T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

FARKLI BASAMAKTAN TAMSAYI DİZİLERİ İLE TANIMLI ÖZEL MATRİSLERİN ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ELİF ARDIYOK

ŞUBAT 2016

DÜZCE

KABUL VE ONAY BELGESİ

Elif ARDIYOK tarafından hazırlanan Farklı Basamaktan Tamsayı Dizileri ile Tanımlı Özel Matrislerin Özellikleri isimli lisansüstü tez çalışması, Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 27/01/2016 tarih ve 2016/87 sayılı kararı ile oluşturulan jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Üye
(Tez Danışmanı)
Yrd. Doç. Dr. Arzu ÖZKOÇ
Düzce Üniversitesi

Üye
Prof. Dr. Ahmet TEKCAN
Uludağ Üniversitesi

Üye
Doç. Dr. Emrah Evren KARA
Düzce Üniversitesi

Tezin Savunulduğu Tarih : 09/02/2016

ONAY

Bu tez ile Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Elif ARDIYOK'un Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans derecesini almasını onamıştır.

Prof. Dr. Haldun MÜDERRİSOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

09 ŞUBAT 2016

Elif ARDIYOK

Sevgili Aileme

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim ve bu tezin hazırlanması süresince gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Arzu ÖZKOÇ'a en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen sevgili aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

09 Şubat 2016 **Elif ARDIYOK**

İÇİNDEKİLER **<u>Sayfa</u>**

SİMGELER VE KISALTMALAR

B_n	n. balans sayısı
I	Birim matris
B_n^k	n. k-balans sayısı
b_n	n. cobalans sayısı
V_n	Kompanion-Lucas tamsayı dizisi
K_n	Kompanion-tetranacci sayı dizisi
b_n^k	n. k-cobalans sayısı
$T_n(x)$	1. tür Chebyshev polinomu
$U_n(x)$	2. tür Chebyshev polinomu
$C(c)$	Circulant(dairesel) matris
$\|A\|_E$	A matrisinin Euclidean normu
F_n	n. Fibonacci sayısı
$H(h)$	Henkel matris
$\mathcal{C}$	Karmaşık sayılar
U_n	Lucas tamsayı dizisi
C_n	n. Lucas-balans sayısı
c_n	n. Lucas-cobalans sayısı
C_n^k	n. k-Lucas balans sayısı
c_n^k	n. k-Lucas cobalans sayıları
$\|.\|$	Matris normu
$\lambda_j(A)$	A matrisinin özdeğeri
A^*	A matrisinin eşlenik transpozu
$\mu_j(x)$	Negacyclic matrisin özdeğeri
$N(a)$	Negacyclic matris
P_n	n. Pell sayısı

Q_n	n. Pell-Lucas sayısı
$\Re$	Reel sayılar
$S(x)$	Semicirculant matris
$\|A\|_1$	A matrisinin sütun normu
$\|A\|_\infty$	A matrisinin satır normu
$\|A\|_2$	A matrisinin spektral normu
$T(t)$	Toeplitz matris
$T_{(n)}$	Tridiagonal matris
M_n	Tetranacci sayı dizisi

ÖZET

FARKLI BASAMAKTAN TAMSAYI DİZİLERİ İLE TANIMLI ÖZEL MATRİSLERİN ÖZELLİKLERİ

Elif ARDIYOK
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Arzu ÖZKOÇ
Şubat 2016, 60 sayfa

Bu tez çalışmasında ikinci basamaktan tamsayı dizileri olan Lucas ve kompanion-Lucas tamsayı dizileri ile tanımlı circulant, negacyclic ve semicirculant matrisler için matris normları olan Euclidean norm, spektral norm, 1-norm ve sonsuz norm elde edilmiştir. Daha sonra bu matrisler için özdeğerler ve determinantlar bulunmuştur. Benzer sonuçlar tetranacci ve kompanion-tetranacci tamsayı dizileri için elde edilmiş yani dördüncü basamaktan tamsayı dizilerine genişletilmiştir. Son olarak $k-$balans sayıları ile ilişkili olacak şekilde tanımlanan, k parametresine bağlı tridiagonal matris aileleri ele alınmıştır. Chebyshev polinomlarından yararlanarak $B_{(n)}(k)$ tridiagonal matris ailesi için özdeğer ve determinant, kofaktör matrisinden yararlanarak da $W_{(n)}(k)$ tridiagonal matris ailesinin tersleri $k-$balans sayılarına bağlı olarak verilmiştir.

Anahtar sözcükler: Tamsayı dizileri, Circulant matrisler, Matris normları, Özdeğer, Determinant, $k-$balans sayıları

ABSTRACT

CHARACTERISTICS OF SPECIAL MATRICES WHICH IS DEFINED BY INTEGER SEQUENCES WITH DIFFERENT STEP

Elif ARDIYOK
Düzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Assist. Prof. Dr. Arzu ÖZKOÇ
February 2016, 60 pages

In this work we are considered the norm of matrices as Euclidean norm, spektral norm, 1-norm and infinity norm which is defined by Lucas and companion-Lucas sequences with second step integer sequences. After that eigenvalues and determinants are found for these matrices. Same results are obtained for tetranacci and companion-tetranacci integer sequences so these results have been expanded to the fourth step. Finally, the family of tridiagonal matrix are investigated which is connected parameter k related to be defined $k-$balancing numbers. For the family of tridiagonal matrice $B_{(n)}(k)$, eigenvalues and determinants are given by using Chebyshev polinomials, also inverse of tridiagonal matrix family $W_{(n)}(k)$ is given related to $k-$balancing numbers benefit from cofactor matrix.

Keywords: Integer sequences, Circulant matrices, Norms of matrices, Eigenvalues, Determinants, $k-$balancing numbers

EXTENDED ABSTRACT

CHARACTERISTICS OF SPECIAL MATRICES WHICH IS DEFINED BY INTEGER SEQUENCES WITH DIFFERENT STEP

Elif ARDIYOK
Düzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Assist. Prof. Dr. Arzu ÖZKOÇ
February 2016, 60 pages

1. INTRODUCTION:

There are some results concerning integer sequences and matrices in the literature. To combine these two issues, we create by selecting the elements of the matrix in terms of the number of integer sequences. Thus, new results to integer sequences can be obtained with matrix application in terms of integer sequences.

In this thesis, there are five chapters. In the first chapter, a brief introduction is made. In the second chapter, some preliminary informations are given. In the third chapter, we are considered some special matrices which is defined by Lucas and companion-Lucas sequences with second step integer sequences. We can be deduced the norms of matrices as euclidean norm, spectral norm, 1-norm and infinity norm and also eigenvalues and determinant. In the fourth chapter, Tetranacci numbers are worked which is the number of digits of the integer sequences. Similar results are found for tetranacci and companion-tetranacci sequences which is the fourth step integer sequences. In the fifth chapter, depending on parameter k, two different families of tridiagonal matrix which are to be associated with $k-$balancing numbers are examined.

2. MATERIAL AND METHODS:

Firstly, the results concerning of that subject are investigated which has no results that have been observed. Then, the results which can be deduced with the application of special matrix explored, then cases are examined by the two concepts are combined. The sums of first $n-$terms and Binet formulas can help to be the results for integer sequences. Also eigenvalues and determinant formulas are used for matrices.

3. RESULTS AND DISCUSSIONS:

The following results are obtained:

i) For $n \geq 2$, Lucas sequences U_n and companion-Lucas sequences V_n are investigated and the sums of first $n-$terms are obtained for U_n and V_n.

ii) Moreover we study some special matrices which is defined by Lucas and companion-Lucas sequences. Then we calculate the norms of matrices as Euclidean norm, spectral norm, 1-norm and infinity norm and also eigenvalues and determinants.

iii) Results are obtained by the terms of U_n and V_n of companion matrix powers are given.

iv) Tetranacci M_n and companion-tetranacci sequences K_n are examined and the difference between the general terms are found for the matrices.

v) Similarly circulant ve negacyclic matrices which is defined by M_n and K_n are discussed and the norms of these matrices are obtained.

vi) $k-$balancing numbers and different forms of $k-$balancing numbers are described in order to obtain the tridiagonal matrices $B_{(n)}(k)$ and $W_{(n)}(k)$ which is in type $n \times n$ and depending on the parameter k.

vii) Eigenvalues and determinants are found for the tridiagonal matrices $B_{(n)}(k)$ benefiting from the Chebyshev polynomials.

viii) Taking advantage of the cofactor matrix $C_{(n-1)}(k)$, we find the inverse of the family of tridiagonal matrix $W_{(n)}(k)$ including $k-$ balancing numbers.

4. CONCLUSION AND OUTLOOK:

The main purpose of this thesis is to obtain matrices which is defined with integer sequences that are not used in the literature previously and to find their eigenvalues, determinants and matrix norms which is matrix applications. In addition, tridiagonal matrix which is the other matrix groups, to relate the number of $k-$balancing numbers. In this case, the theory of numbers commonly used to describe the application of some special matrices with integer sequences is the main aim of the thesis.

1.GİRİŞ

Tamsayı dizileri ve matrislerin her ne kadar birbirinden farklı uygulama alanları olsa da bu iki kavram birçok makale ve tez çalışmasında bir arada kullanılmıştır. Örneğin [1, 2] çalışmalarında özel matrisler olan circulant, negacyclic matrislerin elemanları tamsayı dizileri olarak seçilmek suretiyle matrisin uygulamaları kapsamında matrisin özdeğerleri, determinantları, matris normları ki bu normlar; euclidean norm, spektral norm, 1-norm ve sonsuz normları, elde edilebilmektedir. Bundan başka kompanion matrisin kuvvetleri de tamsayı dizisinin terimleri cinsinden elde edilebilmektedir. Ayrıca diğer bir matris çeşidi olan tridiagonal matrisleri içinde [3] çalışmasında genelleştirilmiş $k-$Fibonacci sayıları için bu matris çeşidi için oluşturulan farklı matris uygulamalarının Chebyshev polinomlarından ve kofaktör matristen yararlanarak bulunduğu gözlemlenmektedir.

Bu tez çalışmasının amacı, literatürde daha önce kullanılmamış olan tamsayı dizileri ile tanımlı circulant, negacyclic ve semicirculant matrisler oluşturulup bunların uygulamaları olan özdeğer, determinant, matris normlarını elde etmektir. Çalışma boyunca ikinci basamaktan ve dördüncü basamaktan tamsayı dizileri için sonuçlar elde edilmiştir. Aynı zamanda diğer bir matris grubu olan tridiagonal matrisleri, $k-$balans sayıları ile ilişkilendirmek diğer bir amaçtır. Bu durumda sayılar teorisinde sıkça kullanılan tamsayı dizileri ile özel bazı matrislerin uygulamalarını açıklamak tezin esas amacıdır.

2.KURAMSAL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmanın ileriki bölümlerinde kullanılacak olan tamsayı dizileri, bazı özel matris çeşitleri olan circulant, negacyclic, semicirculant, kompanion ve tridiagonal matrisler ve matris normları ile ilgili temel kavramlara, notasyonlara ve teoremlere yer verilmiştir.

2.1 TAMSAYI DİZİLERİ

Tamsayı dizileri, ilk olarak meşhur bir tamsayı dizisi olan Fibonacci tamsayı dizisi ile ortaya çıkmıştır. Diziye adını veren İtalyan matematikçi Leonardo Fibonacci (1170-1250), matematiği araplardan alıp Avrupa'ya tanıtan kişi olup orta çağın en yetenekli matematikçilerinden biridir. Fibonacci 'Liber Abaci' isimli kitabında kapalı bir ortamdaki bir tavşan ailesinin artışını şu problemle aktarmıştır: Biri erkek biri dişi bir çift tavşanımız var, bir aylıkken çok genç olduklarından üreyemiyorlar, ama ikinci ayın sonunda erginleşip üremeye başlıyorlar. Her ay ergen her çiftin biri erkek biri dişi olmak üzere yeni bir çift ürettiğini ve hiç ölmediklerini varsayılsın. Tavşanlar bu şekilde üremeye devam ederlerse bir yılın sonunda kaç çift tavşanınız olur? Sorunun genelleştirilmiş hali, n ay sonra kaç çift tavşanınız olur? Birinci ay 1 çift, ikinci ay üreyemediklerinden yine 1 çift ve üçüncü ay 2 çift ve bu şekilde devam edilirse her ayda kaç çift tavşan olduğunu hesaplamak aynı zamanda 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, $\cdots$ dizisini hesaplamaktır. Burada üçüncü terimden itibaren her sayı kendinden önceki iki sayının toplamına eşittir. F_n, n. aydaki çift sayısı ve F_{n+1}, $(n+1)$. aydaki çift sayısı olmak üzere, $(n+2)$.aydaki çift sayısı $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ şeklindedir. [4].

Buna göre, Fibonacci dizisi, ilk iki terimi haricinde diğer tüm terimleri arasında kendisinden hemen önce gelen ilk iki terimin toplamı olarak ifade edilebilen, başlangıç değerleri $F_0 = 0, F_1 = 1$ olan ve $n \geq 2$ için

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanan dizidir. Dizinin terimleri arasında birçok cebirsel bağıntı bulunmaktadır, bunlardan bazıları aşağıdaki gibidir:

$$
\begin{aligned}
&F_{2n} = 3F_{2n-2} - F_{2n-4} \\
&F_n^2 + F_{n+2k+1}^2 = F_{2k+1}F_{2n+2k} \\
&2(F_n^4 + F_{n+1}^4 + F_{n+2}^4) = (F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2)^2 \\
&F_n F_{n+3}^2 - F_{n+2}^3 = (-1)^{n+1} F_{n+1} \\
&F_{n+2}^2 - F_{n+1}^2 = F_n F_{n+3}.
\end{aligned}
$$

Ayrıca bu dizinin ardışık iki teriminin oranının limiti altın orana yakınsar, yani

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887\cdots$$

dir.

Fibonacci sayı dizisinden başka bir diğer önemli sayı dizisi ise Lucas sayı dizisidir. Bu dizinin başlangıç terimleri $L_0 = 2,\ L_1 = 1$ olup genel terimi $n \geq 2$ için

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

şeklindedir.

Bu iki tamsayı dizisinden başka önemli iki tamsayı dizisi Pell ve Pell-Lucas tamsayı dizileridir. Bu iki tamsayı dizisinin başlangıç terimleri $P_0 = 0, P_1 = 1$ ve $Q_0 = 2, Q_1 = 2$ olup genel terimleri $n \geq 2$ için

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2} \quad \text{ve} \quad Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Yukarıda ele alınan tüm tamsayı dizileri, p ve q, $p^2 - 4q > 0$ özelliğinde iki tamsayı olmak üzere başlangıç değerleri $U_0 = 0, U_1 = 1$, $V_0 = 2, V_1 = p$ ve genel terimleri $n \geq 2$ için

$$U_n = U_n(p,q) = pU_{n-1} - qU_{n-2} \quad \text{ve} \quad V_n = V_n(p,q) = pV_{n-1} - qV_{n-2}$$

olarak tanımlanan U_n ve V_n tamsayı dizilerinin özel halleridir. Gerçekten de

$$U_n = U_n(1,-1) = F_n, \quad U_n = U_n(2,-1) = P_n,$$

$$V_n = V_n(1,-1) = L_n, \quad V_n = V_n(2,-1) = Q_n$$

dir. Bu tamsayı dizilerin karakteristik denklemi

$$x^2 - px + q = 0$$

olup bu denklemin kökleri

$$\alpha = \frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2} \quad \text{ve} \quad \beta = \frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

dir ($p^2-4q \neq 0$ alınmasının sebebi, denklemin farklı iki kökünün olması istendiği için). Bu diziler için Binet (Jacques Phillipe Marie Binet, 1786-1856) formülleri

$$U_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad \text{ve} \quad V_n = \alpha^n + \beta^n$$

dir [5].

Karakteristik denklemin köklerinin *n*. kuvvetlerinin toplamı ve farkı sırasıyla

$$\alpha^n + \beta^n = U_n\sqrt{p^2-4q} + (p-\sqrt{p^2-4q})^n 2^{1-n} \tag{2.1.1}$$

$$\alpha^n - \beta^n = U_n\sqrt{p^2-4q} \tag{2.1.2}$$

dır. Bu iki tamsayı dizisi arasındaki bir çok cebirsel bağıntı olup bunlardan bazıları

$$\begin{aligned}
U_{2n} &= U_n V_n \\
V_{2n} &= V_n^2 - 2q^n \\
U_{3n} &= U_n(V_n^2 - q^n) = U_n((p^2-4q)U_n^2 + 3q^n) \\
V_{3n} &= V_n(V_n^2 - 3q^n) \\
V_n^2 - (p^2-4q)U_n^2 &= 4q^n
\end{aligned} \tag{2.1.3}$$

dır [4].

Son zamanlarda tamsayı dizilerinde ortaya çıkan diğer önemli bir tamsayı dizisi de balans tamsayı dizisidir. *r* pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$1+2+\cdots+(n-1) = (n+1)+(n+2)+\cdots+(n+r) \tag{2.1.4}$$

eşitliğini gerçekleyen pozitif *n* tam sayısına balans sayısı denir. Burada *r* sayısına *n* nin dengeleyicisi (veya cobalans sayısı) denir. 6, 35, 204, 1189 ve 6930 birer balans sayısı olup bu sayılara karşılık gelen cobalans sayıları sırasıyla 2, 14, 84, 492 ve 2870 dir.

(2.1.4) eşitliğinde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{(n-1)n}{2} = rn + \frac{r(r+1)}{2}$$

elde edilir. Bu son eşitlik *r* ve *n* ye göre çözülürse

$$r = \frac{-(2n+1)+\sqrt{8n^2+1}}{2} \quad \text{ve} \quad n = \frac{2r+1+\sqrt{8r^2+8r+1}}{2} \tag{2.1.5}$$

elde edilir.

Balans sayıları B_n ve cobalans sayıları b_n ile gösterilirse bu sayıların başlangıç terimleri $B_1 = 1, B_2 = 6$ ve $b_1 = 0, b_2 = 2$ olup genel terimleri $n \geq 2$ için sırasıyla

$$B_{n+1} = 6B_n - B_{n-1} \text{ ve } b_{n+1} = 6b_n - b_{n-1} + 2$$

şeklindedir. Balans sayılarının karakteristik denklemi

$$x^2 - 6x + 1 = 0$$

olup bu denklemin kökleri

$$\gamma = 3 + \sqrt{8} \text{ ve } \delta = 3 - \sqrt{8}$$

dir. (2.1.5) eşitliğine dikkat edilirse, B_n balans ve b_n cobalans sayıları için $8B_n^2 + 1$ ve $8b_n^2 + 8b_n + 1$ nin birer tam kare olduğu görülür. Dolayısıyla

$$C_n = \sqrt{8B_n^2 + 1} \text{ ve } c_n = \sqrt{8b_n^2 + 8b_n + 1}$$

birer tamsayı olup bu sayılara sırasıyla *n*. Lucas-balans ve *n*. Lucas-cobalans sayıları denir. Balans sayılarının terimleri arasında aşağıdaki gibi cebirsel bağıntılar vardır.

Teorem 2.1.1 Her bir $n > 1$ tamsayısı için

$$\begin{aligned}
&B_{n+1}B_{n-1} = (B_n + 1)(B_n - 1) \\
&B_n = B_k B_{n-k} - B_{k-1}B_{n-k-1} \\
&B_{2n} = B_n^2 - B_{n-1}^2 \\
&B_{2n+1} = B_n(B_{n+1} - B_{n-1})
\end{aligned}$$

dir [6].

Teorem 2.1.2 B_m balans sayı için

$$\begin{aligned}
&B_1 + B_2 + \cdots + B_{2m-1} = B_m^2 \\
&B_2 + B_4 + \cdots + B_{2m} = B_m B_{m+1} \\
&B_1 + B_2 + \cdots + B_{2m} = B_m(B_m B_{m+1})
\end{aligned}$$

dir [6].

$\gamma = 3 + \sqrt{8}$ ve $\delta = 3 - \sqrt{8}$ olmak üzere balans sayıları için Binet formülü

$$B_n = \frac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma - \delta}$$

dir. Pell sayılarının karakteristik denkleminin kökleri olan $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ ve $\beta = 1 - \sqrt{2}$ sayıları için

$$\alpha^2 = 3+2\sqrt{2} = \gamma \text{ ve } \beta^2 = 3-2\sqrt{2} = \delta$$

olduğundan balans sayılarının Binet formülü α ve β ya bağlı olarak

$$B_n = \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{4\sqrt{2}}$$

şeklinde de verilebilir. Böylece balans ve Pell sayıları arasında bir ilişki kurulmuş olur. Diğer balans sayılarının Binet formülleri de sırasıyla

$$b_n = \frac{\alpha^{2n-1} - \beta^{2n-1}}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2},\ C_n = \frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n}}{2} \text{ ve } c_n = \frac{\alpha^{2n-1} + \beta^{2n-1}}{2}$$

şeklindedir.

Tanım 2.1.3 $x = \cos\theta$ olmak üzere

(i) $T_n(x) = \cos n\theta$ şeklinde tanımlı *n.* derece polinoma 1. tür Chebyshev polinomu denir. Buna göre, 1. tür Chebyshev polinomları

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ &\vdots \end{aligned}$$

şeklinde olup $n \geq 2$ için

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \tag{2.1.6}$$

dir. Üstelik bu polinomlar

$$\begin{bmatrix} x & 1 & & & \\ 1 & 2x & 1 & & \\ & 1 & 2x & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2x \end{bmatrix}$$

şeklindeki $n \times n$ tipinde matrisin determinantı olarak da elde edilebilir.

(ii) $U_n(x) = \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ olarak tanımlanan *n.* derece polinomlara ise 2. tür Chebyshev polinomu denir. Buna göre, 2. tür Chebyshev polinomları da

$$
\begin{aligned}
&U_0(x)=1\\
&U_1(x)=2x\\
&U_2(x)=4x^2-1\\
&U_3(x)=8x^2-4x\\
&\qquad\quad\vdots
\end{aligned}
$$

şeklinde olup $n \geq 2$ için

$$U_n(x)=2xU_{n-1}(x)-U_{n-2}(x) \tag{2.1.7}$$

dir. Yine bu tür polinomlar da

$$
\begin{bmatrix}
2x & 1 & & & \\
1 & 2x & 1 & & \\
 & 1 & 2x & \ddots & \\
 & & \ddots & \ddots & 1 \\
 & & & 1 & 2x
\end{bmatrix}
$$

şeklindeki $n\times n$ tipinde matrisin determinantı olarak elde edilebilir. Bu iki tür Chebyshev polinomları arasındaki cebirsel bağıntılardan bazıları

$$
\begin{aligned}
&2T_n(x)=U_n(x)-U_{n-2}(x)\\
&T_n(x)=U_n(x)-xU_{n-1}(x)\\
&T_{n+1}(x)=xT_n(x)-(1-x^2)U_{n-1}(x)\\
&U_n(x)=2\sum_{j\,\text{tek}}^{n}T_j(x),\ n\ \text{tek iken}\\
&U_n(x)=2\sum_{j\,\text{çift}}^{n}T_j(x)-1,\ n\ \text{çift iken}
\end{aligned}
\tag{2.1.8}
$$

dır [7, 8].

2.2. ÖZEL MATRİSLER

Tanım 2.2.1 $A=(a_{ij})$, $n\times n$ tipinde karesel bir matris olsun.

(i) A nın köşegeni $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ elemanlarından oluşur ve bu köşegen elemanlarının toplamına A nın izi denir ve iz (A) olarak ifade edilir. Buna göre

$$\text{iz }(A)=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$$

dir.

(ii) A matrisinde i. satır ve j. sütunu çıkartılırsa geriye kalan $(n-1)\times(n-1)$ lik matrisin determinantına A nın a_{ij} elemanının minörü denir ve $\det(M_{ij})$ ile gösterilir. a_{ij} nin

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij})$$

biçimindeki işaretli minörüne ise a_{ij} nin kofaktörü denir. A_{ij} kofaktörlerinden oluşan matrise C kofaktör matrisi denir.

(iii) A matrisinde a_{ij} elemanları yerine bu elemanlara karşılık gelen A_{ij} kofaktörleri yazılarak elde edilen matrisin devriğine A nın ek matrisi (adjointi) denir ve $adj(A)$ ile gösterilir.

(iv) A matrisinin kofaktör matrisi C olmak üzere A matrisinin determinantı

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}C_{i,j}$$

şeklinde ifade edilir. Üstelik A matrisini tersi

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}adj(A) = \frac{1}{\det(A)}C^{T}$$

bulunur.

(v) A nın determinantı, herhangi bir satırın elemanlarının kendilerine ait kofaktörlerle çarpılıp toplanmasına eşit, yani

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

$$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

dir. $\det(A)$ için yukarıdaki biçimler sırasıyla, A nın determinantının i. satır ve j. kolon için Laplace açılımları olarak adlandırılır.

(vi) A matrisinin özdeğerleri λ_i, $i = 1, 2, \cdots, n$ için A nın dağılımı $s(A) = \max_{i,j} |\lambda_i - \lambda_j|$ dir. Üstelik $s(A) \le \sqrt{2\|A\|_E^2 - \frac{2}{n}|\text{iz}(A)|^2}$ dir.

Yardımcı Teorem 2.2.2 $A = (a_{ij})$, $n\times n$ tipinde bir matris olsun. Eğer A reel değerli ve normal ise $s(A) \ge (1/(n-1))\left|\sum_{i\ne j} a_{ij}\right|$ dir ve eğer A hermitian ise $s(A) \ge 2\max_{\mathrm{i}\ne \mathrm{j}}|a_{ij}|$ dir [9].

Şimdi daha sonraki bölümlerde kullanılacak özel matrisler ve bu matrislerin belli sınıfları tanıtılacaktır.

Tanım 2.2.3 (i) Elemanları kompleks veya reel sayılardan oluşan ve

$$T(t) = (t_{i-j})_{i,j=0}^{n}$$

biçiminde tanımlanan matrise toeplitz matrisi denir. Buna göre, bir toeplitz matris

$$T(t) = \begin{bmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \cdots & t_{n-2} & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \cdots & t_{n-3} & t_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t_{2-n} & t_{3-n} & t_{4-n} & \cdots & t_0 & t_1 \\ t_{1-n} & t_{2-n} & t_{3-n} & \cdots & t_{-1} & t_0 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Görüldüğü gibi bir toeplitz matrisinin elemanları esas köşegene paralel köşegenler boyunca sabittir. Dolayısıyla bir toeplitz matrisini, matrisin ilk satır vektörü ile ilk sütun vektörü temsil eder denilebilir.

(ii) $C(c) = (c_{ij}),\ c_{ij} \in \Re$ olmak üzere, elemanları $j - i \equiv k(\mathrm{mod}\, n)$ şeklinde tanımlı $n \times n$ tipinde matrise circulant(dairesel) matris denir ve

$$C(c) = circ(c_0, c_1, \cdots, c_{n-1})$$

şeklinde gösterilir. Buna göre bir circulant matris

$$C(c) = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} \\ c_{n-2} & c_{n-1} & c_0 & \cdots & c_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_0 \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Genel anlamda $n \times n$ tipinde bir circulant matris n elemanlı bir vektör ile temsil edilir ve bu matrisin ilk satırını oluşturur. Böylece takip eden satırlar önceki satırın son elemanını başa alarak devam eder. Bir circulant matrisin köşegeni üzerindeki elemanları ile köşegene paralel olan çizgiler üzerindeki elemanları aynıdır. (Circulant matrisler, matematik literatüründe ilk kez 1846 yılında E. Catalan'ın çalışmasında karşımıza çıkmaktadır. O yıllardan günümüze kadar matematiğin birçok dalında ve fizikte uygulama alanına sahip olan circulant matrisler hakkında birçok çalışmalar yapılmıştır. Toeplitz matrislerinde olduğu gibi circulant matrislerde de esas köşegene paralel köşegenler boyunca elemanlar eşittir. Circulant matrisler birer toeplitz matris iken tersi doğru değildir. Örneğin, $T_3 = (j-i)_{i,j=1}^{3}$ ve $j-i \equiv k(\mathrm{mod}\,3)$ olmak üzere $C_3 = (k)_{3\times 3}$ matrisleri alındığında C_3 circulant matrisi bir toeplitz matris olduğu halde, T_3 toeplitz matrisi bir circulant matris değildir [10]).

(iii) $a \in \Re^n$ ve $a = (a_0, a_1, \cdots, a_n)^T$ olsun. Esas köşegenin altındaki elemanlarının işaretleri değiştirilmiş, $n\times n$ tipindeki circulant matrise negacyclic matris denir ve $N(a)$ ile gösterilir. Buna göre, bir negacyclic matris

$$N(a)=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} \\ -a_{n-1} & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} \\ -a_{n-2} & -a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-3} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & & a_1 \\ -a_1 & \cdots & & -a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

(iv) $x \in \Re^n$ ve $(x_{0,} x_1, \cdots, x_{n-1})^T$ olsun. $n\times n$ tipindeki $S(x) = (s_{ij})$ semicirculant matrisi

$$S(x) = \begin{cases} x_{j-i+1} & ; i \le j \text{ iken} \\ 0 & ; i > j \text{ iken} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

(v) $n\times n$ tipindeki matrisin elemanları $i, j = 0,1,2,\cdots,n-1$ için $h_{i,j}(h) = h_{i+1,j-1}(h) = h_{i+j-2}$ biçiminde tanımlandığında, $H(h) = (h_{ij})$ matrisine henkel matris denir. Buna göre, bir henkel matris

$$H(h) = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \dots & h_{n-2} & h_{n-1} \\ h_1 & h_2 & h_3 & \dots & h_{n-1} & h_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_{n-2} & h_{n-1} & h_n & \dots & h_{2n-4} & h_{2n-3} \\ h_{n-1} & h_n & h_{n+1} & \dots & h_{2n-3} & h_{2n-2} \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. Buradan görüleceği üzere henkel matris simetriktir [11].

(vi) $p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ bir polinom olmak üzere, $p(x) = 0$ denklemi için

$$M = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

karesel matrisine, $p(x)$ polinomuna karşılık gelen kompanion matrisi denir.

(vii) $T_{(n)} = (t_{ij}) \in M_n$ ve $|i-j|>1$ için $t_{ij} = 0$ şeklinde tanımlanan $n \times n$ tipinde bir kare matrise tridiagonal matris denir. Buna göre, bir tridiagonal matris

$$T_{(n)} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & & & 0 \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & & \\ & t_{32} & t_{33} & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & t_{n-1,n} \\ 0 & & & t_{n,n-1} & t_{nn} \end{bmatrix}$$

şeklindedir [12].

(viii) $C(a) = circ(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$, $n \times n$ tipinde circulant matris olsun. $j = 0,1,\cdots,n-1$ ve $i = \sqrt{-1}$ için, $w = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ birimin *n*. dereceden ilkel kökü olmak üzere

$$\lambda_j(C(a)) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k w^{-jk}$$

ifadesine $C(a)$ matrisinin özdeğeri denir [1,13].

(ix) $C(a) = circ(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$, $n \times n$ tipinde circulant matris olsun. λ_j ifadesi $C(a)$ matrisinin özdeğeri olmak üzere circulant matrisin determinantı

$$\det(C(a)) = \prod_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j w_k^j$$

dır [10]..

(x) $N(x)$, $n\times n$ tipinde negacyclic matris olsun. $w=e^{\frac{2\pi i}{n}}$, $i=\sqrt{-1}$ ve $j=0,1,\cdots,n-1$ olmak üzere

$$\mu_j(x)=\sum_{k=0}^{n-1}x_k w^{(2j+1)k/2}$$

ifadesine $N(x)$ matrisinin özdeğeri denir [14].

Yardımcı Teorem 2.2.4 $A, n\times n$ tipinde bir matris olup $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ A matrisinin özdeğerleri olsun. A^*, A matrisinin eşlenik transpozu olmak üzere, A nın normal matris olması için gerek ve yeter şart AA^* nın özdeğerlerinin $|\lambda_1|^2,|\lambda_2|^2,\cdots,|\lambda_n|^2$ olmasıdır [2].

2.3 MATRİS NORMLARI

Bu alt bölümde daha sonraki bölümlerde sonuç olarak verilecek matris normlarının tanımları verilecektir.

Tanım 2.3.1 F, reel ya da kompleks sayı cismi ve $M_n(F)$ bileşenleri F cisminin elemanları olan $n\times n$ tipinde karesel matrislerin kümesi olmak üzere,

$$\|.\|:M_n(F)\to\Re^+\cup\{0\},\ A\to\|A\|$$

ile ifade edilen ve

(i) $A\in M_n(F)$ için $A\neq 0$ ise $\|A\|>0$ dır. Ayrıca A = 0 olması için gerek ve yeter şart $\|A\|=0$ olmasıdır,

(ii) $a\in F$ ve $A\in M_n(F)$ için $\|aA\|=|a|\,\|A\|$ dır,

(iii) $A,B\in M_n(F)$ için $\|A+B\|\le\|A\|+\|B\|$ ve $\|AB\|\le\|A\|\|B\|$ dir

şartlarını sağlayan $\|.\|$ dönüşüme matris normu denir.

Tanım 2.3.2 A herhangi bir $n\times n$ karesel matris olmak üzere

(i)

$$\|A\|_E = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

normuna A matrisinin Euclidean (frobenius) normu denir.

(ii)

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

normuna A matrisinin sütun normu (1- normu) denir.

(iii)

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

normuna A matrisinin satır normu (sonsuz normu) adı verilir.

(iv)

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_{1\leq i\leq n} \lambda_i (A^H A)}$$

normuna ise A matrisinin spektral normu adı verilir (Burada $A^H = (\overline{A})^T$ dir).

Not. 2.3.3 Yukarıda verilmiş olan bu normlar arasında $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_E \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_E$ şeklinde bir bağıntı vardır.

3. LUCAS VE KOMPANİON-LUCAS TAMSAYI DİZİLERİ İLE TANIMLI MATRİSLER VE MATRİS NORMLARI

Bu bölümde giriş bölümünde tanımlanan p ve q parametreli U_n ve V_n tamsayı dizileri ile tanımlı circulant, negacyclic ve semicirculant matrisler tanımlanıp, bu matrisler için Euclidean norm, spektral norm, 1-normu ve sonsuz normu için sonuçlar elde edilmiş, daha sonra bu matrislerin özdeğerleri ve determinantları bulunmuştur [15].

U_n ve V_n tamsayı dizilerinin

(i) circulant matrisleri

$$C(U)=\begin{bmatrix} U_0 & U_1 & U_2 & \cdots & U_{n-1} \\ U_{n-1} & U_0 & U_1 & \cdots & U_{n-2} \\ U_{n-2} & U_{n-1} & U_0 & \cdots & U_{n-3} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_1 & U_2 & U_3 & \cdots & U_0 \end{bmatrix}, C(V)=\begin{bmatrix} V_0 & V_1 & V_2 & \cdots & V_{n-1} \\ V_{n-1} & V_0 & V_1 & \cdots & V_{n-2} \\ V_{n-2} & V_{n-1} & V_0 & \cdots & V_{n-3} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_1 & V_2 & V_3 & \cdots & V_0 \end{bmatrix}$$

(ii) negacyclic matrisleri

$$N(U)=\begin{bmatrix} U_0 & U_1 & U_2 & \cdots & U_{n-1} \\ -U_{n-1} & U_0 & U_1 & \cdots & U_{n-2} \\ -U_{n-2} & -U_{n-1} & U_0 & \cdots & U_{n-3} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ -U_1 & \cdots & -U_{n-2} & \cdots & U_0 \end{bmatrix}, N(V)=\begin{bmatrix} V_0 & V_1 & V_2 & \cdots & V_{n-1} \\ -V_{n-1} & V_0 & V_1 & \cdots & V_{n-2} \\ -V_{n-2} & -V_{n-1} & V_0 & \cdots & V_{n-3} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ -V_1 & \cdots & -V_{n-2} & \cdots & V_0 \end{bmatrix}$$

(iii) semicirculant matrisleri

$$S(U)=\begin{bmatrix} U_0 & U_1 & U_2 & \cdots & U_{n-1} \\ 0 & U_0 & U_1 & \cdots & U_{n-2} \\ 0 & 0 & U_0 & \cdots & U_{n-3} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & U_0 \end{bmatrix},\ S(V)=\begin{bmatrix} V_0 & V_1 & V_2 & \cdots & V_{n-1} \\ 0 & V_0 & V_1 & \cdots & V_{n-2} \\ 0 & 0 & V_0 & \cdots & V_{n-3} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & V_0 \end{bmatrix}$$

dir.

U_n ve V_n tamsayı dizilerinin tanımına dikkat edilirse $p^2-4q\neq 0$ olduğundan $p\neq q+1$ dir. Buna göre aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 3.1 U_n ve V_n tamsayı dizilerinin ilk *n* terim toplamları sırasıyla

$$\sum_{i=1}^{n} U_i = \frac{qU_{n-1} + (q-p)U_n + 1}{1+q-p} \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^{n} V_i = \frac{qV_{n-1} + (q-p)V_n + p - 2q}{1+q-p}$$

dir.

İspat. U_n tamsayı dizisi için indirgeme bağıntısı $U_n = pU_{n-1} - qU_{n-2}$ olduğundan

$$\begin{aligned} &i=2 \ \text{ için} \quad U_2 = pU_1 - qU_0 \\ &i=3 \ \text{ için} \quad U_3 = pU_2 - qU_1 \\ &\ \vdots \\ &i=n \ \text{ için} \quad U_n = pU_{n-1} - qU_{n-2} \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafı taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} &U_1 + (U_2 + U_3 + \cdots + U_n) = (p-q)(U_1 + U_2 + \cdots + U_{n-2}) - qU_0 + pU_{n-1} + U_1 \\ &\sum_{i=1}^{n} U_i = (p-q)(U_1 + U_2 + \cdots + U_n) + (q-p)(U_{n-1} + U_n) + pU_{n-1} + 1 \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} U_i + (q-p)\sum_{i=1}^{n} U_i = (q-p)(U_{n-1} + U_n) + pU_{n-1} + 1 \Leftrightarrow \\ &(1+q-p)\sum_{i=1}^{n} U_i = qU_{n-1} + qU_n - pU_{n-1} - pU_n + pU_{n-1} + 1 \end{aligned}$$

ve böylece

$$\sum_{i=1}^{n} U_i = \frac{qU_{n-1} + (q-p)U_n + 1}{1+q-p}$$

sonucu elde edilir. Benzer şekilde V_n tamsayı dizisi için

$$\sum_{i=1}^{n} V_i = \frac{qV_{n-1} + (q-p)V_n + p - 2q}{1+q-p}$$

olduğu da gösterilebilir.

3.1 CİRCULANT MATRİSLER

Bu alt bölümde U_n ve V_n tamsayı dizileri ile tanımlanan $C(U)$ ve $C(V)$ circulant matrisleri ele alınacak, bu matrisler için özdeğerler, determinantlar ve aynı zamanda matris normları elde edilecektir.

Teorem 3.1.1 $C(U)$ ve $C(V)$ circulant matrislerinin özdeğerleri $j=0,1,\cdots,n-1$ için

$$\lambda_j(C(U))=\frac{w^{-j}(qU_{n-1}+1)-U_n}{q\,w^{-2j}-p\,w^{-j}+1} \quad \text{ve} \quad \lambda_j(C(V))=\frac{w^{-j}(qV_{n-1}-p)-V_n+2}{qw^{-2j}-pw^{-j}+1}$$

dir.

İspat. U_n tamsayı dizisinin Binet formülünün $U_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$ olduğu dikkate alınırsa özdeğer tanımından

$$\begin{aligned}
\lambda_j(C(U)) &= \sum_{k=0}^{n-1} U_k\, w^{-jk} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\alpha^k-\beta^k}{\alpha-\beta}\right)w^{-jk}\\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(\alpha\, w^{-j})^k-\sum_{k=0}^{n-1}(\beta\, w^{-j})^k\right)\\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{(\alpha\, w^{-j})^n-1}{\alpha\, w^{-j}-1}-\frac{(\beta\, w^{-j})^n-1}{\beta\, w^{-j}-1}\right)\\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{((\alpha\, w^{-j})^n-1)(\beta\, w^{-j}-1)-((\beta\, w^{-j})^n-1)(\alpha\, w^{-j}-1)}{(\alpha\, w^{-j}-1)(\beta\, w^{-j}-1)}\right)\\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{\alpha^n\beta\, w^{-jn}w^{-j}-\alpha^n w^{-jn}-\beta\, w^{-j}+1-\beta^n w^{-jn}\alpha\, w^{-j}+\beta^n w^{-jn}+\alpha\, w^{-j}-1}{q\, w^{-2j}-p\, w^{-j}+1}\right)\\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{w^{-jn}(\alpha^n\beta\, w^{-j}-\alpha^n-\beta^n\alpha\, w^{-j}+\beta^n)+w^{-j}(-\beta+\alpha)}{q\, w^{-2j}-p\, w^{-j}+1}\right)\\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{w^{-j}(\alpha\beta(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})+\alpha-\beta)-(\alpha^n-\beta^n)}{q\, w^{-2j}-p\, w^{-j}+1}\right)\\
&= \frac{w^{-j}\left(q\dfrac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}+\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta}\right)-\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}}{q\, w^{-2j}-p\, w^{-j}+1}\\
&= \frac{w^{-j}(qU_{n-1}+1)-U_n}{q\, w^{-2j}-p\, w^{-j}+1}
\end{aligned}$$

bulunur. Diğer eşitlik de benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 3.1.2 $C(U)$ ve $C(V)$ circulant matrislerinin spektral normları

$$\|C(U)\|_2=\sum_{j=1}^{n-1}U_j \quad \text{ve} \quad \|C(V)\|_2=\sum_{j=1}^{n-1}V_j$$

dir.

İspat. Spektral norm tanımı ve Yardımcı Teorem 2.2.4 den

$$\|C(U)\|_2 = \left(\max_{0\le j\le n-1} \lambda_j (C(U)C(U)^*) \right)^{1/2} = \left(\max_{0\le j\le n-1} |\lambda_j (C(U))|^2 \right)^{1/2}$$

dır. Eğer $j = 0$ olarak alınırsa özdeğer maksimum olacağından

$$\|C(U)\|_2 = \left|\lambda_0 (C(U))^2\right|^{1/2} = |\lambda_0 (C(U))| = \frac{qU_{n-1}+1-U_n}{q-p+1} = \sum_{j=1}^{n-1} U_j$$

dir. Benzer şekilde

$$\|C(V)\|_2 = \left(\max_{0\le j\le n-1} \lambda_j (C(V)C(V)^*) \right)^{1/2} = \left(\max_{0\le j\le n-1} |\lambda_j (C(V))|^2 \right)^{1/2}$$

olup yine $j = 0$ olarak alınırsa $\|C(V)\|_2 = \left|\lambda_0 (C(V))^2\right|^{1/2} = |\lambda_0 (C(V))| = \sum_{j=1}^{n-1} V_j$ elde edilir.

Teorem 3.1.3 $C(U)$ ve $C(V)$ circulant matrislerin determinantları

$$\det(C(U)) = \frac{(-1)^n (U_n)^n - (-1)^n (qU_{n-1}+1)^n}{1+q^n - U_n(p^2-4q) - 2^{1-n}(p-\sqrt{p^2-4q}\,)^n}$$

ve

$$\det(C(V)) = \frac{(-V_n+2)^n - (p-qV_{n-1})^n}{1+q^n - U_n(p^2-4q) - 2^{1-n}(p-\sqrt{p^2-4q})^n}$$

dir.

İspat. Özdeğer tanımından ve $q w^{-2j} - p w^{-j} + 1 = (\alpha w^{-j} - 1)(\beta w^{-j} - 1)$ eşitliğinden

$$\det(C(U)) = \prod_{j=0}^{n-1} \lambda_j (C(U)) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{w^{-j}(qU_{n-1}+1) - U_n}{qw^{-2j} - pw^{-j} + 1}$$

dir. Ayrıca her x ve y reel değeri için

$$\prod_{j=0}^{n-1} (x - y w^{-j}) = x^n - y^n$$

olup

$$\prod_{j=0}^{n-1} (-U_n - (-qU_{n-1} - 1)w^{-j}) = (-U_n)^n - (-qU_{n-1} - 1)^n$$

ve

$$\prod_{j=0}^{n-1} (\alpha w^{-j} - 1)(\beta w^{-j} - 1) = (1-\alpha^n)(1-\beta^n) = 1 - (\beta^n + \alpha^n) + (\alpha\beta)^n = 1 - (\beta^n + \alpha^n) + q^n$$

dir. Diğer yandan

$$\alpha^n+\beta^n=U_n\sqrt{p^2-4q}+(p-\sqrt{p^2-4q})^n 2^{1-n}$$

olduğundan yukarıdaki eşitlik

$$\det(C(U))=\frac{(-1)^n(U_n)^n-(-1)^n(qU_{n-1}+1)^n}{1+q^n-U_n(p^2-4q)-(p-\sqrt{p^2-4q})^n 2^{1-n}}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde $C(V)$ için

$$\det(C(V))=\prod_{j=0}^{n-1}\lambda_j(C(V))=\prod_{j=0}^{n-1}\frac{w^{-j}(qV_{n-1}-p)-V_n+2}{qw^{-2j}-pw^{-j}+1}$$

olup

$$\prod_{j=0}^{n-1}(-V_n+2-(p-qV_{n-1})w^{-j})=(-V_n+2)^n-(p-qV_{n-1})^n$$

ve

$$\prod_{j=0}^{n-1}(\alpha w^{-j}-1)(\beta w^{-j}-1)=(1-\alpha^n)(1-\beta^n)=1-(\beta^n+\alpha^n)+(\alpha\beta)^n=1-(\beta^n+\alpha^n)+q^n$$

olduğundan $\det(C(V))=\dfrac{(-V_n+2)^n-(p-qV_{n-1})^n}{1+q^n-U_n(p^2-4q)-(p-\sqrt{p^2-4q})^n 2^{1-n}}$ dır.

Teorem 3.1.4 $K=\dfrac{p(q+1)+(q-1)\sqrt{p^2-4q}}{2q}$ olmak üzere $C(U)$ ve $C(V)$ circulant matrislerinin Euclidean normları

$$\|C(U)\|_E=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{n}{p^2-4q}\left(4+\displaystyle\sum_{i=1}^{n/2}(K\alpha^{4i-1}+\overline{K}\beta^{4i-1})+6\frac{1-q^n}{1-q}-V_n^{\,2}\right)} & ;n \text{ çift iken}\\ \sqrt{\dfrac{n}{p^2-4q}\left(4+\displaystyle\sum_{i=1}^{(n-1)/2}(K\alpha^{4i-1}+\overline{K}\beta^{4i-1})+\alpha^{2n}+\beta^{2n}+4\frac{1-q^n}{1-q}-V_n^{\,2}\right)} & ;n \text{ tek iken}\end{cases}$$

ve

$$\|C(V)\|_E=\begin{cases}\sqrt{n\left(4+\displaystyle\sum_{i=1}^{n/2}(K\alpha^{4i-1}+\overline{K}\beta^{4i-1})+2\frac{1-q^n}{1-q}-V_n^{\,2}\right)} & ;n \text{ çift iken}\\ \sqrt{n\left(4+\displaystyle\sum_{i=1}^{(n-1)/2}(K\alpha^{4i-1}+\overline{K}\beta^{4i-1})+\alpha^{2n}+\beta^{2n}+2\frac{1-q^n}{1-q}-V_n^{\,2}\right)} & ;n \text{ tek iken}\end{cases}$$

dir.

İspat. Euclidean norm tanımından

$$\|C(V)\|_E^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |c_{ij}|^2 = n\sum_{i=1}^{n} V_{i-1}^2$$

olduğundan $\sum_{i=1}^{n} V_i^{\,2}$ eşitliği bulunur ise ispat tamamlanmış olacaktır. (2.1.3) eşitliğinden $V_n^{\,2} = V_{2n} + 2q^n$ olduğu biliniyor. O halde

$$\sum_{i=1}^{n} V_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} (V_{2i} + 2q^i) = \sum_{i=1}^{n} V_{2i} + 2\sum_{i=1}^{n} q^i \tag{3.1.1}$$

dir. Diğer yandan

$$\sum_{i=1}^{n} V_{2i} = (V_2 + V_4) + (V_6 + V_8) + \cdots + (V_{2n-2} + V_{2n})$$

olduğundan

$$\begin{aligned} V_{n-1} + V_{n+1} &= \alpha^{n+1} + \beta^{n+1} + \alpha^{n-1} + \beta^{n-1} = \alpha^n(\alpha + \alpha^{-1}) + \beta^n(\beta + \beta^{-1}) \\ &= \alpha^n\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\right) + \beta^n\left(\frac{\beta^2 + 1}{\beta}\right) \end{aligned}$$

dir. Üstelik

$$\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} = \frac{p(q+1) + (q-1)\sqrt{p^2 - 4q}}{2q} \quad \text{ve} \quad \frac{\beta^2 + 1}{\beta} = \frac{p(q+1) - (q-1)\sqrt{p^2 - 4q}}{2q}$$

olup

$$K = \frac{p(q+1) + (q-1)\sqrt{p^2 - 4q}}{2q} \quad \text{ve eşleniği} \quad \overline{K} = \frac{p(q+1) - (q-1)\sqrt{p^2 - 4q}}{2q}$$

olduğundan $V_{n-1} + V_{n+1} = K\alpha^n + \overline{K}\beta^n$ dir. O halde *n* çift iken

$$\sum_{i=1}^{n} V_{2i} = (V_2 + V_4) + (V_6 + V_8) + \cdots + (V_{2n-2} + V_{2n})$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} V_{2i} &= (K\alpha^3 + \overline{K}\beta^3) + (K\alpha^7 + \overline{K}\beta^7) + \cdots + (K\alpha^{2n-1} + \overline{K}\beta^{2n-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n/2} (K\alpha^{4i-1} + \overline{K}\beta^{4i-1}) \end{aligned}$$

ve *n* tek iken

$$\sum_{i=1}^{n} V_{2i} = (V_2 + V_4) + (V_6 + V_8) + \cdots + (V_{2n-4} + V_{2n}) + V_{2n}$$
$$= (K\alpha^3 + \overline{K}\beta^3) + \cdots + (K\alpha^{2n-3} + \overline{K}\beta^{2n-3}) + V_{2n}$$
$$= \sum_{i=1}^{(n-1)/2} (K\alpha^{4i-1} + \overline{K}\beta^{4i-1}) + \alpha^{2n} + \beta^{2n}$$

bulunur. Buradan

$$\sum_{i=1}^{n} V_{2i} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n/2} (K\alpha^{4i-1} + \overline{K}\beta^{4i-1}) & ; n \text{ çift iken} \\ \sum_{i=1}^{(n-1)/2} (K\alpha^{4i-1} + \overline{K}\beta^{4i-1}) + \alpha^{2n} + \beta^{2n} & ; n \text{ tek iken} \end{cases}$$

elde edilir. Ayrıca $2\sum_{i=1}^{n} q^i = 2\left(\frac{q - q^{n+1}}{1-q}\right)$ olduğu bilindiğinden $2\sum_{i=0}^{n-1} q^i = 2\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$ dir. Sonuç olarak (3.1.1) den

$$\sum_{i=0}^{n-1} V_i^2 = \sum_{i=0}^{n-1} (V_{2i} + 2q^i) = \sum_{i=0}^{n-1} V_{2i} + 2\sum_{i=0}^{n-1} q^i$$

olup

$$\sum_{i=1}^{n} V_{i-1}^2 = \begin{cases} 4 + \sum_{i=1}^{n/2} (K\alpha^{4i-1} + \overline{K}\beta^{4i-1}) + 2\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) - V_n^2 & ; n \text{ çift iken} \\ 4 + \sum_{i=1}^{(n-1)/2} (K\alpha^{4i-1} + \overline{K}\beta^{4i-1}) + \alpha^{2n} + \beta^{2n} + 2\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) - V_n^2 & ; n \text{ tek iken} \end{cases}$$

elde edilir. $\|C(V)\|_E = n\sum_{i=1}^{n} V_{i-1}^2$ olduğundan istenilen sonuç görülür. Diğer eşitlik de benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 3.1.5 $C(U)$ ve $C(V)$ circulant matrislerinin 1-normu ve sonsuz normları

$$\|C(U)\|_1 = \|C(U)\|_\infty = \frac{qU_{n-1} + (1 - 2p + 2q)U_n + 1}{1 + q - p}$$
$$\|C(V)\|_1 = \|C(V)\|_\infty = \frac{qV_{n-1} - V_n + 3(q - p + 1)}{1 + q - p}$$

dır.

İspat. Teorem 3.4 den ilk n- terim toplamı

$$\sum_{i=0}^{n-1} U_i = \frac{qU_{n-1} + (q-p)U_n + 1}{1+q-p} - U_n = \frac{qU_{n-1} + (1-2p+2q)U_n + 1}{1+q-p}$$

olduğundan

$$\|C(U)\|_1 = \|C(U)\|_\infty = \frac{qU_{n-1} + (1-2p+2q)U_n + 1}{1+q-p}$$

sonucu görülür. Benzer şekilde $\|C(V)\|_1 = \|C(V)\|_\infty = \dfrac{qV_{n-1} - V_n + 3(q-p+1)}{1+q-p}$ olduğu da gösterilebilir.

Sonuç 3.1.6 Verilen tamsayı dizileri ile oluşturulan circulant matrislerin Euclidean normu ile spektral normu aynı değere sahiptir.

Teorem 3.1.7 $C(U)$ ve $C(V)$ circulant matrisleri için dağılım

$$s(C(U)) \geq \frac{n}{n-1}\left(\frac{qU_{n-1} + (1-2p+2q)U_n + 1}{1+q-p}\right)$$

$$s(C(V)) \geq \frac{n}{n-1}\left(\frac{qV_{n-1} + (q-p)V_n + 3p - 4q - 2}{1+q-p}\right)$$

ve

$$s(C(U)) \leq \begin{cases} 2n\left(2 + \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} (K\alpha^{4i-1} + \overline{K}\beta^{4i-1}) + (2q+4)\left(\dfrac{1-q^n}{1-q}\right) - V_n^2\right) & ; n \text{ çift iken} \\ 2n\left(2 + \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} (K\alpha^{4i-1} + \overline{K}\beta^{4i-1}) + (2q+4)\left(\dfrac{1-q^n}{1-q}\right) - V_n^2\right) & ; n \text{ tek iken} \end{cases}$$

$$s(C(V)) \leq \begin{cases} 2n\left(2 + \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} (K\alpha^{4i-1} + \overline{K}\beta^{4i-1}) + (2q+4)\left(\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) - V_n^2\right) - 8n & ; n \text{ çift iken} \\ 2n\left(2 + \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} (K\alpha^{4i-1} + \overline{K}\beta^{4i-1}) + (2q+4)\left(\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) - V_n^2\right) - 8n & ; n \text{ tek iken} \end{cases}$$

dir.

İspat. Circulant matrisin izinden $tr(C(U)) = nU_0 = 0$ bulunur. [12] nolu referans ve Yardımcı Teorem 2.2.2 den

$$\sum_{i \neq j} a_{ij} = n\sum_{j=0}^{n-1} U_j - nU_0 = n\left(\frac{qU_{n-1} + (1-2p+2q)U_n + 1}{1+p-q}\right)$$

$$s(C(U)) \geq \frac{1}{n-1}\left|\sum_{i\neq j} a_{ij}\right| = \frac{n}{n-1}\left(\frac{qU_{n-1}+(1-2p+2q)U_n+1}{1+p-q}\right)$$

elde edilir. *n* çift ise

$$2\|C(U)\|_E^2 - \frac{2}{n}|trC(U)|^2 = 2n\left(2+\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}(K\alpha^{4i-1}+\overline{K}\beta^{4i-1})+(2q+4)(\frac{1-q^n}{1-q})-V_n^2\right)$$

ve *n* tek ise

$$2\|C(U)\|_E^2 - \frac{2}{n}|trC(U)|^2 = 2n\left(2+\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}(K\alpha^{4i-1}+\overline{K}\beta^{4i-1})+(2q+4)(\frac{1-q^n}{1-q})-V_n^2\right)$$

dir.

3.2 NEGACYCLİG MATRİSLER

Bu alt bölümde U_n ve V_n tamsayı dizilerine bağlı olarak tanımlanan $N(U)$ ve $N(V)$ negacyclic matrisleri ele alınacak ve bu matrisleri için özdeğerler, determinantlar ve aynı zamanda matris normları elde edilecektir.

Teorem 3.2.1 $N(U)$ ve $N(V)$ negacyclic matrislerin özdeğerleri $j=0,1,\cdots,n-1$ için

$$m_j(N(U)) = \frac{w^{(2j+1)/2}(1-qU_{n-1})+U_n}{qw^{2j+1}-pw^{(2j+1)/2}+1}$$

ve

$$m_j(N(V)) = \frac{w^{(2j+1)/2}(-qV_{n-1}-p)+V_n+2}{qw^{2j+1}-pw^{(2j+1)/2}+1}$$

dir.

İspat. Negacyclic matris tanımından

$$m_j(N(U)) = \sum_{k=0}^{n-1} U_k\, w^{(2j+1)k/2} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\alpha^k-\beta^k}{\alpha-\beta}\right)w^{(2j+1)k/2}$$
$$= \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(\alpha\, w^{(2j+1)/2})^k - \sum_{k=0}^{n-1}(\beta\, w^{(2j+1)/2})^k\right)$$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{(\alpha\, w^{(2j+1)/2})^n-1}{\alpha\, w^{(2j+1)/2}-1}-\frac{(\beta\, w^{(2j+1)/2})^n-1}{\beta\, w^{(2j+1)/2}-1}\right)$$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{-\alpha^n-1}{\alpha\, w^{(2j+1)/2}-1}-\frac{-\beta^n-1}{\beta\, w^{(2j+1)/2}-1}\right)$$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{\beta^n+1}{\beta\, w^{(2j+1)/2}-1}-\frac{\alpha^n+1}{\alpha\, w^{(2j+1)/2}-1}\right)$$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{\alpha\beta^n w^{(2j+1)/2}-\beta^n+\alpha\, w^{(2j+1)/2}-1-(\alpha^n\beta\, w^{(2j+1)/2}-\alpha^n+\beta\, w^{(2j+1)/2}-1)}{qw^{2j+1}-pw^{(2j+1)/2}+1}\right)$$

$$=\frac{\alpha\beta^n w^{(2j+1)/2}-\beta^n+\alpha\, w^{(2j+1)/2}-1-\alpha^n\beta\, w^{(2j+1)/2}+\alpha^n-\beta\, w^{(2j+1)/2}+1}{(\alpha-\beta)\,(qw^{2j+1}-pw^{(2j+1)/2}+1)}$$

$$=\frac{-\alpha\beta(-\beta^{n-1}+\alpha^{n-1})\, w^{(2j+1)/2}+w^{(2j+1)/2}(\alpha-\beta)+\alpha^n-\beta^n}{(\alpha-\beta)\,(qw^{2j+1}-pw^{(2j+1)/2}+1)}$$

$$=\frac{-qU_{n-1}\, w^{(2j+1)/2}+w^{(2j+1)/2}+U_n}{qw^{2j+1}-pw^{(2j+1)/2}+1}$$

sonucu elde edilir. Benzer şekilde

$$m_j(N(V))=\frac{w^{(2j+1)/2}(-qV_{n-1}-p)+V_n+2}{qw^{2j+1}-pw^{(2j+1)/2}+1}$$

olduğu da gösterilebilir.

Teorem 3.2.2 $N(U)$ ve $N(V)$ negacyclic matrislerinin determinantları

$$\det(N(U))=\frac{U_n{}^n-((qU_{n-1}-1)w^{1/2})^n}{qe^{\pi i(n+1)}-((qw^{1/2})^n-1)}$$

ve

$$\det(N(V))=\frac{(V_n+2)^n-((p+qV_{n-1})w^{1/2})^n}{qe^{\pi i(n+1)}-(pw^{1/2})^n-1}$$

dir.

İspat. Yukarıdaki teoremde $N(U)$ negacyclic matrisinin özdeğerlerinin

$$m_j(N(U))=\frac{w^{(2j+1/2)}(1-qU_{n-1})+U_n}{qw^{2j+1}-pw^{(2j+1)/2}+1}$$

olduğu gösterilmiştir. O halde

$$\det(N(U))=\prod_{j=0}^{n-1}\lambda_j N(U)=\prod_{j=0}^{n-1}\frac{w^{(2j+1)/2}(1-qU_{n-1})+U_n}{qw^{2j+1}-pw^{(2j+1)/2}+1}$$

dir. Burada pay ve payda w^{-2j} ile çarpılırsa

$$\det(N(U))=\prod_{j=0}^{n-1}\frac{w^{-2j}(w^{(2j+1)/2}(1-qU_{n-1})+U_n)}{w^{-2j}(qw^{2j+1}-pw^{(2j+1)/2}+1)}=\prod_{j=0}^{n-1}\frac{w^{-j}w^{1/2}(1-qU_{n-1})+U_n w^{-2j}}{w^{-2j}(qw^{2j+1}-pw^{(2j+1)/2}+1)}$$

$$=\prod_{j=0}^{n-1}\frac{w^{-j}(w^{-j}U_n-(qU_{n-1}-1)w^{1/2})}{w^{-2j}(qw^{2j+1}-pw^{(2j+1)/2}+1)}=\frac{\prod_{j=0}^{n-1}w^{-j}\prod_{j=0}^{n-1}(w^{-j}U_n-(qU_{n-1}-1)w^{1/2})}{\prod_{j=0}^{n-1}w^{-j}\prod_{j=0}^{n-1}(w^{-j}(qw^{2j+1}-pw^{(2j+1)/2}+1))}$$

$$=\frac{\prod_{j=0}^{n-1}(w^{-j}U_n-(qU_{n-1}-1)w^{1/2})}{\prod_{j=0}^{n-1}(qw^{j+1}-pw^{1/2}+w^{-j})}=\frac{\prod_{j=0}^{n-1}(w^{-j}U_n-(qU_{n-1}-1)w^{1/2})}{\prod_{j=0}^{n-1}qw^{j+1}-\prod_{j=0}^{n-1}(pw^{1/2}-w^{-j})}$$

$$=\frac{-\prod_{j=0}^{n-1}((qU_{n-1}-1)w^{1/2}-U_n w^{-j})}{qe^{\pi i(n+1)}-\prod_{j=0}^{n-1}(pw^{1/2}-w^{-j})}=\frac{(U_n)^n-((qU_{n-1}-1)w^{1/2})^n}{qe^{\pi i(n+1)}-((pw^{1/2})^n-1)}$$

sonucu elde edilir. Diğer eşitlik de benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 3.2.3 $N(U)$ ve $N(V)$ negacyclic matrislerinin 1-normu ve sonsuz normları

$$\|N(U)\|_1=\|N(U)\|_\infty=\frac{qU_{n-1}+(1-2p+2q)U_n+1}{1+q-p}$$

ve

$$\|N(V)\|_1=\|N(V)\|_\infty=\frac{qV_{n-1}-V_n+3(q-p+1)}{1+q-p}$$

dır.

İspat. $N(U)$ matrisinde ilk satır toplamından ve U_n nin ilk n-terim toplamı bilindiğinden

$$\|N(U)\|_1=\frac{qU_{n-1}+(1-2p+2q)U_n+1}{1+q-p}$$

bulunur. $N(U)$ matrisinde ilk sütun toplamından ve U_n nin ilk n-terim toplamı bilindiğinden

$$\|N(U)\|_\infty=\frac{qU_{n-1}+(1-2p+2q)U_n+1}{1+q-p}$$

dir. Benzer şekilde $\|N(V)\|_1$ ve $\|N(V)\|_\infty$ de bulunur.

3.3. SEMİCİRCULANT MATRİSLER

Bu alt bölümde U_n ve V_n tamsayı dizilerine bağlı olarak tanımlanan $S(U)$ ve $S(V)$ semicirculant matrisleri ele alınacak ve bu matrisler için özdeğer, determinant ve matris normları elde edilecektir.

3.3.1 Teorem. $S(U)$ ve $S(V)$ semicirculant matrislerinin 1- normu ve sonsuz normları

$$\|S(U)\|_1 = \|S(U)\|_\infty = \frac{qU_{n-1} + (1-2p+2q)U_n + 1}{1-q-p}$$
$$\|S(V)\|_1 = \|S(V)\|_\infty = \frac{qV_{n-1} - V_n + 3(q-p+1)}{1-q-p}$$

şeklindedir.

İspat. Teorem 3.2.4 ile benzer şekilde gösterilebilir.

3.3.2 Teorem. $S(U)$ semicirculant matrisinin Euclidean normu

$$\|S(U)\|_E = \begin{cases} \dfrac{U_n}{p} & ; n \geq 4 \text{ çift iken} \\ \sqrt{\dfrac{\sum_{n=1}^{(n-1)/2} U_{4n}}{p}} & ; n \geq 5 \text{ tek iken} \end{cases}$$

dir.

İspat. Teorem 3.1.4 ispatına benzer olarak gösterilir.

3.4 KOMPANİON MATRİSLER

U_n ve V_n tamsayı dizilerinin kompanion matrisi

$$M = M(U_n) = M(V_n) = \begin{bmatrix} p & -q \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olup bu matris ile ilgili olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.4.1 M matrisinin n. kuvveti $n \geq 3$ tek iken

$$M_{11} = \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} C(n-i,i)\,p^{n-2i}(-q)^{i}$$

$$M_{12} = \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} C(n-1-i,i)\,p^{n-1-2i}(-q)^{i+1}$$

$$M_{21} = \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} C(n-1-i,i)\,p^{n-1-2i}(-q)^{i}$$

$$M_{22} = \sum_{i=0}^{\frac{n-3}{2}} C(n-2-i,i)\,p^{n-2-2i}(-q)^{i+1}$$

ve $n \geq 4$ çift iken

$$M_{11} = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} C(n-i,i)\,p^{n-2i}(-q)^{i}$$

$$M_{12} = \sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} C(n-1-i,i)\,p^{n-1-2i}(-q)^{i+1}$$

$$M_{21} = \sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} C(n-1-i,i)\,p^{n-1-2i}(-q)^{i}$$

$$M_{22} = \sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} C(n-2-i,i)\,p^{n-2-2i}(-q)^{i+1}$$

olmak üzere

$$M^{n} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

dir (Burada $C(n,i)$, n nin i-li kombinasyonudur).

İspat. (i) n tek olsun. İspat tümevarım ile gösterilecektir. $n = 3$ olsun. Bu takdirde

$$M^{3} = \begin{bmatrix} p^{3} - 2pq & -p^{2}q - q^{2} \\ p^{2} - q & -pq \end{bmatrix}$$

dir ve

$$M_{11}^{3}=\sum_{i=0}^{1}C(3-i,i)\,p^{3-2i}(-q)^{i}=p^{3}-2pq$$
$$M_{12}^{3}=\sum_{i=0}^{1}C(2-i,i)\,p^{2-2i}(-q)^{i+1}=-p^{2}q-q^{2}$$
$$M_{21}^{3}=\sum_{i=0}^{1}C(2-i,i)\,p^{2-2i}(-q)^{i}=p^{2}-q$$
$$M_{22}^{3}=\sum_{i=0}^{0}C(1-i,i)\,p^{1-2i}(-q)^{i+1}=-pq$$

olduğundan eşitlik $n=3$ için doğrudur. Eşitliğin $n-3$ için doğru olduğu kabul edilsin. Bu takdirde

$$M_{11}^{n-3}=\sum_{i=0}^{\frac{n-3}{2}}C(n-3-i,i)\,p^{n-3-2i}(-q)^{i}$$
$$M_{12}^{n-3}=\sum_{i=0}^{\frac{n-4}{2}}C(n-4-i,i)\,p^{n-4-2i}(-q)^{i+1}$$
$$M_{21}^{n-3}=\sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}}C(n-4-i,i)\,p^{n-4-2i}(-q)^{i}$$
$$M_{22}^{n-3}=\sum_{i=0}^{\frac{n-6}{2}}C(n-5-i,i)\,p^{n-5-2i}(-q)^{i+1}$$

için

$$M^{n-3}=\begin{bmatrix}M_{11}^{n-3} & M_{12}^{n-3}\\ M_{21}^{n-3} & M_{22}^{n-3}\end{bmatrix}$$

dir. $M^{n}=M^{n-3}M^{3}$ olduğundan

$$M_{11}^{n-3}[p^{3}-2pq]+M_{12}^{n-3}[p^{2}-q]$$
$$=\left(p^{n-3}+C(n-4,1)\,p^{n-5}(-q)^{1}+\cdots+(-q)^{\frac{n-3}{2}}\right)(p^{3}-2pq)$$
$$+\left(p^{n-4}(-q)^{1}+C(n-5,1)\,p^{n-6}(-q)^{2}+\cdots+(-q)^{\frac{n-2}{2}}\right)(p^{2}-q)$$

$$= p^{n-3}(p^3-2pq)+p^{n-4}(-q)^1(p^2-q)+C(n-4,1)p^{n-5}(-q)^1(p^3-2pq)$$
$$+C(n-5,1)p^{n-6}(-q)^2(p^2-q)+\cdots+(-q)^{\frac{n-3}{2}}(p^3-2pq)+(-q)^{\frac{n-2}{2}}(p^2-q)$$
$$=\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}}C(n-i,i)p^{n-2i}(-q)^i$$
$$=M_{11}^n$$

dir (Burada $i=1,2,\cdots,\dfrac{n-2}{2}$ için

$$C(n-i,i)C(n,2i)=C(n-2,2i)+C(n-2,2i-2)+2C(n-2,2i-1)$$

dir). Benzer şekilde

$$M_{11}^{n-3}[p^2q-q^2]+M_{12}^{n-3}[-pq]=M_{12}^n$$
$$M_{21}^{n-3}[p^3-2pq]+M_{22}^{n-3}[p^2-q]=M_{21}^n$$
$$M_{21}^{n-3}[-p^2q-q^2]+M_{22}^{n-3}[-pq]=M_{22}^n$$

olduğu görülür. O halde $M^n=\begin{bmatrix} M_{11}^n & M_{12}^n \\ M_{21}^n & M_{22}^n \end{bmatrix}$ dir.

4. TETRANACCİ VE KOMPANİON-TETRANACCİ TAMSAYI DİZİLERİ İLE TANIMLI MATRİSLER

$n \geq 4$ olmak üzere $M_0 = 1,\ M_1 = 2,\ M_2 = 2,\ M_3 = 4$ başlangıç değerleri ile tanımlı

$$M_n = M_{n-1} + M_{n-2} + M_{n-3} + M_{n-4}$$

dördüncü basamaktan sayı dizisine tetranacci tamsayı dizisi denir [16].

Tetranacci dizisinin karakteristik denklemi

$$x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 = 0$$

olup bu denklemin kökleri α, β, γ ve δ dır.

$$X = \frac{\alpha^5 - \alpha^4}{2\alpha^4 - 5}, \quad Y = \frac{\beta^5 - \beta^4}{2\beta^4 - 5}, \quad Z = \frac{\gamma^5 - \gamma^4}{2\gamma^4 - 5}, \quad W = \frac{\delta^5 - \delta^4}{2\delta^4 - 5}$$

değerleri için M_n dizisinin Binet formülü

$$\begin{aligned} M_n &= \frac{(\alpha^5 - \alpha^4)\alpha^n}{2\alpha^4 - 5} + \frac{(\beta^5 - \beta^4)\beta^n}{2\beta^4 - 5} + \frac{(\gamma^5 - \gamma^4)\gamma^n}{2\gamma^4 - 5} + \frac{(\delta^5 - \delta^4)\delta^n}{2\delta^4 - 5} \\ &= X\alpha^n + Y\beta^n + Z\gamma^n + W\delta^n \end{aligned}$$

dir [17]. Dizinin karakteristik denklemin kökleri arasında

$$\begin{aligned} &\alpha\beta + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta + \alpha\gamma = -1 \\ &(\alpha\beta\gamma)^2 + (\alpha\beta\delta)^2 + (\alpha\gamma\delta)^2 + (\beta\gamma\delta)^2 + (\alpha\beta\gamma\delta)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) = -4 \\ &\alpha^2(\alpha\gamma + \gamma\delta + \beta\delta) + \beta^2(\alpha\delta + \gamma\delta + \alpha\gamma) + \gamma^2(\alpha\delta + \alpha\beta + \beta\delta) + \delta^2(\beta\gamma + \alpha\beta + \beta\delta) = 5 \end{aligned}$$

şeklinde cebirsel bir bağıntı vardır.

Ayrıca $n \geq 4$ olmak üzere $K_0 = 4,\ K_1 = 1,\ K_2 = 3,\ K_3 = 7$ başlangıç değerleri için

$$K_n = K_{n-1} + K_{n-2} + K_{n-3} + K_{n-4}$$

dizisine de kompanion-tetranacci tamsayı dizisi denir. Bu dizinin karakteristik denklemi $x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ olup dizi için Binet formülü

$$K_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n + \delta^n$$

dir.

Bu iki tamsayı dizisinin circulant matrisleri

$$C(M)=\begin{bmatrix} M_0 & M_1 & M_2 & \cdots & M_{n-1} \\ M_{n-1} & M_0 & M_1 & \cdots & M_{n-2} \\ M_{n-2} & M_{n-1} & M_0 & \cdots & M_{n-3} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_1 & M_2 & M_3 & \cdots & M_0 \end{bmatrix},\ C(K)=\begin{bmatrix} K_0 & K_1 & K_2 & \cdots & K_{n-1} \\ K_{n-1} & K_0 & K_1 & \cdots & K_{n-2} \\ K_{n-2} & K_{n-1} & K_0 & \cdots & K_{n-3} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_1 & K_2 & K_3 & \cdots & K_0 \end{bmatrix}$$

ve negacyclic matrisleri

$$N(M)=\begin{bmatrix} M_0 & M_1 & M_2 & \cdots & M_{n-1} \\ -M_{n-1} & M_0 & M_1 & \cdots & M_{n-2} \\ -M_{n-2} & -M_{n-1} & M_0 & \cdots & M_{n-3} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ -M_1 & \cdots & -M_{n-2} & \cdots & M_0 \end{bmatrix},\ N(K)=\begin{bmatrix} K_0 & K_1 & K_2 & \cdots & K_{n-1} \\ -K_{n-1} & K_0 & K_1 & \cdots & K_{n-2} \\ -K_{n-2} & -K_{n-1} & K_0 & \cdots & K_{n-3} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ -K_1 & \cdots & -K_{n-2} & \cdots & K_0 \end{bmatrix}$$

dir.

Yardımcı Teorem 4.1 *a, b, c, d* ve *g* kompleks sayılar, $i=\sqrt{-1}$ ve $w=e^{\frac{2\pi i}{n}}$ birimin *n.* dereceden ilkel kökü olmak üzere

$$\prod_{k=1}^{n} a-bw^{-k}+cw^{-2k}-dw^{-3k}=a^n-d^n+(2^{-n}-2^{1-2n})b^n+2^{1-n}\left(\frac{c-2ad}{b}\right)^n+2^n\left(\frac{ad}{b}\right)^n$$

ve

$$\prod_{k=1}^{n} a-bw^{-k}+cw^{-2k}-dw^{-3k}+gw^{-4k}=a^n+g^n+2^{2-2n}(b^n+d^n)+2^{1-3n}\left(\frac{4ac+b}{a}\right)^n+2^{2-4n}\left(\frac{b}{a}\right)^n$$

dir.

Teorem 4.2. M_n tetranacci ve K_n kompanion-tetranacci tamsayı dizilerinin ilk n-terim toplamı sırasıyla

$$\sum_{i=4}^{n} M_i=\frac{1}{3}(4M_n+3M_{n-1}+2M_{n-2}+M_{n-3}-27)$$

ve

$$\sum_{i=4}^{n} K_i=\frac{1}{3}(4K_n+3K_{n-1}+2K_{n-2}+K_{n-3}-43)$$

dir.

İspat. Tetranacci dizisinin genel teriminin $M_n=M_{n-1}+M_{n-2}+M_{n-3}+M_{n-4}$ şeklinde olduğu dikkate alınırsa

$$M_n - M_{n-1} = M_{n-2} + M_{n-3} + M_{n-4}$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned}
n=4 &\text{ için } M_4 - M_3 = M_2 + M_1 + M_0 \\
n=5 &\text{ için } M_5 - M_4 = M_3 + M_2 + M_1 \\
n=6 &\text{ için } M_6 - M_5 = M_4 + M_3 + M_2 \\
&\vdots \\
n=n-1 &\text{ için } M_{n-1} - M_{n-2} = M_{n-3} + M_{n-4} + M_{n-5} \\
n=n &\text{ için } M_n - M_{n-1} = M_{n-2} + M_{n-3} + M_{n-4}
\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafı taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned}
M_n - 4 &= 6 + \sum_{i=4}^{n} M_i - (M_{n-1} + M_n) + 8 + \sum_{i=4}^{n} M_i - (M_{n-2} + M_{n-1} + M_n) \\
&\quad + 9 + \sum_{i=4}^{n} M_i - (M_{n-3} + M_{n-2} + M_{n-1} + M_n) \\
&= -27 + 4M_n + 3M_{n-1} + 2M_{n-2} + M_{n-3} = 3\sum_{i=1}^{n} M_i
\end{aligned}$$

ve böylece

$$\sum_{i=4}^{n} M_i = \frac{1}{3}(4M_n + 3M_{n-1} + 2M_{n-2} + M_{n-3} - 27)$$

elde edilir. Diğer eşitlik de benzer şekilde gösterilebilir.

Sonuç 4.3 M_n tetranacci ve K_n kompanion-tetranacci tamsayı dizilerinin terimleri arasındaki fark

$$M_n - K_n = M_{n+4} - M_{n+3} - M_{n+2} - M_{n+1} - K_{n+3} + K_{n+2} + K_{n+1} + K_{n-1}$$

dır.

İspat.

$$\begin{aligned}
M_n &= (M_{n+2} + M_{n+1} + M_n + M_{n-1}) - M_{n+2} - M_{n+1} - M_{n-1} \\
&= M_{n+3} - M_{n-1} - M_{n+2} - M_{n+1} \\
&= (M_{n+3} + M_{n+2} + M_{n+1} + M_n) - (M_{n+2} + M_{n+1} + M_n) - M_{n+2} - M_{n+1} - M_{n-1} \\
&= M_{n+4} - M_{n+3} - M_{n+2} - M_{n+1}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
K_n &= (K_{n+1} + K_n + K_{n-1} + K_{n-2}) - K_{n-2} - K_{n+1} - K_{n-1} \\
&= K_{n+2} - K_{n-2} - K_{n+1} - K_{n-1} \\
&= (K_{n+2} + K_{n+1} + K_n + K_{n-1}) - (K_{n+1} + K_n + K_{n-1} + K_{n-2}) - K_{n+1} - K_{n-1} \\
&= K_{n+3} - K_{n+2} - K_{n+1} - K_{n-1}
\end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$M_n - K_n = M_{n+4} - M_{n+3} - M_{n+2} - M_{n+1} - K_{n+3} + K_{n+2} + K_{n+1} + K_{n-1}$$

sonucu bulunur.

4.1. CİRCULANT MATRİSLER

Bu alt bölümde M_n tetranacci ve K_n kompanion-tetranacci tamsayı dizisi ile verilen $C(M)$ ve $C(K)$ circulant matrisleri için özdeğerler, determinantlar ve matris normları elde edilecektir.

Bir sonraki teoremlerde

$$\begin{aligned}
&Q = \alpha\beta\gamma\delta \\
&P = \alpha + \beta + \gamma + \delta \\
&N = X + Y + Z + W \\
&R = \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta \\
&K = X\beta\gamma\delta + Y\alpha\gamma\delta + Z\alpha\beta\delta + W\alpha\beta\gamma \\
&T = X(\gamma\beta + \delta\beta + \gamma\delta) + Y(\gamma\alpha + \delta\alpha + \gamma\delta) + Z(\alpha\beta + \alpha\delta + \beta\delta) + W(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)
\end{aligned}$$

bağıntıları kullanılacaktır.

Teorem 4.1.1 $C(M)$ ve $C(K)$ circulant matrislerinin özdeğerleri $j = 0, 1, \cdots, n-1$ için

$$\lambda_j(C(M)) = \frac{\left\{\begin{matrix}(QM_{n-1} - K)w^{-3j} + (M_n + PM_{n+1} - M_{n+2} + T)w^{-2j} \\ + (PM_n - M_{n+1} + M_1 - PN)w^{-j} - M_n + N\end{matrix}\right\}}{Qw^{-4j} - Rw^{-3j} - w^{-2j} - Pw^{-j} + 1}$$

ve

$$\lambda_j(C(K)) = \frac{\left\{\begin{matrix}(QK_{n-1} - R)w^{-3j} + (K_n + PK_{n+1} - K_{n+2} - 2)w^{-2j} \\ + ((K_n - 3)P - K_{n+1})w^{-j} - K_n + 4\end{matrix}\right\}}{Qw^{-4j} - Rw^{-3j} - w^{-2j} - Pw^{-j} + 1}$$

dir.

İspat. Binet formülü ve özdeğer tanımından

$$\begin{aligned}
\lambda_j(C(M)) &= \sum_{k=0}^{n-1} M_k w^{-jk} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{(\alpha^5 - \alpha^4)\alpha^k}{2\alpha^4 - 5} + \frac{(\beta^5 - \beta^4)\beta^k}{2\beta^4 - 5} + \frac{(\gamma^5 - \gamma^4)\gamma^k}{2\gamma^4 - 5} + \frac{(\delta^5 - \delta^4)\delta^k}{2\delta^4 - 5}\right)w^{-jk} \\
&= X\left(\frac{(\alpha w^{-j})^n - 1}{\alpha w^{-j} - 1}\right) + Y\left(\frac{(\beta w^{-j})^n - 1}{\beta w^{-j} - 1}\right) + Z\left(\frac{(\gamma w^{-j})^n - 1}{\gamma w^{-j} - 1}\right) + W\left(\frac{(\delta w^{-j})^n - 1}{\delta w^{-j} - 1}\right)
\end{aligned}$$

dir. Diğer yandan

$$(\alpha w^{-j})^n=\alpha^n\,,\,(\beta w^{-j})^n=\beta^n\,,\,(\gamma w^{-j})^n=\gamma^n\,,\,(\delta w^{-j})^n=\delta^n$$

olduğundan

$$\lambda_j(C(M))=\frac{\left\{\begin{array}{l}X(\alpha^n-1)(\beta w^{-j}-1)(\gamma w^{-j}-1)(\delta w^{-j}-1)\\+Y(\beta^n-1)(\alpha w^{-j}-1)(\gamma w^{-j}-1)(\delta w^{-j}-1)\\+Z(\gamma^n-1)(\alpha w^{-j}-1)(\beta w^{-j}-1)(\delta w^{-j}-1)\\+W(\delta^n-1)(\alpha w^{-j}-1)(\beta w^{-j}-1)(\gamma w^{-j}-1)\end{array}\right\}}{(\alpha w^{-j}-1)(\beta w^{-j}-1)(\gamma w^{-j}-1)(\delta w^{-j}-1)}$$

dir. Bu son eşitliğin paydasında gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}&(\alpha w^{-j}-1)(\beta w^{-j}-1)(\gamma w^{-j}-1)(\delta w^{-j}-1)\\&=(\alpha\beta w^{-2j}-\alpha w^{-j}-\beta w^{-j}+1)(\gamma\delta w^{-2j}-\gamma w^{-j}-\delta w^{-j}+1)\\&=\alpha\beta\gamma\delta w^{-4j}-\alpha\beta\gamma w^{-3j}-\alpha\beta\delta w^{-3j}+\alpha\beta w^{-2j}-\alpha\gamma\delta w^{-3j}+\alpha\gamma w^{-2j}+\alpha\delta w^{-2j}\\&\quad-\alpha w^{-j}-\beta\gamma\delta w^{-3j}+\beta\gamma w^{-2j}+\beta\delta w^{-2j}-\beta w^{-j}+\gamma\delta w^{-2j}-\gamma w^{-j}-\delta w^{-j}+1\\&=\alpha\beta\gamma\delta w^{-4j}-(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)w^{-3j}+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta)w^{-2j}\\&\quad-(\alpha+\beta+\gamma+\delta)w^{-j}+1\\&=Qw^{-4j}-Rw^{-3j}-w^{-2j}-Pw^{-j}+1\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Benzer şekilde payında gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}&X(\alpha^n-1)(\beta w^{-j}-1)(\gamma w^{-j}-1)(\delta w^{-j}-1)+Y(\beta^n-1)(\alpha w^{-j}-1)(\gamma w^{-j}-1)(\delta w^{-j}-1)\\&+Z(\gamma^n-1)(\alpha w^{-j}-1)(\beta w^{-j}-1)(\delta w^{-j}-1)+W(\delta^n-1)(\alpha w^{-j}-1)(\beta w^{-j}-1)(\gamma w^{-j}-1)\\&=(X\alpha^n-X)(\beta\gamma\delta w^{-3j}-(\gamma\beta+\delta\beta+\gamma\delta)w^{-2j}+(\alpha+\gamma+\delta)w^{-j}-1)\\&\quad+(Y\beta^n-Y)(\alpha\gamma\delta w^{-3j}-(\alpha\gamma+\alpha\delta+\gamma\delta)w^{-2j}+(\alpha+\gamma+\delta)w^{-j}-1)\\&\quad+(Z\gamma^n-Z)(\alpha\beta\delta w^{-3j}-(\alpha\beta+\alpha\delta+\beta\delta)w^{-2j}+(\alpha+\beta+\delta)w^{-j}-1\\&\quad+(W\delta^n-W)(\alpha\beta\gamma w^{-3j}-(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)w^{-2j}+(\alpha+\beta+\gamma)w^{-j}-1)\\&=w^{-3j}\left\{X\alpha^n\beta\gamma\delta-X\beta\gamma\delta+Y\beta^n\alpha\gamma\delta-Y\alpha\gamma\delta+Z\gamma^n\alpha\beta\delta-Z\alpha\beta\delta+W\delta^n\alpha\beta\gamma-W\alpha\beta\gamma\right\}\\&\quad+w^{-2j}\left\{\begin{array}{l}-X\alpha^n(\gamma\beta+\delta\beta+\gamma\delta)+X(\gamma\beta+\delta\beta+\gamma\delta)-Y\beta^n(\gamma\alpha+\delta\alpha+\gamma\delta)+Y(\gamma\alpha+\delta\alpha+\gamma\delta)\\-Z\gamma^n(\alpha\beta+\alpha\delta+\beta\delta)+Z(\alpha\beta+\alpha\delta+\beta\delta)-W\delta^n(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)+W(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)\end{array}\right\}\\&\quad+w^{-j}\left\{\begin{array}{l}X\alpha^n(\beta+\gamma+\delta)-X(\beta+\gamma+\delta)+Y\beta^n(\alpha+\gamma+\delta)-Y(\alpha+\gamma+\delta)\\+Z\gamma^n(\alpha+\beta+\delta)-Z(\alpha+\beta+\delta)+W\delta^n(\alpha+\beta+\gamma)-W(\alpha+\beta+\gamma)\end{array}\right\}\\&\quad-X\alpha^n+X-Y\beta^n+Y-Z\gamma^n+Z-W\delta^n+W\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. O halde

$$
=(\beta\gamma\delta\alpha)w^{-3j}\left(\frac{X\alpha^n\beta\gamma\delta}{\beta\gamma\delta\alpha}+\frac{Y\beta^n\alpha\gamma\delta}{\beta\gamma\delta\alpha}+\frac{Z\gamma^n\alpha\beta\delta}{\beta\gamma\delta\alpha}+\frac{W\delta^n\alpha\beta\gamma}{\beta\gamma\delta\alpha}-\frac{X\beta\gamma\delta-Y\alpha\gamma\delta-Z\alpha\beta\delta-W\alpha\beta\gamma}{\beta\gamma\delta\alpha}\right)
$$

$$
+w^{-2j}\left\{\begin{array}{l}
-\gamma\delta(X\alpha^n+Y\beta^n+Z\gamma^n+W\delta^n)+\gamma\delta Z\gamma^n+\gamma\delta W\delta^n-\gamma\beta(X\alpha^n+Y\beta^n+W\delta^n+Z\gamma^n)\\
+\gamma\beta Y\beta^n+\gamma\beta Z\gamma^n-\delta\beta(X\alpha^n+Y\beta^n+Z\gamma^n+W\delta^n)+\beta^n\delta\beta Y+\delta\beta W\delta^n\\
-\gamma\alpha(X\alpha^n+Y\beta^n+Z\gamma^n+W\delta^n)+\gamma\alpha Z\gamma^n+\gamma\alpha X\alpha^n-\delta\alpha(X\alpha^n+Y\beta^n+Z\gamma^n+W\delta^n)\\
+X\alpha^n\delta\alpha+W\delta^n\delta\alpha-\alpha\beta(X\alpha^n+Y\beta^n+Z\gamma^n+W\delta^n)+X\alpha^n\alpha\beta+Y\alpha\beta\beta^n\\
+X(\gamma\beta+\delta\beta+\gamma\delta)+Y(\gamma\alpha+\delta\alpha+\gamma\delta)+Z(\alpha\beta+\alpha\delta+\beta\delta)+W(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)
\end{array}\right\}
$$

$$
+w^{-j}\left\{\begin{array}{l}
\alpha(X\alpha^n+Y\beta^n+Z\gamma^n+W\delta^n)-\alpha\alpha^n X+\beta(X\alpha^n+Y\beta^n+Z\gamma^n+W\delta^n)-\beta Y\beta^n\\
+\gamma(X\alpha^n+Y\beta^n+Z\gamma^n+W\delta^n)-\gamma Z\gamma^n+\delta(X\alpha^n+Y\beta^n+Z\gamma^n+W\delta^n)-\delta W\delta^n\\
-X(\beta+\gamma+\delta)-Y(\alpha+\gamma+\delta)-Z(\alpha+\beta+\delta)-W(\alpha+\beta+\gamma)\\
-(X\alpha^n+Y\beta^n+Z\gamma^n+W\delta^n)+X+Y+Z+W
\end{array}\right\}
$$

dir. Dolayısıyla

$$
\lambda_j(C(M))=\frac{w^{-3j}(QM_{n-1}+K)+w^{-2j}(-SM_n+1)+w^{-j}(PM_n-M_{n+1}-T)-M_n+N}{Qw^{-4j}-Rw^{-3j}-w^{-2j}-Pw^{-j}+1}
$$

elde edilmiş olur. Diğer eşitlik de benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 4.1.2 $C(M)$ ve $C(K)$ circulant matrislerin determinantları

$$
\det(C(M))=\frac{\left\{\begin{array}{l}
-(K-QM_{n-1})^n+2^{1-n}\left(\dfrac{M_n+PM_{n+1}-M_{n+2}+T-(2QM_{n-1}-2K)(N-M_n)}{P(-M_n+N)+M_{n+1}-M_1}\right)\\
+\left(\dfrac{(2QM_{n-1}-2K)(N-M_n)}{P(-M_n+N)+M_{n+1}-M_1}\right)^n-2^{1-2n}(P(-M_n+N)+M_{n+1}-M_1)^n\\
\qquad+2^{-n}(P(-M_n+N)+M_{n+1}-M_1)^n+(-M_n+N)^n
\end{array}\right\}}{1+Q^n+2^{1-3n}(P-4)^n-2^{2-2n}(P^n+R^n)+2^{2-4n}P^n}
$$

ve

$$
\det(C(K))=\frac{\left\{\begin{array}{l}
-(-QK_{n-1}-R)^n+(2^{-n}-2^{1-2n})(K_{n+1}-(K_n-3)P)^n\\
+2^{1-n}\left(\dfrac{K_n+PK_{n+1}-K_{n+2}-2-2(4-K_n)(-QK_{n-1}-R)}{K_{n:+1}-(K_n-3)P}\right)^n\\
\qquad+2^n\left(\dfrac{(4-K_n)(-QK_{n-1}-R)}{K_{n+1}-(K_n-3)P}\right)^n+(4-K_n)^n
\end{array}\right\}}{1+Q^n+2^{1-3n}(P-4)^n-2^{2-2n}(P^n+R^n)+2^{2-4n}P^n}
$$

dir.

İspat.

$$\det(C(M))=\prod_{j=0}^{n-1}\lambda_j(C(M))$$

$$=\prod_{j=0}^{n-1}\frac{\left\{\begin{array}{c}(QM_{n-1}-K)w^{-3j}+(M_n+PM_{n+1}-M_{n+2}+T)w^{-2j}\\ +(PM_n-M_{n+1}+M_1-PN)w^{-j}-M_n+N\end{array}\right\}}{Qw^{-4j}-Rw^{-3j}-w^{-2j}-Pw^{-j}+1}$$

eşitliğinde pay ve payda için ayrı ayrı Yardımcı Teorem 4.1 den

$$\prod_{k=1}^{n}a-bw^{-k}+cw^{-2k}-dw^{-3k}=a^n-d^n+(2^{-n}-2^{1-2n})b^n+2^{1-n}\left(\frac{c-2ad}{b}\right)^n+2^n\left(\frac{ad}{b}\right)^n$$

değerleri yerlerine yazıldığında

$$=2^{1-n}\left(\frac{M_n+PM_{n+1}-M_{n+2}+T-(2QM_{n-1}-2K)(N-M_n)}{P(-M_n+N)+M_{n+1}-M_1}\right)+\left(\frac{(2QM_{n-1}-2K)(N-M_n)}{P(-M_n+N)+M_{n+1}-M_1}\right)^n$$
$$-2^{1-2n}(P(-M_n+N)+M_{n+1}-M_1)^n+2^{-n}(P(-M_n+N)+M_{n+1}-M_1)^n$$
$$+(-M_n+N)^n-(K-QM_{n-1})^n$$

eşitliği elde edilir. Payda için de benzer şekilde Yardımcı Teorem 4.1 den

$$\prod_{k=1}^{n}a-bw^{-k}+cw^{-2k}-dw^{-3k}+gw^{-4k}=a^n+g^n+2^{2-2n}(b^n+d^n)+2^{1-3n}\left(\frac{4ac+b}{a}\right)^n+2^{2-4n}\left(\frac{b}{a}\right)^n$$

eşitliği kullanılarak $Q=g$, $R=d,\ -1=c,\ P=b,\ 1=a$ olduğu görülür, yani

$$\prod_{j=0}^{n-1}(C(K))=Qw^{-4j}-Rw^{-3j}-w^{-2j}-Pw^{-j}+1$$
$$=1+Q^n+2^{1-3n}(P-4)^n-2^{2-2n}(P^n+R^n)+2^{2-4n}P^n$$

dir. O halde

$$\det(C(M))=\frac{\left\{\begin{array}{l}-(K-QM_{n-1})^n+2^{1-n}\left(\dfrac{M_n+PM_{n+1}-M_{n+2}+T-(2QM_{n-1}-2K)(N-M_n)}{P(-M_n+N)+M_{n+1}-M_1}\right)\\ +\left(\dfrac{(2QM_{n-1}-2K)(N-M_n)}{P(-M_n+N)+M_{n+1}-M_1}\right)^n-2^{1-2n}(P(-M_n+N)+M_{n+1}-M_1)^n\\ \qquad +2^{-n}(P(-M_n+N)+M_{n+1}-M_1)^n+(-M_n+N)^n\end{array}\right\}}{1+Q^n+2^{1-3n}(P-4)^n-2^{2-2n}(P^n+R^n)+2^{2-4n}P^n}$$

dir. Diğer eşitlik de benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 4.1.3 $C(M)$ ve $C(K)$ circulant matrislerin Euclidean normu

$$\|C(M)\|_E = \sqrt{\begin{array}{l} n + nX^2\left(\frac{\alpha^2-\alpha^{2n}}{1-\alpha^2}\right) + nY^2\left(\frac{\beta^2-\beta^{2n}}{1-\beta^2}\right) + nZ^2\left(\frac{\gamma^2-\gamma^{2n}}{1-\gamma^2}\right) + nW^2\left(\frac{\delta^2-\delta^{2n}}{1-\delta^2}\right) \\ +2n\left\{\begin{array}{l} XY\left(\frac{\alpha\beta-(\alpha\beta)^n}{1-\alpha\beta}\right) + ZW\left(\frac{\gamma\delta-(\gamma\delta)^n}{1-\gamma\delta}\right) + XZ\left(\frac{\alpha\gamma-(\alpha\gamma)^n}{1-\alpha\gamma}\right) \\ + XW\left(\frac{\alpha\delta-(\alpha\delta)^n}{1-\alpha\delta}\right) + YZ\left(\frac{\beta\gamma-(\beta\gamma)^n}{1-\beta\gamma}\right) + YW\left(\frac{\beta\delta-(\beta\delta)^n}{1-\beta\delta}\right) \end{array}\right\} \end{array}}$$

ve

$$\|C(K)\|_E = \sqrt{\begin{array}{l} n\left(\frac{\alpha^4-\alpha^{2n+2}}{1-\alpha^2}\right) + n\left(\frac{\beta^4-\beta^{2n+2}}{1-\beta^2}\right) + n\left(\frac{\gamma^4-\gamma^{2n+2}}{1-\gamma^2}\right) + n\left(\frac{\delta^4-\delta^{2n+2}}{1-\delta^2}\right) \\ +2n\left\{\begin{array}{l} \frac{\alpha\beta-(\alpha\beta)^n}{1-\alpha\beta} + \frac{\beta\gamma-(\beta\gamma)^n}{1-\beta\gamma} + \frac{\alpha\gamma-(\alpha\gamma)^n}{1-\alpha\gamma} \\ + \frac{\alpha\delta-(\alpha\delta)^n}{1-\alpha\delta} + \frac{\gamma\delta-(\gamma\delta)^n}{1-\gamma\delta} + \frac{\beta\delta-(\beta\delta)^n}{1-\beta\delta} \end{array}\right\} + 16n \end{array}}$$

dir.

İspat. Euclidean norm tanımından $\|C(M)\|_E^2 = n\sum_{i=0}^{n-1} M_i^2$ olup

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} M_i^2 &= \sum_{i=1}^{n-1}(X\alpha^i + Y\beta^i + Z\gamma^i + W\delta^i)^2 \\ &= X^2\sum_{i=1}^{n-1}\alpha^{2i} + Y^2\sum_{i=1}^{n-1}\beta^{2i} + Z^2\sum_{i=1}^{n-1}\gamma^{2i} + W^2\sum_{i=1}^{n-1}\delta^{2i} \\ &\quad + 2XY\sum_{i=1}^{n-1}(\alpha\beta)^i + 2ZW\sum_{i=1}^{n--1}(\gamma\delta)^i + 2XZ\sum_{i=1}^{n-1}(\alpha\gamma)^i \\ &\quad + 2XW\sum_{i=1}^{n-1}(\alpha\delta)^i + 2YZ\sum_{i=1}^{n-1}(\beta\gamma)^i + 2YW\sum_{i=1}^{n-1}(\beta\delta)^i \end{aligned}$$

dir. Ayrıca $\sum_{k=1}^{j} t^k = \frac{t - t^{j+1}}{1-t}$ olduğu bilindiğinden

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} M_i^2 = (X\alpha)^2\left(\frac{1-\alpha^{2n}}{1-\alpha^2}\right) + (Y\beta)^2\left(\frac{1-\beta^{2n}}{1-\beta^2}\right) + (Z\gamma)^2\left(\frac{1-\gamma^{2n}}{1-\gamma^2}\right) + (W\delta)^2\left(\frac{1-\delta^{2n}}{1-\delta^2}\right) \\ +2\left\{\begin{array}{l} XY\left(\frac{\alpha\beta-(\alpha\beta)^n}{1-\alpha\beta}\right) + ZW\left(\frac{\gamma\delta-(\gamma\delta)^n}{1-\gamma\delta}\right) + XZ\left(\frac{\alpha\gamma-(\alpha\gamma)^n}{1-\alpha\gamma}\right) \\ + XW\left(\frac{\alpha\delta-(\alpha\delta)^n}{1-\alpha\delta}\right) + YZ\left(\frac{\beta\gamma-(\beta\gamma)^n}{1-\beta\gamma}\right) + YW\left(\frac{\beta\delta-(\beta\delta)^n}{1-\beta\delta}\right) \end{array}\right\} \end{aligned}$$

dir. Diğer yandan

$$\|C(M)\|_E^2 = n\left(\sum_{i=1}^{n-1} M_i^2 + M_0^2\right) = n\left(\sum_{i=1}^{n-1} M_i^2 + 1\right)$$

olduğundan $\|C(M)\|_E$ açıktır. Diğer eşitlik de benzer şekilde gösterilebilir.

4.2. NEGACYCLİC MATRİSLER

Bu alt bölümde $N(M)$ ve $N(K)$ negacyclic matrisleri için özdeğerler ve determinantlar elde edilecektir.

Teorem 4.2.1 $N(M)$ ve $N(K)$ negacyclic matrislerin özdeğerleri $j = 0,1,\cdots,n-1$ için

$$\lambda_j(N(M)) = \frac{\left\{\begin{array}{l} w^{(6j+3)/2}(-QM_{n-1} + K) + w^{(2j+1)/2}(-PM_n + M_{n+1} + M_1 - PN \\ + w^{2j+1}(-M_n - PM_{n+1} + M_{n+2} - T) + M_n + N \end{array}\right\}}{Qw^{4j+2} - Rw^{(6j+3)/2} - w^{2j+1} - Pw^{(2j+1)/2} + 1}$$

ve

$$\lambda_j(N(K)) = \frac{\left\{\begin{array}{l} w^{(6j+3)/2}(-R - QK_{n-1}) + w^{(2j+1)/2}(K_{n+1} - PK_n + K_1 - 4P) \\ + w^{2j+1}K_n + K_n + 4 \end{array}\right\}}{Qw^{4j+2} - Rw^{(6j+3)/2} - w^{2j+1} - Pw^{(2j+1)/2} + 1}$$

dir.

İspat: Özdeğer tanımından

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} M_k\, w^{(2j+1)k/2} &= \sum_{k=0}^{n-1} (X\alpha^k + Y\beta^k + Z\gamma^k + W\delta^k)\, w^{(2j+1)k/2} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} X\alpha^k\, w^{(2j+1)k/2} + Y\beta^k\, w^{(2j+1)k/2} + Z\gamma^k\, w^{(2j+1)k/2} + W\delta^k w^{(2j+1)k/2} \\
&= X\sum_{k=0}^{n-1} (\alpha w^{(2j+1)/2})^k + Y\sum_{k=0}^{n-1} (\beta w^{(2j+1)/2})^k \\
&\quad + Z\sum_{k=0}^{n-1} (\gamma w^{(2j+1)/2}) + W\sum_{k=0}^{n-1} (\delta w^{(2j+1)/2})^k \\
&= X\left(\frac{(\alpha w^{(2j+1)/2})^n - 1}{\alpha w^{(2j+1)/2} - 1}\right) + Y\left(\frac{(\beta w^{(2j+1)/2})^n - 1}{\beta w^{(2j+1)/2} - 1}\right) \\
&\quad + Z\left(\frac{(\gamma w^{(2j+1)/2})^n - 1}{\gamma w^{(2j+1)/2} - 1}\right) + W\left(\frac{(\delta w^{(2j+1)/2})^n - 1}{\delta w^{(2j+1)/2} - 1}\right)
\end{aligned}$$

ve

$$(\alpha w^{(2j+1)/2})^n = -\alpha^n \; , (\beta w^{(2j+1)/2})^n = -\beta^n \; , (\gamma w^{(2j+1)/2})^n = -\gamma^n \; , (\delta w^{(2j+1)/2})^n = -\delta^n$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} M_k \, w^{(2j+1)k/2} &= X\left(\frac{-\alpha^n - 1}{\alpha w^{(2j+1)/2} - 1}\right) + Y\left(\frac{-\beta^n - 1}{\beta w^{(2j+1)/2} - 1}\right) \\ &+ Z\left(\frac{-\gamma^n - 1}{\gamma w^{(2j+1)/2} - 1}\right) + W\left(\frac{-\delta^n - 1}{\delta w^{(2j+1)/2} - 1}\right)\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu son eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}&(-X\alpha^n - X)(\beta w^{(2j+1)/2} - 1)(\gamma w^{(2j+1)/2} - 1)(\delta w^{(2j+1)/2} - 1) \\ &+ (-Y\beta^n - Y)(\alpha w^{(2j+1)/2} - 1)(\gamma w^{(2j+1)/2} - 1)(\delta w^{(2j+1)/2} - 1) \\ &+ (-Z\gamma^n - Z)(\alpha w^{(2j+1)/2} - 1)(\beta w^{(2j+1)/2} - 1)(\delta w^{(2j+1)/2} - 1) \\ &+ (-W\delta^n - W)(\alpha w^{(2j+1)/2} - 1)(\beta w^{(2j+1)/2} - 1)(\gamma w^{(2j+1)/2} - 1) \\ &(-X\alpha^n - X)\begin{Bmatrix}\beta\gamma\delta w^{(6j+3)/2} - \beta\gamma w^{2j+1} - \beta\delta w^{2j+1} + \beta w^{(2j+1)/2} \\ -\gamma\delta w^{2j+1} + \gamma w^{(2j+1)/2} + \delta w^{(2j+1)/2} - 1\end{Bmatrix} \\ &+ (-Y\beta^n - Y)\begin{Bmatrix}\alpha\gamma\delta w^{(6j+3)/2} - \alpha\gamma w^{2j+1} - \alpha\delta w^{2j+1} + \alpha w^{(2j+1)/2} \\ -\gamma\delta w^{2j+1} + \gamma w^{(2j+1)/2} + \delta w^{(2j+1)/2} - 1\end{Bmatrix} \\ &+ (-Z\gamma^n - Z)\begin{Bmatrix}\alpha\beta\delta w^{(6j+3)/2} - \alpha\beta w^{2j+1} - \alpha\delta w^{2j+1} + \alpha w^{(2j+1)/2} \\ -\beta\delta w^{2j+1} + \beta w^{(2j+1)/2} + \delta w^{(2j+1)/2} - 1\end{Bmatrix} \\ &+ (-W\delta^n - W)\begin{Bmatrix}\alpha\beta\gamma w^{(6j+3)/2} - \alpha\beta w^{2j+1} - \alpha\gamma w^{2j+1} + \alpha w^{(2j+1)/2} \\ -\beta\gamma w^{2j+1} + \beta w^{(2j+1)/2} + \gamma w^{(2j+1)/2} - 1\end{Bmatrix}\end{aligned}$$

ve böylece

$$\begin{aligned}&w^{(6j+3)/2}\begin{Bmatrix}-X\alpha^n(\beta\gamma\delta) - X(\beta\gamma\delta) - Y\beta^n(\alpha\gamma\delta) - Y(\alpha\gamma\delta) \\ -Z\gamma^n(\alpha\beta\delta) - Z(\alpha\beta\delta) - W\delta^n(\alpha\beta\gamma) - W(\alpha\beta\gamma)\end{Bmatrix} \\ &+ w^{(2j+1)/2}\begin{Bmatrix}-X\alpha^n(\beta+\gamma+\delta) - X(\beta+\gamma+\delta) - Y\beta^n(\alpha+\gamma+\delta) \\ -Y(\alpha+\gamma+\delta) - Z\gamma^n(\beta+\alpha+\delta) - Z(\beta+\alpha+\delta) \\ -W\delta^n(\beta+\gamma+\alpha) - W(\beta+\gamma+\alpha)\end{Bmatrix} \\ &+ w^{2j+1}\begin{Bmatrix}-X\alpha^n(-\beta\gamma-\beta\delta-\gamma\delta) - X(-\beta\gamma-\beta\delta-\gamma\delta) \\ -Y\beta^n(-\alpha\gamma-\alpha\delta-\gamma\delta) - Y(-\alpha\gamma-\alpha\delta-\gamma\delta) \\ -Z\gamma^n(-\alpha\beta-\alpha\delta-\beta\delta) - Z(-\alpha\beta-\alpha\delta-\beta\delta) \\ -W\delta^n(-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma) - W(-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma)\end{Bmatrix} \\ &+ (X\alpha^n + Y\beta^n + Z\gamma^n + W\delta^n) + (X + Y + Z + W)\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca ifadeler düzenlendiğinde

$$w^{(6j+3)/2}\left\{-X\alpha^{n-1}Q-Y\beta^{n-1}Q-Z\gamma^{n-1}Q-W\delta^{n-1}Q-K\right\}$$
$$+w^{(2j+1)/2}\left\{\begin{array}{l}X\alpha^{n}(P-\alpha)+Y\beta^{n}(P-\beta)+Z\gamma^{n}(P-\gamma)+W\delta^{n}(P-\delta)\\ +X(p-\alpha)+Y(P-\beta)+Z(P-\gamma)+W(P-\delta)\end{array}\right\}$$
$$+w^{2j+1}\left\{\begin{array}{l}-M_n-PM_{n+1}+M_{n+2}-X(\gamma\beta+\delta\beta+\gamma\delta)-Y(\gamma\alpha+\delta\alpha+\gamma\delta)\\ -Z(\alpha\beta+\alpha\delta+\beta\delta)-W(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)\end{array}\right\}$$
$$+M_n+N$$
$$=w^{(6j+3)/2}(-QM_{n-1}+K)+w^{(2j+1)/2}(-PM_n+M_{n+1}+M_1-PN)$$
$$+w^{2j+1}(-M_n-PM_{n+1}+M_{n+2}-T)+M_n+N$$

bulunur. Payda için

$$(\alpha w^{(2j+1)/2}-1)(\beta w^{(2j+1)/2}-1)(\gamma w^{(2j+1)/2}-1)(\delta w^{(2j+1)/2}-1)$$
$$=(\alpha\beta w^{2j+1}-\alpha w^{(2j+1)/2}-\beta w^{(2j+1)/2}+1)(\gamma\delta w^{2j+1}-\gamma w^{(2j+1)/2}-\delta w^{(2j+1)/2}+1)$$
$$=\alpha\beta\gamma\delta w^{4j+2}-\alpha\beta\gamma w^{(6j+3)/2}-\alpha\beta\delta w^{(6j+3)/2}+\alpha\beta w^{2j+1}-\alpha\gamma\delta w^{(6j+3)/2}+\alpha\gamma w^{2j+1}$$
$$+\alpha\delta w^{2j+1}-\alpha w^{(2j+1)/2}-\beta\gamma\delta w^{(6j+3)/2}+\beta\gamma w^{2j+1}+\beta\delta w^{2j+1}-\beta w^{(2j+1)/2}$$
$$+\gamma\delta w^{2j+1}-\gamma w^{(2j+1)/2}-\delta w^{(2j+1)/2}+1$$
$$=Qw^{4j+2}+(-\alpha\beta\gamma-\alpha\beta\delta-\alpha\gamma\delta-\beta\gamma\delta)w^{(6j+3)/2}+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta)w^{2j+1}$$
$$+(-\alpha-\beta-\gamma-\delta)w^{(2j+1)/2}+1$$
$$=Qw^{4j+2}-Rw^{(6j+3)/2}-w^{2j+1}-Pw^{(2j+1)/2}+1$$

dir. O halde özdeğer

$$\lambda_j(N(M))=\frac{\left\{\begin{array}{l}w^{(6j+3)/2}(-QM_{n-1}+K)+w^{(2j+1)/2}(-PM_n+M_{n+1}+M_1-PN)\\ \quad+w^{2j+1}(-M_n-PM_{n+1}+M_{n+2}-T)+M_n+N\end{array}\right\}}{Qw^{4j+2}-Rw^{(6j+3)/2}-w^{2j+1}-Pw^{(2j+1)/2}+1}$$

dir. Diğer eşitlik de benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 4.2.2 $N(M)$ ve $N(K)$ negacyclic matrislerin determinantları

$$\det(N(M))=\frac{(-1)^n\left\{\begin{array}{l}-w^{3n/2}(K-QM_{n-1})^n+(-M_n-N)^n-(2^{-n}-2^{1-2n})(-w(M_{n+2}-M_n-PM_{n+1}-T))^n\\ -2^{1-n}\left(\dfrac{(M_{n+1}-PM_n+M_1-PN)w^{-1/2}-2(K-QM_{n-1})w^{1/2}(-M_n-N)}{M_n+PM_{n-1}+T-M_{n+2}}\right)\\ -2^n\left(\dfrac{(K-QM_{n-1})w^{1/2}(-M_n-N)}{M_n+PM_{n-1}+T-M_{n+2}}\right)^n\end{array}\right\}}{1^n+Q^nw^{2n}+2^{2-2n}((Rw^{3/2})^n+(Pw^{1/2})^n)-2^{1-3n}(Rw^{-1/2}Q^{-1}-4w)+2^{2-4n}(RQ^{-1}w^{-1/2})^n}$$

ve

$$\det(N(K))=\frac{(-1)^n\left\{\begin{array}{l}-w^{3n/2}(-R-QK_{n-1})^n+(-K_n-4)^n+(2^{-n}-2^{1-2n})(-wK_n)^n\\ -2^{1-n}\left(\dfrac{w^{-1/2}(K_{n+1}-PK_n+K_1-4P)w^{-1/2}-2w^{3/2}(-R-QK_{n-1})(-K_n-4)}{-wK_n}\right)^n\\ -2^n\left(\dfrac{w^{3/2}(-R-QK_{n-1})(-K_n-4)}{-wK_n}\right)^n\end{array}\right\}}{1^n+Q^nw^{2n}+2^{2-2n}((Rw^{3/2})^n+(Pw^{1/2})^n)-2^{1-3n}(Rw^{-1/2}Q^{-1}-4w)+2^{2-4n}(RQ^{-1}w^{-1/2})^n}$$

dir.

İspat: Negacyclic matrisler için determinant tanımından

$$\det(N(M))=\prod_{j=0}^{n-1}\lambda_j(N(M))$$

$$=\prod_{j=0}^{n-1}\frac{\left\{\begin{array}{l}w^{(6j+3)/2}(-QM_{n-1}+K)+w^{(2j+1)/2}(-PM_n+M_{n+1}+M_1-PN\\ \quad+w^{2j+1}(-M_n-PM_{n+1}+M_{n+2}-T)+M_n+N\end{array}\right\}}{Qw^{4j+2}-Rw^{(6j+3)/2}-w^{2j+1}-Pw^{(2j+1)/2}+1}$$

dir.

Pay ve payda $\prod_{j=0}^{n-1}w^{-4j}$ ile çarpıldığında

$$=\frac{\prod_{j=0}^{n-1}w^{-j}\left\{\prod_{j=0}^{n-1}\begin{array}{l}(M_n+N)w^{-3j}+((M_{n+1}-PM_n+M_1-PN)w^{1/2})w^{-2j}\\ +((M_{n+2}-M_n-PM_{n+1}-T)w)w^{-j})+(K-QM_{n-1})w^{3/2}\end{array}\right\}}{\prod_{j=0}^{n-1}(w^{-4j}-(Pw^{1/2})w^{-3j}-ww^{-2j}-Rw^{3/2}w^{-j}+Qw^2)}$$

$\sum_{j=0}^{n-1}w^{-j}=0^n-(-1)^n=-(-1)^n$ olduğundan

$$\det(N(M))=\frac{(-1)^n\left\{\begin{array}{l}-w^{3n/2}(K-QM_{n-1})^n+(-M_n-N)^n-(2^{-n}-2^{1-2n})(-w(M_{n+2}-M_n-PM_{n+1}-T))^n\\ -2^{1-n}\left(\dfrac{(M_{n+1}-PM_n+M_1-PN)w^{-1/2}-2(K-QM_{n-1})w^{1/2}(-M_n-N)}{M_n+PM_{n-1}+T-M_{n+2}}\right)\\ -2^n\left(\dfrac{(K-QM_{n-1})w^{1/2}(-M_n-N)}{M_n+PM_{n-1}+T-M_{n+2}}\right)^n\end{array}\right\}}{1^n+Q^nw^{2n}+2^{2-2n}((Rw^{3/2})^n+(Pw^{1/2})^n)-2^{1-3n}(Rw^{-1/2}Q^{-1}-4w)+2^{2-4n}(RQ^{-1}w^{-1/2})^n}$$

dir. Benzer şekilde

$$\det(N(K)) = \prod_{j=0}^{n-1} \lambda_j(N(K))$$

$$= \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\left\{ \begin{array}{l} w^{(6j+3)/2}(-R-QK_{n-1}) + w^{(2j+1)/2}(K_{n+1}-PK_n+K_1-4P) \\ + w^{2j+1}K_n + K_n + 4 \end{array} \right\}}{Qw^{4j+2} - Rw^{(6j+3)/2} - w^{2j+1} - Pw^{(2j+1)/2} + 1}$$

pay ve payda $\prod_{j=0}^{n-1} w^{-4j}$ ile çarpıldığında,

$$= \frac{\prod_{j=0}^{n-1} w^{-j} \left\{ \prod_{j=0}^{n-1} \begin{array}{l} (K_n+4)w^{-3j} + ((K_{n+1}-PK_n+K_1-4P)w^{1/2})w^{-2j} \\ + (K_n w)w^{-j} + (-R-QK_{n-1})w^{3/2} \end{array} \right\}}{\prod_{j=0}^{n-1} (w^{-4j} - (Pw^{1/2})w^{-3j} - ww^{-2j} - Rw^{3/2}w^{-j} + Qw^2)}$$

bulunur ve $\sum_{j=0}^{n-1} w^{-j} = 0^n - (-1)^n = -(-1)^n$ olduğundan

$$\det(N(K)) = \frac{(-1)^n \left\{ \begin{array}{l} -w^{3n/2}(-R-QK_{n-1})^n + (-K_n-4)^n + (2^{-n} - 2^{1-2n})(-wK_n)^n \\ -2^{1-n}\left(\dfrac{w^{-1/2}(K_{n+1}-PK_n+K_1-4P)w^{-1/2} - 2w^{3/2}(-R-QK_{n-1})(-K_n-4)}{-wK_n} \right)^n \\ -2^n \left(\dfrac{w^{3/2}(-R-QK_{n-1})(-K_n-4)}{-wK_n} \right)^n \end{array} \right\}}{1^n + Q^n w^{2n} + 2^{2-2n}((Rw^{3/2})^n + (Pw^{1/2})^n) - 2^{1-3n}(Rw^{-1/2}Q^{-1} - 4w) + 2^{2-4n}(RQ^{-1}w^{-1/2})^n}$$

olarak elde edilir.

5. *k*-BALANS SAYILARI VE TRİDİAGONAL MATRİSLER

Bu bölümde $k-$balans sayılarını ve farklı formlarını elde edecek şekilde tanımlanan, k parametresine bağlı $n\times n$ tipindeki $B_{(n)}(k)$ ve $W_{(n)}(k)$ tridiagonal matris aileleri incelenmiştir. Chebyshev polinomlarından yararlanarak $B_{(n)}(k)$ tridiagonal matris ailesi için özdeğer ve determinant, $C_{(n-1)}(k)$ kofaktör matrisinden yararlanarak da $W_{(n)}(k)$ tridiagonal matris ailesinin tersi $k-$balans sayılarına bağlı olarak verilmiştir. Ayrica bu tridiagonal matrisler arasındaki ilişkiler $k-$balans sayılarından faydalanarak elde edilmiştir.

$k\geq 1$ tamsayı olmak üzere $k-$balans sayıları B_n^k ile gösterilir ve genel terimi

$$B_0^k=0,\ B_1^k=1,\ B_{n+1}^k=6kB_n^k-B_{n-1}^k,\quad n\geq 1$$

dir. Balans sayılarının karakteristik denklemi $x^2-6kx+1=0$ olup bu denklemin kökleri

$$\alpha=3k+\sqrt{9k^2-1}\ \text{ ve }\ \beta=3k-\sqrt{9k^2-1}$$

dır. Buna göre $k-$balans sayılarının Binet formülü

$$B_n^k=\frac{\alpha^n-\beta^n}{2\sqrt{9k^2-1}}$$

dir. Diğer $k-$balans sayıları da

$$b_1^k=0,\ b_2^k=2,\ b_{n+1}^k=6kb_n^k-b_{n-1}^k+2,\ n\geq 2$$

$$C_0^k=1,\ C_1^k=3,\ C_{n+1}^k=6kC_n^k-C_{n-1}^k,\ n\geq 1$$

$$c_1^k=1,\ c_2^k=7,\ c_{n+1}^k=6kc_n^k-c_{n-1}^k,\ n\geq 2$$

olarak tanımlanır ve bu sayıların Binet formülleri

$$b_n^k=\frac{(\alpha+1)\alpha^{n-1}+(\beta+1)\beta^{n-1}-6k-2}{2(9k^2-1)}$$

$$C_n^k=\frac{(3-\beta)\alpha^n-(3-\alpha)\beta^n}{2\sqrt{9k^2-1}}$$

$$c_n^k=\frac{(7\alpha-1)\alpha^{n-2}-(7\beta-1)\beta^{n-2}}{2\sqrt{9k^2-1}}$$

dir. İlk olarak daha sonra kullanmak üzere aşağıdaki teorem verilsin.

Teorem 5.1 $a_{ij} \neq 0$ tamsayısında, i ile i. satır, j ile j. sütun temsil edilmek üzere $D = a_{n,n}^2 - 4a_{n,n-1}a_{n-1,n} \neq 0$ olsun. $n \geq 3$ için başlangıç değerleri ile birlikte $T_{(n)}$ tridiagonal matrisinin determinantı

$$\det(T_{(1)}) = a_{1,1}$$
$$\det(T_{(2)}) = a_{2,2}a_{1,1} - a_{2,1}a_{1,2}$$
$$\det(T_{(n)}) = a_{n,n}\det(T_{(n-1)}) - a_{n,n}a_{n-1,n}\det(T_{(n-2)})$$

şeklindedir [18].

Burada

$$\det(T_{(n)}) = a_{n,n}\det(T_{(n-1)}) - a_{n,n}a_{n-1,n}\det(T_{(n-2)})$$

indirgeme bağıntısı için karakteristik denklem

$$x^2 - a_{n,n}x + a_{n,n-1}a_{n-1,n} = 0$$

olup denklemin kökleri

$$\alpha = \frac{a_{n,n} + \sqrt{D}}{2} \quad \text{ve} \quad \beta = \frac{a_{n,n} - \sqrt{D}}{2}$$

dir. Buna göre Binet formülü $\det(T_{(n)}) = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ dir [3].

$k-$balans sayıları için tanımlı $n \times n$ tipindeki tridiagonal matris aileleri

$$W_{(n)}(k) = \begin{bmatrix} 36k & 6 & & & & \\ 1 & 6k & 1 & & & \\ & 1 & 6k & 1 & & \\ & & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 1 & 6k \end{bmatrix}_{nxn} \tag{5.1}$$

ve

$$B_{(n)}(k) = \begin{bmatrix} 36k & 1-18k^2 & & & & \\ 1 & 3k & 1 & & & \\ & 1 & 6k & 1 & & \\ & & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 1 & 6k \end{bmatrix}_{nxn} \tag{5.2}$$

dir.

Burada dikkat edilirse $W_{(n)}(k)$ matrisi için determinant aslında, $(n+1)$. $k-$balans sayısının 6 katına karşılık gelmektedir. Benzer olarak $B_{(n)}(k)$ matrisi için determinant $(n+1)$. $k-$balans sayısına karşılık gelmektedir. Açık olarak

$$\begin{aligned}
\det(W_{(1)}(k)) &= 36k = 6B_2^k \\
\det(W_{(2)}(k)) &= 216k^2 - 6 = 6B_3^k \\
\det(W_{(3)}(k)) &= 6k(216k^2-6) - 36k = 6B_4^k \\
&\vdots \\
\det(W_{(n)}(k)) &= 6k\det(W_{(n-1)}(k)) - \det(W_{(n-2)})(k)) = 6B_{n+1}^k
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\det(B_{(1)}(k)) &= B_2^k \\
\det(B_{(2)}(k)) &= B_3^k \\
\det(B_{(3)}(k)) &= B_4^k \\
&\vdots \\
\det(B_{(n)}(k)) &= B_{n+1}^k
\end{aligned} \tag{5.3}$$

bulunur [19].

Burada tanımlanan iki tridiagonal matris ailesinin seçimi merak edilebilir. Özel olarak bu ailelerin seçilmiş olması $\det(B_{(n)}(k)) = B_{n+1}^k$ ve $\det(W_{(n)}(k)) = 6B_{n+1}^k$ olmasından kaynaklanmaktadır. Başka bir deyişle $B_{(n)}(k)$ nın determinantı ile $W_{(n)}(k)$ nın determinantı $k-$balans sayıları ile ifade edilebilirdir. Üstelik tek terimli $k-$balans sayıları için

$$O_{(n)}(k) = \begin{bmatrix}
36k^2-1 & 1 & & & & & \\
1 & 36k^2-2 & 1 & & & & \\
 & 1 & 36k^2-2 & 1 & & & \\
 & & 1 & \ddots & \ddots & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & & \ddots & \ddots & 1 \\
 & & & & & 1 & 36k^2-2
\end{bmatrix}$$

matrisi ve çift terimli $k-$balans sayıları için de

$$E_{(n)}(k)=\begin{bmatrix} 6k & 0 & & & & & \\ 1 & 36k^2-2 & 1 & & & & \\ & 1 & 36k^2-2 & 1 & & & \\ & & 1 & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & & 1 & 36k^2-2 \end{bmatrix}$$

matrisi verilebilir. Bu matrislerin determinantlarından sırasıyla tek $k-$balans sayıları ve çift $k-$balans sayıları

$$\det(E_{(n)}(k))=B_{2n}^{k} \quad \text{ve} \quad \det(O_{(n)}(k))=B_{2n+1}^{k}$$

elde edilir.

Yardımcı Teorem 5.2 Eğer $B_{(n)}(k)$, (5.2) de tanımlanan tridiagonal matris ailesi ise $B_{(n)}(k)$nın determinantı Chebyshev polinomlarına bağlı olarak

$$\det(B_{(n)}(k))=6kT_{n-1}(3k)-(1-18k^2)U_{n-2}(3k)$$

şeklinde verilir $B_{(n)}(k)$ nın karakteristik polinomu da

$$\rho_{B_{(n)}(k)}(\lambda)=(\lambda-6k)T_{n-1}(\lambda-3k)-(\lambda-1+18k^2)U_{n-2}(3k)(\lambda-3k) \tag{5.4}$$

dir [19].

İspat: $A_{(n)}(k)$ ve $C_{(n)}(k)$ tridiagonal matris aileleri olmak üzere determinantları

$$\det(A_{(n)}(k))=\begin{vmatrix} 3k & 1 & & & \\ 1 & 6k & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 6k \end{vmatrix}_{n\times n}$$

ve

$$\det(C_{(n)}(k))=\begin{vmatrix} 6k & 1 & & & \\ 1 & 6k & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 6k \end{vmatrix}_{n\times n}$$

dir. O halde $B_{(n)}(k)$ için Laplace açılımına göre determinant hesaplanacak olursa birinci sütuna göre

$$\det(B_{(n)}(k))=\begin{vmatrix}36k & 1-18k^2 & & & & \\ 1 & 3k & 1 & & & \\ & 1 & 6k & 1 & & \\ & & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 1 & 6k\end{vmatrix}_{n\times n}$$

$$=6k\begin{vmatrix}3k & 1 & & & \\ 1 & 6k & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 6k\end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}-\begin{vmatrix}1-18k^2 & 0 & & & \\ 1 & 6k & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 6k\end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$=6k\begin{vmatrix}3k & 1 & & & \\ 1 & 6k & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 6k\end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}-(1-18k^2)\begin{vmatrix}6k & 1 & & & \\ 1 & 6k & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 6k\end{vmatrix}_{(n-2)\times(n-2)}$$

$$=6k\det(A_{(n-1)}(k))-(1-18k^2)\det(C_{(n-2)}(k))$$

dır. (2.1.5) ve (2.1.6) dan 1. ve 2. tür Chebyshev polinomlarının özel seçimleri ile elde edilen determinantları

$$\det(B_n(k))=6kT_{n-1}(3k)-(1-18k^2)U_{n-2}(3k)$$

olarak ifade edilebilir. Ayrıca $B_{(n)}(k)$ nın karakteristik polinomu ise

$$\rho_{B_{(n)}(k)}(\lambda)=\det(\lambda I-B_{(n)}(k))=(\lambda-6k)T_{n-1}(\lambda-3k)-(\lambda-1+18k^2)U_{n-2}(\lambda-3k)$$

dir.

Teorem 5.3 $B_{(n)}(k)$ tridiagonal matrisinin özdeğerleri

$$\lambda_i=3k+\cos\frac{i\pi}{n+1},\ (i=1,2,\cdots,n)$$

ve $k-$balans sayıları

$$B_n^k=\prod_{i=1}^{n-1}(3k+\cos\frac{i\pi}{n})$$

dir [19].

İspat. (2.1.7) ve $U_n(x)$ in indirgeme bağıntısı kullanılarak

$$\begin{aligned}\det(B_{(n)}(k)) &= 6kT_{n-1}(3k)-(1-18k^2)U_{n-2}(3k)\\ &= 3kU_{n-1}(3k)-3kU_{n-3}(3k)-(1-18k^2)U_{n-2}(3k)\\ &= U_n(3k)+3k(6kU_{n-2}(3k)-U_{n-3}(3k))-3kU_{n-1}(3k)\\ &= U_n(3k)\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $B_{(n)}(k)$ nın özdeğerleri (5.4) karakteristik polinomunun kökleri hesaplanarak elde edilebilir. $U_n(x)=0$ denkleminin kökleri $\theta_i = \dfrac{i\pi}{n+1}$, $i=(1,2,\cdots,n)$ veya buna denk olarak $x_i = \cos\theta_i = \cos\dfrac{i\pi}{n+1}$ dir. Yani

$$\rho_{B_{(n)}(k)}(\lambda_i) = \det(\lambda_i I - B_{(n)}(k)) = U_n(\lambda_i I - 3k)$$

olup $i=1,2,\cdots,n$ için

$$\lambda_i = 3k + \cos\frac{i\pi}{n+1}$$

dir. Dahası (5.3) den ve determinant tanımından

$$B_n^k = \prod_{i=1}^{n-1}(3k+\cos\frac{i\pi}{n})$$

sonucu elde edilir.

Bu teoremden aşağıdaki sonuçlar elde edilebilir.

Sonuç 5.4 B_n^k, n. $k-$balans sayısı ve $B_{(n)}(k)$ tridiagonal matris ailesi olsun. Bu takdirde

(i) $\det(B_{(n)}(k)) = \prod_{i=1}^{n-1}(3k+\cos\dfrac{i\pi}{n})$ dir.

(ii) $i=1,2,\cdots,n-1$ için $3k \neq -\cos\dfrac{i\pi}{n+1}$ ise $B_{(n)}(k)$ tersinir bir matristir.

(iii) $\det(W_{(n)}(k)) = 6\prod_{i=1}^{n-1}(3k+\cos\dfrac{i\pi}{n})$ dir [19].

$W_{(n)}(k)$ matris ailesinde bulunan matrislerin terslerini belirlemek için $W_{(n)}(k)$ matrislerinin kofaktör matrislerine ihtiyaç duyulur. Buradan kofaktör matrislerin ailesine $C_{(n-1)}(k)$ denilecek olursa n üzerinden tümevarım ile aşağıdaki sonuç açıktır.

Yardımcı Teorem 5.5 B_n^k, $n.$ $k-$balans sayısı ve $W_{(n)}(k)$ matrisinde j ile j. sütun ve i ile i. satır gösterilsin. $W_{(n)}(k)$ tridiagonal matris ailesinin kofaktör matrislerinin ailesi $C_{(n-1)}(k)$;

(i) $n \geq 4$ çift ise

$$m_{nj} = \begin{cases} 6B_j^k & ;2 \leq j \leq n \text{ çift iken} \\ -6B_j^k & ;3 \leq j \leq n \text{ tek iken} \end{cases} \quad , \quad m_{in} = \begin{cases} 6B_i^k & ;2 \leq i \leq n-1 \text{ ;çift iken} \\ -6B_i^k & ;3 \leq i \leq n-1 \text{ ;tek iken} \end{cases}$$

$$m_{i1} = \begin{cases} -B_{n-(i-1)}^k & ;2 \leq j \leq n-1 \text{ ;çift iken} \\ B_{n-(i-1)}^k & ;1 \leq i \leq n-1 \text{ ;tek iken} \end{cases} \quad m_{1j} = \begin{cases} -6B_{n-(j-1)}^k & ;2 \leq j \leq n-1 \text{ ;çift iken} \\ 6B_{n-(j-1)}^k & ;3 \leq j \leq n-1 \text{ ;tek iken} \end{cases}$$

diğer durumlarda

$$m_{ij} = \begin{cases} -6B_i^k B_{n-(j-1)}^k & ; j > i \text{ ve } (-1)^{i+j} = -1 \text{ iken} \\ 6B_i^k B_{n-(j-1)}^k & ; j > i, (-1)^{i+j} = 1 \text{ iken} \end{cases}$$

$$m_{ij} = \begin{cases} -6B_j^k B_{n-(i-1)}^k & ; j < i, (-1)^{i+j} = -1 \text{ iken} \\ 6B_j^k B_{n-(i-1)}^k & ; j < i, (-1)^{i+j} = 1 \text{ iken} \end{cases}$$

$$m_{ij} = 6B_i^k B_{n-(j-1)}^k \quad ; i = j \,(ij \neq 11 \text{ ve } ij \neq nn) \text{ iken}$$

$$m_{1n} = -6B_1^k$$

(ii) $n \geq 5$ tek ise

$$m_{nj} = \begin{cases} -6B_j^k & ;2 \leq j \leq n \text{ çift iken} \\ 6B_j^k & ;3 \leq j \leq n \text{ tek iken} \end{cases} \quad , \quad m_{in} = \begin{cases} -6B_i^k & ;2 \leq i \leq n-1 \text{çift iken} \\ 6B_i^k & ;3 \leq i \leq n-1 \text{ tek iken} \end{cases}$$

$$m_{i1} = \begin{cases} -B_{n-(i-1)}^k & ;2 \leq i \leq n-1 \text{çift iken} \\ B_{n-(i-1)}^k & ;1 \leq i \leq n-1 \text{ tek iken} \end{cases} \quad , \quad m_{1j} = \begin{cases} -6B_{n-(j-1)}^k & ;2 \leq j \leq n \text{ çift iken} \\ 6B_{n-(j-1)}^k & ;3 \leq j \leq \text{n tek iken} \end{cases}$$

diğer durumlarda

$$m_{ij} = \begin{cases} -6B_i^k B_{n-(j-1)}^k & ; j > i, (-1)^{i+j} = -1 \text{ iken} \\ 6B_i^k B_{n-(j-1)}^k & ; j > i, (-1)^{i+j} = 1 \text{ iken} \end{cases} \quad m_{ij} = \begin{cases} -6B_j^k B_{n-(i-1)}^k & ; j < i, (-1)^{i+j} = -1 \text{ iken} \\ 6B_j^k B_{n-(i-1)}^k & ; j < i, (-1)^{i+j} = 1 \text{ iken} \end{cases}$$

$$m_{ij} = 6B_i^k B_{n-(j-1)}^k \quad ; i = j \,(ij \neq 11 \text{ ve } ij \neq nn) \text{ iken,}$$

$$m_{1n} = 6B_1^k$$

dir [19].

Sonuç 5.6 B_n^k, $n.$ $k-$balans sayısı ve $C_{(n-1)}(k)$, $W_{(n)}(k)$ nın kofaktör matrisi olmak üzere

(i) $\det(C_{(n-1)}(k))=(6B_{n+1}^k)^{n-1}$ dir.

(ii) $\dfrac{\det(C_{(n+1)}(k))}{\det(W_{(n+1)}(k))}=(6B_{n+3}^k)^n$ dir [19].

Aşağıdaki teoremden $W_{(n)}(k)$ matris ailesinin tersi ifade edilsin.

Teorem 5.7 B_n^k, $n.$ $k-$balans sayısı ve $C_{(n-1)}(k)$, $W_{(n)}(k)$ nın kofaktör matrisi olsun. $W_{(n-1)}(k)$ matrisinde *j* ile *j*. sütun ve *i* ile *i*. satır gösterilmek üzere $W_{(n-1)}(k)$ matrisinin tersi

(i) $n\geq 4$ çift ise

$$m_{nj}=\begin{cases}\dfrac{1}{B_{n+1}^k}B_j^k & ;2\leq j\leq n \text{ çift iken}\\ \dfrac{-1}{B_{n+1}^k}B_j^k & ;3\leq j\leq n \text{ tek iken}\end{cases}\qquad m_{in}=\begin{cases}\dfrac{1}{B_{n+1}^k}B_i^k & ;2\leq i\leq n-1 \text{ çift iken}\\ \dfrac{-1}{B_{n+1}^k}B_i^k & ;3\leq i\leq n-1 \text{ tek iken}\end{cases}$$

$$m_{i1}=\begin{cases}\dfrac{-1}{6B_{n+1}^k}B_{n-(i-1)}^k & ;2\leq i\leq n-1 \text{ çift iken}\\ \dfrac{1}{6B_{n+1}^k}B_{n-(i-1)}^k & ;1\leq i\leq n-1 \text{ tek iken}\end{cases}\qquad m_{1j}=\begin{cases}\dfrac{-1}{B_{n+1}^k}B_{n-(j-1)}^k & ;2\leq j\leq n-1 \text{ çift iken}\\ \dfrac{1}{B_{n+1}^k}B_{n-(j-1)}^k & ;3\leq j\leq n-1 \text{ tek iken}\end{cases}$$

diğer durumlarda

$$m_{ij}=\begin{cases}\dfrac{-1}{B_{n+1}^k}B_i^kB_{n-(j-1)}^k & ;\ j>i,(-1)^{i+j}=-1 \text{ iken}\\ \dfrac{1}{B_{n+1}^k}B_i^kB_{n-(j-1)}^k & ;\ j>i,(-1)^{i+j}=1 \text{ iken}\end{cases}\qquad m_{ij}=\begin{cases}\dfrac{-1}{B_{n+1}^k}B_j^kB_{n-(i-1)}^k & ;\ j<i,(-1)^{i+j}=-1 \text{ iken}\\ \dfrac{1}{B_{n+1}^k}B_j^kB_{n-(i-1)}^k & ;\ j<i,(-1)^{i+j}=1 \text{ iken}\end{cases}$$

$$m_{ij}=\frac{1}{B_{n+1}^k}B_i^kB_{n-(j-1)}^k \quad ;\ i=j(ij\neq 11 \text{ ve } ij\neq nn) \text{ iken}$$

$$m_{1n}=\frac{-1}{B_{n+1}^k}B_1^k$$

(ii) $n \geq 5$ tek ise

$$m_{nj} = \begin{cases} \dfrac{-1}{B_{n+1}^k} B_j^k & ;2 \leq j \leq n \text{ çift iken} \\ \dfrac{1}{B_{n+1}^k} B_j^k & ;3 \leq j \leq n \text{ tek iken} \end{cases} \qquad m_{in} = \begin{cases} \dfrac{-1}{B_{n+1}^k} B_i^k & ;2 \leq i \leq n-1 \text{ çift iken} \\ \dfrac{1}{B_{n+1}^k} B_i^k & ;3 \leq i \leq n-1 \text{ tek iken} \end{cases}$$

$$m_{i1} = \begin{cases} \dfrac{-1}{6B_{n+1}^k} B_{n-(i-1)}^k & 2 \leq i \leq n-1 \text{ çift iken} \\ \dfrac{1}{6B_{n+1}^k} B_{n-(i-1)}^k & 1 \leq i \leq n-1 \text{ tek iken} \end{cases} \qquad m_{1j} = \begin{cases} \dfrac{-1}{B_{n+1}^k} B_{n-(j-1)}^k & ;2 \leq j \leq n \text{ çift iken} \\ \dfrac{1}{B_{n+1}^k} B_{n-(j-1)}^k & ;3 \leq j \leq n \text{ tek iken} \end{cases}$$

$$m_{ij} = \begin{cases} \dfrac{-1}{B_{n+1}^k} B_i^k B_{n-(j-1)}^k & j > i, (-1)^{i+j} = -1 \text{ iken} \\ \dfrac{1}{B_{n+1}^k} B_i^k B_{n-(j-1)}^k & j > i, (-1)^{i+j} = 1 \text{ iken} \end{cases} \qquad m_{ij} = \begin{cases} \dfrac{-1}{B_{n+1}^k} B_j^k B_{n-(i-1)}^k & j < i, (-1)^{i+j} = -1 \text{ iken} \\ \dfrac{1}{B_{n+1}^k} B_j^k B_{n-(i-1)}^k & j < i, (-1)^{i+j} = 1 \text{ iken} \end{cases}$$

$$m_{ij} = \frac{1}{B_{n+1}^k} B_i^k B_{n-(j-1)}^k \quad ;\ i = j(ij \neq 11 ve\ ij \neq nn) \text{ iken,}$$

$$m_{1n} = \frac{1}{B_{n+1}^k} B_1^k$$

dir [19].

İspat Tanım 2.2.1 den

$$(W_{(n)}(k))^{-1} = \frac{1}{\det(W_{(n)}(k))} (C_{(n)}(k))^T \text{ ve } (W_{(n)}(k))^{-1} = \frac{1}{6B_{n+1}^k} (C_{(n)}(k))^T$$

olup Yardımcı Teorem 5.5 den $C_{(n-1)}(k)$ nın transpozu $n \geq 4$ çift ise

$$m_{nj} = \begin{cases} -6B_j^k & ;2 \leq j \leq n \text{ çift iken} \\ 6B_j^k & ;3 \leq j \leq n \text{ tek iken} \end{cases} \qquad m_{in} = \begin{cases} -6B_i^k & ;2 \leq i \leq n-1 \text{ çift iken} \\ 6B_i^k & ;3 \leq i \leq n-1 \text{ tek iken} \end{cases}$$

$$m_{i1} = \begin{cases} -B_{n-(i-1)}^k & ;2 \leq i \leq n-1 \text{ çift iken} \\ B_{n-(i-1)}^k & ;1 \leq i \leq n-1 \text{ tek iken} \end{cases} \qquad m_{1j} = \begin{cases} -6B_{n-(j-1)}^k & ;2 \leq j \leq n \text{ çift iken} \\ 6B_{n-(j-1)}^k & ;3 \leq j \leq n \text{ tek iken} \end{cases}$$

$$m_{ij} = \begin{cases} -6B_i^k B_{n-(j-1)}^k & ; j > i,\ (-1)^{i+j} = -1 \text{ iken} \\ 6B_i^k B_{n-(j-1)}^k & ; j > i, (-1)^{i+j} = 1 \text{ iken} \end{cases} \qquad m_{ij} = \begin{cases} -6B_j^k B_{n-(i-1)}^k & ; j < i, (-1)^{i+j} = -1 \text{ iken} \\ 6B_j^k B_{n-(i-1)}^k & ; j < i, (-1)^{i+j} = 1 \text{ iken} \end{cases}$$

$$m_{ij} = 6B_i^k B_{n-(j-1)}^k \quad ;\ i = j(ij \neq 11 \text{ve } ij \neq nn) \text{ iken}$$

$$m_{1n} = -6B_1^k$$

ve $n \geq 5$ tek ise

$$m_{nj}=\begin{cases}-6B_j^k & ;2\le j\le n \text{ çift iken}\\ 6B_j^k & ;3\le j\le n \text{ tek iken}\end{cases}\qquad m_{in}=\begin{cases}-6B_i^k & ;2\le i\le n-1 \text{ çift iken}\\ 6B_i^k & ;3\le i\le n-1 \text{ tek iken}\end{cases}$$

$$m_{i1}=\begin{cases}-B_{n-(i-1)}^k & ;2\le i\le n-1 \text{ çift iken}\\ B_{n-(i-1)}^k & ;1\le i\le n-1 \text{ tek iken}\end{cases}\qquad m_{1j}=\begin{cases}-6B_{n-(j-1)}^k & ;2\le j\le n \text{ çift iken}\\ 6B_{n-(j-1)}^k & ;3\le j\le n \text{ tek iken}\end{cases}$$

$$m_{ij}=\begin{cases}-6B_i^kB_{n-(j-1)}^k & ;j>i,(-1)^{i+j}=-1 \text{ iken}\\ 6B_i^kB_{n-(j-1)}^k & ;j>i,(-1)^{i+j}=1 \text{ iken}\end{cases}\qquad m_{ij}=\begin{cases}-6B_j^kB_{n-(i-1)}^k & ;j<i,(-1)^{i+j}=-1 \text{ iken}\\ 6B_j^kB_{n-(i-1)}^k & ;j<i,(-1)^{i+j}=1 \text{ iken}\end{cases}$$

$$m_{ij}=6B_i^kB_{n-(j-1)}^k \quad ;\ i=j(ij\ne 11 \text{ve } ij\ne nn) \text{ iken}$$

$$m_{1n}=-6B_1^k$$

dir. Bu matrisin terimleri $\dfrac{1}{6B^k{}_{n+1}}$ ile çarpıldığında istenilen sonuç elde edilmiş olur.

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

i) $n \geq 2$ için U_n Lucas ve V_n kompanion-Lucas tamsayı dizileri incelenip bu tamsayı dizilerinin ilk n terim toplamları bulunmuştur.

ii) Bu tamsayı dizileri ile circulant, negacyclic ve semicirculant matrisler için Euclidean norm, spektral norm, 1-normu ve sonsuz normu için sonuçlar elde edilmiştir, daha sonra bu matrisler için özdeğerler ve determinantlar bulunmuştur.

iii) Bu tamsayı dizilerinin terimleri ile elde edilen kompanion matrisin kuvvetleri verilmiştir.

iv) M_n tetranacci ve K_n kompanion-tetranacci tamsayı dizileri incelenip bu dizilerin ilk n terim toplamları ve genel terimleri arasındaki fark verilmiştir.

v) Bu tamsayı dizileri ile circulant ve negacyclic matrisler tanımlanmış M_n ve K_n tamsayı dizilerinin circulant matrislerinin matris normları elde edilip daha sonra circulant ve negacyclic matrisler için özdeğer ve determinantlar bulunmuştur.

vi) $k-$balans sayılarını ve farklı formlarını elde edecek şekilde tanımlanan, k parametresine bağlı $n \times n$ tipindeki $B_{(n)}(k)$ ve $W_{(n)}(k)$ tridiagonal matris aileleri incelenmiştir. Chebyshev polinomlarından yararlanarak $B_{(n)}(k)$ tridiagonal matris ailesi için özdeğer ve determinant bulunmuştur.

vii) $C_{(n-1)}(k)$ kofaktör matrisinden yararlanarak da $W_{(n)}(k)$ tridiagonal matris ailesinin tersleri $k-$balans sayılarına bağlı olarak verilmiştir. Ayrıca bu tridiagonal matrisler arasındaki ilişkiler $k-$balans sayılarından faydalanarak elde edilmiştir.

Benzer olarak sunulabilecek öneriler; 4. bölümde, 2. bölümde kullanıldığı gibi tetranacci sayıları yerine dördüncü basamaktan en genel tamsayı dizileri alınarak sonuçlar tüm dördüncü basamaktan tamsayı dizilerine genişletilebilir. 5. bölümde bulunan tridiagonal matrislerin $k-$balans sayılarına uygulamaları diğer $k-$cobalans, $k-$Lucas-balans ve $k-$Lucas-cobalans sayıları içinde benzer şekilde bulunabilir.

7. KAYNAKLAR

[1] Kocer E.G., Circulant, negacyclic and semicirculant matrices with the modified Pell, Jacobsthal Lucas Numbers, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 36 (2) **(2007)** 133-142.

[2] Yazlık Y., Taşkara N., Spectral norm, eigenvalues and determinant of circulant matrix involving the generalized k-Horodam numbers, *Ars Combinatoria*, 104 **(2012)** 505-512.

[3] Falcon S., On the generating matrices of the *k*-Fibonacci numbers. *Proyecciones Journal of Mathematics.* 32 (4) **(2013)** 347-357.

[4] Koshy T., *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, Pure and Applied Mathematics A Wiley-Interscience Series of Texts, monographs and Tracts, **(2001)**.

[5] Ribenboim P., *My Number, My Friends*,(Popular Lectures On Number Theory), Springer-Verlag, New York, Inc, **(2000)**.

[6] Panda G.K., Ray P.K., Some links of balancing and cobalancing numbers with Pell and associated Pell numbers. *Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica* ; 6(1) **(2011)** 41-72.

[7] Jıang Z., Shen N., Lı J., The spectral decomposition of some tridiagonal matrices. *Wseas Transactions on Mathematics*. 12 (12) **(2013)** 1135-1145.

[8] Mason J. C., and Handscomb, D. C., Chebyshev Polynomials, by CRC Press LLC, A CRC Press Company **(2003)**.

[9] Li J., Jiang Z., F. Lu, Determinants, norms and the spread of circulant matrices with tribonacci and generalized lucas numbers, *Abstract and Applied Analysis*, Art., ID 381829, 9 pages, **(2014)**.

[10] Davis P.J., *Circulant Matrices*, John Wiley and Sons, **(1979)**.

[11] Horn R.A., *C. R. Matrix Analysis*, Cambridge University Press, **(1985)**.

[12] Cahill ND., Narayan DA., Fibonacci and lucas numbers as tridiagonal matrix determinants. Fibonacci Quart. 42 (3) **(2004)** 216-21.

[13] Karner H., Schneid J.C., Ueberhuber W., Spectral decomposition of real circulant matrices, *Linear Algebra and its Applications*, 367 **(2003)** 301-311.

[14] Koçer E.G., Mansour T., Tuğlu N., Norms of circulant and semicirculant matrices with Horadam's numbers, *Ars Combinatoria-Waterloo then Winnipeg*, 01 **(2007)** 85.

[15] Özkoç A., Ardıyok E., Special Matrices on Lucas and Companion-Lucas Sequences. *Asian Journal of Mathematics and Computer Research*. 5(2)**(2015)**, 80-92.

[16] Waddill M.E., The Tetranacci Sequence and Generalizations, *Fibonacci Quarterly* 308(1)**(1992)** 9-20.

[17] Spickerman W.R. & Joyner R.N. "Binet's formula for the recursive sequence of order *k*." Fibonacci Quarterly 22 (4) **(1984)** 327-31.

[18] Jina J., Trojovsky P., On determinants of some tridiagonal matrices connected with Fibonacci number. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. 88 (4)**(2013)** 569-575.

[19] Özkoç A., Tridiagonal Matrices via *k*-Balancing Numbers. *British Journal of Mathematics and Computer Sci.* 10(4)(2015), 1-11.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: ARDIYOK, Elif
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 04.12.1990/ DÜZCE
Telefon	: 0 (554) 666 06 95
E-posta	: elif-ardyk@hotmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Lisans	Uludağ Üniversitesi	2013
Lise	Düzce Lisesi (Y.D.A)	2008

İş deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görevi**
2013-2013	Düzce Sancaklar İlköğretim Okulu	Matematik Öğretmeni
2014-	Düzce Özel Uğur Lisesi	Matematik Öğretmeni

Yayınlar

A.Özkoç, E. Ardıyok. Special Matrices on Lucas and Companion-Lucas Sequences. *Asian Journal of Mathematics and Computer Research*. 5(2)(2015), 80-92.

Kongreler

E. Ardıyok, A. Özkoç. Circulant Matrices in Terms of Tetranacci Numbers. *International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications*. 31 August-03 September 2015, Athens-Greece.