T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN KESİN FARK ŞEMALARI

NEVİN YILDIZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
DOÇ. DR. İLHAME AMİRALİ

DÜZCE, 2017

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN KESİN FARK ŞEMALARI

Nevin YILDIZ tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. İlhame AMİRALİ

Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. İlhame AMİRALİ
Düzce Üniversitesi

Doç. Dr. Şerif AMİROV
Karabük Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Yıldırım ÖZDEMİR
Düzce Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 16/06/2017

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

16 Haziran 2017

Nevin YILDIZ

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimimde ve bu tezin hazırlanmasında gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Doç. Dr. İlhame AMİRALİ'e en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Tez çalışmam boyunca değerli katkılarını esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Gabil AMİRALİ'e de şükranlarımı sunarım.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme ve çalışma arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez çalışması, Düzce Üniversitesi BAP-2017.05.04.562 numaralı Bilimsel Araştırma Projesiyle desteklenmiştir

16 Haziran 2017 **Nevin YILDIZ**

Canım Aileme…

İÇİNDEKİLER

SİMGELER

A, B	Sabit
C	Genel sabit
$\alpha(x), f(x)$	Sürekli fonksiyonlar
ε	Singüler pertürbasyon parametresi
h	Şebeke adımı
i	Şebekedeki nokta indisi
ℓ	Fark operatörü
L	Diferansiyel operatör
$p(x)$	Ağırlık fonksiyonu
$R_i^{(1)},\ R_i^{(2)}$	Kalan terimler
$u(x), u(t)$	Kesin çözüm
$u(x)$	Sürekli problemin çözümü
$u_0(x)$	Uygun indirgenmiş problemin çözümü
$u_{x,i}$	$u(x)$ fonksiyonunun x_i noktasındaki ileri fark türevi
$u_{\bar{x},i}$	$u(x)$ fonksiyonunun x_i noktasındaki geri fark türevi
$u_{\overset{0}{x},i}$	$u(x)$ fonksiyonunun x_i noktasındaki merkezi fark türevi
$u_{\bar{x}x,i}$	$u(x)$ fonksiyonunun x_i noktasındaki ikinci fark türevi
x, t	Bağımsız değişkenler
x_i	Şebeke düğüm noktaları
σ	Reel parametre
$\varphi_i(x)$	Baz fonksiyonu

ÖZET

LİNEER ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN KESİN FARK ŞEMALARI

NEVİN YILDIZ
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Doç. Dr. İlhame AMİRALİ
Haziran 2017, 45 sayfa

Bu çalışmada, birinci, ikinci mertebeden diferansiyel denklemler ve singüler pertürbe olmuş lineer başlangıç-değer ve sınır-değer problemlerinin sonlu farklar metodu ile nümerik çözümleri ele alınmıştır. Singüler pertürbe olmuş adi diferansiyel denklemlere yönelik fark metotları kurulup, incelenmiştir. Düzgün şebekede kesin fark şemaları yöntemi kullanılarak elde edilen eksponansiyel katsayılı uyarlanmış fark şemaları ele alınmıştır. Fark şemaları eksponansiyel baz fonksiyonlarından, kalan terimleri integral şeklinde olan ve ağırlık fonksiyonu içeren interpolasyon kuadratür formüllerinden yararlanılarak kurulmuştur. Son olarak, ele alınan diferansiyel denklemlerin nümerik sonuçlarının teorik sonuçlarla uyumlu olduğu görülmüştür.

Anahtar sözcükler: Singüler pertürbe olmuş problemler, Kesin fark şemaları, Adi diferansiyel denklemler, Düzgün yakınsaklık.

ABSTRACT

FITTED DIFFERENCE SCHEMES FOR ORDINARY LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

Nevin YILDIZ
Düzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics
Master Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ilhame AMIRALI
June 2017, 45 pages

In this study, we investigate the numerical solutions of first-order and second-order differential equations and singularly perturbed linear initial and boundary-value problems. By the method of integral identities with the using exponential basis functions and interpolating quadrature rules with the weight and remainder term in integral form an exponentially fitted difference scheme on an uniform mesh has been developed. Finally, we show that numerical results are in agreement with the theoretical results.

Keywords: Singularly perturbation problem, Exact difference scheme, Ordinary differential equations, Uniform Convergence.

1. GİRİŞ

Diferansiyel denklemler için singüler pertürbe olmuş problemler, uygulamalı bilim dallarının birçok değişik alanlarında kullanılmaktadır. Örneğin, arıtılmış-gaz dinamik, oşinografi, aerodinamik, meteoroloji, akışkanlar dinamiği, elastik kuantum mekaniği, plastik, akışkanlar mekaniği, yayılma teori ve reaksiyon-difüzyon süreçlerinde karşılaşılmıştır [1], [2].

Singüler pertürbe olmuş problemlere ilgi yaklaşık olarak yirminci yüzyılın başlarında başlamıştır. Araştırmalar esasen asimptotik açılımlar üzerine yoğunlaşmış ve 1960'lı yıllardan sonraki dönemlerde çok iyi sonuçlar elde edilmiştir. Buradaki esas zorluk sınır katlarında kesin çözüm özelliklerinin hızlı bir şekilde kötüleşiyor olmasıdır. Çözüm fonksiyonun türevleri parametrenin küçük değerleri için ince geçiş katlarında sonsuza ıraksar ve klasik nümerik yöntemlerin uygulanması kararsızlıktan dolayı imkansız olur [3]-[5]. Dolayısıyla, kararlı ve küçük parametreye göre düzgün yakınsaklık özelliğine sahip nümerik metotların kurulması büyük önem taşımaktadır.

Singüler pertürbe olmuş lineer başlangıç-değer ve sınır-değer problemlerinin farklar metodu ile nümerik çözümleri ele alınırken ağırlıklı olarak iki tip yaklaşım kullanılmaktadır:

1. Düzgün (eşit aralıklı düğümlerden oluşan) şebekede üstel katsayılı fark şemalarının uygulanması;
2. Sınır katları dahilinde özel kuralla belirlenen düzgün olmayan şebekenin seçimine dayalı fark metotları.

Bunların her ikisinde de amaç diferansiyel problemin özelliklerini daha iyi şekilde ifade edebilecek nümerik metodun kurulmasıdır [6]-[14].

Bu tezde birinci ve ikinci mertebeden diferansiyel denklemler için düzgün şebekede kesin fark şemaları verilmiştir. Kesin fark şemaları yöntemi olarak da bilinen bu yöntem, verilerin düşük düzgünlüklü olması veya diferansiyel çözümün kötü davranışlı olması durumlarında yakınsak fark şemalarının kurulmasına imkan sağlayan bir yaklaşımdır [15]-[19].

Ayrıca, kesin fark şemaları yönteminin, bu kısımdaki diferansiyel operatörlerin ve bu kısımda olmayan diferansiyel operatörlerin singüler pertürbe olmuş durumlarına yönelik uygulamaları da ele alınmıştır [20]-[23].

Bu çalışma 7 bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde konuya giriş yer almaktadır.

İkinci bölümde tez çalışmasında kullanılan genel bilgiler ve özet verilmiştir.

Çalışmanın üçüncü bölümünde aşağıdaki birinci mertebeden adi diferansiyel denklem için başlangıç-değer problemi ele alınmıştır:

$$\begin{aligned} &Lu := u' + a(x)u = f(x), \quad x > 0 \\ &u(0) = \mu, \end{aligned}$$

burada $a(x)$ ve $f(x)$ sürekli fonksiyonlardır. $x_i = ih,\ ih = 0,1,...$ düğümleri kullanılarak uygun kesin fark şeması kurularak nümerik çözüm elde edilecektir [24]-[28].

Dördüncü bölümde singüler pertürbe olmuş birinci mertebeden lineer başlangıç-değer problemi ele alınmıştır [29], [30]:

$$\begin{aligned} &Lu := \varepsilon u' + a(x)u = f(x), \quad 0 < x \le l \\ &u(0) = A. \end{aligned}$$

Beşinci bölümde aşağıdaki ikinci mertebeden self-adjoint sınır-değer problemi incelenmiştir:

$$\begin{aligned} &Lu \equiv -\varepsilon u'' + a(x)u = f(x), \quad 0 < x < l \\ &u(0) = A, \quad u(l) = B, \end{aligned}$$

burada ε küçük pozitif parametre, $a(x) \ge a > 0,\ f(x)$ yeterince düzgün fonksiyonlar, A ve B verilmiş sabitlerdir. Her bir durum için problemin bir tek çözümünün varlığı kabul edilmektedir. Bu problemin çözümü genel olarak $x = 0$ ve $x = l$ noktalarında olmak üzere iki sınır katına sahiptir. Problemin çözümü için üstel katsayılı fark şeması kurulmuş, yakınsaklık hızı değerlendirilmiştir.

Altıncı bölümde elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir.

Yedinci bölümde ise tez çalışmasında yararlanılan kaynaklar verilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Tanımlar

2.1.1. Diferansiyel Denklem

İçerisinde bir değişkenin bilinmeyen bir fonksiyonu ve bu fonksiyonun değişkene göre çeşitli basamaklardan türevleri bulunan denklemlere *diferansiyel denklemler* denir. Bir diferansiyel denklemde bir veya daha fazla bağımlı değişken olmasına karşılık yalnız bir bağımsız değişken varsa bu denkleme *adi diferansiyel denklem* denir. Eğer diferansiyel denklem bir tek bağımlı değişkenin iki veya daha fazla sayıda bağımsız değişken cinsinden türevlerini içeriyorsa, böyle denkleme *kısmi diferansiyel denklem* denir [31], [32].

2.1.2. Lineer Denklemler

Genel şekli $a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + ... + a_1(x)y^1 + a_0(x)y = b(x)$ şeklinde olan denklemlere *n.* mertebeden *lineer denklemler* denir. $b(x) = 0$ ise denkleme *homojen lineer denklem* denir [31].

2.1.3. Başlangıç-Değer ve Sınır-Değer Problemleri

Bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerinin bağımsız değişkenlerinin bir tek noktasında beliren yardımcı şartları, başlangıç şartlarıyla birlikte denklemi oluşturan probleme *başlangıç-değer problemi* denir. Bilinmeyen fonksiyonun ve onun türevlerinin bağımlı değişkenin birden fazla noktasında beliren yardımcı şartlara *sınır şartları* denir. Bu tür şartların olduğu problemlere *sınır-değer problemleri* denir [31], [32].

2.1.4. Şebeke ve Şebeke Fonksiyonu

i) Düzgün şebeke: $[0,l]$ aralığında tanımlanan *düzgün şebeke*

$$\overline{\omega}_h = \left\{ x_i = ih, i = 0,1,2,..., N; h = \frac{l}{N} \right\}$$

şeklindedir.

Burada h şebeke adımı, x_i-şebeke düğümü, $y = y_i = y(x_i)$, $\overline{\omega}_h$ şebekesinde tanımlı şebeke fonksiyonudur [33]-[36].

ii) Düzgün olmayan şebeke: $[0, l]$ aralığında tanımlanan

$$\overline{\omega} = \{x_i | 0 = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{\mathrm{N-1}} < x_{\mathrm{N}} = l\}$$

ayrık noktalar kümesine *düzgün olmayan şebeke* denir. x_i noktalarına *şebeke düğümleri* denir. Şebeke adımı $h_i = x_i - x_{i-1}$ şeklinde tanımlanır [23], [37], [38], [39].

2.1.5. Fark Türevleri

$[0, l]$ aralığında tanımlı $u(x)$ fonksiyonunun düzgün şebeke için fark türevleri aşağıdaki gibidir [40]-[43]:

i) $u_{x,i} = \dfrac{u_{i+1} - u_i}{h}$ - $u(x)$ fonksiyonunun x_i noktasındaki ileri fark türevi,

ii) $u_{\bar{x},i} = \dfrac{u_i - u_{i-1}}{h}$ - $u(x)$ fonksiyonunun x_i noktasındaki geri fark türevi,

iii) $u_{\overset{o}{x},i} = \dfrac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$ - $u(x)$ fonksiyonunun x_i noktasındaki merkezi fark türevi,

iv) $u_{\bar{x}x,i} = \dfrac{u_{x,i} - u_{\bar{x},i}}{h} = \dfrac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$ - $u(x)$ fonksiyonunun x_i noktasında ikinci mertebeden merkezi fark türevi.

2.1.6. Regüler ve Singüler Pertürbe Olmuş Problem

P_ε problemi ε parametresine bağlı bir problem olsun. Bu problemin u_ε çözümünün $L(u,\varepsilon)=0$ denklemi ile belirlendiği kabul edilsin. Bu tür probleme genelde *pertürbe olmuş problem* denir. $\varepsilon=0$ durumundaki P_0 probleminin çözümü, başka bir deyişle $L(u_0,0)=0$ bağıntısı ile tanımlanan problemin çözümü, u_0 olsun. P_0 problemine P_ε problemine *uygun indirgenmiş problem* denir. Eğer indirgenmiş P_0 problemi verilmiş problemle aynı tipe ve mertebeye sahipse, ayrıca her iki problemin de bir tek çözümü varsa, o halde P_ε problemine *regüler pertürbe olmuş problem*, aksi durumda ise *singüler pertürbe olmuş problem* denir [37], [44]-[49].

Örnek 2.1.1.

$$\begin{aligned} &u'(x)+\varepsilon u(x)=0,\ \ 0<x\le 1 \\ &u(0)=1 \end{aligned}$$

başlangıç-değer problemi verilsin. Çözüm fonksiyonu

$$u_\varepsilon(x)=e^{-\varepsilon x}$$

şeklindedir. Uygun indirgenmiş problem

$$\begin{aligned} &u'(x)=0,\ \ 0<x\le 1 \\ &u(x)=1 \end{aligned}$$

şeklinde olup ε ’ un pozitif kuvvetlerine göre

$$u(x)=1-\varepsilon x+\frac{1}{2}\varepsilon^2x^2-\ldots$$

gibi bir seri ile ifade edilmektedir. Ayrıca, keyfi $x_0\in[0,l]$ sabiti için

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{\varepsilon\to 0}u(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{x\to x_0}u(x)=1$$

olur. İndirgenmiş problem ana problemle aynı mertebeden olup, çözümü $u_0(x)=1$ şeklindedir. Dolayısıyla ele alınan bu başlangıç-değer problemi regüler pertürbe olmuş problemdir.

Örnek 2.1.2.

$$\varepsilon u'(x) + u(x) = 0, \quad 0 < x \le 1$$
$$u(0) = 1$$

başlangıç-değer problemi verilsin. Çözüm fonksiyonu

$$u_\varepsilon(x) = e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$$

şeklindedir. Burada ε 'a bağlı olmayan keyfi $x_0 \in (0, l]$ için

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{\varepsilon\to 0} u(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{x\to x_0} u(x) = 1$$

olduğu görülür. Fakat tekrarlı limitlerin eşitliği $x = 0$ noktası için söz konusu değildir:

$$0 = \lim_{x\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} u(x) \ne \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{x\to 0} u(x) = 1.$$

Bu tip eşitsizlikler singüler pertürbe olmuş diferansiyel problemlere has bir özelliktir ve başlangıç veya sınır katının varlığının belirtisidir. Böylece ele alınan problem $x = 0$ noktasında bir başlangıç katına sahiptir. Uygun indirgenmiş problemin çözümü $u_0(x) \equiv 0$ şeklindedir ve bu durumda başlangıç şartı gereksiz bir hal almaktadır.

2.1.7. Ayrık Maksimum Norm

$$\overline{\omega}_h = \left\{ x_i = ih, i = 0,1,2,\ldots, N; h = \frac{l}{N} \right\}$$

şebekesinde tanımlı ayrık maksimum norm

$$\|y\|_\infty \equiv \|y\|_{\infty,\overline{\omega}_h} \equiv \|y\|_{c(\overline{\omega}_h)} = \max_{0\le i\le N} |y(x_i)|$$

şeklindedir.

2.1.8. $[0, l]$ aralığında Sürekli Maksimum Norm

$[0, l]$ aralığındaki sürekli maksimum norm

$$\|u\|_\infty \equiv \|u\|_{\infty,[0,l]} \equiv \|y\|_{c[0,l]} = \max_{0\le x\le l} |u(x)|$$

şeklindedir.

2.1.9. Düzgün Yakınsaklık

$u(x)$ diferansiyel problemin çözümü, y_i uygun fark probleminin çözümü, $\|.\|$ da belli bir şebeke normu olsun. Eğer ε 'dan ve h 'dan bağımsız bir C sabiti için

$$\|y-u\| \leq Ch^p, \quad p>0$$

şeklinde bir eşitsizlik söz konusu ise, bu durumda yaklaşık çözüm kesin çözüme $O(h^p)$ hızıyla ε 'a göre *düzgün yakınsaktır* denir [37].

2.1.10. Kararlılık

Lineer

$$Lu = f(x), \quad x \in G \tag{2.1}$$

denkleminin

$$\ell u = \mu(x), \quad x \in \Gamma \tag{2.2}$$

şartını sağlayan çözümün bulunması istensin, burada $f(x), \mu(x)$ belirli fonksiyonlar, L ve ℓ diferansiyel operatördür.

$$\overline{G} = G \cup \Gamma$$

bölgesinde herhangi bir

$$\overline{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$$

şebekesinin kurulduğunu varsayalım.

(2.1)-(2.2) problemine karşılık gelen fark problemi

$$L_h y = \varphi_h, \quad x \in \omega_h \tag{2.3}$$

$$\ell_h y = \chi_h, \quad x \in \gamma_h \tag{2.4}$$

şeklindedir.

Bu problemin belli sınıflardan olan her bir φ_h, χ_h başlangıç veri fonksiyonları ve yeteri kadar küçük $h \leq h_0$ için bir tek çözüme sahip olduğunu varsayalım.

(2.1)-(2.2) probleminin başlangıç veri fonksiyonları $\bar{\varphi}_h$, $\bar{\chi}_h$ olan çözümü $\bar{y}$ ile belirlensin. Yeteri kadar küçük h ve h'dan bağımsız C_1 ve C_2 sabitleri için

$$\left\|\bar{y}-y\right\|_1 = C_1\left\|\bar{\varphi}_h-\varphi_h\right\|_2 + C_2\left\|\bar{\chi}_h-\chi_h\right\|_3$$

eşitsizliği varsa (2.3)-(2.4) fark şeması sağ tarafa ve sınır şartına göre kararlıdır denir. Böylece kararlılık, fark şemasının çözümünün başlangıç veri fonksiyonlarına sürekli şekilde bağlı olduğunu, hem de bu bağlılığın h'a göre düzgün olduğunu ifade eder [50].

2.2. Kuadratur Formülleri

Fark şemalarının kurulmasında ve incelenmesinde aşağıdaki kuadratür formülleri kullanılacaktır [51]:

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \left[\int_a^b p(x)dx\right]\{\sigma f(b)+(1-\sigma)f(a)\} + f[a,b]\int_a^b \left(x-x^{(\sigma)}\right)p(x)dx + R_n(f), \qquad (2.5)$$

burada σ reel parametre, $p(x)\in C[a,b]$ ağırlık fonksiyonu, f belirli bir fonksiyondur.

$$R_n(f) = \int_a^b p(x)dx\int_a^b f^{n}(\xi)K_{n-1}(x,\xi)d\xi, \qquad f\in C^n, \quad n=1 veya\ 2$$

$$K_s(x,\xi) = T_s(x-\xi)-(b-a)^{-1}(x-a)(b-\xi)^s, \quad s=0,1$$

$$x^{(\sigma)} = \sigma b+(1-\sigma)a, \quad f[a,b] = (f(b)-f(a))/(b-a)$$

$$T_s(\lambda) = \lambda^s/s!, \quad \lambda\ge 0;\ T_s(\lambda)=0,\ \lambda<0$$

$$\int_a^b p(x)f'(x)dx = f[a,b]\int_a^b p(x)dx + R_n^*(f), \qquad (2.6)$$

$$R_n^*(f) = -\int_a^b p'(x)dx\int_a^b f^{n}(\xi)K_{n-1}(x,\xi)d\xi, \qquad f\in C^n, \quad n=1\ veya\ 2$$

(2.7)

$$R_n^*(f) = -\int_a^b p(x)dx\int_a^b f''(\xi)K_0(\xi,x)d\xi, \qquad f\in C^2. \qquad (2.8)$$

(2.7) ve (2.8) formüllerinde aynı $K_s(x,\xi)$ fonksiyonunun bulunduğunu belirtelim.

Ayrıca,

$$\begin{aligned}
&K_0(a,\xi)=K_0(b,\xi)=0,\\
&K_1(a,\xi)=K_1(b,\xi)=K_1(x,a)=K_1(x,b)=0,\\
&K_1(x,\xi)=K_1(\xi,x),\\
&\frac{\partial}{\partial\xi}K_1(x,\xi)=-K_0(x,\xi),\;\; \frac{\partial}{\partial\xi}K_1(x,\xi)=-K_0(\xi,x)
\end{aligned}$$

olduğu kolayca görülebilir.

Bazı uygulamalarda (2.5) formülü, sağ tarafındaki ikinci terimin kalan terime dahil edilmiş şekliyle kullanılmaktadır.

$$\int_a^b p(x)f(x)dx=\left[\int_a^b p(x)dx\right]\{\sigma f(b)+(1-\sigma)f(a)\}+\overline{R}_n(f),$$

burada

$$\overline{R}_n(f)=f[a,b]\int_a^b\left(x-x^{(\sigma)}\right)p(x)+R_n(f).$$

$n=0$ durumu için $\overline{R}_n(f)$ kalan terimi, daha kısa şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\overline{R}_n(f)=\int_a^b dxp(x)\int_a^b f'(\xi)[T_0(x-\xi)-\sigma]d\xi.$$

Ayrıca $n=0,\ p(x)=1$ için

$$\overline{R}_1(f)=\int_a^b f'(\xi)[b-\xi-\sigma(b-a)]d\xi$$

olur. $p(x)\equiv 1$ için

$$\overline{R}_n(f)=(b-a)^2\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)f[a,b]+\int_a^b\left[\frac{(b-\xi)^{n+1}}{(n+1)!}-\frac{1}{2}(b-\xi)^n(b-a)\right]f^{(n+1)}(\xi)d\xi$$

ve $n=1,\ \sigma=\frac{1}{2}$, $p(x)=1$ durumu için

$$\overline{R}_n(f)=\frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi)[(a-\xi)(b-\xi)]d\xi$$

şeklinde yazılabilmektedir.

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = \left(\int_a^b p(x)dx\right) f\left(x^{(\sigma)}\right) + \dot{R}_n,$$

burada

$$\dot{R}_n \equiv \int_a^b p(x)dx \int_a^b f^{(n+1)}(\xi) K_n^{*}(x,\xi)d\xi + nf'\left(x^{(\sigma)}\right)\int_a^b \left(x - x^{\sigma}\right)p(x)dx,$$

$$\equiv \int_a^b p(x)dx \int_a^b f^{(n+1)}(\xi)\overline{K}_n^{*}(x,\xi)d\xi + nf[a,b]\int_a^b \left(x - x^{\sigma}\right)p(x)dx, \quad n = 0,1$$

$$K_n^{*}(x,\xi) = (x-\xi)^n \left[T_0(x-\xi) - T_0\left(x^{(\sigma)} - \xi\right)\right]$$

$$\overline{K}_n^{*}(x,\xi) = K_n^{*}(x,\xi) - n\left(x - x^{(\sigma)}\right)K_0\left(\xi, x^{(\sigma)}\right)$$

olduğundan

$$R_n \equiv T_n(x-\xi) - T_n\left(x^{(\sigma)} - \xi\right) + n(b-a)^{-1}(b-\xi)^n\left(x^{(\sigma)} - x\right)$$

olur.

Asimptotik değerlendirmelerin bulunmasında bazen aşağıdaki diferansiyelleme formülünden yararlanılır:

$$g'(x) = g(\alpha_0;\alpha_1) - \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} K_0(\xi,x)g''(\xi)d\xi, \ \mathrm{g} \in \mathrm{C}^2, \ \alpha_0 \le x \le \alpha_1. \tag{2.9}$$

2.3. Klasik Fark Şemaları

Fark şeması bir lineer cebirsel denklem sistemidir.

Herhangi bir fark probleminin uygulanmasında aşağıdaki aşamalar söz konusu oluyor:

i. Fark şemasının kurulması
ii. Ele alınan problemin çözümünün varlığı ve tekliği
iii. Fark şemasının kararlılığı
iv. Fark probleminin yakınsaklığı ve yakınsama hızının belirlenmesi
v. Fark problemi için uygun bir realizasyon algoritmasının belirlenmesi.

Genelde klasik fark şemaları düzgün şebekede kararsızlıkları ve ε’a göre düzgün yakınsak olmamaları nedeniyle kullanışlı olmamaktadırlar.

Diğer yandan, fark şemasının önemli özelliklerinden biri diferansiyel problemin sağladığı özelliklerin ayrık benzerini sağlamasıdır.

Sonlu Fark Yöntemleri

Diferansiyel denklemlerin sonlu farklar metodu ile çözümünde klasik fark şemalarının düzgün şebekedeki uygulanması kapalı bölgede kesin çözümün belli türevlerinin sınırlı olmasını gerektirir. Fakat birinci türevler bile genelde sınırlı değildirler. Bu nedenle de klasik fark şemalarının düzgün şebekede uygulanışı ya kararsız ya da ıraksak olmaktadır. Verilen bir diferansiyel problemde türevlerin belli bir yolla fark problemine dönüştürülmesi sonucu elde edilen metoda *sonlu fark metodu* denir [37], [52]-[55].

Metodun faydası: Diferansiyel denklemlerin çözümüne her zaman ulaşılamayabilir, fakat lineer sistemler her zaman çözülebilirdir.

2.3.1. Euler Şemaları Hakkında Genel Bilgi

Birinci mertebeden

$$\begin{aligned} &\varepsilon u' + f(x,u) = 0, \quad 0 < x < l \\ &u(0) = A \end{aligned}$$

başlangıç-değer problemi için klasik fark şemalarını ele alalım.

Burada $u(x)$çözüm, $f(x,u)$ verilen fonksiyon, A sabit ve $\dfrac{\partial f}{\partial u} \geq a > 0.$

2.3.1.1. Açık Euler Şeması

$$\begin{aligned} &\varepsilon \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + f(x_i, y_i) = 0, \; i = 0,1,\dots, N-1 \\ &y_0 = A \end{aligned}$$

şeklindedir.

Burada y_i, x_i düğüm noktalarındaki yaklaşık çözümdür. Bu şemanın kapalı aralıkta yakınsak olabilmesi için $|u''(x)| \leq C$ olmalıdır. Fakat kapalı aralıkta birinci türevlerin bile sınırsız olduğu bilinmektedir.

Daha açık olsun diye aşağıdaki örneği verelim.

Örnek 2.3.1.

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon u' + u = 0, \quad x > 0 \\
&u(0) = 1.
\end{aligned}
$$

Kesin çözüm $u(x) = e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$ şeklindedir.

Birinci türev fark türevi ile ifade edilirse,

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + y_i = 0, \quad i = 0,1,\ldots, x_i = ih, \\
&y_0 = 1
\end{aligned}
$$

olur. Yaklaşık çözümün hatası x_1 noktasında $y_1 - u(x_1)$şeklindedir.

$$
\begin{aligned}
&u(x_1) = e^{-\frac{h}{\varepsilon}}, \\
&y_1 = 1 - \frac{h}{\varepsilon}
\end{aligned}
$$

olduğu dikkate aldığında, özel olarak $h = \varepsilon$ alınırsa

$$
|y_1 - u(x_1)| = \left| 1 - \frac{h}{\varepsilon} - e^{\frac{-h}{\varepsilon}} \right| = e^{-1}
$$

elde edilir, yani düzgün yakınsama yoktur. Sonuç olarak, Açık Euler şeması ne kararlı ne de yakınsaktır.

Aşağıda vereceğimiz Kapalı Euler ve Crank-Nicolson şemaları ise kararlı fakat yakınsak değildirler. Çünkü kalan terimleri $h \to 0$ için sıfıra gitmiyor.

2.3.1.2. Kapalı Euler Şeması

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon \frac{y_i - y_{i-1}}{h} + f(x_i, y_i) = 0, \; i = 0,1,\ldots, N \\
&y_0 = A
\end{aligned}
$$

şeklindedir. Bu, her bir i için bir nonlineer skaler denklemdir ve nonlineer eşitlikler için uygun algoritma uygulanarak çözülebilir. Bu şema mutlak kararlıdır fakat yakınsak değildir.

Yakınsak olması için şemanın kararlı olması ve kalan teriminin sıfıra gitmesi gerekmektedir.

2.3.1.3. Crank-Nicolson Şeması

$$\varepsilon \frac{y_i - y_{i-1}}{h} + \frac{1}{2}\left[f(x, y_i) + f(x_{i-1}, y_{i-1}) \right] = 0, \; i = 0,1,\ldots,N$$

şeklindedir.

Bu şemanın hatası daha az, kararlılık performansı ve kesinliği daha yüksektir. Klasik fark şemalarının kullanımı singüler pertürbasyon parametresi ε küçük olduğu zaman zorluk çıkarabilir. Bu sebepten böyle problemler için daha kullanışlı metotlar geliştirmek önemlidir. Aşağıdaki çok kullanılan bir yaklaşımdan bahsedelim.

2.3.1.4. Üstel Katsayılı Fark Şemaları

$$\begin{aligned} &\varepsilon u'(x) + a(x)u = f(x) \\ &u(0) = A, \end{aligned}$$

başlangıç-değer problemine karşılık kurulan

$$\begin{aligned} &L_N y_i = \varepsilon\theta_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h} + a_i y_i = f_i, \qquad i = 1,\ldots,N \\ &\theta_i = \frac{\rho a_i}{1 - \exp(-\rho a_i)}, \; \rho = \frac{h}{\varepsilon} \end{aligned}$$

fark şeması küçük parametreye göre düzgün yakınsak şemadır. Yaklaşım hatası $R_i \; (Lu_i + R_i = f_i)$

$$R_i = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [a(x) - a(x_i)] u(x) \varphi_i(x) dx + \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - f(x_i)] \varphi_i(x) dx$$

şeklindedir. Buradaki baz fonksiyonları

$$\varphi_i(x) = \exp\left\{ -\frac{a_i}{\varepsilon}(x_i - x) \right\}, \quad i = 1,\ldots,N$$

şeklindedirler. Hata değerlendirmesi için

$$\|y - u\|_\infty \le Ch$$

eşitsizliği doğrudur.

3. LİNEER ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN KESİN FARK ŞEMALARI

3.1. Kesin Fark Şemaları

Bu kısımda birinci, ikinci mertebeden diferansiyel denklemler ve singüler pertürbe olmuş diferansiyel denklemler için düzgün şebekede kesin fark şemaları verilmektedir. Kesin fark şemaları yöntemi, verilerin düşük düzgünlüklü olması veya diferansiyel çözümün kötü davranışlı olması durumlarında yakınsak fark şemalarının kurulmasına imkan sağlamaktadır.

Verilen şebekenin düğüm noktalarında fark şemasının çözümü uygun diferansiyel problemin çözüm değerleri ile çakışıyorsa, bu fark şemasına *kesin fark şeması* denir [35], [37].

3.1.1. Birinci Mertebeden Adi Diferansiyel Denklem İçin

$$\begin{aligned} &Lu := u' + a(x)u = f(x), \qquad x > 0 \\ &u(0) = 0 \end{aligned}$$

başlangıç-değer problemi verilsin. Burada $a(x)$ ve $f(x)$ sürekli fonksiyonlardır. $x_i = ih,\ i = 0,1,...$ düğümleri kullanılarak kurulan uygun kesin fark şeması aşağıdaki gibidir.

İlk önce klasik şema ve kesin fark şemasını tanımlayalım.

Klasik şema

$$\begin{aligned} &\frac{y_i - y_{i-1}}{h} + a_i y_i = f_i \qquad i = 1,2,...,N_0, \quad u \in C^2[0,T] \\ &y_0 = \mu, \end{aligned}$$

kesin fark şeması ise

$$\begin{aligned} &B_i u_{\bar{x},i} + A_i u_i = F_i, \qquad i = 1,2,... \\ &u_0 = \mu \end{aligned} \tag{3.1}$$

şeklindedir. Burada

$$B_i = h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi_i(x)dx + h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_i)a(x)\varphi_i(x)dx,$$

$$A_i = h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}a(x)\varphi_i(x)dx,$$

$$F_i = h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)\varphi_i(x)dx,$$

$\varphi_i(x)$ fonksiyonu ise

$$-\varphi' + a(x)\varphi = 0, \qquad x_{i-1} < x < x_i$$
$$\varphi_i(x) = 1$$

başlangıç-değer probleminin çözümü olup

$$\varphi_i(x) = e^{-\int_x^{x_i} a(\eta)d\eta}$$

şeklinde açık ifadesi de yazılabilir.

(3.1)' in doğruluğunu gösterelim.

$$h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}Lu(x)\varphi_i(x)dx = h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)\varphi_i(x)dx$$

özdeşliğinden başlayalım. (2.5) formülü $n=1$, $p(x)=\varphi_i(x)$ için kullanılırsa

$$h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}u'(x)\varphi_i(x)dx = f[x_{i-1},x_i]\left(h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)\varphi_i(x)dx\right) + R_i^{(1)}$$

$$f[x_{i-1},x_i] = \frac{f(x_{i-1})-f(x_i)}{x_{i-1}-x_i} = u_{\bar{x},i}$$

$$h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}u'(x)\varphi_i(x)dx = u_{\bar{x},i}\left(h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)\varphi_i(x)dx\right) + R_i^{(1)}$$

ifadesi, (2.5) formülü de $\sigma=1$, $n=1$ ve $p(x)=\varphi_i(x)$ için kullanılırsa

$$h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} a(x)u(x)\varphi_i(x)dx = \left(h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} a_i(x)\varphi_i(x)dx\right)u_i + u_{\bar{x},i}\left(h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} a(x)(x-x_i)\varphi_i(x)dx\right) + R_i^{(2)}$$

eşitlikleri yazılabilir.

(2.7) formülünden $R_i^{(1)}$ kalan teriminin ifadesi

$$R_i^{(1)} = -h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i'(x)dx \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(\xi)\left[T_0(x-\xi) - h^{-1}(x-x_{i-1})\right]d\xi,$$

(2.8) formülünden de $R_i^{(2)}$ kalan teriminin ifadesi

$$R_i^{(2)} = h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} a(x)\varphi_i(x)dx \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(\xi)\left[T_0(x-\xi) - h^{-1}(x-x_{i-1})\right]d\xi$$

şeklinde yazılır.

$$\varphi_i(x) = e^{-ax_i+ax}$$

çözümü dikkate alındığında

$$\begin{aligned}
R_i^{(1)} &= \frac{a\exp(-ax_i)}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \exp(ax)dx \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(\xi)T_0(x-\xi)d\xi - h^{-1}(x-x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(\xi)d\xi \\
&= \left[-\frac{a\exp(-ax_i)}{h}\left(\frac{\exp(ax_i)}{a} - \frac{\exp(ax_{i-1})}{a}\right)\right]\int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(\xi)T_0(x-\xi)d\xi - h^{-1}(x-x_{i-1})u(h) \\
&= -\frac{1}{h} + \frac{\exp(-ah)}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(\xi)T_0(x-\xi)d\xi - \frac{x-x_{i-1}}{h}u(h) \\
&= -\frac{1}{h} + \frac{\exp(-ah)}{h} + \frac{x-x_{i-1}}{h}u(h)\int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(\xi)T_0(x-\xi)d\xi,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_i^{(2)} &= \frac{\exp(-ax_i)}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} a(x)\exp(ax)dx \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(\xi)T_0(x-\xi)d\xi - h^{-1}(x-x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(\xi)d\xi \\
&= \left[\frac{\exp(-ax_i)}{h}\left(\exp(ax_i) - \exp(ax_{i-1})\right)\right]\int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(\xi)T_0(x-\xi)d\xi - h^{-1}(x-x_{i-1})u(h) \\
&= \left[\frac{\exp(-ax_i)}{h}\left(\exp(ax_i) - \exp(ax_{i-1})\right)\right]\int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(\xi)T_0(x-\xi)d\xi - \frac{x-x_{i-1}}{h}u(h) \\
&= \frac{1}{h} - \frac{\exp(-ah)}{h} - \frac{x-x_{i-1}}{h}u(h)\int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(\xi)T_0(x-\xi)d\xi
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $R_i^{(1)} + R_i^{(2)} = 0$ ifadesinin doğruluğu, dolayısıyla (3.1) kesin şemasının doğruluğu tespit edilmiş olur.

Birinci Mertebeden Adi Diferansiyel Denklem İçin Özellikler

a) $$h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i(x)dx = \varphi_i(x_{i-1}) + h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_i - x)\varphi_i'(x)$$

bağıntısı ve $\varphi_i(x)$ başlangıç-değer problemi dikkate alınırsa $B_i = \varphi_i(x_{i-1})$ şeklinde ifade edilir.

İspat.

$$B_i = h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i(x)dx + h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i)a(x)\varphi_i(x)dx,$$

$$B_i = \varphi_i(x_{i-1}) + h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_i - x)\varphi_i'(x) + h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i)a(x)\varphi_i(x)dx,$$

$$\begin{aligned}
h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i)a(x)\varphi_i(x)dx &= h^{-1}a\int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i)\varphi_i(x)dx, \\
&= h^{-1}a\left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} x\varphi_i(x)dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} x_i\varphi_i(x)dx\right] \\
&= h^{-1}a\left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} xe^{-ax_i+ax}dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} x_i e^{-ax_i+ax}dx\right] \\
&= h^{-1}a\left[e^{-ax_i}\int_{x_{i-1}}^{x_i} xe^{ax}dx - x_i e^{-ax_i}\int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{ax}dx\right] \\
&= h^{-1}e^{-ah}\left(h + \frac{1}{a}\right) - \frac{h^{-1}}{a},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_i - x)\varphi_i'(x) &= h^{-1}x_i\int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i'(x)dx - h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} x\varphi_i'(x)dx \\
&= h^{-1}x_i\int_{x_{i-1}}^{x_i} a.e^{-ax_i+ax}dx - h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} xae^{-ax_i+ax}dx \\
&= h^{-1}x_i ae^{-ax_i}\int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{ax}dx - h^{-1}x_i ae^{-ax_i}\int_{x_{i-1}}^{x_i} xe^{ax}dx \\
&= h^{-1}e^{-ah}\left(-h - \frac{1}{a}\right) + \frac{h^{-1}}{a}
\end{aligned}$$

olup $B_i = \varphi_i(x_{i-1})$ şeklindedir.

b) a, f ‘nin sabit olması durumunda

- $\varphi_i(x) = e^{-ax_i + ax}$
- $B_i = \varphi_i(x_{i-1}) = e^{-a(x_i - x_{i-1})} = e^{-ah}$,

$$A_i = h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} a(x)\varphi_i(x)dx = h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{-a(x_i - x_{i-1})}dx$$

$$= h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{-ax_i + ax_{i-1}}dx$$

- $$= \frac{e^{-ax_i}}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{-ax_i}dx \qquad ,$$

$$= \frac{e^{-ax_i}}{ah}\left(e^{ax_i} - e^{ax_{i-1}}\right) \qquad (x_i = ih)$$

$$A_i = a\frac{1-e^{ah}}{ah},$$

$$F_i = h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\varphi_i(x)dx = h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{-a(x_i - x_{i-1})}dx$$

$$= h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{-ax_i + ax_{i-1}}dx$$

- $$= \frac{e^{-ax_i}}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{-ax_i}dx$$

$$= \frac{e^{-ax_i}}{ah}\left(e^{ax_i} - e^{ax_{i-1}}\right) \qquad (x_i = ih),$$

$$F_i = f\,\frac{1-e^{ah}}{ah}$$

olur.

Fark şemasının her iki tarafı $\left(\dfrac{1-e^{-ah}}{ah}\right)$ ifadesine bölünürse,

$$\theta u_{\bar{x},i} + au_i = f \ , \ i \geq 1$$

elde edilir.

Burada

$$\theta = \frac{ah}{1-e^{-ah}} e^{-ah}$$

şeklindedir.

4. SİNGÜLER PERTÜRBE ÖZELLİKLİ BİRİNCİ MERTEBEDEN DENKLEM İÇİN BAŞLANGIÇ-DEĞER PROBLEMİ

Bu kısımda singüler pertürbe olmuş

$$Lu := \varepsilon u' + a(x)u = f(x), \quad 0 < x \le l \tag{4.1}$$

$$u(0) = A \tag{4.2}$$

problemi ele alınacaktır. Burada ε-küçük pozitif parametre, $\alpha(x) \ge \alpha > 0$, $f(x)$ yeterince düzgün fonksiyonlar, A verilmiş sabittir. Düzgünlük derecesi yeri geldiğinde somutlaştırılacaktır ve her bir durum için (4.1)-(4.2) probleminin bir tek çözümünün varlığı kabul edilecektir. (4.1)-(4.2) probleminin çözümü genel olarak, $x = 0$ noktasında bir sınır katına sahiptir [3], [56].

Örnek 4.1.

$$\begin{aligned} &\varepsilon u' + u = 0, \quad x > 0 \\ &u(0) = 1 \end{aligned} \tag{4.3}$$

probleminin $x = 0$ noktasında başlangıç katı içerdiği bilinmektedir.

$$|u(x)| \le 1 \quad (0 \le x \le l)$$

olmasına rağmen bu fonksiyon $x = 0$ civarında ani değişme göstermektedir ve $\varepsilon \to 0$ iken türevler sınırsız olmaktadır. Gerçekten de, (4.3) probleminin çözümünün

$$u(x) = \exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right) \tag{4.4}$$

olduğu göz önünde bulundurulursa

$$u^{(k)}(x) = (-1)^k \varepsilon^{-k} \exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad ve \quad \left|u^{(k)}(0)\right| = \varepsilon^{-k}, \quad k \ge 0$$

elde edilir. (4.4) fonksiyonunun

$$|u'(x)| \le 1$$

şartını sağlayabilmesi için $x \ge \varepsilon|\ln\varepsilon|$ olması gerekmektedir.

Şimdi de (4.1)-(4.2) probleminin nümerik çözümü için kesin fark şemaları yöntemi yardımıyla üstel katsayılı fark şeması kurularak, bunun şebeke adımının birinci derecesiyle düzgün yakınsak olduğu ispatlanacaktır.

4.1. Sürekli Problem

Fark şemasının yakınsaklığının incelenmesinde $u(x)$ çözümü için bazı asimptotik değerlendirmelere ihtiyaç vardır.

Lemma 4.1.1. (Maksimum Prensibi)

$v(x) \in C^1[0,l]$ fonksiyonu $Lv(x) \ge 0$ $(0 \le x \le l)$, $v(0) \ge 0$ şartlarını sağlayan fonksiyon olsun. Bu durumda $v(x) \ge 0$ $(0 \le x \le l)$ olur.

İspat. Aksini varsayalım: öyle bir $x_1 > 0$ noktası vardır ki, $v(x_1) < 0$. $v(0) \ge 0$ olduğundan $v(x_0) = 0$ ve $v(x) < 0$ $(x_0 < x < x_1)$ şartlarını sağlayan bir x_0 noktası vardır. Bu durumda Ortalama Değer Teoremi' ne göre, öyle bir $x_2 \in (x_0, x_1)$ bulunur ki,

$$v'(x_2) = \frac{v(x_1) - v(x_0)}{x_1 - x_0} < 0$$

olur. Buradan ve $v(x_2) < 0$ olduğundan $Lv(x_2) < 0$ olur. Bu ise Lemma 4.1.1'in hipotezi ile çelişir.

Lemma 4.1.2. Her $v(x) \in C^1[0,l]$ fonksiyonu için

$$|v(x)| \le |v(0)| + \alpha^{-1} \max_{0 \le s \le l} |Lv(s)|, \qquad 0 \le x \le l \tag{4.5}$$

değerlendirmesi doğrudur.

İspat. Kolayca görülebilir ki,

$$\Psi(x) = \pm v(x) + |v(0)| + \alpha^{-1} \max_{0 \le s \le l} |Lv(s)|, \qquad 0 \le x \le l$$

fonksiyonu için

$$\Psi(0) \ge 0$$

ve

$$L\Psi(x) = \pm Lv(x) + a(x)|v(0)| + a(x)\alpha^{-1} \max_{0 \le s \le l} |Lv(s)| \ge 0$$

olur. Buradan ise Lemma 4.1.1'e göre $\Psi(0) \ge 0 \; (x_0 < x < x_1)$ olur. Bu da (4.5) eşitsizliğini verir.

Lemma 4.1.3. (4.1)-(4.2) probleminin çözümü için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

$$|u(x)| \le C, \qquad 0 \le x \le l; \quad \alpha(x), f(x) \in C[0,l] \text{ ise,} \tag{4.6}$$

$$|u'(x)| \le C\left\{1 + \frac{1}{\varepsilon}\exp\left(-\frac{ax}{\varepsilon}\right)\right\}, \; 0 \le x \le l \;;\; a(x), f(x) \in C^1[0,l] \text{ ise,} \tag{4.7}$$

$$|u'(x)| \le C, \; 0 \le x \le l \;;\; a(x), f(x) \in C^1[0,l], a(x)A = f(0) \text{ ise.} \tag{4.8}$$

İspat. Önce (4.6)'nın doğruluğunu gösterelim. (4.1)-(4.2)' ye göre Lemma 4.1.2' yi uygularsak,

$$|u(x)| \le |A| + a^{-1} \max_{0 \le s \le l} |f(s)|$$

elde ederiz. Bu da (4.6) eşitsizliğinin doğruluğunu gösterir.

Şimdi (4.7)'nin doğruluğunu gösterelim. (4.1) denkleminden

$$|u'(x)| \le \frac{1}{\varepsilon}|f(0) - a(0)A| \le \frac{C}{\varepsilon} \tag{4.9}$$

yazılabilir. Ayrıca (4.1) denkleminin türevi alınırsa

$$Lv(x) = \varphi(x) \tag{4.10}$$

elde edilir. Burada

$$v(x) = u'(x)$$

ve

$$\varphi(x) = f'(x) - a'(x)u(x)$$

olur. (4.10) eşitliğinden $v(x)$ için

$$v(x) = v(0)\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \alpha(s)ds\right) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \varphi(\xi)\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_\xi^x \alpha(s)ds\right)d\xi \tag{4.11}$$

eşitliği elde edilir. (4.11) ifadesinin sağ tarafındaki birinci terim (4.9) eşitsizliğine göre değerlendirilirse

$$\left| v(0)\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \alpha(s)ds\right)\right| \le \frac{C}{\varepsilon}\exp\left(-\frac{\alpha x}{\varepsilon}\right) \tag{4.12}$$

olur. (4.11) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci terim (4.6)' ya göre değerlendirilirse,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \varphi(\xi)\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(s)ds\right)d\xi\right| &\le \frac{1}{\varepsilon}\max_{[0,l]}\left|f'(x) - a'(x)u(x)\right|\int_0^x \exp\left(-\frac{a(x-\xi)}{\varepsilon}\right)d\xi \\ &\le \frac{1}{\varepsilon}\max_{[0,l]}\left|f'(x) - a'(x)u(x)\right|\left\{a^{-1}\varepsilon\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\exp\left(-\frac{ax}{\varepsilon}\right)\right)\right\} \le C\end{aligned} \tag{4.13}$$

ifadeleri bulunur. (4.12) ve (4.13) eşitsizlikleri (4.11) ifadesinde yerine yazılırsa, (4.7)' nin doğruluğu görülür. (4.8)' e gelince;

$$u'(0) = \frac{f(0) - a(0)A}{\varepsilon} = 0$$

olduğundan, bu eşitsizliğin doğruluğu (4.11) ve (4.13)' den çıkar.

4.2. Fark Şemasının Kurulması

Genelde klasik fark şemaları düzgün şebekede, kararsızlıkları ve ε'a göre düzgün yakınsak olmamaları nedeniyle (4.1)-(4.3) probleminin çözümüne uygulanamazlar.

Diğer yandan, fark şemalarının önemli niteliklerinden biri, diferansiyel problemin sağladığı özelliklerin ayrık benzerlerini sağlamalarıdır. Klasik fark şemalarının genelde belirtilen özelliklere sahip olmadığını ifade eden bir örnekle başlayalım.

Örnek 4.2.1.

$$\begin{aligned} &\varepsilon u' + u = 0, \quad x > 0 \\ &u(0) = 1 \end{aligned}$$

problemini ele alalım ve bu problem için Açık Euler şemasını yazalım:

$$\begin{aligned} &ly_i = \varepsilon y_{x,i} + y_i = 0, \quad i = 0,1,... \\ &y_0 = 1 \end{aligned} \tag{4.14}$$

burada

$$y_{x,i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h},$$

h şebeke adımıdır. (4.14)'den

$$y_i = (1-\rho)^i$$

bulunur $\left(\rho = \dfrac{h}{\varepsilon}\right)$. Buradan $y_i = (1-\rho)^i$, $i = 0,1,...$ yaklaşık çözümünün $\rho > 1$ durumunda istenmeyen salınımlı özellik taşıdığı görülmektedir. y 'ler sırasıyla pozitif ve negatif değer almaktadırlar. Buna karşın kesin çözümün $u(x_i) = e^{-i\rho}$ değerleri azalan pozitif bir grafik çizmektedir. Ayrıca (4.4) ifadesinden $u(x_1) = u(h) = \exp(-\rho)$ bulunur. Buradan $\rho = 1$ $(h = \varepsilon)$ kabul edilirse,

$$\lim_{h \to 0} |y_1 - u(h)| = \exp(-1)$$

olur. Başka bir deyişle, ε 'a göre düzgün yakınsaklık yoktur. ℓy_i fark operatörünü

$$\ell y_i = \frac{1}{\rho} y_{i+1} + \left(1 - \frac{1}{\rho}\right) y_i, \quad i \geq 0$$

şeklinde yazalım. Buradan da, maksimum prensibinin sağlanabilmesi için $\rho \le 1$ olması gerektiği anlaşılmaktadır. $\rho \le 1$ şartı ise pratik olmayan ağır bir şarttır. Eğer (4.3) probleminin çözümü için

$$\begin{aligned} &\varepsilon y_{x,i} + y_{i+1} = 0, \quad i \ge 0 \\ &y_0 = 1 \end{aligned}$$

Kapalı Euler şeması kullanılırsa, ayrık maksimum prensibi koşulsuz sağlanacaktır, fakat yine de ε 'a göre düzgün yakınsaklık olmayacaktır.

Örneğin, $y_1 = (1+\rho)^{-1}$ ve $\rho = 1$ için

$$|y_1 - u(h)| = \frac{1}{2} - \exp(-1)$$

olur.

Şimdi (4.1)-(4.2) problemi için fark şemasının kurulmasına geçelim. $[0,l]$ aralığında

$$\omega_h = \left\{ x_i = ih,\ i = 1,2,\dots,N-1,\ h = \frac{l}{N} \right\}$$

şebekesini kuralım ve

$$\chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} Lu(x)\varphi_i(x)dx = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\varphi_i(x)dx, \quad i = 1,2,\dots N \tag{4.15}$$

özdeşliğini ele alalım. Burada

$$\varphi_i(x) = \exp\left\{ -\frac{\alpha_i}{\varepsilon}(x_i - x) \right\}, \quad i = 1,2,\dots N,$$

$$\chi_i = h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i(x)dx = \frac{1-\exp(-\alpha_i \rho)}{\alpha_i \rho}, \qquad \rho = h/\varepsilon.$$

$\varphi_i(x)$ fonksiyonunun

$$\begin{aligned} &-\varepsilon\varphi' + a_i(x)\varphi(x) = 0, \quad x_{i-1} < x < x_i \\ &\varphi(x_i) = 1 \end{aligned} \tag{4.16}$$

probleminin çözümü olduğunu da belirtelim. (4.15) eşitliğini aşağıdaki şekilde düzenleyelim:

$$\chi_i^{-1}h^{-1}\varepsilon\int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x)\varphi_i(x)dx + a_i\chi_i^{-1}h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} u(x)\varphi_i(x)dx = f_i - R_i, \tag{4.17}$$

$$R_i = \chi_i^{-1}h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}[\alpha(x)-\alpha(x_i)]u(x)\varphi_i(x)dx + \chi_i^{-1}h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}[f(x_i)-f(x)]\varphi_i(x)dx. \tag{4.18}$$

(4.17) eşitliğinin sol tarafına kesin fark şemaları yöntemi uygulanarak ve (4.16) bağıntısı göz önünde bulundurularak

$$h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x)\varphi_i(x)dx = u_{\bar{x},i}\left(h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi_i(x)dx\right),$$
$$h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} a(x)u(x)\varphi_i(x)dx = \left(h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} a(x)\varphi_i(x)dx\right)u_i + \left(h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} a(x)(x-x_i)\varphi_i(x)dx\right)u_{\bar{x},i}$$

eşitlikleri elde edilir.

(4.17) eşitliğinin sol tarafına kesin fark şemaları yöntemi uygulandığında

$$u_{\bar{x},i}\left(\chi_i^{-}h^{-1}\varepsilon\int_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi_i(x)dx\right) + \left(\chi_i^{-}h^{-1}\varepsilon\int_{x_{i-1}}^{x_i} a(x)\varphi_i(x)dx\right)u_i + u_{\bar{x},i}\left(\chi_i^{-}h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} a(x)(x-x_i)\varphi_i(x)dx\right)$$
$$= \varepsilon\left\{1+\chi_i^{-}h^{-1}a_i\varepsilon^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_i)\varphi_i(x)dx\right\}u_{\bar{x},i} + a_i u_i \tag{4.19}$$

eşitliği elde edilir. Basit işlemler sonucunda

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_i)\varphi_i(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_i)\exp\left\{-\frac{\alpha_i}{\varepsilon}(x_i-x)\right\}dx$$
$$= \exp\left(\frac{\alpha_i}{\varepsilon}(x-x_i)\right)\frac{\varepsilon}{\alpha_i}\left(x-x_i-\frac{\varepsilon}{\alpha_i}\right)$$

$$1+\chi_i^{-1}h^{-1}\alpha_i\varepsilon^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_i)\varphi_i(x)dx = \frac{\rho\alpha_i}{1-\exp(-\rho\alpha_i)}\exp(-\rho\alpha_i)$$

olduğu görülebilir. (4.17) ve (4.19) bağıntıları göz önüne bulundurulursa, (4.1)-(4.3) probleminin

$$\ell y_i := \varepsilon\theta_i y_{\bar{x},i} + a_i y_i = f_i \qquad i = 1,2,...,N$$
$$y_0 = A$$

fark şeması sunulabilir. Burada

$$\theta_i = \frac{\rho\alpha_i}{1-\exp(-\rho\alpha_i)}\exp(-\rho\alpha_i)$$

şeklindedir.

5. SELF-ADJOINT SINIR-DEĞER PROBLEMİ

Bu kısımda

$$Lu \equiv -\varepsilon u'' + a(x)u = f(x), \quad 0 < x < l \tag{5.1}$$

$$u(0) = A, \quad u(l) = B \tag{5.2}$$

sınır-değer problemi incelenecektir. Burada ε pozitif küçük parametre, $a(x) \geq a > 0$, $f(x)$ yeterince düzgün fonksiyonlar ve A, B verilmiş sabitlerdir. (5.1)-(5.2) problemi genel olarak, $x = 0$ ve $x = l$ noktalarında olmak üzere iki sınır katına sahiptir. Burada (5.1)-(5.2) problemi için üstel katsayılı fark şeması kurularak bu şemanın ε'a göre $O(h)$ ve $O(h^2)$ düzgün yakınsama durumları incelenecektir.

5.1. Sürekli Problem

Burada $u(x)$ çözümü için gerekli bazı değerlendirmeler verilecektir.

Lemma 5.1.1. (Maksimum Prensibi)

Varsayalım ki, $v(x)$, $v(x) \in C[0,l] \cap C^2(0,l)$, $Lv(x) \geq 0 \quad 0 < x < l$, $v(0) \geq 0, v(l) \geq 0$ eşitsizliklerini sağlayan fonksiyondur. Bu durumda $v(x) \geq 0 \ (0 \leq x \leq l)$ olur.

İspat. Aksini varsayalım:

Öyle x_0 ve x_1 noktaları vardır ki, $v(x_0) = 0$, $v(x_1) = 0, v(x) < 0 \ (x_0 < x < x_1)$ olur. Bu durumda öyle bir $\xi \in (x_0, x_1)$ noktası bulunur ki,

$$v''(\xi) = \frac{v(x_1) - 2v((x_0 + x_1)/2) + v(x_0)}{((x_1 - x_0)/2)^2} > 0$$

olur. Buradan ve $v(\xi) < 0$ olduğundan $Lv(\xi) < 0$ olur. Bu ise Lemma 5.1.1'in hipotezi ile çelişir.

Lemma 5.1.2. Herhangi $v(x) \in C[0,l] \cap C^2(0,l)$ fonksiyonu için

$$|v(x)| \le |v(0)| + |v(l)| + \alpha^{-1} \max_{0 \le s \le l} |Lv(s)|, \quad 0 \le x \le l \tag{5.3}$$

değerlendirmesi doğrudur.

İspat.

$$\Psi(x) = \pm v(x) + |v(0)| + |v(l)| + \alpha^{-1} \max_{0 \le s \le l} |Lv(s)|, \ 0 \le x \le l$$

fonksiyonu için $\Psi(0) \ge 0$, $\Psi(l) \ge 0$ ve $L\Psi(x) \ge 0$ olduğu kolayca görülebilir. Buradan Lemma 5.1.1'e göre $\Psi(0) \ge 0$ $(0 \le x \le l)$ olur. Bu da (5. 3)'ün sağlandığını gösterir.

Lemma 5.1.3.

(5.1)-(5.2) probleminin çözümü için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

$$|u(x)| \le C, \quad 0 \le x \le l; \quad \alpha(x), f(x) \in C[0,l] \tag{5.4}$$

$$|u'(x)| \le C\left\{1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(\exp - \frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{\varepsilon}} + \exp - \frac{\sqrt{a}(1-x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right\}, \quad 0 \le x \le l; \ \alpha(x), \ f(x) \in C^1[0,l]. \tag{5.5}$$

İspat. Önce, (5.4)' ün doğruluğunu gösterelim. (5.1)-(5.2)' ye göre Lemma 5.1.2 uygulanırsa,

$$|u(x)| \le |A| + |B| + \alpha^{-1} \max_{0 \le s \le l} |f(s)|$$

elde edilir. Bu da (5.4) eşitsizliğinin doğruluğunu gösterir.

Şimdi (5.5)'nin doğruluğunu gösterelim. (5.1) denkleminde (5.4) dikkate alınırsa

$$|u''(x)| \le \frac{1}{\varepsilon} | f(x) - \alpha(x) u(x)| \le \frac{C}{\varepsilon} \tag{5.6}$$

yazılabilir. Daha sonra $|u'(0)|$ ve $|u'(l)|$ için değerlendirmeler elde etmek gerekir.

Eğer (2.9) formülünde

$$g(x) = u(x), \quad x = 0, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = \sqrt{\varepsilon}$$

değerleri kullanılıp (5.4) ve (5.6) dikkate alınırsa

$$|u'(0)| = \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}} \tag{5.7}$$

olduğu görülür. Daha sonra (2.9) formülünde

$$g(x)=u(x), \quad x=l, \quad a_0=1-\sqrt{\varepsilon}, \quad a_1=l$$

verileri kullanılırsa

$$|u'(l)|=\frac{C}{\sqrt{\varepsilon}} \tag{5.8}$$

olduğu ispatlanır. (5.1) denkleminin türevi alınırsa

$$Lv(x)=\varphi(x) \tag{5.9}$$

bulunur. Burada

$$v(x)=u'(x)$$

$$\varphi(x)=f'(x)-\alpha'(x)u(x)$$

olur. (5.7) ve (5.8) eşitliğine göre

$$v(0)=O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right), \; v(l)=O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \tag{5.10}$$

olur. (5.9)-(5.10) lineer probleminin çözümü

$$v(x)=v_0(x)+v_1(x)$$

şeklinde aranabilir. Burada $v_0(x)$ve $v_1(x)$ fonksiyonları

$$Lv_0(x)=\varphi(x), \; 0<x<l \tag{5.11}$$

$$v_0(0)=v_0(l)=0,$$

$$Lv_1=0, \; 0<x<l \tag{5.12}$$

$$v_1(0)=O\left(1/\sqrt{\varepsilon}\right), \; v_1(l)=O\left(1/\sqrt{\varepsilon}\right)$$

problemlerinin çözümüdür. (5.11) probleminin çözümü Lemma 5.1.2’ye göre

$$|v_0(x)|\leq \alpha^{-1}\max_{0\leq s\leq l}|\varphi(s)|$$

olur. $\varphi(x)$ fonksiyonu ε ’a göre düzgün sınırlı olduğundan

$$|v_0(x)| \le C,\ 0 \le x \le l \tag{5.13}$$

elde edilir. (5.12) problemine maksimum prensibi uygulanırsa

$$|v_1(x)| \le w(x) \tag{5.14}$$

yazılabilir. Burada $w(x)$ fonksiyonu aşağıdaki problemin çözümüdür:

$$\begin{aligned} & -\varepsilon w'' + \varepsilon w' = 0,\ \ 0 < x < l \\ & w(0) = |v_1(0)|,\ w(l) = |v_1(l)|. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Sabit katsayılı (5.15) probleminin çözümü açık olarak

$$w(x) = \frac{1}{\sinh\left(\sqrt{\dfrac{al}{\sqrt{\varepsilon}}}\right)}\left\{|v_1(0)|\sinh\left(\frac{\sqrt{a}(1-x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + |v_1(l)|\sinh\left(\frac{\sqrt{a}x}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right\}$$

şeklinde bulunur. Buradan (5.12)'ye göre

$$w(x) \le \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}\left\{\exp - \frac{\sqrt{a}x}{\sqrt{\varepsilon}} + \exp - \frac{\sqrt{a}(1-x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right\} \tag{5.16}$$

olduğu kolayca görülür. Son olarak, (5.13), (5.14) ve (5.16) eşitsizlikleri

$$|u'(x)| \le |v_0(x)| + |v_1(x)|$$

eşitsizliğinde kullanılırsa, (5.5)'in ispatlandığı görülür.

Not. Eğer $a(0)A = f(0)$ ve $a(l)B = f(l)$ şartları varsa,

$$|u^{(k)}(x)| \le C,\ 0 \le x \le l,\ k = 1,2 \tag{5.17}$$

ε-düzgün eşitsizliği sağlanır. Gerçekten, bu durumda $u(x)$'i

$$u(x) = f(x)/a(x) + \varepsilon R(x)$$

şeklinde arayabiliriz. Burada $R(x)$

$$\begin{aligned} & LR(x) = \left(f(x)/a(x)\right)'' \\ & R(0) = R(l) = 0 \end{aligned}$$

probleminin çözümüdür. Lemma 5.1.3'e göre

$$|R'(x)| \le \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}$$

olur. Dolayısıyla

$$|u'(x)| \le \left|\left[f(x)/a(x)\right]'\right| + \varepsilon |R'(x)|$$

eşitsizliğinden (5.17)'nin $k = 1$ için sağlandığı görülür.

$$\varepsilon |R''(x)| \le C$$

olduğundan (5.17)'nin $k = 2$ için sağlandığı açıktır.

5.2. Fark Şemasının Kurulması

$[0, l]$ aralığında

$$\omega_h = \{x_i = ih,\ i = 1,2,...,N;\ h = l/N\},\ \overline{\omega}_h = \omega_h \cup \{x = 0, l\}$$

düzgün şebekesini ele alalım. Fark şemasının kurulması süreci için başlangıç olarak aşağıdaki özdeşliklerden hareket edeceğiz [57], [58]:

$$\chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} Lu(x)\varphi_i(x)dx = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\varphi_i(x)dx,\ 1 \le i \le N-1 \tag{5.18}$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \varphi_i^{(1)}(x) \equiv \dfrac{\sinh \gamma_i (x - x_{i-1})}{\sinh \gamma_i h}, & x_{i-1} < x < x_i \\ \varphi_i^{(2)}(x) \equiv \dfrac{\sinh \gamma_i (x_{i+1} - x)}{\sinh \gamma_i h}, & x_{i-1} < x < x_i \\ 0 & , \quad x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}). \end{cases}$$

Burada $\varphi_i(x)$ belirlenmiş baz fonksiyonudur.

$$\gamma_i(x) = \sqrt{\frac{a(x_i)}{\varepsilon}}\ ,$$

$$\chi_i = h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x)dx = \frac{2\tanh(\gamma_i h/2)}{\gamma_i h}$$

şeklindedir. $\varphi_i^{(1)}(x)$ ve $\varphi_i^{(2)}(x)$ fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki problemlerin çözümüdürler:

$$\begin{aligned} &-\varepsilon\varphi''(x)+a_i\varphi(x)=0,\ x_{i-1}<x<x_i \\ &\varphi(x_{i-1})=0,\varphi(x_i)=1, \end{aligned} \tag{5.19}$$

$$\begin{aligned} &-\varepsilon\varphi''(x)+a_i\varphi(x)=0,\ x_i<x<x_{i+1} \\ &\varphi(x_i)=1,\varphi(x_{i+1})=0. \end{aligned} \tag{5.20}$$

(5.20) özdeşliğinden yola çıkılarak (5.18) bağıntısı

$$\chi_i^{-1}\varepsilon h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\varphi_i'(x)u'(x)dx+\chi_i^{-1}\varepsilon h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}u(x)\varphi_i(x)dx=f_i-R_i,\ 1\le i\le N-1 \tag{5.21}$$

şeklinde düzenlenebilir. Kalan terimin ifadesi

$$R_i=\chi_i^{-1}h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}[a(x)-a(x_i)]\varphi_i(x)u(x)dx+\chi_i^{-1}h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}[f(x)-f(x_i)]\varphi_i(x)dx \tag{5.22}$$

şeklindedir. (5.21) bağıntısına her bir (x_{i-1},x_i) ve (x_i,x_{i+1}) aralığında (2.5) ve (2.6) formülleri uygulanır. (2.5) formülü, (x_{i-1},x_i) aralığı için $\sigma=1$ ve (x_i,x_{i+1}) aralığı için $\sigma=0$ alınarak uygulanır.

Ayrıca (5.19), (5.20) bağıntıları dikkate alınırsa aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$\chi_i^{-1}\varepsilon h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\varphi_i'(x)u(x)dx+\chi_i^{-1}a_ih^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}u(x)\varphi_i(x)dx$$

$$=-\chi_i^{-1}\varepsilon\left\{1+\varepsilon^{-1}a_i\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\varphi_i^{(1)}(x)(x-x_i)dx\right\}u_{\bar{x}x,i}+a_i\chi_i^{-1}\left\{h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\varphi_i^{(1)}(x)dx+\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\varphi_i^{(2)}(x)dx\right\}u_i$$

$$=-\varepsilon\theta_iu_{\bar{x}x,i}+a_iu_i\,. \tag{5.23}$$

Burada

$$\theta_i=\left\{1+c_ia^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\varphi_i^{(1)}(x)(x-x_i)dx\right\}\equiv\left\{1-c_ia^{-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi_i^{(2)}(x)(x-x_i)dx\right\}$$

katsayısı

$$\theta_i=\frac{a_i\rho^2}{4\sinh^2\left(\sqrt{a_i}\,\rho/2\right)},\quad \rho=\frac{h}{\sqrt{\varepsilon}} \tag{5.24}$$

şeklindedir.

(5.21)'e geri dönülerek (5.23) dikkate alınırsa

$$\ell u_i \equiv -\varepsilon\theta_i u_{\bar{x}x,i} + a_i u_i = f_i - R_i, \quad i = 1,2,...,N-1 \tag{5.25}$$

yazılabilir.

Böylece, (5.1)-(5.2) problemi için

$$\ell u_i \equiv -\varepsilon\theta_i y_{\bar{x}x,i} + a_i y_i = f_i, \quad i = 1,2,...,N-1 \tag{5.26}$$

$$y_0 = A, \; y_N = B \tag{5.27}$$

fark şeması önerilebilir. (5.26)-(5.27) bağıntıları $y_1, y_2,..., y_{N-1}$'lere göre lineer cebirsel denklem sistemi oluştururlar.

6. NÜMERİK SONUÇLAR

Örnek 6.1.

$$\varepsilon u' + u = x, \;\; x > 0$$
$$u(0) = 1$$

başlangıç-değer problemini ele alalım. Kapalı Euler şeması ile elde edilen yaklaşık çözüm değerleri üstel şema ile elde edilen yaklaşık çözüm değerleri ve uygun mutlak hata değerlerini karşılaştıralım [59]-[66].

Bu problemin Kapalı Euler şeması

$$\varepsilon u' + u = x, \;\; x > 0$$
$$u(0) = 1$$

şeklindedir.

Problemi $\varepsilon = 10^{-5}$ kesinliğinde 10 adımda inceleyelim:

$$\varepsilon \frac{y_i - y_{i-1}}{h} + y_i = x_i \qquad \left(h = \frac{1}{N} \right), \; (x_i = ih).$$

$i = 1$ için $\qquad \varepsilon \dfrac{y_1 - y_0}{\frac{1}{10}} + y_1 = x_1 \qquad \Rightarrow \qquad 10^{-4} y_1 - 10^{-4} + y_1 = 0{,}1$

$$y_1 = 0{,}10008$$

$i = 2$ için $\qquad \varepsilon \dfrac{y_2 - y_1}{\frac{1}{10}} + y_2 = x_2 \qquad \Rightarrow \qquad 10^{-4} y_2 + y_2 - 0{,}00001000 = 0{,}2$

$$y_2 = 0{,}199998$$

$i = 3$ için $\qquad \varepsilon \dfrac{y_3 - y_2}{\frac{1}{10}} + y_3 = x_3 \qquad \Rightarrow \qquad 10^{-4} y_3 + y_3 - 0{,}000019998 = 0{,}3$

$$y_3 = 0{,}299998$$

$i=4$ için $\qquad \varepsilon\dfrac{y_4-y_3}{\frac{1}{10}}+y_4=x_4 \qquad \Rightarrow \qquad 10^{-4}y_4+y_4-0{,}000029998=0{,}4$

$$y_4=0{,}399998$$

$i=5$ için $\qquad \varepsilon\dfrac{y_5-y_4}{\frac{1}{10}}+y_5=x_5 \qquad \Rightarrow \qquad 10^{-4}y_5+y_5-0{,}000039998=0{,}5$

$$y_5=0{,}499998$$

$i=6$ için $\qquad \varepsilon\dfrac{y_6-y_5}{\frac{1}{10}}+y_6=x_6 \qquad \Rightarrow \qquad 10^{-4}y_6+y_6-0{,}000059998=0{,}6$

$$y_6=0{,}599998$$

$i=7$ için $\qquad \varepsilon\dfrac{y_7-y_6}{\frac{1}{10}}+y_7=x_7 \qquad \Rightarrow \qquad 10^{-4}y_7+y_7-0{,}000069998=0{,}7$

$$y_7=0{,}699998$$

$i=8$ için $\qquad \varepsilon\dfrac{y_8-y_7}{\frac{1}{10}}+y_8=x_8 \qquad \Rightarrow \qquad 10^{-4}y_8+y_8-0{,}000029998=0{,}4$

$$y_8=0{,}799998$$

$i=9$ için $\qquad \varepsilon\dfrac{y_9-y_8}{\frac{1}{10}}+y_9=x_9 \qquad \Rightarrow \qquad 10^{-4}y_9+y_9-0{,}000029998=0{,}4$

$$y_9=0{,}899998$$

$i=10$ için $\qquad \varepsilon\dfrac{y_{10}-y_9}{\frac{1}{10}}+y_{10}=x_{10} \qquad \Rightarrow \qquad 10^{-4}y_{10}+y_{10}-0{,}000029998=0{,}4$

$$y_{10}=0{,}999998$$

olur.

Problemin kesin çözümü

$$u(x_i) = x_i - \varepsilon + (1+\varepsilon)\exp(-x_i/\varepsilon)$$

şeklindedir.

$i = 1$ için
$$u(0{,}1) = 0{,}1 - 10^{-5} + (1+10^{-5})\exp(-0{,}1/10^{-5})$$
$$u(0{,}1) = 0.09999$$

$i = 2$ için $u(0{,}2) = 0.19999$

$i = 3$ için $u(0{,}3) = 0.29999$

$i = 4$ için $u(0{,}4) = 0.39999$

$i = 5$ için $u(0{,}5) = 0.49999$

$i = 6$ için $u(0{,}6) = 0.59999$

$i = 7$ için $u(0{,}7) = 0.69999$

$i = 8$ için $u(0{,}8) = 0.79999$

$i = 9$ için $u(0{,}9) = 0.89999$

$i = 10$ için $u(1) = 0.99999$

olur.

$$\varepsilon u' + u = x, \quad x > 0$$
$$u(0) = 1$$

başlangıç-değer probleminin üstel katsayılı fark şemasını oluşturalım:

$$\ell y_i \equiv \varepsilon\theta_i y_{\bar{x},i} + a_i y_i = f_i, \quad i = 1,2,\ldots,N$$
$$y_0 = A$$

$$\theta_i = \frac{\rho a_i}{1-\exp(-\rho a_i)}\exp(-\rho a_i)$$

$$\rho = \frac{h}{\varepsilon},$$

burada $\theta_i = 0$ olduğundan çözüm $y_i = x_i$ şeklindedir.

Aşağıdaki tabloda Kapalı Euler şeması ile elde edilen yaklaşık çözüm değerleri üstel şema ile elde edilen yaklaşık çözüm değerleri ve uygun mutlak hata değerleri verilmiştir $(h = 0{,}1\ ,\ \varepsilon = 10^{-5})$.

x_i	Kapalı Euler	$\lvert y_i - u(x_i)\rvert$	Üstel katsayılı şema	$\lvert y_i - u(x_i)\rvert$	Kesin çözüm $u(x_i)$
0,1	0,10008	$1{,}08.10^{-5}$	0,10000	10^{-4}	0,09999
0,2	0,19998	10^{-5}	0,20000	10^{-4}	0,19999
0,3	0,29998	10^{-5}	0,30000	10^{-4}	0,29999
0,4	0,39998	10^{-5}	0,40000	10^{-4}	0,39999
0,5	0,49998	10^{-5}	0,50000	10^{-4}	0,49999
0,6	0,59998	10^{-5}	0,60000	10^{-4}	0,59999
0,7	0,69998	10^{-5}	0,70000	10^{-4}	0,69999
0,8	0,79998	10^{-5}	0,80000	10^{-4}	0,79999
0,9	0,89998	10^{-5}	0,90000	10^{-4}	0,89999
1	0,99998	10^{-5}	1	10^{-4}	0,99999

Örnek 6.2.

$$\varepsilon u''(x) - u(x) = \cos^2 \pi x + 2\varepsilon\pi^2 \cos 2\pi x$$

$$u(0) = 0,\ \ u(1) = 0,\ \ \varepsilon = \frac{1}{400},\ h = \frac{1}{16}$$

self-adjoint problemini ele alalım.

Bu problemin kesin çözümü

$$u(x) = \frac{\left[\exp\left(\frac{-(1-x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \exp\left(\frac{-x}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right]}{\left[1 + \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right]} - \cos^2 \pi x$$

şeklindedir. Çözümün bu ifadesinden $x = 0$ ve $x = 1$'de olmak üzere iki sınır katının varlığı görülmektedir.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada tıp, mühendislik ve fen bilimleri gibi çeşitli bilim dallarında kullanılan lineer adi diferansiyel denklemler için kesin fark şemaları yönteminin bazı uygulamaları ele alındı, birinci mertebeden adi diferansiyel denklem, singüler pertürbe özellikli birinci mertebeden adi diferansiyel denklem ve self-adjoint problemlere uygulandı. Fark şemaları eksponansiyel baz fonksiyonlarından, kalan terimleri integral şeklinde olan ve ağırlık fonksiyonu içeren interpolasyon kuadratür formüllerinden yararlanılarak kuruldu.

Düzgün şebekede diferansiyel problemin özelliklerini daha iyi şekilde aksettirebilecek nümerik metot oluşturuldu. Nümerik sonuçların teorik sonuçlarla uyumlu olduğu görüldü.

8. KAYNAKLAR

[1] Amiraliyev, G. M.,“ Difference Methods For The Solution Of One Problems of the Thoery Of Dispersive Waves,” *Differential Equations*, vol. 26, no. 12, pp. 2146-2154, 1990.

[2] Amiraliyev, G. M., “Difference Schemes for Problems in the Theory of Dispersive Waves,” *Soviet Math. Dokl.*, vol. 42, no. 2, pp. 235-238; Translation in Soviet Math. Dokl., vol. 42, no. 2, pp. 235-238, 1991.

[3] Amiraliyev, G. M., “Difference Methods for a Singularly Perturbed Initial Value Problem,” *Tr. J. Of Mathematics,* vol. 22, no. 3, pp. 283-294, 1998.

[4] Amiraliyev, G. M., “The Convergence Of A Finite Difference Method On Layer-Adapted Mesh For A Singularly Perturbed System,” *Appl. Math. Comput.*, vol. 162, no. 3, pp. 1023-1034, 2005.

[5] Amiraliyev, G. M., Amiraliyeva, İ. G. And Kudu, M., “A Numerical Treatment for Singularly Perturbed Differential Equations With Integral Boundary Condition,” *Appl. Math. Comput.*, no. 185, pp. 574-582, 2007.

[6] Amiraliyev, G. M. And Cakir, M., “Convergent Finite Difference Method For Singularly Perturbed Problem With Nonlocal Boundary Condition,” Mathematical Conference Of The 40^{th} Anniversary Ataturk University, Erzurum, Türkiye, 1998, pp. 202-213.

[7] Amiraliyev, G. M. And Cakir, M., “A Uniformly Convergent Difference Scheme For A Singularly Perturbed Problem With Convective Term And $Zero^{th}$ Order Reduced Equation*,” Inter. J. Of Appl. Math.,* vol. 2, no.12, pp. 1407-1419, 2000.

[8] Amiraliyev, G. M. And Çakir, M., “Numerical Solution Of The Singularly Perturbed Problem With Nonlocal Boundary Condition,” *Appl. Math. Mech.* (English Edition), vol. 23, no. 7, pp. 755-764, 2002.

[9] Amiraliyev, G. M. And Çakir, M., “A Finite Difference Method for the Singularly Perturbed Problem With Nonlocal Boundary Condition,” *Appl. Math. Comput.,* vol. 160, no. 2, pp. 539-549, 2005.

[10] Amiraliyev, G. M. And Çimen, E., “Numerical Method for a Singularly Perturbed Convection-Diffusion Problem With Delay,” *Appl. Math. Comput.*, vol. 216, no. 8, pp. 2351-2359, 2010.

[11] Amiraliyev, G. M. And Erdoğan, F., “Uniform Numerical Method For Singularly Perturbed Delay Differential Equations,” *Comput. Math. Appl.*, vol. 53, no. 8, pp. 1251-1259, 2007.

[12] Amiraliyev, G. M. And Erdoğan, F., "Difference Schemes For A Class Of Singularly Perturbed Initial Value Problems For Delay Differential Equations," *Numer. Algorithms*, vol. 52, no. 4, pp. 663-675, 2009.

[13] Amiraliyev, G. M. And Duru, H., "A Uniformly Convergent Finite Difference Method for a Singularly Perturbed Initial Value Problem," *Appl. Math.,and Mech.,(English Edition)*, vol. 20, no. 4, pp. 379-387, 1999.

[14] Amiraliyev, G. M. And Duru, H., "A Uniformly Convergent Difference Method for The Periodical Boundary Value Problem," *Comput. Math. Appl*., vol. 46, no. 5-6, pp. 695-703, 2003.

[15] Epperson, J. F., *An Introduction To Numerical Methods And Analysis Set*, 2th Ed., John Wiley & Sons, New York, 2013, pp. 796.

[16] Gerald, C. And Wheatley, P., *Applied Numerical Analysis*, 7th Ed., Pearson Education Limited, Harlow, 2003, pp. 624.

[17] Gustafsson, B., Kreiss H. O. And Olıger, J.*Time-Dependent Problems And Difference Methods*, 2th Ed., John Wiley & Sons, New York, 2013, pp. 528.

[18] Hildebrand, F. B., *Introduction To Numerical Analysis*, 2nd Ed. Mcgraw-Hill, New York, 1974, pp. 669.

[19] Iserles, A.,*First Course İn The Numerical Analysis Of Differential equations*, Cambridge University Press, New York, 1996, pp. 396.

[20] Johnston, R. L., *Numerical Methods: A Software Approach*, John Wiley & Sons, New York, 1982, pp. 276.

[21] Kress, R., *Numerical Analysis, Graduate Texts İn Mathematics,* Universitat Göttingen, Germany, 1998, pp. 336.

[22] Marçuk, G. I., *Hesaplama Matematiğinin Metotları*, Nauka, Moskova, 1980, pp. 531.

[23] Phillirs , G. M. And Taylor, P. J., *Theory And Applications Of Numerical Analysis*, 2nd Ed., Academic Press, New York, 1996, pp. 464.

[24] Ainsworth, M., Levesley, J., Lıght, W. A., And Martella, M., *Theory and Numerics of Ordinary and Partial Differential Equations,* Oxford University Press,Leicester, 1995, pp. 346.

[25] Aktaş, Z.,Ural, S, Ve Öncül, H., *Sayısal Çözümleme,* ODTÜ Yayınları,n Ankara, 1981, pp.413.

[26] Ascher, U. M., Mattheıj, R. M. M. And Russel, R. D., *Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations,* Prentice-all,Englewood Cliffs, N. J., 1988, pp. 595.

[27] Atkınson, K. E., *Elementary Numerical Analysis,* 2nd ed., John Wiley & Sons, New York, 1993, pp. 425.

[28] Bakhvalov, N. S., *Nümerik Metodlar,* I. Nauka, Moskova, pp. 631, 1973.

[29] Çakir, M., Çimen E., Amirali İ. And Amiraliyev, G. M. (2015). *Numerical Treatment of a Quasilinear Initial Value Problem With Boundary Layer,* Int. J. Comput. Math., Doi: 10.1080/00207160.2015.1076805.

[30] Doolan, E. P., Mıller, J. J. H. And Schılders, W. H. A., “ Uniform Numerical Methods For Problems With Initial And Boundary Layers,” Boole Press, Dublin, 1980, pp. 198.

[31] Amiraliyev, G. M., Duru H., *Nümerik Analiz,*1. Baskı, Ankara, Türkiye: Pegem A Yayıncılık, 2002, pp. 1-41

[32] Boyce, W. E. And Prıma, R. C., “Elementary Differential Equations and Boundary value Problems,” 9th ed., John Wiley & Sons, New York, 2010, pp. 796.

[33] Burden, R. L., Faıres, J. D. And Burden, A. M., *Numerical Analysis,* 10th ed., Cengage Learning Inc. Boston, 2016, pp. 912.

[34] Butcher, J. C., *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations,* 3th ed., John Wiley & Sons, New York, 2016, pp. 544.

[35] Elden, L. And Wıttmeyer-Koch, L., *Numerical Analysis, An* Introduction, Academic Press, New York, 1990, pp. 345.

[36] Memmedov, Y. C., *Yaklaşık Hesaplama Metotları,* A.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, Erzurum, 1994, pp. 348.

[37] Rasulov M., Sinsoysal B., *Diferansiyel Denklemler Teorisine Giriş,* 1. Baskı İstanbul, Türkiye: Çağlayan kitabevi, 2014, pp. 6-50

[38] Rutishauser, H., *Lectures On Numerical Analysis*, Birkhauser Verlag, Basel,1990, pp. 545.

[39] Sewell, G., *The Numerical Solution Of Ordinary And Partial Differential Equations*, Academic Press, New York, 1988, pp. 271.

[40] Samarskii , A. A., *Fark Şemaları Teorisi*, Nauka, Moskova, 1989, pp. 616; German Transl. Of 1st Ed., Geest Portig, Leipzig, 1984.

[41] Samarskii, A. A. Ve Gulin, A. V., *Nümerik Metotlar*, Nauka, Moskova, 1989,pp. 430.

[42] Sauer, T., *Numerical Analysis*, 2th Ed., Pearson Education Limited, Harlow, 2014, pp. 621.

[43] Stoer, J. And Bulirsch, R., *Introduction to the Numerical Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[44] Amiraliyeva, I. G.,"Numerical Method For A Singularly Perturbed Differential System," *Mathematical Reports*, vol.15(65), no.3, pp. 243-248, 2013.

[45] Amiraliyeva, I. G. And Amiraliyev, G. M., "Uniform Difference Method For Parameterized Singularly Perturbed Delay Differential Equations,"*Numer. Algorithms,* vol. 52, no. 4, pp. 509-521, 2009.

[46] Amiraliyeva, I. G., Erdoğan, F. And Amiraliyev, G. M., "Uniform Numerical Method for a Singularly Perturbed Delay Initial-Value Problem," *Appl. Math. Letters*, no. 23, pp. 1221-1225, 2010.

[47] Kadalbajoo, M. K. And Reddy, Y. N., "Asymptotic And Numerical Analysis of Singular Perturbation Problems," *A Survey. Appl. Math. And Comput.,* vol. 30, no. 3, pp. 223-259, 1989.

[48] Kadalbajoo, M. K. And Gupta, V., "A Brief Survey On Numerical Methods for Solving Singularly Perturbed Problems," *Appl. Math. Comput*., no. 217, pp. 3641-3716, 2010.

[49] Kevorkian, J. And Cole, J. D., *Perturbation Methods İn Applied Mathematics*, Springer Verlag, New York, 1981, pp. 558.

[50] Çakir, M., Amirali, İ., Kudu, M. and Amiraliyev, G. M., "Convergence Analysis of The Numerical Method for a Singularly Perturbed Periodical Boundary Value Problem," *J. Math. Computer Sci*., no. 6, pp. 248-255, 2016.

[51] Amiraliyev, G. M. And Mamedov, Y. D., "Difference Schemes On The Uniform Mesh For Singular Perturbed Pseudo-Parabolic Equations," *Tr. J. Of Mathematics,* vol.19, no. 3, pp. 207-222, 1995.

[52] Amiraliyev, G. M., Kudu, M. And Duru, H., "Finite Difference Method for a Parameterized Singularly Perturbed Problem," *J. Appl. Math.*, no. 3, pp. 191-199, 2004.

[53] Amiraliyev, G. M., Kudu, M. And Duru, H., "Uniform Difference Method For A Parameterized Singular Perturbation Problem," *Appl. Math. Comput*., no. 175, pp. 89-100, 2006.

[54] Amiraliyev, G. M. And Şevgin, S., "Uniform Difference Method For Singularly Perturbed Volterra Integro-Differential Equations," *Appl. Math. Comput*., no. 179, pp. 731-741, 2006.

[55] Ascher, U., "On Some Difference Schemes For Singular Singularly-Perturbed Boundary Value Problems," *Numer. Math*., no. 46, pp. 1-30, 1985.

[56] Amiraliyev, G. M., Duru, H. And Amiraliyeva, İ. G., "A Parameter-Uniform Numerical Method For A Sobolev Problem With Initial Layer," *Numer Algorithms*, vol. 44, no. 2, pp. 185-203, 2007.

[57] Kudu, M. And Amiraliyev, G. M., "Finite Difference Method for A Singularly Perturbed Differential Equations With Integral Boundary Condition." *Inter. J. Of Mathematics And Computation*, vol. 26, no. 3, pp. 72-79, 2015.

[58] Kudu, M., Amirali, İ. And Amiraliyev, G. M., "A Finite Difference Method for Singularly Perturbed Delay Integro-Differential Equation*," J. Comput. Appl. Math.*, no. 308, pp. 379-390, 2016.

[59] Berezin, I. S. Ve Jidkov, N. P., *Hesaplama Metotları*, I. Fizmatgiz, Moskova,1962, pp. 632. II. Nauka, Moskova, 1966, pp. 639.

[60] Çağal, B. *Sayısal Analiz*, Seç Yayın Dağıtım, İstanbul, 1989, pp. 568.

[61] Türker, E. S., Ve Can, E., *Bilgisayar Uygulamalı Sayısal Analiz Yöntemleri*, Değişim Yayınları, Adapazarı, 1998, pp. 479.

[62] Uzun, İ., *Nümerik Analiz*, Beta Basım Yayım Dağıtım, İstanbul, 1988, pp. 303.

[63] Çakir, M. And Amiraliyev, G. M., "Numerical Solution Of A Singularly Perturbed Three-Point Boundary Value Problem," *Int. J. Comput. Math*., vol. 84, no. 10, pp. 1465-1481, 2007.

[64] Çakir, M. And Amiraliyev, G. M., “A Numerical Method For A Singularly Perturbed Three-Point Boundary Value Problem,” *J. Appl. Math*., Id 495184, pp. 17, 2010.

[65] Il’in, A. M., “A Difference Scheme For A Differential Equation With A Small Parameter Affecting The Highest Derivative,” *Mat. Zametki*, no. 6, pp. 237-248, 1969.

[66] Jayakumar, J. And Ramanujam, N., “A Computational Method For Solving Singular Perturbtion Problems,” *Appl. Math. And Comput*., no.55, pp. 31-48, 1993.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	: Nevin YILDIZ
Doğum Tarihi ve Yeri	: 1991- VEZİRKÖPRÜ
Yabancı Dili	: İNGİLİZCE
E-posta	: nvn.yldz75@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Y. Lisans	Matematik	Düzce Üniversitesi	2017
Lisans	Matematik	Sinop Üniversitesi	2014
Lise	Sayısal	Vezirköprü Lisesi	2009