=e^{-tA}Au_{0}-\left\{\left[f\left(t\right)-e^{-itA}f\left(0\right)\right]-\int_{0}^{t}e^{-i(t-s)}f'\left(s\right)ds\right\},-1\leq t\leq 0, \tag{3.24}$$

$$Au\left(t\right)=\left(I-e^{-2A^{1/2}}\right)^{-1}\left[\left(e^{-tA^{1/2}}-e^{-(-t+2)A^{1/2}}\right)Au_{0}\right.\tag{3.25}$$
$$+\left(e^{-(1-t)A^{1/2}}-e^{-(t+1)A^{1/2}}\right)$$
$$\left.\times\left(e^{iA}Au_{0}-\left\{\left[f\left(-1\right)-e^{iA}f\left(0\right)\right]-\int_{0}^{-1}e^{i(1+s)A}f'\left(s\right)ds+\varphi\right\}\right)\right]$$
$$+\left(I-e^{-2A^{1/2}}\right)^{-1}\left(e^{-(1-t)A^{1/2}}-e^{-(t+1)A^{1/2}}\right)$$
$$\times\frac{1}{2}\left\{\left(I-e^{-2A^{1/2}}\right)g\left(1\right)-\int_{0}^{1}\left(e^{-(1-s)A^{1/2}}-e^{-(s+1)A^{1/2}}\right)g'\left(s\right)ds\right\}$$
$$-\frac{1}{2}\left\{\left[e^{-(1+t)A^{1/2}}-e^{-|1-t|A^{1/2}}\right]g\left(1\right)\right.$$
$$\left.-\int_{0}^{1}\left(e^{-(t+s)A^{1/2}}-e^{-|t-s|A^{1/2}}\right)g'\left(s\right)ds\right\},0\leq t\leq 1$$

ve

$$Au\left(0\right)=A^{-1/2}T\left(I-e^{-2A^{1/2}}\right)\tag{3.26}$$
$$\times\left\{-i\left[\left(e^{-A^{1/2}}g\left(1\right)-g\left(0\right)\right)-\int_{0}^{1}e^{-sA^{1/2}}g'\left(s\right)ds\right]-A^{-1/2}f\left(0\right)\right\}$$
$$+A^{-1/2}Te^{-A^{1/2}}\left\{2\left[\left(e^{-2iA}f\left(-1\right)-e^{-iA}f\left(0\right)\right)\right.\right.$$
$$\left.-\int_{0}^{-1}e^{iA(-1+s)}f'\left(s\right)ds\right]-2iA\varphi$$
$$\left.+\frac{i}{2}\left[\left(I-e^{-2A^{1/2}}\right)g\left(1\right)-\int_{0}^{1}\left(e^{-(1-s)A^{1/2}}-e^{-(s+1)A^{1/2}}\right)g'\left(s\right)ds\right]\right\}$$

elde edilir. (3.25) ve (3.26) formüllerinde bulunan $g\left(1\right)$ ve $f\left(-1\right)$ ifadelerinin yerine

$$g\left(1\right)=g\left(0\right)+\int_{0}^{1}g'\left(s\right)ds$$

ve

$$f\left(-1\right)=f\left(0\right)+\int_{-1}^{0}f'\left(s\right)ds$$

yazılabilir. Bu bilgi doğrultusunda (3.26) denkleminin norumu alınırsa,

$$\left\|Au\left(0\right)\right\|_{H}\leq\left\|A^{-1/2}T\right\|_{H\to H}\left\|I-e^{-2A^{1/2}}\right\|_{H\to H}$$
$$\times\left\{|i|\left[\left(\left\|e^{-A^{1/2}}\right\|_{H\to H}\left(\left\|g\left(0\right)\right\|_{H}+\int_{0}^{1}\left\|g'\left(s\right)\right\|_{H}ds\right)+\left\|g\left(0\right)\right\|_{H}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\int_{0}^{1}\left\|e^{-sA^{1/2}}\right\|_{H\to H}\left\|g'\left(s\right)\right\|_{H}ds\right]+\left\|A^{-1/2}\right\|_{H\to H}\left\|f\left(0\right)\right\|_{H}\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left\|A^{-1/2}T\right\|_{H\to H}\left\|e^{-A^{1/2}}\right\|_{H\to H}\\
&\times\left\{2\left[\left(\left\|e^{-2iA}\right\|_{H\to H}\left(\|f(0)\|_H+\int_{-1}^{0}\|f'(s)\|_H\,ds\right)+\left\|e^{-iA}\right\|_{H\to H}\|f(0)\|_H\right)\right.\right.\\
&\left.+\int_{0}^{-1}\left\|e^{iA(-1+s)}\right\|_{H\to H}\|f'(s)\|_H\,ds\right]+2|i|\,\|A\varphi\|_H\\
&+\frac{|i|}{2}\left[\left\|I-e^{-2A^{1/2}}\right\|_{H\to H}\left(\|g(0)\|_H+\int_{0}^{1}\|g'(s)\|_H\,ds\right)\right.\\
&\left.\left.+\int_{0}^{1}\left(\left\|e^{-(1-s)A^{1/2}}\right\|_{H\to H}+\left\|e^{-(s+1)A^{1/2}}\right\|_{H\to H}\right)\|g'(s)\|_H\,ds\right]\right\}\\
&\le M\left[\|A\varphi\|_H+\|g(0)\|_H+\|f(0)\|_H\right.\\
&\left.+\max_{0\le t\le 1}\|g'(t)\|_H+\max_{-1\le t\le 0}\|f'(t)\|_H\right]
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

kestirimi elde edilir. Benzer şekilde, (3.24) ve (3.25) denklemlerinin normu alınırsa,

$$
\begin{aligned}
\|Au(t)\|_H &\le \left\|e^{-tA}\right\|_{H\to H}\|Au_0\|_H\\
&+\left\{\left[\|f(t)\|_H+\left\|e^{-itA}\right\|_H\|f(0)\|_H\right]\right.\\
&\left.+\int_0^t\left\|e^{-i(t-s)}\right\|_{H\to H}\|f'(s)\|_H\,ds\right\}\\
&\le M\left[\|Au_0\|_H+\|f(0)\|_H+\max_{-1\le t\le 0}\|f'(t)\|_H\right]\\
&\le M\left[\|A\varphi\|_H+\|g(0)\|_H+\|f(0)\|_H\right.\\
&\left.+\max_{0\le t\le 1}\|g'(t)\|_H+\max_{-1\le t\le 0}\|f'(t)\|_H\right],\ -1\le t\le 0
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\|Au(t)\|_H &\le \left\|\left(I-e^{-2A^{1/2}}\right)^{-1}\right\|_{H\to H}\\
&\times\left[\left(\left\|e^{-tA^{1/2}}\right\|_{H\to H}+\left\|e^{-(-t+2)A^{1/2}}\right\|_{H\to H}\right)\|Au_0\|_H\right.\\
&+\left(\left\|e^{-(1-t)A^{1/2}}\right\|_{H\to H}+\left\|e^{-(t+1)A^{1/2}}\right\|_{H\to H}\right)\left(\left\|e^{iA}\right\|_{H\to H}\|Au_0\|_H\right.\\
&+\left\{\left[\left(\|f(0)\|_H+\int_{-1}^{0}\|f'(s)\|_H\,ds\right)+\left\|e^{iA}\right\|_{H\to H}\|f(0)\|_H\right]\right.\\
&\left.\left.\left.+\int_0^{-1}\left\|e^{i(1+s)A}\right\|_{H\to H}\|f'(s)\|_H\,ds+\|\varphi\|_H\right\}\right)\right]\\
&+\left\|\left(I-e^{-2A^{1/2}}\right)^{-1}\right\|_{H\to H}\left(\left\|e^{-(1-t)A^{1/2}}\right\|_{H\to H}+\left\|e^{-(t+1)A^{1/2}}\right\|_{H\to H}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\times\frac{1}{2}\left\{\left\|I-e^{-2A^{1/2}}\right\|_{H\to H}\left(\|g(0)\|_H+\int_0^1\|g'(s)\|_H\,ds\right)\right.\\
&\left.+\int_0^1\left(\left\|e^{-(1-s)A^{1/2}}\right\|_{H\to H}+\left\|e^{-(s+1)A^{1/2}}\right\|_{H\to H}\right)\|g'(s)\|_H\,ds\right\}\\
&+\frac{1}{2}\left\{\left[\left\|e^{-(1+t)A^{1/2}}\right\|_{H\to H}+\left\|e^{-|1-t|A^{1/2}}\right\|_{H\to H}\right]\right.\\
&\times\left(\|g(0)\|_H+\int_0^1\|g'(s)\|_H\,ds\right)\\
&\left.+\int_0^1\left(\left\|e^{-(t+s)A^{1/2}}\right\|_{H\to H}+\left\|e^{-|t-s|A^{1/2}}\right\|_{H\to H}\right)\|g'(s)\|_H\,ds\right\}\\
&\le M\left[\|Au_0\|_H+\|\varphi\|_H+\|g(0)\|_H+\|f(0)\|_H\right.\\
&\left.+\max_{0\le t\le 1}\|g'(t)\|_H+\max_{-1\le t\le 0}\|f'(t)\|_H\right]\\
&\le M\left[\|A\varphi\|_H+\|g(0)\|_H+\|f(0)\|_H\right.\\
&\left.+\max_{0\le t\le 1}\|g'(t)\|_H+\max_{-1\le t\le 0}\|f'(t)\|_H\right],0\le t\le 1
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

eşitsizlikleri elde edilir. (3.27), (3.28) ve (3.29) eşitsizlikleri kullanılarak, (3.4) kestirimi elde edilir. Böylece, Teorem 3.1 in ispatı tamamlanmış olur.

3.3 Uygulamalar

Şimdi, Temel Teorem 3.1 için bir uygulama verilecektir. İlk olarak,

$$
\begin{cases}
-v_{yy}+(a(x)v_x)_x-\delta v=g(y,x), 0<y<1,\ 0<x<1,\\
iv_y-(a(x)v_x)_x+\delta v=f(y,x), -1<y<0,\ 0<x<1,\\
v(1,x)=v(-1,x)+\varphi(x), 0\le x\le 1,\\
v(y,0)=v(y,1), v_x(y,0)=v_x(y,1), -1\le y\le 1,\\
v(0+,x)=v(0-,x), v_y(0+,x)=v_y(0-,x), 0\le x\le 1
\end{cases}
\tag{3.30}
$$

karma tipli eliptik-Schrödinger denklemini ele alalım. Burada, $\delta>0$ olmak üzere bir sabittir. (3.30) problemi $v(y,x)$ şeklinde düzgün (smooth) tek bir çözüme sahiptir. Bunun için $a(x)\ge a>0$, $(x\in(0,1))$, $\varphi(x)$ $(x\in[0,1])$, $g(y,x)$ $(y\in[0,1], x\in[0,1])$ ve $f(y,x)$ $(y\in[-1,0], x\in[0,1])$ şeklinde fonksiyonlar olmalıdır.

$L_2[0,1]$ Hilbert uzayının $[0,1]$ aralığında tüm kare integrallenebilir fonksiyonlarını ve $W_2^1[0,1]$, $W_2^2[0,1]$ Hilbert uzaylarını sırasıyla aşağıdaki normlarla

$$
\|\varphi\|_{W_2^1[0,1]}=\left(\int_0^1|\varphi(x)|^2\,dx\right)^{1/2}+\left(\int_0^1|\varphi_x(x)|^2\,dx\right)^{1/2},
$$

$$\|\varphi\|_{W_2^2[0,1]} = \left(\int_0^1 |\varphi(x)|^2 \, dx\right)^{1/2} + \left(\int_0^1 |\varphi_{xx}(x)|^2 \, dx\right)^{1/2},$$

tanımlayalım. Bu koşullar altında (3.30) karma tipli problemi, H Hilbert uzayında kendine eş pozitif tanımlı bir A operatörü ile tanımlanan, (3.1) lokal olmayan sınır-değer problemine indirgenebilir.

Teorem 3.2. (3.30) lokal olmayan sınır değer probleminin çözümü için aşağıdaki kararlılık kestirimleri sağlanacaktır:

$$\max_{-1\le y\le 1} \|v_y(y,\cdot)\|_{L_2[0,1]} + \max_{-1\le y\le 1} \|v(y,\cdot)\|_{W_2^1[0,1]} \le M \Big[\|\varphi\|_{W_2^1[0,1]}$$

$$+ \max_{0\le y\le 1} \|g(y,\cdot)\|_{L_2[0,1]} + \max_{-1\le y\le 0} \|f(y,\cdot)\|_{W_2^1[0,1]}\Big],$$

$$\max_{-1\le y\le 1} \|v(y,\cdot)\|_{W_2^2[0,1]} + \max_{-1\le y\le 0} \|v_y(y,\cdot)\|_{L_2[0,1]} + \max_{0\le y\le 1} \|v_{yy}(y,\cdot)\|_{L_2[0,1]}$$

$$\le M \Big[\|\varphi\|_{W_2^2[0,1]} + \|g(0,\cdot)\|_{L_2[0,1]}$$

$$+ \max_{0\le y\le 1} \|g_y(y,\cdot)\|_{L_2[0,1]} + \|f(0,\cdot)\|_{L_2^1[0,1]} + \max_{-1\le y\le 0} \|f_y(y,\cdot)\|_{L_2^1[0,1]}\Big].$$

Burada M, $g(y,x)$ $(y \in [0,1], x \in [0,1])$, $f(y,x)$ $(y \in [-1,0], x \in [0,1])$ den bağımsızdır fakat, aynı zamanda $\varphi(x)$ $(x \in [0,1])$ dir.

Bu teoremin ispatı Teorem 3.1 ve (3.30) problemi tarafından oluşturulan operatörün simetri özelliğine dayanmaktadır.

İkinci olarak, çok boyutlu eliptik-Schrödinger denklemi için

$$\begin{cases} -v_{yy} + \sum\limits_{r=1}^{p} (a_r(x) v_{x_r})_{x_r} = f(y,x), 0 \le y \le 1, \\ x = (x_1, \cdots, x_p) \in \Omega, \\ iv_y - \sum\limits_{r=1}^{p} (a_r(x) v_{x_r})_{x_r} = g(y,x), -1 \le y \le 0, \\ x = (x_1, \cdots, x_p) \in \Omega, \\ v(1,x) = v(-1,x) + \varphi(x), x \in \overline{\Omega}, \\ u(y,x) = 0, x \in S, -1 \le y \le 1 \end{cases} \tag{3.31}$$

karma tipli lokal olmayan sınır-değer problemini ele alalım. Burada, Ω, p-boyutlu Euclidean uzayı $\mathbb{R}^p$ de,

$$(x : x = (x_1, \cdots, x_p), 0 < x_k < 1, 1 \le k \le p)$$

S ve $\overline{\Omega} = \Omega \cup S$ tarafından sınırlanan bir açık birim küptür. Burada, $a_r(x), (x \in \Omega), \varphi(x)$ $(x \in \overline{\Omega})$ ve $g(y,x)$ $(y \in (0,1), x \in \Omega), f(y,x)$ $(y \in (-1,0), x \in \Omega)$ ifadeleri $[0,1] \times \Omega$ de verilen düzgün fonksiyonlar ve $a_r(x) \geq a > 0$ dir.

$L_2(\overline{\Omega})$ Hilbert uzayının $\overline{\Omega}$ üzerinde tüm kare integrallanebilir fonksiyonlarını

$$\|f\|_{L_2(\overline{\Omega})} = \left\{ \int \cdots \int_{x \in \overline{\Omega}} |f(x)|^2 dx_1 \cdots dx_p \right\}^{1/2}$$

ve $W_2^1\left(\overline{\Omega}\right)$, $W_2^2\left(\overline{\Omega}\right)$ uzaylarını sırasıyla aşağıdaki normlarla

$$\|\varphi\|_{W_2^1(\overline{\Omega})} = \|\varphi\|_{L_2(\overline{\Omega})} + \left\{ \int \cdots \int_{x \in \overline{\Omega}} \sum_{r=1}^{p} |\varphi_{x_r}|^2 dx_1 \cdots dx_p \right\}^{1/2},$$

$$\|\varphi\|_{W_2^2(\overline{\Omega})} = \|\varphi\|_{L_2(\overline{\Omega})} + \left\{ \int \cdots \int_{x \in \overline{\Omega}} \sum_{r=1}^{p} |\varphi_{x_r x_r}|^2 dx_1 \cdots dx_p \right\}^{1/2}$$

tanımlayalım. (3.31) problemi düzgün $a_r(x), f(y,x)$ ve $g(y,x)$ fonksiyonları için $v(y,x)$ biçiminde düzgün ve tek çözüme sahiptir. Bu koşullar altında (3.31) karma tipli problemi, H Hilbert uzayında kendine eş pozitif tanımlı bir A operatörü ile tanımlanan, (3.1) lokal olmayan sınır-değer problemine indirgenebilir.

Teorem 3.3. Aşağıdaki kararlılık kestirimleri

$$\max_{-1 \leq y \leq 1} \|v_y(y,\cdot)\|_{L_2(\overline{\Omega})} + \max_{-1 \leq y \leq 1} \|v(y,\cdot)\|_{W_2^1(\overline{\Omega})} \leq M \left[\|\varphi\|_{W_2^1(\overline{\Omega})} \right.$$

$$\left. + \max_{0 \leq y \leq 1} \|g(y,\cdot)\|_{L_2(\overline{\Omega})} + \max_{-1 \leq y \leq 0} \|f(y,\cdot)\|_{W_2^1(\overline{\Omega})} \right],$$

$$\max_{-1 \leq y \leq 1} \|v(y,\cdot)\|_{W_2^2(\overline{\Omega})} + \max_{-1 \leq y \leq 0} \|v_y(y,\cdot)\|_{L_2(\overline{\Omega})} + \max_{0 \leq y \leq 1} \|v_{yy}(y,\cdot)\|_{L_2(\overline{\Omega})}$$

$$\leq M \left[\|\varphi\|_{W_2^2(\overline{\Omega})} + \|g(0,\cdot)\|_{L_2(\overline{\Omega})} \right.$$

$$\left. + \max_{0 \leq y \leq 1} \|g_y(y,\cdot)\|_{L_2(\overline{\Omega})} + \|f(0,\cdot)\|_{L_2^1(\overline{\Omega})} + \max_{-1 \leq y \leq 0} \|f_y(y,\cdot)\|_{L_2^1(\overline{\Omega})} \right],$$

(3.31) lokal olmayan sınır-değer probleminin çözümleri için sağlanır. Burada M, $g\left(y,x\right)$ $\left(y \in [0,1], x \in [0,1]\right)$, $f\left(y,x\right)$ $\left(y \in [-1,0], x \in [0,1]\right)$ ve $\varphi\left(x\right)$ $\left(x \in [0,1]\right)$ den bağımsızdır.

Teorem 3.3 ün ispatı Teorem 3.1 e, (3.31) problemi tarafından tanımlanan operatörün simetri özelliğine ve aşağıdaki $L_2\left(\overline{\Omega}\right)$ uzayında eliptik diferensiyel problemin çözümünün koersiv eşitsizliğine dayanmaktadır [Sobolevskii, P. E., 1975].

Teorem 3.4. Aşağıdaki

$$-\sum_{r=1}^{p}\left(a_r(x)u_{x_r}\right)_{x_r}=\omega\left(x\right),x\in\Omega,$$

$$u\left(x\right)=0,x\in S,$$

eliptik diferansiyel problemin çözümü için

$$\sum_{r=1}^{p}\left\|u_{x_rx_r}\right\|_{L_2\left(\overline{\Omega}\right)}\leq M\left\|\omega\right\|_{L_2\left(\overline{\Omega}\right)}$$

koersiv eşitsizliği sağlanmaktadır.

4 ELİPTİK-SCHRÖDINGER FARK DENKLEMLERİ

Bu bölümde, (3.1) sınır-değer problemi ile bu problemin nümerik çözümleri için

$$\begin{cases} -\tau^{-2}\left(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}\right)+Au_k=g_k, \\ g_k=g\left(t_k\right),\ t_k=k\tau, 1\leq k\leq N-1, \\ i\tau^{-1}\left(u_k-u_{k-1}\right)-Au_{k-1}=f_k, f_k=f(t_{k-1}), \\ t_{k-1}=(k-1)\tau, -(N-1)\leq k\leq 0, \\ u_N=u_{-N}+\ \mu, u_1-u_0=u_0-u_{-1} \end{cases} \tag{4.1}$$

birinci basamaktan doğruluklu fark şeması ve

$$\begin{cases} -\tau^{-2}\left(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}\right)+Au_k=g_k, \\ g_k=g\left(t_k\right),\ t_k=k\tau, 1\leq k\leq N-1, \\ i\tau^{-1}\left(u_k-u_{k-1}\right)-\dfrac{1}{2}\left(Au_{k-1}+Au_k\right)=f_k, f_k=f(t_{k-\frac{1}{2}}), \\ t_{k-\frac{1}{2}}=\left(k-\dfrac{1}{2}\right)\tau, -(N-1)\leq k\leq 0, \\ u_N=u_{-N}+\ \mu, u_2-4u_1+3u_0=-3u_0+4u_{-1}-u_{-2} \end{cases} \tag{4.2}$$

ikinci basamaktan doğruluklu fark şemaları incelenmiştir. Bilindiği gibi, H Hilbert uzayında kendine eş pozitif tanımlı A diferansiyel operatörlü bir lokal olmayan sınır-değer probleminin bir değişkenli diskritizasyon (discretization) fark şemalarını araştırmak demek, H_h Hilbert uzaylarında h'ye $(0<h\leq h_0)$ göre düzgün kendine eş pozitif tanımlı A_h fark operatörlü çok değişkenli diskritizasyon fark şemalarını araştırmak demektir.

Teorem 4.1. Eğer $\varphi\in D(A)$ ve $f\left(0\right)\in D\left(A^{1/2}\right)$ ise, bu durumda (4.1) ve (4.2) fark şemalarının çözümü için

$$\max_{-N\leq k\leq N}\left\|u_k\right\|_H\leq M\left[\left\|\varphi\right\|_H+\max_{-(N-1)\leq k\leq 1}\left\|f_k\right\|_H+\max_{1\leq k\leq N}\left\|A^{-1/2}g_k\right\|_H\right] \tag{4.3}$$

$$\max_{-N\leq k\leq N}\left\|A^{1/2}u_k\right\|_H\leq M\left[\left\|A^{1/2}\varphi\right\|_H\right. \tag{4.4}$$

$$\left.+\max_{-(N-1)\leq k\leq 1}\left\|A^{1/2}f_k\right\|_H+\max_{1\leq k\leq N-1}\left\|g_k\right\|_H\right],$$

$$\max_{1\leq k\leq N-1}\left\|\tau^{-2}\left(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}\right)\right\|_H \tag{4.5}$$

$$+\max_{-(N-1)\leq k\leq 0}\left\|\tau^{-1}\left(u_k-u_{k-1}\right)\right\|_H+\max_{-N\leq k\leq N}\|Au_k\|_H$$

$$\leq M\left[\|A\varphi\|_H+\|g_0\|_H+\|f_0\|_H\right.$$

$$\left.+\max_{1\leq k\leq N-1}\left\|\tau^{-1}\left(g_k-g_{k-1}\right)\right\|_H+\max_{-(N-1)\leq k\leq 1}\left\|\tau^{-1}\left(f_k-f_{k-1}\right)\right\|_H\right]$$

kararlılık kestirimleri sağlanır. Burada, M katsayısı τ, g_k, $1\leq k<N$, f_k, $-N<k\leq 0$ ve φ den bağımsızdır.

Teorem 4.1 in ispatı, Temel Teorem 3.1 e benzer bir biçimde yapılabilmekte olup, söz konusu ispat başka bir çalışmaya bırakılmıştır.

5 NÜMERİK ANALİZ

Bu bölümde, fark şemalarının doğruluğunu gösteren (5.1) probleminin çözümü için nümerik denemeler verilmiştir. Genellikle, kararlılık eşitsizliklerinde bulunan sabitler için keskin bir tahmin belirlenememektedir. Bunun için, aşağıda verilen lokal olmayan sınır-değer problemi için nümerik örnekler

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xx} = g\left(t, x\right), 0 < t < 1, 0 < x < 1, \\ g\left(t, x\right) = e^{-t^2}\left[-2\left(1-2t^2\right)\left(-\frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2} - \frac{5}{12}\right) + \left(1-x^2\right)\right], \\ iu_t + u_{xx} = f\left(t, x\right), -1 < t < 0, 0 < x < 1, \\ f\left(t, x\right) = e^{-t^2}\left[-2it\left(-\frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2} - \frac{5}{12}\right) + \left(1-x^2\right)\right], \\ u(0^+, x) = u(0^-, x), u_t(0^+, x) = u_t(0^-, x), 0 \le x \le 1, \\ u\left(1, x\right) = u\left(-1, x\right), 0 \le x \le 1, \\ u_x(t, 0) = u(t, 1) = 0, -1 \le t \le 1 \end{cases} \tag{5.1}$$

bir boyutlu eliptik-Schrödinger denklemi için verilmiştir. Bu probleme karşılık gelen kararlı birinci basamaktan doğruluklu fark şeması

$$\begin{cases} \frac{u_n^{k+1} - 2u_n^k + u_n^{k-1}}{\tau^2} + \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} = g(t_k, x_n), \\ x_n = nh, t_k = k\tau, 1 \le k \le N-1, 1 \le n \le M-1, \\ i\frac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} + \frac{u_{n+1}^{k-1} - 2u_n^{k-1} + u_{n-1}^{k-1}}{h^2} = f(t_{k-1}, x_n), \\ x_n = nh, t_k = k\tau, -N + \ 1 \le k \le 0, 1 \le n \le M-1, \\ u_n^1 - u_n^0 = u_n^0 - u_n^{-1}, 1 \le n \le M-1, \\ u_n^N = u_n^{-N}, 0 \le n \le M, \\ u_0^k = u_1^k, u_M^k = u_{M-1}^k, -N \le k \le N \end{cases} \tag{5.2}$$

dir. Burada, (5.2) fark şemasının A_h^x tarafından oluşturulduğuna dikkat ediniz. Böylece, matris formundaki basit denklem sistemini elde ederiz:

$$\begin{cases} AU_{n+1} + BU_n + CU_{n-1} = D\varphi_n, 1 \le n \le M-1, \\ U_0 = U_1, U_M = U_{M-1}. \end{cases} \tag{5.3}$$

Burada,

$$A=\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ a&a&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&a&a&0&0&0&0&0&0&0&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&a&a&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&b&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&b&0&0&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&b&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&b&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}_{(2N+1)\times(2N+1)},$$

$$B=\begin{bmatrix} -1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ c&p&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&c&p&0&0&0&0&0&0&0&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&c&p&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&d&e&d&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&d&e&d&0&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&0&0&0&0&d&e&d&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&d&e&d\\ 0&0&0&1&-4&6&-4&1&0&0&0 \end{bmatrix}_{(2N+1)\times(2N+1)},$$

$$C=A, D=\begin{bmatrix} 1&0&\cdots&0\\ 0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&0&\cdots&1 \end{bmatrix}_{(2N+1)\times(2N+1)}$$

dir. Ayrıca,

$$\varphi_n^k=\begin{cases} 0, k=-N,\\ f(t_{k-1},x_n), -N+1\le k\le 0,\\ g(t_k,x_n),\ 0\le k\le N-1,\\ 0,\ k=N, \end{cases}$$

$$\varphi_n = \begin{bmatrix} \varphi_n^{-N} \\ \varphi_n^{-N+1} \\ \vdots \\ \varphi_n^{0} \\ \varphi_n^{1} \\ \vdots \\ \varphi_n^{N} \end{bmatrix}_{(2N+1)\times 1}, U_s = \begin{bmatrix} U_s^{-N} \\ U_s^{-N+1} \\ \vdots \\ U_s^{0} \\ U_s^{1} \\ \vdots \\ U_s^{N-1} \\ U_s^{N} \end{bmatrix}_{(2N+1)\times(1)}, s = n-1, n, n+1$$

dir. Aynı zamanda burada,

$$a = \frac{1}{h^2}, b = -\frac{i}{\tau} - \frac{2}{h^2}, c = \frac{i}{\tau}, d = \frac{1}{\tau^2}, e = -\frac{2}{\tau^2} - \frac{2}{h^2}$$

dir. Bu sistem, [Samarskii, A. A. ve Nikolaev, E. S., 1989] tarafından kullanılmıştır. (5.3) matris denklemini çözmek için, iyileştirilmiş Gauss yok etme yöntemini kullanacağız. Böylece, (5.3) ün çözümünü aşağıdaki formla araştırmış oluruz:

$$U_j = \alpha_{j+1} U_{j+1} + \beta_{j+1}, j = M-1, \cdots, 2, 1, \ u_M = 0.$$

Burada, $[\alpha_j]_{(2N+1)\times(2N+1)}$ ve $\left[\beta_j\right]_{(2N+1)\times 1}$ matrisler,

$$\begin{cases} \alpha_{j+1} = -\left(B_n + C_n \alpha_j\right)^{-1} A_n, n = 1, \cdots, M-1, \\ \beta_{j+1} = \left(B_n + C_n \alpha_j\right)^{-1} \left(D\varphi_j - C_n \beta_j\right), j = 1, \cdots, M-1 \end{cases}$$

formülleriyle tanımlanır. Burada, α_1 birim ve β_1 sıfır matrislerdir.

İkinci olarak, Crank-Nicholson fark şeması tarafından (5.1) problemi için oluşturulan (4.2) ikinci basamaktan doğruluklu fark şeması uygulanır ve aşağıdaki temel formül

$$\frac{-3u(0) + 4u(h) - u(2h)}{2h} - u'(0) = O\left(h^2\right)$$

kullanırsa,

$$\begin{cases} \dfrac{u_n^{k+1} - 2u_n^k + u_n^{k-1}}{\tau^2} + \dfrac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} = g(t_k, x_n), \\ x_n = nh, t_k = k\tau, 1 \le k \le N-1, 1 \le n \le M-1, \\ i\dfrac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} + \dfrac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{2h^2} + \dfrac{u_{n+1}^{k-1} - 2u_n^{k-1} + u_{n-1}^{k-1}}{2h^2} = f(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n), \\ x_n = nh, t_k = k\tau, -N + \ 1 \le k \le 0, 1 \le n \le M-1, \\ -u_n^2 + 4u_n^1 - 3u_n^0 = 3u_n^0 - 4u_n^{-1} + u_n^{-2}, 1 \le n \le M-1, \\ u_0^k = u_1^k, u_M^k = u_{M-1}^k, -N \le k \le N \end{cases} \tag{5.4}$$

fark şeması elde edilir. Böylece, matris formundaki denklem sistemini elde ederiz:

$$\begin{cases} AU_{n+1} + BU_n + CU_{n-1} = D\varphi_n, 1 \leq n \leq M-1, \\ \\ U_0 = U_1, U_M = U_{M-1}. \end{cases}$$

Burada,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(2N+1)\times(2N+1)},$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ c & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & c & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d & e & d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & e & d & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & e & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & e & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(2N+1)\times(2N+1)},$$

$$C = A, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{(2N+1)\times(2N+1)}$$

dir. Ayrıca,

$$\varphi_n^k = \begin{cases} 0, k = -N, \\ \\ f(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n), -N+1 \leq k \leq 0, \\ \\ g(t_k, x_n), 1 \leq k \leq N-1, \\ \\ 0, k = N, \end{cases}$$

$$\varphi_n = \begin{bmatrix} \varphi_n^{-N} \\ \varphi_n^{-N+1} \\ \vdots \\ \varphi_n^{0} \\ \varphi_n^{1} \\ \vdots \\ \varphi_n^{N} \end{bmatrix}_{(2N+1)\times 1}, U_s = \begin{bmatrix} U_s^{-N} \\ U_s^{-N+1} \\ \vdots \\ U_s^{0} \\ U_s^{1} \\ \vdots \\ U_s^{N-1} \\ U_s^{N} \end{bmatrix}_{(2N+1)\times(1)}, s = n-1, n, n+1$$

dir. Ayrıca burada,

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{2h^2}, b = \dfrac{1}{h^2}, c = -\dfrac{i}{\tau} - \dfrac{1}{h^2}, \\ p = \dfrac{i}{\tau} - \dfrac{1}{h^2}, d = \dfrac{1}{\tau^2}, e = -\dfrac{2}{\tau^2} - \dfrac{2}{h^2} \end{cases}$$

dir. Bu fark denklemini çözmek için, iyileştirilmiş Gauss yok etme metoduna başvurduk. Böylece, (5.3) sisteminin çözümünü aşağıdaki formda ararız:

$$U_j = \alpha_{j+1} U_{j+1} + \beta_{j+1}, j = M-1, \cdots, 2, 1, \ u_M = 0.$$

Burada, $[\alpha_j]_{(2N+1)\times(2N+1)}$ ve $\left[\beta_j\right]_{(2N+1)\times 1}$ matrisleri,

$$\begin{cases} \alpha_{j+1} = -\left(B_n + C_n \alpha_j\right)^{-1} A_n, n = 1, \cdots, M-1, \\ \beta_{j+1} = \left(B_n + C_n \alpha_j\right)^{-1} \left(D\varphi_j - C_n \beta_j\right), j = 1, \cdots, M-1 \end{cases}$$

formülleriyle tanımlanır. Burada, α_1 birim ve β_1 sıfır matrislerdir.

Şimdi, hata analizi yapılacaktır. Nümerik çözümlerin,

$$E_M^N = \max_{1 \le k \le N-1} \left(\sum_{n=1}^{M-1} \left| u\left(t_k, x_n\right) - u_n^k \right|^2 h \right)^{1/2}$$

ile hesaplanan karşılaştırma hataları farklı N ve M değerleri ile kaydedilir. Burada, $u(t_k, x_n)$ kesin çözümü temsil ederken, u_n^k da (t_k, x_n) deki nümerik çözümü temsil eder. Aşağıdaki sonuçlar, Tablo 1'de yer alan nümerik sonuçların karşılaştırılması için kaydedilir.

Tablo 1
Fark şemalarının yaklaşım çözümleri için karşılaştırılma hataları

.

Yöntem	N=M=10	N=M=20	N=M=40	N=M=80	N=M=160
Fark şeması (5.2)	0.0391	0.0186	0.0091	0.0045	0.0022
Fark şeması (5.4)	0.0063	0.0015	3.7469×10^{-4}	9.2717×10^{-5}	2.3058×10^{-5}

Sonuç olarak, ikinci basamaktan doğruluklu fark şemaları, birinci basamaktan doğruluklu fark şemalarından daha doğrulukludur. Diğer nümerik yöntemlerle kıyasladığımızda, kullandığımız yöntem, zamanın ağ basamak büyüklüğü ve uzay değişkenleri arasındaki ilişkiye bağlı değildir. ([Ciment, M., Leventhal, S. H., 1978], [Twizell, E. H., 1979], [Lax, P. D., Wendroff, B., 1964], [Mohanty, R. K., Jain, M. K., George, K., 1996], [Piskarev, S., 1989], [Piskarev, S. I., 1984]).

6 BULGULAR

6.1 HATA ANALİZİ

Şimdi, sayısal sonuçlar verilecektir. Eliptik-Schrödinger denklemi için (5.1) problemini ele alalım. Burada, (5.1) probleminin yaklaşık çözümüne birinci ve ikinci basamaktan doğruluklu fark şemalarının $\tau = 30$ ve $h = 30$ değerleri için bakılmıştır. Kesin ve sayısal çözümler Şekil 6.1., Şekil 6.2. ve Şekil 6.3. ile verilmiştir.

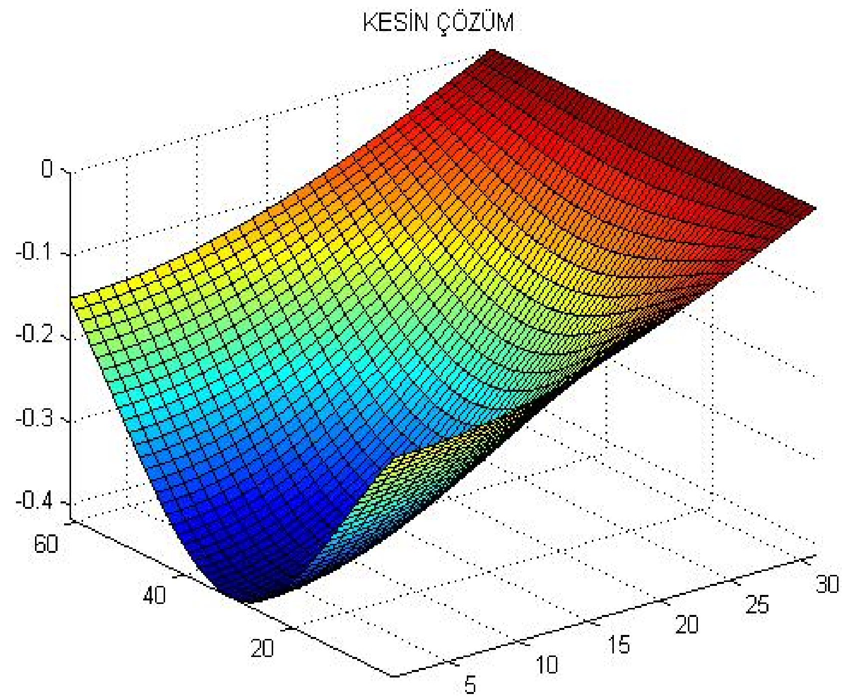

Figure 1.1: Şekil 6.1.

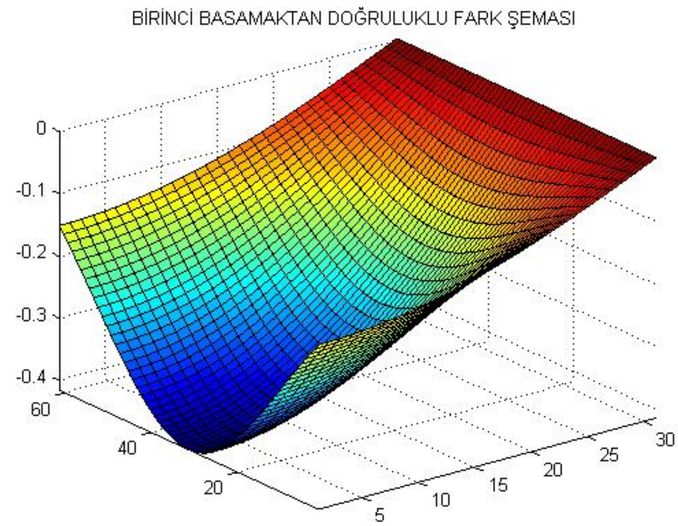

Figure 1.2: Şekil 6.2.

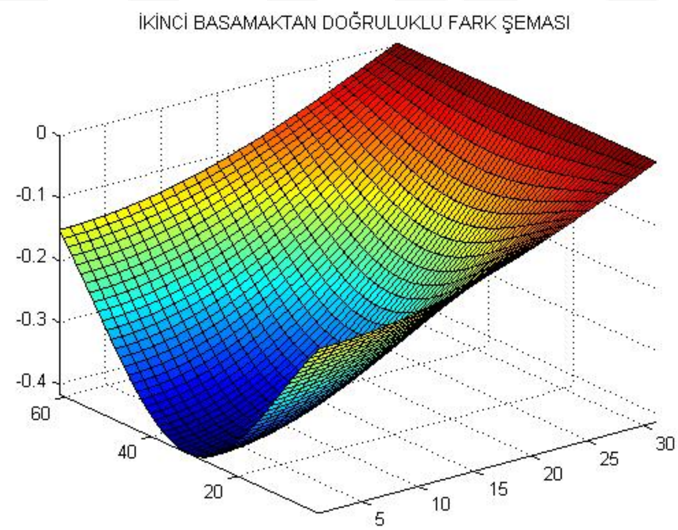

Figure 1.3: Şekil 6.3.

7 SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada eliptik-Schrödinger denklemleri için lokal olmayan sınır-değer problemlerinin kararlılığı incelenmiştir. Çalışma sonucunda aşağıdaki özgün sonuçlar elde edilmiştir:

- Hilbert uzayında eliptik-Schrödinger denkleminin lokal olmayan sınır-değer problemlerinin çözümü için kararlılık kestirimleri üzerindeki temel teorem ispatlanmıştır,
- eliptik-Schrödinger denklemlerinin lokal olmayan sınır-değer problemlerinin çözümü için kararlılık kestirimlerindeki teoremler elde edilmiştir,
- eliptik-Schrödinger denklemlerinin lokal olmayan sınır-değer problemlerinin yaklaşık çözümü için birinci ve ikinci basamaktan doğruluklu fark şemaları sunulmuştur,
- eliptik-Schrödinger denklemlerinin lokal olmayan sınır-değer problemlerinin yaklaşık çözümü için kurulan birinci ve ikinci basamaktan doğruluklu fark şemalarının yaklaşık çözümleri için kararlılık kestirimlerindeki temel teorem verilmiştir,
- bu fark şemalarının teorik ifadeleri sayısal denemelerle desteklenmiştir,
- çalışmanın bir kısmı uluslararası bir konferansta tam metin bildiri olarak sözlü olarak sunulmuştur,
- çalışmanın diğer kısımlarından uluslararası ve indeksli dergilerde basılmış 2 adet yayın elde edilmiştir.

Bu çalışmadan ilham alınarak,

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dt^2} + Au\left(t\right) = g\left(t\right) \ \ \left(0 \leq t \leq 1\right), \\ i\dfrac{du}{dt} - Au\left(t\right) = f\left(t\right) \ \ \left(-1 \leq t \leq 0\right), \\ u\left(1\right) = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \alpha_j u\left(-1\right) + \varphi, \\ 0 < \alpha_j \leq 1, 1 \leq j \leq N \end{cases}$$

H Hilbert uzayındaki pozitif tanımlı kendine eş A operatörü ile karma tipli diferansiyel denklemin çok noktalı lokal olmayan sınır-değer problemi için kapsamlı bir çalışma yapılabilir.

8 KAYNAKLAR

[1] Salakhitdinov M. S., *Equations of Mixed-Composite Type*, Tashkent: FAN, (**1974**) (Russian).

[2] Djuraev T. D., *Boundary Value Problems for Equations of Mixed and Mixed-Composite Types*, Tashkent: FAN, (**1979**) (Russian).

[3] Bazarov D., Soltanov H., *Some Local and Nonlocal Boundary Value Problems for Equations of Mixed and Mixed-Composite Types*, Ashgabat: Ylym, **(1995)** (Russian).

[4] Glazatov S. N., Nonlocal boundary value problems for linear and nonlinear equations of variable type, *Sobolev Institute of Mathematics SB RAS*, Preprint no. 46, **(1998)** (Russian).

[5] Ashyralyev A., Aggez N., A note on difference schemes of the nonlocal boundary problems for hyperbolic equations, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, (25) **(2004)** 439–462.

[6] Ashyralyev A., Ozdemir Y., On nonlocal boundary value problems for hyperbolic-parabolic equations, *Taiwanese Journal of Mathematics*, 4 (11) **(2007)** 1075–1089.

[7] Ashyralyev A., Gercek O., Nonlocal boundary value problems for elliptic-parabolic differential and difference equations, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, (2008) **(2008)** 1–16.

[8] Ashyralyev A., Sirma A., Nonlocal boundary value problems for the Schrodinger equation, *Computers and Mathematics with Applications*, 3 (55) **(2008)** 392–407.

[9] Ashyralyev A., Yildirim O., On multipoint nonlocal boundary value problems for hyperbolic differential and difference equations, *Taiwanese Journal of Mathematics*, 1 (14) **(2010)** 165–194.

[10] Ashyralyev A., Hicdurmaz B., A note on the fractional Schrodinger differential equation, *Kybernetes*, 5-6 (40) **(2011)** 736–750.

[11] Ozdemir Y., Kucukunal M., A note on boundary value problems for hyperbolic-Schrödinger equation, *Abstract and Applied Analysis*, (2012) **(2012)** 1–12.

[12] Ozdemir Y., Alp M., Numerical solution of the parabolic-Schrödinger equation with the nonlocal boundary condition, *AIP Conference Proceedings*, (1611) **(2014)** 221-224.

[13] Ozdemir Y., Eser M., Numerical solution of the elliptic-Schrödinger equation with the the Dirichlet and Neumann condition, *AIP Conference Proceedings*, (1611) **(2014)** 410-414.

[14] Orlovsky D., Piskarev S., The approximation of Bitzadze-Samarsky type inverse problem for elliptic equations with Neumann conditions, *Contemporary Analysis and Applied Mathematics,* (1) **(2013)** 118-131.

[15] Ashralyyev C., Dedeturk M., A finite difference method for the inverse elliptic problem with the Dirichlet condition, *Contemporary Analysis and Applied Mathematics,* (1) **(2013)** 132-155.

[16] Ashralyev A., Urun M., Determination of a control parameter for the Schrödinger equation, *Contemporary Analysis and Applied Mathematics,* (1) **(2013)** 156-166.

[17] Kozlowski K., Kozlowska J. M., Development on the Schrodinger equation for attosecond laser pulse interaction with planck gas, *Laser in Engineering*, 3-4 (20) **(2010)** 157–166.

[18] Quittner P., Souplet P., Optimal Lioville-type theorems for noncooperative elliptic Schrödinger systems and applications, *Communications in Mathematical Physics*, (311) **(2012)** 1–19.

[19] Godet N., Tzvetkov N., Strichartz estimates for the periodic non-elliptic Schrödinger equation, Comptes Rendus Mathematique, 21–22 (350) **(2012)** 955–958.

[20] Liu B., Ma L., Symmetry results for elliptic Schrödinger systems on half spaces, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1 (401) **(2013)** 259–268.

[21] Tselios K., Simos T. E., Runge-Kutta methods with minimal dispersion and dissipation for problem arising from computational acoustics, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1 (175) **(2005)** 173-181.

[22] Sakas D. P., Simos T. E., Multiderivative methods of eighth algebraic order with minimal phase-lag for the numerical solution of the radial Schrodinger equation, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1 (175) **(2005)** 161-172.

[23] Psihoyios G., Simos T. E., A fourth algebraic order trigonometrically fitted predictor-corrector scheme for IVPs with oscillating solutions, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1 (175) **(2005)** 137-147.

[24] Anastassi Z. A., Simos T. E., An optimized Runge-Kutta method for the solution of orbital problems, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1 (175) **(2005)** 1-9.

[25] Simos T. E., Closed Newton-Cotes trigonometrically-fitted formulae of high order for long-time integration of orbital problems, *Applied Mathematics Letters*, 10 (22) **(2009)** 1616-1621.

[26] Stavroyiannis S., Simos T. E., Optimization as a function of the phase-lag order of nonlinear explicit two-step P-stable method for linear periodic IVPs, *Applied Numerical Mathematics*, 10 (59) **(2009)** 2467-2474.

[27] Simos T. E., Exponentially and trigonometrically fitted methods for the solution of the Schrodinger equation, *Acta Applicandae Mathematicae*, 3 (110) **(2010)** 1331-1352.

[28] Suhubi E. S., Fonksiyonel Analiz, İtü Vakfı Yayınları no.38, **(2001)**.

[29] Çağlıyan M., Çelik N., Doğan S., Adi Diferansiyel Denklemler, Dora Yayıncılık, 2. baskı, **(2008)**.

[30] Sobolevskii P. E., *Difference Methods for the Approximate Solution of Differential Equations*, Izdat, Voronezh Gosud Univ., Voronezh, (Russian). **(1975).**

[31] Samarskii A. A., Nikolaev, E. S., *Numerical Methods for Grid Equations vol. 2: Iterative Methods*, Birkäuser: Basel, Switzerland, 1989.

[32] Krein S. G., *Linear Differential Equations in Banach Space*, Nauka, Moscow, (Russian). **(1966).**

9 EKLER

EK-1. ALGORİTMA

1. Adım: $\tau = \dfrac{1}{N}$ ve $h = \dfrac{1}{M}$ olarak al.

2. Adım: Birinci dereceden doğruluklu fark şemasını kullan ve matris formunda yaz.

$$AU_{n+1} + BU_n + CU_{n-1} = D\varphi_n, 1 \leq n \leq M-1$$

3. Adım: A, B, C ve D matrislerinin girdilerini belirle.

4. Adım: α_1, β_1 i bul.

5. Adım: $\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}$ i hesapla.

6. Adım: U_n için $n = M-1, \cdots, 1, 0$ $U_n = \alpha_{n+1}U_{n+1} + \beta_{n+1}, n = M-1, \cdots, 2, 1$ formülünü kullanarak hesapla.

EK-2. BİRİNCİ BASAMAKTAN DOĞRULUKLU FARK ŞEMASI İÇİN MATLAB PROGRAMI

```
function [table,es,p]=rothermethod(N,M)
    close; close;
    if nargin<1; N=30 ; M=30 ;end;
    tau=1/N; h=1/M;
    A=zeros(2*N+1,2*N+1);

    for i=2:N+1; A(i,i-1)=1/(h^2); end; %schödinger asıl köşegen aşağısı
    for i=N+2:2*N; A(i,i)=1/(h^2); end; %eliptik asıl köşegen
    B=zeros(2*N+1,2*N+1);
    B(1,1)=-1;
    B(1,2*N+1)=1;
    for i=1:N; B(i+1,i)=(-complex(0,1)/tau)-(2/h^2); end; %schödinger asıl köşegen
aşağısı

    for i=2:N+1; B(i,i)=complex(0,1)/tau; end; %schödinger asıl köşegen
    for i=N+2:2*N; B(i,i)=(-2/(tau^2))-(2/(h^2)); end; %eliptik asıl köşegen
    for i=N+2:2*N; B(i,i+1)=1/(tau^2); end; %eliptik asıl köşegen yukarısı
    for i=N+2:2*N; B(i,i-1)=1/(tau^2); end; %eliptik asıl köşegen aşağısı
    B(2*N+1,N)=1;
    B(2*N+1,N+1)=-2;
```

```
B(2*N+1,N+2)=1;
C=A;
for i=1:2*N+1; D(i,i)=1; end ;
for s=2:M; x=(s-1)*h;
fii(1,s:s)=0;
%fii(1,s:s)=4*((x^2)-1)*((x^2)-5);
fii(2*N+1,s:s)=0;
for k=2:N+1; t=(-N+k-1)*tau ;
fii(k,s:s) =g(t,x); end;
for k=N+2:2*N; t=(-N+k-1)*tau+tau;
fii(k,s:s) =f(t,x); end;
end;
I=eye(2*N+1);
alpha(1:2*N+1,1:2*N+1,2:2) = 1*I;
betha(2*N+1,2:2)=0;
for j=2:M;
alpha(:,:,j+1:j+1)=-inv(B+C*alpha(:,:,j:j))*A;
betha(:,j+1:j+1)=inv(B+C*alpha(:,:,j:j))*(D*(fii(:,j:j))-(C*betha(:,j:j)));

end;
U(1:2*N+1,1:2*N+1)=nan;
U(:,M+1:M+1)=0;
for z = M:-1:2 ;
U(:,z:z) = alpha(:,:,z+1:z+1)* U(:,z+1:z+1)+betha(:,z+1:z+1);
end;
U(:,1:1)=U(:,2:2);
U;
for z = 1:M+1;
p(:,z:z)=U(:,z:z);
end;
'EXACT SOLUTION OF THIS PDE' ;
for q=1:M+1;
for v=1:2*N+1;
t=(-N+v-1)*tau;
```

```
x=(q-1)*h; %exact solution on grid points,
es(v,q) = exact(t,x);
end;
end;
%%%%%%%%%%%%%%%ERROR ANALYSIS%%%%%%%%%%%%
ftf1=abs(es-p);
fmat1=abs(ftf1);
fmat2=fmat1.*fmat1*h;
fmat3=sum(fmat2,2);
fmat4=fmat3.^(1/2);
sumerror2=max(fmat4)
maxerror2=max(max(abs(es-p)))
maxes=max(max(es));
maxapp=max(max(p));
%%%%%%%%%%%%%%%GRAPH OF THE SOLUTION %%%%%%%%%%%%
figure;
m(1,1)=min(min(p))-0.01;
m(2,2)=nan;
surf(m);
hold;
surf(es) ; rotate3d ;axis tight;
title('KESİN ÇÖZÜM');
figure ;
m(1,1)=min(min(p))-0.01;
m(2,2)=nan;
surf(m);
hold;
surf(p) ; rotate3d ;axis tight;
title('BİRİNCİ BASAMAKTAN DOĞRULUKLU FARK ŞEMASI');
%%%%%%%%%%%%% END GRAPH %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function estx=exact(t,x);
estx=exp(-(t^2))*((-5/12)+((x^2)/2)-((x^4)/12));
function ftx=f(t,x);
ftx=exp(-(t^2))*((4*(t^2)-2)*((-5/12)+((x^2)/2)-((x^4)/12))+(1-(x^2)));
```

```
function gtx=g(t,x);

gtx=exp(-(t^2))*((-2*complex(0,1)*(t))*((-5/12)+((x^2)/2)-((x^4)/12))+(1-(x^2)));
```

EK-3. ALGORİTMA

1. Adım: $\tau = \dfrac{1}{N}$ ve $h = \dfrac{1}{M}$ olarak al.

2. Adım: Birinci dereceden doğruluklu fark şemasını kullan ve matris formunda yaz.

$$AU_{n+1} + BU_n + CU_{n-1} = D\varphi_n, 1 \leq n \leq M-1$$

3. Adım: A, B, C ve D matrislerinin girdilerini belirle.

4. Adım: α_1, β_1 i bul.

5. Adım: $\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}$ i hesapla.

6. Adım: U_n için $n = M-1, \cdots, 1, 0$ $U_n = \alpha_{n+1}U_{n+1} + \beta_{n+1}, n = M-1, \cdots, 2, 1$ formülünü kullanarak hesapla.

EK-4. İKİNCİ BASAMAKTAN DOĞRULUKLU FARK ŞEMASI İÇİN MATLAB PROGRAMI

```
function [table,es,p]=rothermethod(N,M)
close; close;
if nargin<1; N=30 ; M=30 ;end;
tau=1/N; h=1/M;
A=zeros(2*N+1,2*N+1);
for i=2:N+1; A(i,i-1)=1/(2*h^2); end; %schrödinger asıl köşegen aşağısı
for i=2:N+1; A(i,i)=1/(2*h^2); end; %schrödinger asıl köşegen
for i=N+2:2*N; A(i,i)=1/(h^2); end; % %eliptik asıl köşegen
B=zeros(2*N+1,2*N+1);
B(1,1)=-1;
B(1,2*N+1)=1;
for i=1:N; B(i+1,i)=(-complex(0,1)/tau)-(1/h^2); end; %schrödinger asıl köşegen aşağısı
for i=2:N+1; B(i,i)=(complex(0,1)/tau)-(1/h^2); end; %schrödinger asıl köşegen
for i=N+2:2*N; B(i,i)=(-2/(tau^2))-(2/(h^2)); end; %eliptik asıl köşegen
for i=N+2:2*N; B(i,i+1)=1/(tau^2); end; %eliptik asıl köşegen yukarısı
for i=N+1:2*N-1; B(i+1,i)=1/(tau^2); end; %eliptik asıl köşegen aşağısı
B(2*N+1,N-2)=1;
```

```
B(2*N+1,N-1)=-4;
B(2*N+1,N)=6;
B(2*N+1,N+1)=-4;
B(2*N+1,N+2)=1;
C=A;
for i=1:2*N+1; D(i,i)=1; end ;
for s=2:M; x=(s-1)*h;
fii(1,s:s)=0;
%fii(1,s:s)=4*((x^2)-1)*((x^2)-5);
fii(2*N+1,s:s)=0;
for k=2:N+1; t=(-N+k-1)*tau-tau/2; fii(k,s:s) =g(t,x); end; %schrödinger
for k=N+2:2*N; t=(-N+k-1)*tau; fii(k,s:s) =f(t,x); end; %elliptic
end;
I=eye(2*N+1);
alpha(1:2*N+1,1:2*N+1,2:2) = 1*I;
betha(2*N+1,2:2)=0;
for j=2:M;
alpha(:,:,j+1:j+1)=-inv(B+C*alpha(:,:,j:j))*A;
betha(:,j+1:j+1)=inv(B+C*alpha(:,:,j:j))*(D*(fii(:,j:j))-(C*betha(:,j:j)));

end;
U(1:2*N+1,1:2*N+1)=nan;
U(:,M+1:M+1)=0;
for z = M:-1:2 ;
U(:,z:z) = alpha(:,:,z+1:z+1)* U(:,z+1:z+1)+betha(:,z+1:z+1);
end;
U(:,1:1)=U(:,2:2);
U;
for z = 1:M+1;
p(:,z:z)=U(:,z:z);
end;
'EXACT SOLUTION OF THIS PDE' ;
for q=1:M+1;
for v=1:2*N+1;
```

```
t=(-N+v-1)*tau;
x=(q-1)*h; %exact solution on grid points,
es(v,q) = exact(t,x);
end;
end;
%%%%%%%%%%%%%%ERROR ANALYSIS%%%%%%%%%%%%
ftf1=abs(es-p);
fmat1=abs(ftf1);
fmat2=fmat1.*fmat1*h;
fmat3=sum(fmat2,2);
fmat4=fmat3.^(1/2);
sumerror2=max(fmat4)
maxerror2=max(max(abs(es-p)))
maxes=max(max(es));
maxapp=max(max(p));
%%%%%%%%%%%%%%GRAPH OF THE SOLUTION %%%%%%%%%%%%
figure;
m(1,1)=min(min(p))-0.01;
m(2,2)=nan;
surf(m);
hold;
surf(es) ; rotate3d ;axis tight;
title('KESİN ÇÖZÜM');
figure ;
m(1,1)=min(min(p))-0.01;
m(2,2)=nan;
surf(m);
hold;
surf(p) ; rotate3d ;axis tight;
title('İKİNCİ BASAMAKTAN DOĞRULUKLU FARK ŞEMASI');
%%%%%%%%%%%% END GRAPH %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function estx=exact(t,x);
estx=exp(-(t^2))*((-5/12)+((x^2)/2)-((x^4)/12));
function ftx=f(t,x);
```

```
ftx=exp(-(t^2))*((4*(t^2)-2)*((-5/12)+((x^2)/2)-((x^4)/12))+(1-(x^2)));
function gtx=g(t,x);

gtx=exp(-(t^2))*((-2*complex(0,1)*(t))*((-5/12)+((x^2)/2)-((x^4)/12))+(1-(x^2)));
```

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: ESER, Mecra
Uyruğu	: T. C.
Doğum tarihi ve yeri	: 28.12.1989 / İSTANBUL
Telefon	: 0 (535) 413 90 73
E-posta	: m_ec_ra@hotmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Yüksek Lisans	Düzce Üniversitesi / Matematik ABD	2015
Lisans	Düzce Üniversitesi / Matematik	2013
Lise	Hacı Hatice Bayraktar Lisesi	2008

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2015	Beyhan Şenyuva Ortaokulu	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce (YDS: 63,75)

Yayınlar

1. Ozdemir Y. ve Eser M.,Numerical solution of the elliptic-Schrödinger equation with nonlocal boundary condition, Karatekin Mathemetics Days 2014 International Mathematics Symposium Proceedings, 11-13 June, 2014, Çankırı Karatekin Üniversitesi, TÜRKİYE, p93.

2. Ozdemir Y. ve Eser M., Numerical solution of theelliptic-Schrödinger equation with the Dirichlet and Neumann condition, AIP Conference Proceedings, vol. 1611, pp. 410-414, (2014), **http://dx.doi.org/10.1063/1.4893868**.

3. Ozdemir Y. ve Eser M., On nonlocal boundary-value problems for elliptic-Schrödinger equations, AIP Conference Proceedings, vol. 1676, (2015), **http://dx.doi.org/10.1063/1.4930507**.