T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÜNİVALENT FONKSİYONLARIN ELEMENTER TEORİSİ

HASAN ŞAHİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
PROF. DR. İSMET YILDIZ

DÜZCE, 2018

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÜNİVALENT FONKSİYONLARIN ELEMENTER TEORİSİ

Hasan ŞAHİN tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı' nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. İsmet YILDIZ

Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. İsmet YILDIZ

Düzce Üniversitesi ....

Prof. Dr. Mustafa BAYRAM

Gelişim Üniversitesi ....

Dr. Öğr. Üyesi Fuat USTA

Düzce Üniversitesi ....

Tez Savunma Tarihi: 28/06/2018

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

28 Haziran 2018

Hasan ŞAHİN

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Düzce Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Yüksek lisans öğrenimimde ve bu tezin hazırlanmasında ilminden faydalandığım, insani ve ahlaki değerleri ile de örnek edindiğim, yanında çalışmaktan onur duyduğum, çalışmam boyunca değerli katkılarını esirgemeyen ve ayrıca göstermiş olduğu hoşgörü ve sabırdan dolayı değerli hocam, tez danışmanım Prof. Dr. İsmet YILDIZ' a şükranlarımı sunarım.

Matematik Bölümü' nde gerekli ilgi ve yardımlarını esirgemeyen Matematik Bölümü'nün değerli öğretim üyelerine sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen bana çalışma zamanı yaratıp hep destek olan eşim Esra ŞAHİN, kızım Nehir' e ve bize daima okuyun diyen sevgili annem Sultan ŞAHİN' e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

28 Haziran 2018 **Hasan ŞAHİN**

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

SİMGELER

A	Analitik olan fonksiyon
B	Bölge
C	Kompleks sayılar kümesi
D	Birim disk
ε	Komşuluk
$\mathrm{F(z)}$	z' ye bağlı fonksiyon
f	Bir fonksiyon
K	Konveks fonksiyon
lim	Limit
lmz	Kompleks sayının imajiner kısmı
N	Doğal sayılar kümesi
R	Reel sayılar kümesi
Rez	Kompleks sayının reel kısmı
S	Normalize edilmiş ünivalent fonksiyonlar
S^*	Starlike(Yıldızlı) fonksiyon
$y, z,\ \mathrm{z}_0$	Bir nokta
$\mathrm{w}_1,\ \mathrm{w}_2$	Kompleks sayılar
Δ	Diskiriminant
Σ	Toplam sembolü
$\mu(\mathrm{t})$	t' ye bağlı değişken
$\zeta(\mathrm{z})$	z' ye bağlı fonksiyon

ÖZET

ÜNİVALENT FONKSİYONLARIN ELEMENTER TEORİSİ

Hasan ŞAHİN
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Prof. Dr. İsmet YILDIZ
Haziran 2018, 50 sayfa

Bu çalışmada S sınıfının alt sınıfı olan A sınıfından seçtiğimiz ve aynı zamanda ünivalent fonksiyon olan iki fonksiyonun birim disk $U = \{z \in C : |z| < 1\}$ da analitiklik şartını sağlarken bu iki fonksiyonun cebirsel toplamının aritmetik ortalamasının ünivalent fonksiyon olmadığını $f(0)=0$ ve $f'(0)=1$ şartını sağlamadığını göstermiş olduk.

Anahtar sözcükler: Analitik fonksiyon, Aritmetik ortalama, Cebirsel toplam, Ünivalent fonksiyon.

ABSTRACT

ELEMENTARY THEOREM OF UNIVALENT FUNCTIONS

Hasan ŞAHİN
Düzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematic
Master's Thesis
Supervisor: Prof. Dr. İsmet YILDIZ
June 2018, 50 pages

This work is shown below, the algebraic sum of the two functions from class S of univalent functions which is a subclass of this class A of funtion $f(z)$ satisfy the conditions analytic in the open unit disc $U = \{z \in C : |z| < 1\}$ normalized with $f(0) = 0$ and $f'(0) = 1$ is not univalent.

Keywords: Algebraic sum, Analitik functions, Aritmetic average, Univalent functions.

1. GİRİŞ

Fonksiyon çeşitlerinden biri olan ünivalent fonksiyonlar yakın zamanda 20.yy' ın başlarında ortaya çıkmış bir konu olmasına rağmen günümüz araştırmalarında aktif olarak ele alınan bir alana dönüşmüştür. Bu alanın başlıca problemlerinden bir tanesi geçmişi 1916 yılına dayanan Bieberbach tahminidir. Bu tahmin, S sınıfındaki her bir fonksiyonun Taylor katsayıları için $| a_n |\leq n$ eşitsizliğinin sağladığını iddia eder. Bu meşhur Bierberbach tahmininin doğruluğunu göstermek için yapılan ispatların yeniden gözden geçirilmesi ünivalent fonksiyonlar teorisi üzerine çalışan matematikçilerin düşünce ufkunu önemli ölçüde genişletmiştir. 1984 yılına kadar sadece a_1, a_2, a_3, a_4 katsayıları için yapılan ispat, aynı yıl Louis de Bronges tarafından a_n katsayıları için verilmiştir.

Çağımızın önde gelen matematikçilerini yetmiş yıl uğraştıran bu problemin çözülmüş olması, yeni problemlerin ortaya çıkmasına zemin hazırlamıştır.

Biz bu çalışmamızda, S sınıfına ve onun bazı alt sınıflarına ait fonksiyonların özel problemini çözmeyi amaçladık.

2. KURAMSAL KAVRAMLAR

Bölüm 1, Tezin Giriş kısmıydı. Bölüm 2 ve sonrası tezin içeriğindeki bölüm başlıklarını ve alt başlıkları içerir.

2.1. GENEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmamızda gerekli olan tanımlardan ve teoremlerden bahsedeceğiz.

2.1.1. Tanım (ε- Komşuluğu)

$z_0 \in C$ noktası verilsin.

$$B(z_0, \varepsilon) = \{z \in C : |z - z_0| < \varepsilon\}$$

kümesine z_0 noktasının ε komşuluğu denir.

2.1.2. Tanım (İç Nokta)

$A \subset C$ herhangi bir küme ve $z_0 \in A$ olsun. z_0 noktasının bir ε komşuluğu, tamamen A kümesine ait ise, z_0 noktasına bir iç nokta denir.

2.1.3. Tanım (Dış Nokta)

$A \subset C$ alt kümesi verilsin. A kümesinin tümleyeninin bir iç noktasına, A kümesinin Bir dış noktası denir. Bütün dış noktaların oluşturduğu kümeye A kümesinin dışı denir ve $(C\text{-}A)^0$ ile gösterilir.

2.1.4. Tanım (Yığılma Noktası)

$\alpha \in C$ olsun. α' nın her ε > 0 komşuluğunda A kümesine ait sonsuz eleman varsa, α' ya A kümesinin yığılma noktası denir.

2.1.5. Tanım (Kapanış Noktası)

$A \subset C$ alt kümesi ve bir $z \in C$ noktası verilsin. Eğer z noktasının her boşluğunda A kümesinin en az bir elemanı varsa, z noktasına A kümesinin kapanış noktası denir.

2.1.6. Tanım (Kutup Noktası, Sıfır Noktaları)

f fonksiyonu, $\mathbf{z = z_0}$ noktasında analitik değil fakat

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = A \neq 0$$

Olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}^+$ sayısı mevcut ise, $z = z_0$ noktasına f fonksiyonunun bir kutup noktası denir. İfadeyi gerçekleştiren en küçük $n \in \mathbb{Z}^+$ sayısına z_0 kutup noktasının mertebesi denir. Mertebesi 1 olan kutup noktası basit kutup noktası adını alır .

$z_0 \in \mathbb{C}$ noktasında analitik bir f fonksiyonu için $f(z_0) = 0$ iken

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z)$$

koşulunu sağlayan bir n pozitif tamsayısı ve $g(z_0) \neq 0$ olan, z_0 noktasında analitik bir g fonksiyonu varsa z_0 noktasına f fonksiyonunun bir basit sıfırı denir.

2.1.7. Tanım (Bağlantılı Küme)

A, Y ve Z C kompleks sayılar kümesinin alt kümeleri olsun. Eğer $A \subset Y \cup Z$, $A \cap Z \neq \emptyset$, $A \cap Y \neq \emptyset$ ve $A \cap Y \cap Z \neq \emptyset$ olacak biçimde Y ve Z gibi boş olmayan iki ayrık ve açık küme bulunamaz ise, $A \subset \mathsf{C}$ kümesine bağlantılıdır denir ve aksi bağlantısızdır denir.

2.1.8. Tanım (Basit Bağlantılı Küme)

$A \subset \mathsf{C}$ olsun. Eğer bir A kümesi içindeki herhangi iki noktayı birleştiren bütün yollar yine küme içerisinde kalıyor ise bu A kümesine basit bağlantılı küme denir.

2.1.9. Tanım (Bölge)

Kompleks düzlemde açık ve bağlantılı kümelere bölge denir.

2.1.10. Tanım (Seri)

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \ldots + a_n + \ldots$$

ifadesine seri denir. a_1, a_2, ... sayılarına da serinin terimleri adı verilir.

Bir seriyi göstermek için

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_1$$

veya

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum a_n$$

kullanılır [1].

2.1.11. Tanım (Rezidü)

f fonksiyonu, tek değerli olmak üzere C içindeki bir $\mathbf{z = z_0}$ noktası hariç, C' nin üzerinde ve içinde analitik olsun. **f** fonksiyonunun $\mathbf{z = z_0}$ noktasındaki Laurent açılımı,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}$$

şeklindedir.

Bu açılımdaki $\frac{1}{z-z_0}$ terimlerinin katsayısına f fonksiyonunun $z = z_0$ noktasındaki rezidüsü denir ve $\mathrm{Rez}(f, z_0)$ ile gösterilir.

$$\mathrm{Rez}(f, z_0) = b_1$$

şeklinde tanımlanır. Bu rezidü ayrıca

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)dz$$

integrali ile de hesaplanabilir. Bu nokta bir basit kutup ise

$$f(z) = \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

açılımı var olup burdan

$$b_1 = \lim_{z - z_0} [(z - z_0)f(z)]$$

limiti ile de rezidü hesaplanabilir.

2.1.12. Tanım (Yakınsaklık)

Kompleks sayıların bir $\{ z_n \}$ dizisi ve $z_0 \in C$ verilsin. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $n \geq n_0$ olduğunda $| z_n - z_0 | < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı varsa, bu dizi z_0 kompleks sayısına yakınsanıyor denir. $\{ z_n \}$ dizisinin z_0 noktasına yakınsaması $z_n \rightarrow z_0$ veya $\lim z_n = z_0$ şeklinde gösterilir.

2.1.13. Tanım (Düzgün Yakınsaklık)

$A \subset \mathbb{C}$ ve $f_n : A \to \mathbb{C}$ fonksiyonlarının $\{ f_n \}$ dizisi verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve tüm $z \in A$ değerleri için $n \geq n_0$ alındığında

$$| f_n(z) - f(z) | < \varepsilon$$

olacak biçimde bir n_0 doğal sayısı varsa, $\{ f_n \}$ fonksiyon dizisi f fonksiyonuna düzgün olarak yakınsanıyor denir.

2.1.14. Tanım (Mutlak yakınsaklık)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |U_n|$$

serisi yakınsak ise

$$\sum_{n=1}^{\infty} |U_n|$$

serisine mutlak yakınsak seri denir.

2.1.15. Tanım (Süreklilik)

$A \subset \mathbb{C}$, $f: A \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in A$ olsun. $\varepsilon > 0$ keyfi olmak üzere $z \in A$ ve $| z - z_0 | < \delta$ için $| f(z) - f(z_0) | < \varepsilon$ olacak biçimde $\delta(z_0, \varepsilon)>0$ sayısı mevcut ise f fonksiyonu z_0 noktasında süreklidir.

2.1.16. Tanım (Açık Küme)

$A \subset \mathbb{C}$ olsun. A kümesinin her noktası bir iç nokta olan kümeye açık küme denir.

2.1.17. Tanım (Parçalı Süreklilik)

$A \subset \mathbb{C}$, $f: A \to \mathbb{C}$ tanımlı bir fonksiyon olsun. f' nin A' daki süreksizlik noktalarının sayısı sonlu ise f fonksiyonuna A üzerinde parçalı süreklidir denir [2].

2.1.18. Tanım (Eğri Çeşitleri)

$x=x(t)$ ve $y= y(t)$ sürekli reel fonksiyonlar olmak üzere $x(t)$, $y(t)$ $a \leq t \leq b$ denklemlerinin kümesinin, düzlemde parametrelenmiş bir C eğrisi olduğunu kabul edelim. C ' nin başlangıç ve bitiş noktaları $(x(a),y(a))$ ve $(x(b),y(b))$ sırasıyla, A ve B ile temsil edilsin. Bu durumda:

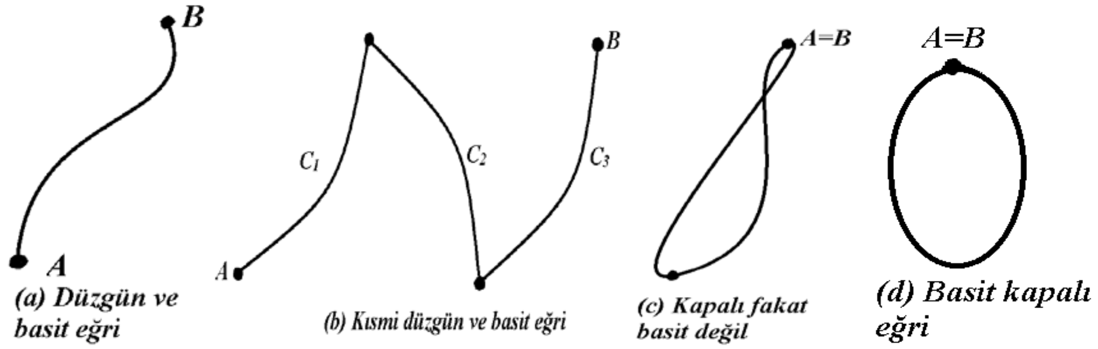
(i) Eğer x' ve y' [a,b] kapalı aralığı üzerinde sürekli ve (a,b) açık aralığında aynı anda sıfır değerlerini almıyorlar ise C' ye düzgün eğri denir.

(ii) Eğer C eğrisi sonlu sayıda C_1, C_2,..., C_n düzgün eğrilerinin ucuca eklenmesi ile oluşan, yani, bir C_k eğrisinin bitiş noktası bir sonraki C_{k+1} eğrisinin uç noktası ile çakışıyorsa C ye düzgün parçalı bir eğri denir.

(iii) t=a ve t=b noktaları hariç C eğrisi kendisi ile kesişmiyorsa C' ye basit bir eğri denir.

(iv) Eğer A=B ise C ye kapalı bir eğri denir.

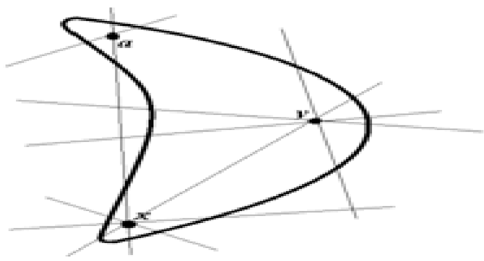
(v) Eğer C kendisi ile kesişmiyor ve A=B ise , yani, C basit ve kapalı bir eğri ise C ye basit kapalı eğri denir [3].



Şekil 2.1. Düzlemdeki eğri tipleri.

2.1.19. Tanım (Starlike Bölge)

B $\subset \mathbb{C}$ bir bölge ve y $\in$ B olsun. Eğer y noktasını B nin herhangi bir x noktasına birleştiren doğru parçası tamamen B'nin içinde kalıyorsa B'ye y noktasına göre starlike bölge denir. Daha açık bir ifade ile B bölgesinin her bir noktası y noktasından görülebilir.



Şekil 2.2. Starlike bölge.

Yukarıdaki şekilde; herhangi bir B bölgesi, y noktasına göre starlike fakat x noktasına göre starlike değildir [4].

2.2. ANALİTİK VE ÜNİVALENT FONKSİYONLAR

Şimdiki bölümde konumuzun temelini oluşturan tanımların yanı sıra önemli teoremlere de yer vereceğiz.

2.2.1. Tanım (Analitik Fonksiyon)

f, kompleks değişkenli ve kompleks değerli fonksiyonu $z_0 \in C$ noktasının bir komşuluğunda tanımlı olsun. Eğer

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti varsa, bu fonksiyona z_0 noktasında differansiyellenebilirdir denir. Eğer f(z), z_0 noktasının bir komşuluğunda differansiyellenebilirse, f ve z_0 noktasında analitik fonksiyon denir [5].

2.2.2. Tanım (Periyodik Fonksiyon)

Kompleks düzlem üzerindeki her noktada tanımlı ve reel sayılar cisminde lineer bağımsız vektörler olan $\mathbf{w_1}$ ve $\mathbf{w_2}$ kompleks sayılar olmak üzere iki periyoda sahip olan fonksiyona çifte periyodik fonksiyon denir.

Tüm kompleks z sayıları için w_1 ve w_2 nin f ' in periyodları olması

$$f(z + w_1) = f(z + w_2) = f(z)$$

şeklinde ifade edilir.

2.2.3. Tanım (Meromorf Fonksiyon)

Bir D bölgesinde kutup noktalarından başka singüler noktası olmayan fonksiyona meromorf foksiyon denir.

2.2.4. Tanım (Konveks Fonksiyonlar)

Eğer $\mathbf{f(z)}$ $|\mathbf{z}| < \mathbf{1}$ için analitik ise, o zaman ancak ve ancak $\mathbf{f'(z)} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{zf''(z)/f'(z)}$ ve $\boldsymbol{\zeta}[\mathbf{1} + \mathbf{z}\frac{\mathbf{f''(z)}}{\mathbf{f'(z)}}] > \mathbf{0}$ analitik iken ünivalent ve konveks olur.

Bu şekilde şu gösterime ulaşabiliriz:

$$1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + ze^{-it}}{1 - ze^{-it}} d\mu(t),$$

Bunu da $\mu(t)$ yi azalmayan, $\mu(\pi) - \mu(-\pi) = 1$ ve , $\mu(t)$ yi normalize edilmiş olarak kabul edebiliriz, bu şekilde

$$\frac{1}{2}[\mu(t+0)+\mu(t-0)]=\mu(t), \int_{-\pi}^{\pi}\mu(t)dt=0$$

2.2.5. Tanım (Ünivalent Fonksiyon)

B kompleks düzlemde bir bölge olsun. B bölgesindeki birebir olan f fonksiyonuna ünivalent fonksiyon denir ve seçilen z_1 , z_2 de $f(z_1) \neq f(z_2)$ koşulunu sağlaması gerekir.

2.2.6. Tanım (Lokal Olarak Ünivalent Fonksiyon)

Eğer f fonksiyonu $z_0 \in$ B noktasının uygun bir komşuluğunda ünivalent ise, f' ye lokal olarak ünivalent denir. f analitik fonksiyonu için $f'(z_0)=0$ şartı, z_0 noktasında lokal ünivalentliğe denktir. Bir analitik ünivalent fonksiyon onun açı koruma özelliğinden dolayı konform dönüşüm olarak adlandırılır [6].

2.2.7. Tanım (Starlike Fonksiyon)

$\mathbf{f \epsilon S}$ olsun. $\mathbf{f}(\mathbf{D})$ orjine göre starlike ise bu $\mathbf{f}(\mathbf{z})$ fonksiyonuna starlike fonksiyondur denir ve starlike fonksiyonların sınıfı genellikle $\mathbf{S}^*$ ile gösterilir [7].

2.2.8. Tanım (Çift ve Tek Fonksiyonlar)

$\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $x \in A$ olduğunda $-x \in A$ oluyor ise A kümesine simetrik küme denir. A Simetrik bir küme ve $\mathbf{f}: \mathbf{A} \to \mathbb{R}$ olmak üzere her $x \in A$ için $f(-x) = f(x)$ oluyor ise f fonksiyonuna çift fonksiyon, $f(-x) = -f(x)$ oluyor ise f fonksiyonuna tek fonksiyon denir.

2.2.9. Tanım (Koebe Fonksiyonu)

S sınıfında olan,

$$k(z)=\frac{z}{(1-z^2)^2}=z+2z^2+3z^3+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$$

Biçiminde gösterilen fonksiyona Koebe fonksiyonu denir. Bu fonksiyon E birim diskini $\mathbb{C}-(-\infty,-\frac{1}{4}]$ bölgesi üzerine bire bir olarak dönüştürür.

2.2.10. Tanım (Taylor Serisi)

Bir serinin $|z-z_0|=R$ içinde bir f fonksiyonunu gösterdiği bu şekilde kabul edersek devamında,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k =$$

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \ldots \qquad (2.1)$$

f' in türevlerini alalım.

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (z - z_0)^{k-1} = a_1 + 2a_2(z - z_0) + 3a_3(z - z_0)^2 + \cdots \qquad (2.2)$$

$$f''(z) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1)(z - z_0)^{k-2} = 2.1a_2 + 3.2a_3(z - z_0) + \cdots \qquad (2.3)$$

$$f'''(z) = \sum_{k=3}^{\infty} a_k k(k-1)(k-2)(z - z_0)^{k-3} = 3.2.1a_3 + \cdots \qquad (2.4)$$

Serileri olduğu çıkar. Denklem (2.1) kuvvet serisi kendi $|z - z_0| = R$ yakınsaklık çemberi içinde, (burada R pozitif ya da sonsuzdur), türetilebilir bir f fonksiyonu gösterdiğinden, kendi yakınsaklık çemberi içinde kuvvet serisi bir analitik fonksiyon gösterir sonucuna varırız.

Denklem (2.1)' deki a_k katsayıları ile f nin türevleri arasında bir ilişki vardır.$z = z_0$ da denklem (2.1), denklem (2.2), denklem (2.3) ve denklem (2.4)' ü değerlendirerek sırasıyla

$f(z_0) = a_0$, $f'(z_0) = 1!\,a_1$, $f''(z_0) = 2!\,a_2$, ve

$f'''(z_0) = 3!\,a_3$ verir.Genel olarak, $f^{(n)}(z_0) = n!\,a_n$ ya da

$$a_n = \frac{f^n(z_0)}{n!}, \qquad n \geq 0. \qquad (2.5)$$

Denklem (2.5)' te $n = 0$ iken sıfır mertebeden türevi $f(z_0)$ ve 0!=1 olarak alırız, öyle ki formül $a_0 = f(z_0)$ verir. Denklem (2.5) ve denklem (2.1) de kullanarak

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

verir. Bu seriye f in z_0 merkezli Taylor serisi denir. $z_0 = 0$ merkezli bir Taylor serisi,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (z)^k$$

bir Maclaurin serisi olarak anılmaktadır.

2.2.11. Tanım (Laurent Serisi)

Bir $\mathbf{f}$ kompleks fonksiyonu bir $\mathbf{z} = \mathbf{z_0}$ noktasında analitik değilse bu noktaya noktanın tekilliği veya tekil noktası denir.Örneğin, $\mathbf{z} = \mathbf{2i}$ ve $\mathbf{z} = -\mathbf{2i}$ kompleks sayıları $\mathbf{f(z)} = \mathbf{z}/(\mathbf{z^2} + \mathbf{4})$ fonksiyonun tekil noktalarıdır, çünkü $\mathbf{f}$ bu noktaların her birinde süreksizdir.

2.2.12. Teorem (Riemann Dönüşüm Teoremi)

C kompleks düzlem B de C düzleminde birden fazla sınır noktasına sahip basit bağlantılı bir bölge ve $z_0 \in$ B olsun. $f(z_0)=0$ ve $f'(z_0)>0$ şartlarını sağlayan ve B'yi birim disk üzerine konform olarak dönüştüren bir tek f konform dönüşümü vardır.

2.2.13. Teorem (Schwarz Lemması)

D birim diski içerisindeki f analitik, f(0)=0 ve $|f(z)|<1$ olsun. O zaman $|f'(0)|\leq 1$ ve $f(z)\leq|z|$ olur. f' de tahmin edilemeyen kesin eşitsizlikler diskte dönme yapılırsa

$$f(z) = e^{i\theta} z$$

olur.

İspat

Analitik fonksiyona maksimum modül teoremi uygularsak g(z)=f(z)/z olur.

2.2.14. Teorem (Schwarz Lemması)

$f:D=\{z:|z|<1\}\rightarrow C$ analitik, $z\in D$ için $|f(z)|\leq 1$ ve $f(0)=0$ olsun. Bu durumda $z\in D$ noktaları için $|f(z)| \leq|z|$ ve $|f'(0)| \leq 1$ dir. Üstelik $z_0 \in D$ ($z_0\neq 0$) için $|f(z_0)| =|z_0|$ ise c, $|c|=1$ özelliğinde 1 sabit olmak üzere f(z)= cz biçimindedir.

İspat

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z}, & z \neq 0 \quad \text{ise} \\ f'(0), & z = 0 \quad \text{ise} \end{cases} \tag{2.6}$$

şeklinde bir fonksiyon alalım. O halde g, D-{0} kümesi üzerinde analitiktir ve D de süreklidir. Dolayısıyla g, D de analitiktir. Şimdi 0<r<1 olmak üzere,

$D_r = \{z:|z|\leq r\} \subset D$ kümesini alalım. g, D_r de analitik olacağından $|z|=r$ üzerinde

$$|g(z)| = \left|\frac{f(z)}{z}\right| \le \frac{1}{r} \tag{2.7}$$

olur. Böylece D_r üzerinde $|f(z)| \le |z|/r$ dir. Buradan $r \to 1$ için $|f(z)| \le |z|$ elde edilir. Özel olarak $|g(0)| \le 1$ dir. Böylece (1) den $|f'(0)| \le 1$ olur. Eğer $z_0 \neq 0$ için, $|f(z_0)| \le |z_0|$ ise denklem (2.7) den $|g(z_0)|=1$ elde edilir. Üstelik bu değer D_r ' nin içindeki maksimum değer olur. O halde g fonksiyonu bir D_r bölgesinde analitik ve eğer D_r de $|g|$ maksimum değer alıyorsa g, D_r de sabittir. Bu sabitlik r den bağımsızdır. O halde denklem (2.7) den D de $|g(z)|=1$ ve $|f(z)/z|=1$ yani $|f(z)| = |z|$ bulunur. Böylece $|c| =1$ olmak üzere $f(z)=cz'$ dir.

2.2.15. Teorem (S Sınıfı)

$D\{z \in \mathbb{C}:|z|<1\}$ birim diskinde analitik ve ünivalent olan ve $f(0)=0$, $f'(0)=1$ şartlarını sağlayan D diskinde

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

biçiminde bir Taylor açılımına sahiptir. Bu şekildeki fonksiyonların sınıfı S ile gösterilir.

2.2.16. Tanım (Bieberbach Tahmini)

S sınıfındaki f(z) fonksiyonu

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + a_5 z^5 + \ldots = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

açılımına sahiptir. Bieberbach, $n \ge 2$ için

$$|a_n| \le n$$

olduğunu söylemiştir. Bu eşitsizlik Bieberbach tahmini olarak adlandırılır.

2.2.17. Tanım (Cauchy-Riemann eşitliği)

$f:D \to \mathbb{C}$ D üzerinde analitik olsun. Eğer $f(z)=u(z)+iv(z)$ yazarsak, u ve v, f' nin gerçek ve görüntü parçalarını oluşturur, sırasıyla, Cauchy-Riemann eşitliğini karşılarsak

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ ve } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Tersine, eğer $u:D \to \mathbb{R}$ ve $v: D \to \mathbb{R}$ şeklinde devam edersek

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ ve } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

Buradan u+iv: D→ℂ D üzerinde analitik olur.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. JORDAN EĞRİSİ VE CAUCHY İNTEGRAL FORMÜLÜ

3.1.1 Tanım

Kompleks düzlemde yay görüntüsü sürekli doğru parçası oluşturur. C içerisinde a≤f≤b aralığında sürekli dönüşümü olan zφ(t) yayın görüntüsünü oluşturur. Düzeltilebilir yayın uzunluğu dönüşüm fonksiyonu φ için sınırlı değişkendir. Jordan yayı kendi arakesiti olmayan yaydır. Kapalı eğrilerin görüntüsü çember ya da yayın kesim noktasında çakışır. Basit kapalı eğriler ya da Jordan eğrisi arakesiti olmayan kapalı eğrilerdir. Bütün Jordan eğrileri düzlemi iki parçaya böler, eğrinin iç ve dış bölgesine böler, Jordan eğrisinin iç bölgesine Jordan alanı denir.

f karmaşık değerli bir fonksiyonun karmaşık dönüşümü $z_0 \in C$ noktasında türevlenebilir.

Türevi

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

z_0 noktasında olur.

f fonksiyonu z_0 noktasında analitik ise z_0' ın bazı komşuluklarındaki bütün noktalarında türevlenebilir. Kompleks analizin mucizelerinden bir tanesi olan bu f z_0 da türevlidir ve f' nin Taylor açılımından

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n , \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} ,$$

açık diskin merkezindeki z_0' a yakınsaktır.

Cauchy integral formülünü kullanarak Taylor serisinin açınımını kolayca elde ederiz.

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \, d\zeta ,$$

burada C düzeltilebilir Jordan eğrisi, f C içinde ve üzerinde analitik, z C içerisindedir.

3.1.2. Teorem (Cauchy integral formülü)

$$\int_{C} f(\zeta)d\zeta = 0$$

integral altında diferansiyel katsayının çözülmesinin standart işlemi ($n \geq 1$için) daha genel bir formüle sahiptir. C içerisindeki analitik fonksiyonlar için bu sonuçlar alınır ve kapamada süreklidir. Analitik fonksiyonların benzersizlik prensibi Taylor serisinin direk sonucunu temsil eder. Ardışık noktalar olan iki analitik fonksiyon bu küme içerisinde çözümleyicilik alanında bütün noktalarda sağlandığı görülür. Eş değer olarak z_0 noktasında f analitik ise $f(z_n)=0$ ve belli z_n noktalarını z_0 noktasına yaklaşan ardışık $f(z_n)=0$ olduğunda $f(z)=0$ olur [8].

3.1.3. Teorem (Cauchy Teoremi)

Eğer f basit D bölgesi içinde karmaşık değerli fonksiyon olursa o zaman

$$\int_{C} f(\zeta)d\zeta = 0$$

Bundan dolayı,

D içerisinde bütün düzeltilebilir Jordan eğrisi olan C uzatılabilir yani f, D içerisinde analitiktir.

3.2. ROUCHE'S TEOREMİ

3.2.1. Teorem

Düzeltilebilir Jordan Eğrisi C içinde ve üzerindeki f ve g analitik olsun, C' de $|g(z)|<|f(z)|$.

O zaman f ve (f+g) aynı sıfırların numarasına sahiptir, C içerisinde çoğunluğa bağlı hesaplanır.

İspat

$$\Delta_C \arg(f+g) = \Delta_C \arg f + \Delta_C \arg(1+g/f) = \Delta_C \arg f$$

D alanı içerisindeki $\{f_n\}$ ardışık fonksiyonları analitikse D' nin sıkıştırılmış bütün alt kümeleri f fonksiyonunun eşit oranda yakınsaması olduğunda f D içerisinde analitiktir denir. Bu da bize Cauchy integral formülü yardımıyla basit ispat yaptırır.

3.3. HURWİTZ'S TEOREMİ

3.3.1 Teorem

f_n D alanında analitik ve $f_n(z) \to f(z)$ için $n\to\infty$, D'nin aynı şekilde düzenli altkümeleri olsun. O zaman ya D içerisinde $f(z) \equiv 0$ ya da f'nin bütün sıfırları f_n fonksiyonlarının ardışık sıfırlarının limit noktasıdır.

İspat

Varsayalım ki $f(z_0)=0$ ama $f(z) \not\equiv 0$ olsun. Sıfırın bazı fonksiyonlarının z_0 komşuluğunu göstermek için yeterlidir. $\delta>0$ seçersek D içerisinde disk $|z-z_0|\leq \delta$ ve $f(z)\neq0$ C çemberi üzerinde $|z-z_0|= \delta$ olarak tanımlanmıştır. m $|f(z)|$' nin C üzerinde minimumu olsun.

O zaman bütün $n\geq N$,

$$| f_n(z) - f(z) | < m \leq | f(z) |$$

C üzerinde elde edilir. Rouche' s teoreminden, f_n f' nin aynı sıfır numaralarına C içerisinde sahiptir. C içerisinde $n\geq n$ olduğuda $f_n(z)$ kaybolur.

3.3.2. Teorem

D bölgesinde f_n univalent ve analitik olsun, $f_n(z)\to f(z)$ olarak $n\to\infty$ varsayarsak, D sıkıştırılmış alt kümeyi oluşturur. O zaman f D içerinde tek değerli yada sabit olur.

İspat

Varsayalım ki aksi durum var, $f(z_1)= f(z_2) = \alpha$ bazı ayrı ikili noktalarda D içerisinde z_1 ve z_2 noktaları olsun. O zaman eğer $f(z)\neq\alpha$ olursa Hurwitz' s teoreminde yada ispatına bakarak bu $n \geq N$ için $f_n(z)- \alpha$ fonksiyonu z_1 ve z_2' nin ayrık komşuluğunda yok olur. Buda f_n' nin tek değerliliğini ihlal eder, yani $f(z)= \alpha$' dir.

Alternatif olarak, Rouche teoreminden de direk olarak ispat edilir. Limit fonksiyonları sabittir. Örnek olarak $f_n(z)=z/n$.

3.4. BÖLGESEL DÖNÜŞÜM ÖZELLİKLERİ

3.4.1. Tanım

Kompleks fonksiyon ω=f(z) geometrik dönüşümde z düzlemi içerisindeki bölgeden ω düzlemi içerisindeki bölgeye dönüştüğümde u=u(x,y), v=v(x,y) ve z=x+iy ve ω=u+iv olur. f analitik alırsak, gerçek ve görüntü kısımlarını Cauchy- Riemann denklemlerinden sağlarsak

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}$$

$|f'(z)|^2$ Jacobian dönüşümünü takip ediyor. Ters dönüşüm teoreminden f'(z)≠0 olduğunda f bölgesel tek değerlidir. f'nin tek değerli bazı z_0 komşuluğunda f z_0'da analitiktir ve $f'(z_0)\neq 0$ olur. Aksine eğer f z_0'da bölgesel tek değerli ise o zaman $f'(z_0)\neq 0$ Rouche teoreminde oluşturulanların ikisi de ispatlanır. Analitik dönüşümler için, bu nedenle, bölgesel tek değer için Jacobian'ın ortada olması gerekli ve yeterlidir. Daha kolay genel dönüşümler için bu koşul yeterlidir ama gerekli değildir. Alandaki analitik fonksiyonlar bölgesel ünivalenttir ama ünivalent değildir [9].

Örnek

$f(z)=z^2$ bölgesel ünivalenttir olur alan içerisinde

$$D=\{z:1<|z|<2,\quad 0<\arg z<3\pi/2\}$$

ama ünivalent değildir.

3.4.2. Tanım

D birim disk içerisinde S sınıfında analitik ve ünivalent olan f fonksiyonu ünivalent fonksiyonlar teorisini büyük ölçüde ilgilendirir ve f(0)=0 ve f'(0)=1 sağlamak zorundadır. Büyüme teorisinde,

$$|f(z)|\leq|z|(1-|z|)^{-2}\ ,\ z\in D$$

bütün f∈S içindir. Özel olarak f∈S fonksiyonu D 'nin bütün altkümeleri için düzgün sınırlıdır. Montel teoreminin normal sınıfından dolayı S sınıfı bölgesel sınırlıdır. Üstelik $f_n\in S$ ve $f_n(z)\to f(z)$ D' nin düzenli altkümelerinde eşit alırsak f D' de analitik olur ve birebir yada sabittir. Ama sabit olamaz çünkü düzgün yakınsaklık cevaplarından, Cauchy İntegral formülü tarafından, $f_n'(0)\to f'(0)$, yani f'(0)=1≠0. Bu da bize f' nin D içerisinde ünivalent olduğunu gösterir.

Sonuç olarak $f \in S$, çünkü $f(0)=0$ ve $f'(0)=1$ normalleştirilmesinde eşit yakınsaklık tarzında korunur. Genişleme teoreminden yararlanarak ispatı elde etmiş oluruz.

3.5. RİEMANN DÖNÜŞÜM TEOREMİ

3.5.1. Teorem

Kompleks düzlemin alt kümesinde basit bağlantılı bir D alanı olsun. ζ D içerisinde verilen nir nokta olsun. Özel bir f fonksiyonu seçersek birim disk üzerinde konform D dönüşümü yaparsak $f(\zeta)=0$ ve $f'(\zeta)>0$ özellikleri olur.

İspat

Hipotezdeki D bütün düzlemin temeli değildir çünkü Liouville teoreminde her sınır bütün fonksiyonlarda sabittir. Bu tez kolaylıkla kurulur. Gerçekten de eğer g'nin verilen diğer özel dönüşümü kendi üzerindeki birim diske olan konform dönüşümü $h=gof^{-1}$ fonksiyonu ve bu nedenle doğrusal kesir dönüşümlerinin 3.4 sonunda olduğu görülür. Ama $h(0)=0$ ve $h'(0)>0$, yani h birimdir(özdeştir). Burada f=g ve dönüşüm özgündür.

İspata dönersek D içerisinde $\mathcal{F}$ ailesi sınıfının f fonksiyonu analitik ve ünivalenttir ve bütün $z \in D$ için $f(\zeta)=0$ ve $f'(\zeta)>0$ ve $|f(z)|<1$ olur. Bu sınıf D'nin konform dönüşümlerini birim diske dönüştürür. Montelin teoremine uyarsak, $\mathcal{F}$ normal sınıf olur. Bu $\mathcal{F}'$ nin boş olmadığı görmek için, $\alpha \notin D$ sonlu noktası seçersek ve $g(z)=(z-\alpha)^{1/2}$ fonksiyonunu dikkate alırız. D basit bağlantılı olduğunda, g tek değerli kısım olur. Bu g fonksiyonu D içerisinde z_1, z_2 noktaları için ünivalent ve analitik $g(z_1) \neq -g(z_2)$ olur. Çünkü g' nin bazı diskler içerisindeki bütün değerlerini farz edelim $|\omega - g(\zeta) \leq \varepsilon|$, bütün diski ihmal edersek $|\omega + g(\zeta) \leq \varepsilon|$.

Birim disk üzerinde $\psi(g(\zeta)) = 0$ ve $\psi'(g(\zeta)) > 0$ üzerinde $|\omega + g(\zeta)| > \varepsilon$ bölgesinde lineer kesir dönüşümü ψ alalım. O zaman $\psi \, og \in \mathcal{F}$.

Şimdi $\sup_{f \in \mathcal{F}} f'(\zeta)=M \leq \infty$ olsun ve seçilen $f_n \in \mathcal{F}$ ardışık fonksiyonu için $f'_n(\zeta) \rightarrow M$ olur. $\mathcal{F}$ normal sınıf olduğundan dolayı, bazı alt diziler sıkışık analitik f fonksiyonu üzerindeki eşit yakınsak ünivalent yada sabittir. Limit fonksiyonu $f'(\zeta)=0$ olur ve $f'(\zeta)=M>0$ dır. Bu durumda $M<\infty$ ve f sabit değildir yani $f \in \mathcal{F}$ olur.

Extremel uç fonksiyon f' nin D üzerinde birim diskin konform dönüşümüne ihtiyacı vardır. Eğer yoksa, f bazı $\omega \in$ D noktalarını ihmal eder ve bazı kümeleri

$$F(z) = \left\{ \frac{f(z) - \omega}{1 - \overline{\omega} f(z)} \right\}^{1/2}$$

analitik ve D içerisinde tek değerlidir. D içerisinde F univalenttir ve |F(z)|<1 olur. Fonksiyon

$$G(z) = e^{-i\theta} \frac{F(z) - F(\zeta)}{1 - \overline{F(\zeta)} F(z)},$$

$e^{i\theta} = F'(\zeta) / | F'(\zeta) |$, bu nedenle F'ye aittir. Açık hesaplar verir ki

$$G'(\zeta) = \frac{| F'(\zeta) |}{1 - | F(\zeta) |^2} = \frac{1 + | \omega |}{2 + \sqrt{| \omega |}} f'(\zeta),$$

ve $G'(\zeta) > f'(\zeta)$. f' deki özel uç noktalar göterir ki birim disk içerisindeki f herhangi bir noktayı ihmal etmez. Eğer D Jordan alanı ise Riemann dönüşümünde sınırın genişletilmiş sürekliliği ve birim çemberde genişletilmiş sınırlı fonksiyon dönüşümlerinin sınırlı bükeyliği birebir yapılıyor. Carathéodory (3.6)' da ki önemli sonuç yeterlidir [10].

3.6. CARATHÉODORY GENİŞLEME TEOREMİ

Jordan eğrisi C D alanında sınırlandırılmış olsun ve birim D diski üzerinde f' nin D konform dönüşümü olsun. Kapalı disk $\overline{\mathbf{D}}$ üzerinde f'nin genişletilmiş homomorfizması $\overline{\mathbf{D}} = D \cup C$ olur.

İspat

Kabul edelim ispatta $\overline{\Delta}$ üzerinde $\overline{\mathbf{D}}$ genişletilmiş homomorfizması Δ Jordan alanında, D Jordan alanı üzerindeki konform dönüşümü olur.

3.7. ÜNİVALENT FONKSİYONLARIN TEMEL TEORİSİ

3.7.1. Tanım

Tek değerli f fonksiyonu eğer iki kere aynı değeri alamazsa $D\subset\mathbb{C}$ alanında ünivalent olur, bu da, D içinde $z_1\neq z_2$ ve bütün z_1,z_2 noktaları için $f(z_1)\neq f(z_2)$ olur. f fonksiyonu $z_0\in D$ noktasında bölgesel ünivalent ise bazı z_0 noktasının komşuları ünivalenttir. Analitik f fonksiyonları için $f'(z_0)\neq 0$ şartı z_0 nokasında bölgesel ünivalente eşdeğerdir. Analitik ünivalent fonksiyonlar konform dönüşüm olarak gösterilir çünkü açı-koruma özelliği vardır.

Öncelikle birim $D=\{z:|z|<1\}$ diski içinde S sınıfının analitik ve ünivalent olan f fonksiyonu ile ilgilenerek $f(0)=0$ ve $f'(0)=1$ şartlarını sağlayarak normalleştirmeliyiz. $f\in S$ Taylor serisi açılımı şeklinde

$$f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4+\dots \quad , \quad |z|<1 .$$

Riemann dönüşüm teorisinde, geometrik teoremleri ilgilendiren S sınıfının fonksiyonlarından ünivalent fonksiyonlar bir sınır noktasından daha çok rastgele seçilen basit bağlantılı alanlar olarak açıklanır.

Örnek

S sınıfından Koebe fonksiyonu

$$k(z)= z(1-z)^2= z+2z^2+3z^3+\dots$$

Negatif reel eksende -1 den eksi sonsuza negatif tam düzlemde D diskinin koebe fonksiyonu dönüştürür. Yazarak görürsek,

$$k(z)=\frac{1}{4}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2-\frac{1}{4}$$

ve bu fonksiyona sahip oluruz

$$w=\frac{1+z}{1-z} .$$

Sağ yarım düzlemde D konform dönüşümü olursa $\operatorname{Re}\{w\}>0$ olur.

Özellikler

S içerisindeki diğer basit fonksiyon örnekleri,

i. f(z)=z birim dönüşüm,

ii. f(z) = z $(1-z)^{-1}$ $\mathrm{Re}\{w\} > -\frac{1}{2}$ yarım düzlemde D' de konform dönşüm olur.

iii. f(z) = z $(1-z^2)^{-1}$, D düzlemi üzerinde tam negatif iki yarı doğru $\frac{1}{2} \le x \le \infty$ ve $-\infty < x \le -\frac{1}{2}$,

iv. f(z)= $\frac{1}{2}\log\left[\frac{1+z}{1-z}\right]$, yatay eksen üzerinde D dönüşümünde $-\frac{\pi}{4} < \mathrm{Im}\{w\} < \frac{\pi}{4}$,

v. f(z)= $z - \frac{1}{2}z^2 = \frac{1}{2}\left[1-(1-z)^2\right]$, D dönüşümü üzerinde kardoidin içidir [11].

3.8. ALAN TEORİSİ

3.8.1. Teorem

Eğer $g \in \Sigma$ ise

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,|\,b_n\,|^2 \le 1,$$

eşitliği ancak ve ancak g $\in \tilde{\Sigma}$ olduğunda sağlanır.

İspat

E g tarafından kurulsun. r>1 için, |z|=r çemberinin g görüntüsü altında |z|=r olsun. C_r basit kapalı eğrisi $E_r \supset E$ alanını kapsamaktadır. E_r alanından

$$A_r = \frac{1}{2i}\int_{C_r} \overline{w}dw = \frac{1}{2i}\int_{|z|=r} \overline{g(z)}g'(z)dz$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left\{re^{-i\theta} + \sum_{n=0}^{\infty}\overline{b_n}r^{-n}e^{in\theta}\right\}$$

$$x\left\{1-\sum_{v=1}^{\infty} vb_v r^{-v-1}e^{-i(v+1)\theta}\right\}re^{i\theta}d\theta$$

$$= \pi\left\{r^2 - \sum_{n=1}^{\infty} n\,|\,b_n\,|^2\, r^{-2n}\right\}, \quad \text{r>1.}$$

r yi 1' e azaltırsak o zaman

$$\text{m(E)}= \pi\left\{1-\sum_{n=1}^{\infty} n\,|b_n|^2\right\},$$

buradan m(E) E' nin ölçümü dışındadır. O zaman m(E)≥0 teoremi ispatlar.

Eşitsizlikte $|b_n| \leq n^{-1/2}$, n=1, 2, ... Bu eşitsizlikte n≥2 etkili değildir, fonksiyonda

$$g(z)=z+n^{-1/2}z^{-n}$$

ünivalent değildir. Sonuç olarak türevde

$$g'(z)=1-n^{1/2}z^{-n-1}$$

Δ içerisindeki bazı noktalar n≥2 için ortadan kaybolur. Eşitsizliğin keskin ve önemli sonucu $|b_1| \leq 1$' dir.

Sonuç

Eğer $g \in \Sigma$ ise $|b_1| \leq 1$ denklemden ancak ve ancak

$$g(z)=z+b_0+ b_1/z, \qquad |b_1|=1$$

olduğunda bu Δ' nın konform dönüşümün tümleyeninin çizgi bölümündeki uzunluk 4tür.

Son sonuca bakarsak Bieberbach teoremini hesaplarken, S sınıfındaki a_2 fonksiyonlarının katsayılarını hesaplarsak bu bize Bieberbach konjektürünün temelinden sağlanır.

3.8.2. Teorem (Bieberbach Teoremi)

Eğer $f \in S$ ve $|a_2| \leq 2$, Koebe fonksiyonunun dönüşümü olan f ancak ve ancak bu şekilde eşit olur.

3.8.3. Teorem (Koebe Bir-Çeyrek Teoremi)

S sınıfındaki bütün fonksiyonların mesafesi diskte $\{w:|w|< \frac{1}{4}\}$.

3.9. GENİŞLEME VE BÜKÜLME TEORİSİ

Bieberbach eşitsizliğinde $|a_2|\leq 2$ konform dönüşümlerin geometrik teorisini ima eder. Koebe bükülme teoreminin bir önemli sonucuda keskin üst ve alt sınır için f sınıfına yayılan |f'(z)| olur.

f dönüşümü altında ark boyunun bölünemeyecek kadar küçük oran çarpanı |f'(z)| geometrik tanımından bükülme meydana gelir ya da alanın bölünemeyecek kadar küçük alan çarpanı Jacobian |f'(z)| den gelir. Devam eden teoremde verilen temel tahmin bükülme teoremi ile ilişkili sonuçlardır.

3.9.1. Teorem

Bütün $f\in S$ için,

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\frac{2r^2}{1-r^2}\right|\leq\frac{4r}{1-r^2}\qquad |z|=r<1, \tag{3.1}$$

İspat

Verilen $f\in S$, saptanan $\zeta\in D$ ve disk otomorfizmasının yapımında

$$F(z)=\frac{f\left(\dfrac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z}\right)-f(\zeta)}{\left(1-|\zeta|^2\right)f'(\zeta)}=z+A_2(\zeta)z^2+\ldots \tag{3.2}$$

O zaman $F\in S$ ve hesaplamaları yaparsak

$$A_2(\zeta)=\frac{1}{2}\left\{\left(1-|\zeta|^2\right)\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}-2\bar{\zeta}\right\}.$$

Ama Bieberbach teoreminde $|A_2(\zeta)|\leq 2$ dir. Bu eşitsizlikte ζ yerine z koyarsak, denklem (3.1) eşitsizliğine sahip oluruz. Bütün $z\in D$ için Koebe fonksiyonlarının uygun dönüşümleri yapıldığında sonucu elde ederiz.

3.9.2. Teorem (Bükülme Teoremi)

Seçilen $f\in S$ için

$$\frac{1-r}{(1+r)^3}\leq|f'(z)|\leq\frac{1+r}{(1-r)^3},\ |z|=r<1. \tag{3.3}$$

Bütün $z\in D$, $z\neq 0$ eşitliğin olması ancak ve ancak uygun Koebe fonksiyon dönüşümleri ile sağlanır.

İspat

Eşitsizlikte |α|≤c ima edilen -c≤Re{ α }≤c, bu da (3.3)' ten

$$\frac{2r^2-4r}{1-r^2} \le \operatorname{Re}\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} \le \frac{2r^2+4r}{1-r^2}.$$

Çünkü f'(z)≠0 ve f'(0)=1, tek değerli logf'(z) dalı seçersek orijinden kaybolur. Şimdi bunu ele edersek

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} = r\frac{\partial}{\partial r}\operatorname{Re}\{\log f'(z)\}, \qquad z = re^{i\theta}.$$

Buradan

$$\frac{2r-4}{1-r^2} \le \frac{\partial}{\partial r}\log|f'(re^{i\theta})| \le \frac{2r+4}{1-r^2}. \tag{3.4}$$

θ sabit tutarsak, 0' dan R' ye olan r' nin integralini alırız. Hesapladığımız eşitsizlikte

$$\log\frac{1-R}{(1+R)^3} \le \log\left|f'(\mathrm{Re}^{i\theta})\right| \le \log\frac{1+R}{(1-R)^3},$$

ve üst alma tarafından bükülme teorisi devam eder. Koebe fonksiyonunun uygun dönmesinde

$$k'(z)= \frac{1+z}{(1-z)^3},$$

gösterirki |f'(z)|' nin sonucu en iyi ihtimaldir. z=R$e^{i\theta}$ eşitliği için en üst yada en alt sonuç (3.3) eşitliğinde bütün sayılar r' ler için uyan denklem (3.4) kısmında 0≤r≤R olur.

Özel olarak,

$$\operatorname{Re}\left\{e^{i\theta}\frac{f''(0)}{f'(0)}\right\} = \pm 4$$

buradan $|a_2|=2$. Bieberbach teoreminden f Koebe fonksiyonunun dönüşümü olmalıdır. Bükülme teoremi |f(z)| için alt ve üst sınırlar gösterir.Bu sonuçlar görülür.

3.9.3. Teorem (Genişleme Teoremi)

Bütün f∈S için,

$$\frac{r}{(1+r)^2} \le |f(z)| \le \frac{r}{(1-r)^2}, \ |z|=r<1. \tag{3.5}$$

z∈D , z≠0 eşitliği olması için gerek ve yeter şart Koebe fonksiyonunda uygun dönme yapmaktır.

İspat

f∈S ve sabit z ∈ $re^{i\theta}$ ile 0<r<1. Elde edeceğimiz

$$f(z) = \int_0^r f'(\rho e^{i\theta})e^{i\theta}d\rho,$$

f(0)=0 olduğunda elde edilir. Genişleme teorisinde

$$|f(z)| \le \int_0^r |f'(\rho e^{i\theta})|d\rho \le \int_0^r \frac{1+\rho}{(1-\rho)^3}d\rho = \frac{r}{(1-r)^2}.$$

Alt sonuç daha ustacadır. Eğer |f(z)|≥ $\frac{1}{4}$, olursa r(1+r)$^{-2}$<$\frac{1}{4}$ için 0<r<1. Eğer |f(z)|< $\frac{1}{4}$ ise Koebe bir-çeyrek teoreminde elde edilen f menzilinde 0'dan f(z)'ye dairesel dilim bütünlüğünü verir. C 0'dan z'ye yayın bütünlüğüdür ve

$$f(z) = \int_C f'(\zeta)d\zeta .$$

Ama f'(ζ)d ζ C sabit işareti boyunca, yapım aşamasında, bükülme teorisinden

$$|f(z)| = \int_C |f'(\zeta)||d\zeta| \ge \int_0^r \frac{1-\rho}{(1+p)^3}d\rho = \frac{r}{(1+r)^2}$$

elde edilir.

Denklem (3.5) eşitliğindeki bazı kısımlar denklem (3.3) eşitsizliğinden elde edildiğinden f'nin Koebe fonksiyonu dönüşümü olduğu gösterilmiş olur.

3.9.4. Tanım (Bieberbach Konjektürü)

f fonksiyonunun bütün katsayıları için f∈S de n=2,3,4,... f Koebe fonksiyonu yada dönüşümlerinden bir tanesi olduğu durumda bütün n'ler için eşitsizlikler kurulabilir.

3.10. İÇ ALAN TEOREMİ

$f \in S$ olsun. $0 < r < 1$ için, $A_r = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 r^{2n}$ sayılarının sınırlı olduğunu kabul edelim. Bu halde f(D)' nin alanı,

$$A = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2$$

ile verilir.

İspat: $|z| < 1$ için geçerli

$$W = f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \qquad a_1 = 1$$

toplamını yazalım.

$$C_r = \{z : z = re^{i\theta}, 0 < r < 1, 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

çemberini göze alalım.

$$\Gamma_r = f(C_r), D_r = \operatorname{int}(C_r), \Delta_r = \operatorname{int}(\Gamma_r) A_r = Alan\Delta_r$$

olsun.

$$A_r = \iint_{\Delta r} dudv = \iint_{D r} \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| dxdy$$

$$= \iint_{D r} |f'(z)| dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{r} \left| f'(re^{i\theta})\right|^2 rdrd\theta \qquad (3.6)$$

biçiminde yazılır. Ayrıca

$$f'(re^{i\theta}) = a_1 + 2a_2 re^{i\theta} + \ldots + na_n r^{n-1} e^{i(n-1)\theta} + \ldots$$

olup

$$\overline{f'(re^{i\theta})} = \overline{a}_1 + 2\overline{a}_2 re^{-i\theta} + \ldots + n\overline{a}_n r^{n-1} e^{-i(n-1)\theta} + \ldots$$

yazılabileceğinden

$$\left|f'(re^{i\theta})\right|^2 = f'(re^{i\theta})\overline{f'(re^{i\theta})}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n| r^{2n-2} + \sum_{k=0} c_k e^{ik\theta}$$

eşitliği elde edilir. Son toplamda k sıfırdan farklı tamsayılar olup ve c_k' larda a_n ye ve r ye bağlıdır. Dolayısıyla

$$r\left|f'(re^{i\theta})\right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2 r^{2n-1} + \sum_{k\neq 1} rc_k e^{ik\theta}$$

ifadesi denklem (3.6)' da kullanılır ve terim integral alınırsa,

$$A_r = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 r^{2n}$$

elde edilir. Çünkü, $k \neq 0$ için

$$\int_0^{2\pi} e^{ik\theta} d\theta = 0$$

dır. Eğer $0 < r < 1$ için A_r sınırlanır ve M üst sınır olarak alınırsa,

$$\pi \sum_{n=1}^{N} n|a_n|^2 r^{2n} < M$$

yazılır. Burada N keyfi sabit pozitif bir tamsayıdır. Sol taraftaki toplam r ye göre monoton olarak artan ve sınırlıdır. Dolayısıyla $r \to 1^-$ giderken bir limite sahip olup,

$$\pi \sum_{n=1}^{N} n|a_n|^2 \leq M$$

eşitsizliği elde edilir. Çünkü,

$$\pi \sum_{n=1}^{N} n|a_n|^2$$

kısmi toplamları sınırlıdır. $N \to \infty$ giderken $\pi \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2$ serisi yakınsak olduğundan,

$$A = \lim_{r \to 1^-} Ar = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 \tag{3.7}$$

ifadesi elde edilir. (3.7)' de tanımlanan A sayısına $\Delta = f(D)$ ' nin iç alanı denir. Daima,

$$A = \pi(1 + 2|a_2|^2 + ...) \geq \pi$$

eşitsizliği vardır. F(z)=z olması durumunda f(D) alanı ile D' nin alanı eşittir. F(z)=z durumu hariç diğer durumlarda f(D)' nin alanından fazladır [12].

Örnek: $w = \dfrac{z}{1-z} = z + z^2 + z^3 + ...$

fonksiyonu $D_r = \{z : |z| < r, 0 < r < 1\}$ diskini, $r \to 1^-$ giderken $A_r \to \infty$ olacak şekilde,

$$A_r = \frac{\pi r^2}{(1-r^2)^2} = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n r^{2n}$$

alanına sahip olan,

$$\Delta_r = \left\{ w : \left| w - \frac{r^2}{1-r^2} \right| < \frac{r}{1-r^2} \right\}$$

diskine dönüştürür.

Çözüm: $w = \dfrac{z}{1-z} \Rightarrow z = \dfrac{w}{1+w}$

olur. Buradan,

$$|z| = \left| \frac{w}{1+w} \right| < r$$

ifadesinde w=u+iv yazılıp, gerekli işlemler yapılırsa,

$$u^2 - 2u\frac{r^2}{1-r^2} + v^2 < \frac{r^2}{1-r^2}$$

olur. Bu eşitsizliğin her iki yanına

$$\left(\frac{r^2}{1-r^2} \right)^2$$

terimi ilave edilirse, bir önceki ifade

$$u^2 - 2u\frac{r^2}{1-r^2} + v^2 + \left(\frac{r^2}{1-r^2} \right)^2 < \frac{r^2}{1-r^2} + \left(\frac{r^2}{1-r^2} \right)^2$$

biçimini alır. Bu da

$$\Delta_r = \left\{ w : \left| w - \frac{r^2}{1-r^2} \right| < \frac{r}{1-r^2} \right\}$$

ifadesinin açık şeklinden başka bir şey değildir. $w = \dfrac{z}{1-z}$ altında D' nin görüntüleri olan

Δ_r diskleri

$$\operatorname{Re} w > -\frac{1}{2}$$

yarı düzlemini örter.

3.11. DIŞ ALAN TEOREMİ

$f \in P$ olsun. Bu halde $\overline{f(D)'}$ kapalı bölgesinin alanı,

$$B = \pi\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2\right]$$

eşitliği ile verilir. Burada $f(D)' = C \setminus f(D)'$ dir.

İspat: $f \in P$ için $0 \le |z| < 1$ için geçerli olan

$$w = f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$$

ifadesini yazmak kolaydır. f altında D' nin görüntüsünün alanı ∞ noktasını ihtiva edeceğinden f(D) sonlu olmaz. Bu yüzden bu teorem $\Delta = \overline{f(D)'}$ alanından söz eder.

$$C_r = \{z : re^{ie}, 0 < r < 1, 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

$$D_r = \operatorname{int}(C_r), E_r = Ext(C_r), \Gamma_r = f(C_r)$$

olsun. İlk olarak $f(D_r) = Ext(\Gamma_r)$ olduğunu gösterelim. Bunun için $w_0 = f(z_0)$ olmak üzere $r < |z_0| < 1$ olacak biçimde $|z_0| \in E_r$ seçelim. f ünivalent olduğundan $w - w_0 = f(z) - f(z_0)$ fonksiyonunun $|z| \le r$ de sıfırı yoktur. Bununla birlikte bu fonksiyon $|z| = r$ çemberinin içinde $z = 0$ noktasında basit kutba sahiptir. Dolayısıyla argüman teoreminden,

$$-1 = N - P = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_r} \frac{f'(z)dz}{f(z) - f(z_0)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_r} \frac{dw}{w - w_0}$$

yazılır. Bu gösterir ki $\Omega_{c_r}(w_0) = -1$ olup $w_0 \in \operatorname{int}(\Gamma_r)$ ve Γ_r negatif yöndedir. (C_r pozitif yönde yönlendirilmiş) Üstelik eğer $z_1 \in D_r$ ise N-P=0 olacağından $\Omega_{c_r}(w_1) = 0$ olur. Buda $w_1 \in Ext(\Gamma_r)$ olduğunu gösterir.

$\Delta_r = \operatorname{int}(\Gamma_r)$ ve B_r de Δ_r ' nin alanı olsun. Bu durumda

$$B_r = \frac{1}{2i}\int_{-\Gamma_r} \overline{w}dw$$

$$= \frac{i}{2}\int_{C_r} \overline{f(z)} f'(z)dz \tag{3.8}$$

dir.

$$f(z)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty} b_m z^m$$

olduğundan

$$f'(z)=-z^{-2}+\sum_{n=1}^{\infty} m b_m z^{m-1}$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade denklem (3.8)' de yerine konulursa

$$B_r=-\frac{i}{2}\int_{C_r}\left[\overline{(z)}^{-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\overline{b}_n z^{-n}\right]\left[z^{-2}-\sum_{m=1}^{\infty} m b_m z^{m-1}\right]dz$$

eşitliği bulunur. Yine

$$\int_{C_r} z^{-n} z^{m-1} dz = i r^{n+m}\int_0^{2\pi} e^{(m-n)} d\theta = \begin{cases} 0, & m\neq n \\ 2\pi i r^{2n} & m=n \end{cases}$$

ifadesinden

$$B_r=\pi\left[\frac{1}{r^2}-\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 r^{2n}\right]$$

elde edilir. $B_r \geq 0$ olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 r^{2n}\leq\frac{1}{r^2}$$

bulunur. Böylece,

$$B=\lim_{r\to 1^-} B_r=\pi\left[1-\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2\right]$$

sonucu elde edilir.

3.12. GRONWALL - BİEBERBACH

Eğer $f \in P$ ise, $\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1$ dir. Bu sonuç 1914' de Gronwall tarafından, 1916' da Bieberbach tarafından ayrı ayrı elde edilmiştir. Gronwall-Bieberbach eşitsizliğinin bir sonucu olarak $|b_1| \leq 1$ yazılır. $|b_1| = 1$ eşitliği sadece $b_2 = b_3 = ... = 0$ olduğundan ortaya çıkar. Bu durumda $b_1 = e^{2i\alpha}$ olmak üzere f fonksiyonu

$$f(z) = \frac{1}{z} + e^{2i\alpha} z$$

biçimindedir. $z = e^{i\theta}$ için $f(e^{i\theta}) = e^{-i\theta} + e^{2i\alpha} e^{i\theta}$

$$= e^{i\alpha}(e^{-i\theta} e^{-i\alpha} + e^{i\alpha} e^{i\theta})$$

$$= e^{i\alpha}(e^{-i(\alpha+\theta)} + e^{i(\alpha+\theta)})$$

$$= e^{i\alpha}(\cos(\alpha+\theta) - i\sin(\alpha+\theta) + \cos(\alpha+\theta) + i\sin(\alpha+\theta))$$

$$= 2e^{i\alpha}\cos(\alpha+\theta)$$

yazılır. $w = u + iv$ denirse

$$2e^{i\alpha}\cos(\alpha+\theta) = u + iv$$

eşitliğinden

$$u = 2\cos\alpha\cos(\alpha+\theta)$$

$$v = 2\sin\alpha\cos(\alpha+\theta)$$

ve bu iki eşitlikten de

$$\frac{v}{u} = \tan\alpha \Rightarrow v = (\tan\alpha).u$$

şeklinde bir doğru denklemi elde edilir. Böylece, z, c_1 birim diskini bir kez tararken w, orta noktası orijin olan ve α eğim açısına sahip olan 4 birim uzunluğundaki L doğrusunu iki kez ileri ve geri tarar. Bu f fonksiyonu açık birim diski, L doğrusu çıkarılmış w düzleminin tamamına dönüşür. Bu durumda, B=0' dır.

3.12.1. Teorem: $f \in \Sigma$ için $|z| > 1$ için

$$f(z) = z + c_0 + c_1 z^{-1} + ... + c_n z^{-n} + ...$$

yazılır. $H(z) = \frac{1}{z}$ ters fonksiyonu ünivalent olduğundan

$$g(z)=(foH)(z)-c_0=\frac{1}{z}+c_1z+\ldots+c_nz^n+\ldots$$

ifadesi de ünivalent ve P sınıfından olup bölüm (3.12)' ye göre

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|c_n|^2 \le 1$$

ve

$$|c_1|\le 1$$

dir.

Not: $$f(z)=z+c_0+e^{2i\alpha}\frac{1}{z}$$

fonksiyonu için n>1 olduğumda $|c_n|=0$ dır. Bu fonksiyon $\overline{D}$ yi $\left[-2e^{i\alpha}+c_0, 2e^{i\alpha}+c_0\right]$ doğru parçası ile delinmiş w- düzleminin tamamına dönüştürür. Gerçekten $z=re^{i\theta}$ için

$$f(z)=re^{i\theta}+c_0+e^{2i\alpha}\frac{1}{r}e^{-i\theta}=e^{i\alpha}\left[re^{i(\theta-\alpha)}+\frac{1}{r}e^{i(\alpha-\theta)}\right]+c_0$$

$$=e^{i\alpha}\left[r\cos(\theta-\alpha)+ir\sin(\theta-\alpha)+\frac{1}{r}\cos(\alpha-\theta)+\frac{i}{r}\sin(\alpha-\theta)\right]+c_0$$

olur.

$$u+iv=\left(r+\frac{1}{r}\right)e^{i\alpha}\cos(\theta-\alpha)+i\left(r-\frac{1}{r}\right)e^{i\alpha}\sin(\theta-\alpha)+c_0$$

denirse

$$u=\left(r+\frac{1}{r}\right)e^{i\alpha}\cos(\theta-\alpha)+c_0,\ v=\left(r-\frac{1}{r}\right)e^{i\alpha}\sin(\theta-\alpha)$$

yazılır.

$$u-c_0=\left(r+\frac{1}{r}\right)e^{i\alpha}\cos(\theta-\alpha),\ v=\left(r-\frac{1}{r}\right)e^{i\alpha}\sin(\theta-\alpha)$$

eşitliklerinden

$$|u-c_0|=\left|2e^{i\alpha}\cos(\theta-\alpha)\right|\le 2,$$

$$|u-c_0|=2|\cos(\theta-\alpha)|\le 2$$

$$|u-c_0|\le 2$$

dır. Yani

$$f(z) = z + c_0 + e^{2i\alpha}\frac{1}{z}$$

fonksiyonu, $\overline{D}$' yi

$$\left[-2e^{i\alpha} + c_0, 2e^{i\alpha} + c_0\right]$$

doğru parçası ile delinmiş tüm w düzlemine dönüştürür.

3.13. DİSTORTİON TEOREMLERİ VE BİEBERBACH EŞİTSİZLİĞİ

Burada bazı distortion teoremleri ve Bieberbach eşitsizliği verilecektir.

3.13.1. Teorem: Eğer $f \in S$ $|a_2| \leq 2$ dir. Eşitlik sadece $f(z) = z(1+e^{i\beta}z)^{-2}$ şeklindeki Koebe fonksiyonları için sağlanır [13].

İspat: $$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + ... \in S$$

iken bu fonksiyonun tersi

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{z(1 + a_2 z + a_3 z^2 + ...)} = \frac{1}{z}\left[1 - (a_2 z + a_3 z^2 + ...) + (a_2 z + a_3 z^2 + ...)^2 - ...\right]$$

$$= \frac{1}{z} - a_2 + (a_2^2 - a_3)z + ...$$

şeklinde olup ilave bir sabit hariç P sınıfındadır. Böylece bölüm (3.12)' den dolayı

$$\left|a_2^2 - a_3\right| \leq 1 \tag{3.9}$$

eşitliği elde edilir.

Bu eşitsizlikten sadece a_2 ' yi içeren bir başka eşitsizliği şöyle çıkabiliriz. Bunun için de D' de ünivalent ve analitik alan

$$h(z) = \left[f(z^2)\right]^{1/2} = z(1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + ...)^{1/2} = z + \frac{1}{2}a_2 z^3 + ... \tag{3.10}$$

fonksiyonunu gözönüne almak yeterlidir. Bu fonksiyon S sınıfındadır. D de h(z) fonksiyonunun ünivalent olduğunu görmek için $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$ olmak üzere $h(z_1) = h(z_2)$ olduğunu kabul edelim. Buradan $f(z_1^2) = f(z_2^2)$ şeklinde olup f ünivalent olduğundan $z_1^2 = z_2^2$ yazabiliriz. Bu halde $z_1 = z_2$ veya $z_1 = -z_2$ ' dir. Fakat $z_1 = -z_2$ olması $h(z_1) = h(-z_1)$ olmasını gerektirir ki bu $z_1 \neq 0$ için h sıfırdan farklı ve tek fonksiyon olduğundan mümkün değildir.

Denklem (3.10) ifadesine göre h(z)' nin açılımındaki ikinci ve üçüncü katsayılar

$$a_2^{'} = 0 \text{ ve } a_3^{'} = \frac{1}{2}a_2$$

dir. Böylece bunu $\left|a_2^2 - a_3\right| \leq 1$ de kullanırsak

$$\left|0 - \frac{1}{2}a_2\right| \leq 1$$

$$\left|-\frac{1}{2}a_2\right| \leq 1$$

$$\frac{1}{2}\left|a_2\right| \leq 1$$

$$\left|a_2\right| \leq 2$$

eşitsizliğini buluruz. Alternatif olarak $\sum$ sınıfına ait olan

$$F(z) = \left[h\left(\frac{1}{z}\right)\right]^{-1} = z - \frac{1}{2}a_2\frac{1}{z} + \ldots$$

fonksiyonunu göz önüne alabiliriz. Buna göre Gronwall - Bieberbach eşitsizliğinden

$$\left|-\frac{1}{2}a_2\right| \leq 1 \text{ veya } \left|a_2\right| \leq 2$$

yazılır. Eşitlik durumunun olması için gerek ve yeter şart $2\alpha = \beta$ olmak üzere

$$F(z) = z + e^{i\beta}\frac{1}{z}$$

biçiminde olmasıdır. Böylece,

$$F(z) = \left[h\left(\frac{1}{z}\right)\right]^{-1}$$

ifadesinden

$$h(z) = \frac{z}{\left(1 + e^{i\beta}z^2\right)}$$

fonksiyonu ve $h(z) = \sqrt{f(z^2)}$ eşitliğinden

$$w = f(z) = \frac{z}{\left(1 + e^{i\beta}z\right)^2} = z - 2e^{i\beta}z^2 + 3e^{2i\beta}z^3 - \ldots + (-1)^{n-1}.n.e^{(n-1)i\beta}z^n + \ldots \qquad (3.11)$$

bulunur. Bu fonksiyon Koebe fonksiyonu olarak adlandırılır ve bu Koebe fonksiyonu bütün n' ler için $|a_n| = n$ özelliğine sahiptir.

Denklem (3.11) eşitliğinin yani $w = \dfrac{z}{\left(1 + e^{i\beta} z\right)^2}$ eşitliğinin her iki yanını $e^{i\beta}$ ile çarpıp $\dfrac{1}{e^{i\beta} w}$ ' yı hesaplarsak

$$\frac{1}{e^{i\beta} w} = \frac{1}{\dfrac{e^{i\beta} z}{\left(1 + e^{i\beta} z\right)^2}} = \frac{\left(1 + e^{i\beta} z\right)^2}{e^{i\beta} z} = \frac{1}{e^{i\beta} z} + e^{i\beta} z + 2 \tag{3.12}$$

buluruz. Denklem (3.12) in sağ tarafı $|z| = r < 1$ için $[0,4]$ reel aralığındaki değerleri alır. Böylece Koebe fonksiyon D birim diskini $t \geq \frac{1}{4}$ olmak üzere $w = te^{-i\beta}$ ışını ile delinmiş w- düzlemi içine dönüştürür [14].

3.13.2. Sonuç

Eğer,

$$w = g(z) = z + c_0 + c_1 z^{-1} + \ldots$$

fonksiyonu $\sum$ sınıfındansa, $|z| > 1$ in g fonksiyonu altında görüntüsünün sınırı $|w - c_0| \leq 2$ diskinde ihtiva eder.

İspat: Kabul edelim ki λ, |z|>1' nın g fonksiyonu altındaki görüntüsüne ait olmasın.

Böylece,

$$f(z) = \frac{1}{g(\frac{1}{z}) - \lambda} = z + (\lambda - c_0) z^2 + \ldots$$

fonksiyonu S sınıfından olup, Teorem (3.13.1) den $|\lambda - c_0| \leq 2$ yazılır.

Not: 1907 yılında Koebe, herhangi bir $f \in S$ fonksiyonu için w=0' ın f(D)' nin sınırına olan uzaklığı c olacak şekilde pozitif bir c sayısının varlığını gösterdi. 1916 yılında, Bieberbach, Koebe sabitinin değerinin tam olarak $\frac{1}{4}$ olduğunu gösterdi. Daha sonra bağımsız kısa bir ispat da Faber tarafından verildi.

3.13.3. Teorem: Bir $f \in S$ dönüşümü altında birim diskin görüntüsü $|w| < \frac{1}{4}$ diskinin tüm noktalarını ihtiva eder. (Koebe-Bieberbach Teoremi)

İspat: b $f(D)$ nin bir sınır noktası olsun ve

$$\psi(z) = \frac{bf(z)}{b - f(z)} = z + (a_2 + b^{-1})z^2 + ...$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. $\psi = Tof$ olduğundan ψ de S sınıfındadır. Burada T,

$T(w) = \dfrac{bw}{b - w}$ şeklinde lineer olmayan bir dönüşümdür.

Teorem (3.13.1)' den

$$\left|a_2 + b^{-1}\right| \le 2$$

olup

$$\left|b^{-1}\right| \le 2 + |a_2| \le 4$$

yazılır. Bundan dolayı $|b| \ge \frac{1}{4}$ olur. Bir sınır noktasının tam olarak başlangıç noktasından $\frac{1}{4}$ birim uzağında olabilmesi, bu fonksiyonun Koebe fonksiyonu olası durumunda gösterilir. Böylece $\frac{1}{4}$, herhangi daha büyük bir sabit ile değiştirilemez.

Not: $\overline{D}$ de analitik $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ biçimindeki fonksiyonların ailesi için ($\overline{D}$ de ünivalent olması gerekmeyen) $f(D)$ 'nin L yarıçaplı bazı diskleri ihtiva edecek şekilde L>0 pozitif sabiti vardır.

Landau, L' nin mümükün olan en iyi değerinin en az $\frac{1}{16}$ olduğunu gösterir.

3.13.4. Sonuç: $f \in S$ olsun. Kabul edelim ki α ve β, $Arg\beta - Arg\alpha = \pm\pi$ özelliğine sahip f tarafından alınmayan iki değerdir. Bu taktirde hem α hem de β' nın orijine olan uzaklığı $\frac{1}{2}$' ye eşittir.

İspat: Teorem (3.13.3)' ün ispatında olduğu gibi S sınıfına ait olan

$$\psi(z) = \frac{\alpha f(z)}{\alpha - f(z)}$$

biçimindeki fonksiyonu göz önüne alalım. Bu halde β sayısı, f' nin görüntü bölgesinde olmadığından $\dfrac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}$ sayısı da ψ' nin görüntü bölgesinde değildir.

Teorem 3.13.3'den

$$\left|\frac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}\right| \geq \frac{1}{4}$$

veya

$$\alpha = |\alpha| e^{i\lambda} \;,\; \beta = -|\beta| e^{i\lambda}$$

olduğundan

$$\left|\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right| = \frac{1}{|\alpha|}+\frac{1}{|\beta|} \leq 4$$

eşitsizliği bulunur. Örneğin, $|\beta| \leq |\alpha|$ kabul edildiğinde

$$\frac{2}{|\alpha|} \leq \frac{1}{|\alpha|}+\frac{1}{|\beta|} \leq 4$$

veya

$$|\alpha| \geq \frac{1}{2}$$

elde edilir. Eğer $|\alpha| = \dfrac{1}{2}$ ise $\dfrac{1}{|\beta|} \leq 2$ veya $|\beta| \geq \dfrac{1}{2}$ olur. $|\beta| \leq |\alpha|$ olduğu kabul edildiğinden dolayı $|\beta| = \dfrac{1}{2}$ gelir.

Not: Eğer f altında birim diskin görüntü konveks bir bölge ise teorem 3.13.3' ün sonucu aşağıdaki teoremde olduğu gibidir.

3.13.5. Teorem: $f \in S$ olsun. Eğer $f(D) = \Delta$ konveks bir bölge ise, bu bölge $|w| < \dfrac{1}{2}$ diskinin tüm noktalarını ihtiva eder.

İspat: $z \in D$ için, b , $f(z)$ tarafından alınmayan bir değer olsun ve

$$\begin{aligned}\psi(z) &= \left[f(z)-b\right]^2 = (-b+z+a_2z^2+\ldots)^2 \\ &= b^2-2bz+\ldots\end{aligned}$$

ve

$$g(z) = \frac{b^2-\psi(z)}{2b} = z+\ldots$$

fonksiyonlarını göz önüne alalım. $\psi(z)$ fonksiyonunun D diskinde sıfırı olmadığı açıktır. $\psi(z)$ ' nin D de ünivalent olduğunu göstermek için, D' de z_1 ve z_2 gibi farklı iki nokta alalım. Bu halde

$$\begin{aligned}\psi(z_1)-\psi(z_2) &= \left[f(z_1)-b\right]^2-\left[f(z_2)-b\right]^2 \\ &= \left[f(z_1)-f(z_2)\right]\left[f(z_1)+f(z_2)-2b\right] \\ &\neq 0\end{aligned}$$

dır. Çünkü, f ünivalent olduğundan $f(z_1)\neq f(z_2)$, Δ konveks olduğundan

$$\frac{1}{2}\left[f(z_1)+f(z_2)\right]\in\Delta \text{ ve } b\notin\Delta,$$

olup

$$\frac{1}{2}\left[f(z_1)+f(z_2)\right]\neq b$$

yani

$$\left[f(z_1)+f(z_2)-2b\right]\neq 0$$

şeklindedir.

Böylece ψ, D' de ünivalent olduğundan g' de D bölgesinde ünivalent ve normalleştirilmiştir. Üstelik g(z), $\frac{1}{2}b$ değerini alamaz. Koebe- Bieberbach teoreminde,

$$\frac{1}{2}|b|\geq\frac{1}{4} \text{ veya } |b|\geq\frac{1}{2}$$

yazılır.

$$w=\frac{z}{1-z}=z+z^2+...$$

fonksiyonu D diskini konveks bir bölge olan $\operatorname{Re} w>-\frac{1}{2}$ yarı düzlemi üzerinde dönüştürdüğünden yukarıdaki sonuç kesindir.

Aşağıda verilen teorem; r<1 olmak üzere orijin merkezli r yarıçaplı kapalı diskindeki z ler için $f\in S$ fonksiyonunun $|f'(z)|$ ve $|f(z)|$ modüllerinin alt ve üst sınırları ile ilgilidir. Bu eşitsizlikler Koebe' ye ait Distortion teoremleri olarak bilinirler. Koebe

$$m_1(r)\leq|f(z)|\leq M_1(r) \text{ ve } m_2(r)\leq|f'(z)|\leq M_2(r)$$

olacak biçimde $m_1(r)$, $M_1(r)$, $m_2(r)$, $M_2(r)$ pozitif tamsayılarının varlığını gösterdi.

Teorem 3.13.6' nın tam bir ifadesi 1916 Gronwall ve Bieberbach tarafından verildi.

3.13.6. Teorem: Eğer $f \in S$ ve $0 \le r \le 1$ ise $|z| \le r$ özelliğindeki her z için

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \le |f'(z)| \le \frac{1+r}{(1-r)^3} \tag{3.13}$$

ve

$$\frac{r}{(1+r)^2} \le |f(z)| \le \frac{r}{(1-r)^2} \tag{3.14}$$

eşitsizlikleri vardır.

İspat: $0 < |a| < 1$ olmak üzere

$$\psi(z) = f\left(\frac{z+a}{1+\overline{a}z}\right)$$

fonksiyonu D de ünivalenttir. Böylece,

$$g(z) = \frac{\psi(z) - f(a)}{f'(a)(1-|a|^2)}$$

fonksiyonu da yine D' de ünivalent olup g(0)=0 ve g'(0)=1 şartlarını sağlar. Dolayısıyla, $g \in S'$ dir. Eğer a_2 sayısı g(z) fonksiyonunun Taylor açılımındaki ikinci katsayı ise

$$a_2 = \frac{g''(a)}{2!} = \frac{1}{2}\left[\frac{f''(a)(1-|a|^2)}{f'(a)} - 2\overline{a}\right]$$

dir. Bieberbach eşitsizliğine göre $|a_2| \le 2$ olacağından

$$\left[\frac{f''(a)(1-|a|^2)}{f'(a)} - 2\overline{a}\right] \le 4$$

yazılır. Burada a yerine z yazılır ve her iki taraf $\dfrac{|z|}{1-|z|^2}$ ile çarpılırsa son

eşitsizlik

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2}\right| \le \frac{4|z|}{1-|z|^2} \tag{3.15}$$

haline dönüşür. $|\operatorname{Re} z| \le |z|$ ve $|z| = r < 1$ olduğu düşünülürse

$$\left|\mathrm{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\frac{2r^2}{1-r^2}\right|\le\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\frac{2r^2}{1-r^2}\right|\le\frac{4r}{1-r^2}$$

olur ki buradan da

$$\frac{2r^2-4r}{1-r^2}\le\mathrm{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)}\le\frac{2r^2+4r}{1-r^2} \tag{3.16}$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi, $z=re^{i\theta}$ denirse,

$$f'(z)=e^{-i\theta}(u_r+iv_r),\quad f''(z)=e^{-2i\theta}(u_{rr}+iv_{rr})$$

ve

$$\frac{zf''(z)}{f'(z)}=\frac{r(u_{rr}+iv_{rr})}{u_r+iv_r}=\frac{r(u_{rr}+iv_{rr})(u_r-iv_r)}{u_r^2+v_r^2}$$

yazılır. Buradan,

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)}&=\frac{r(u_ru_{rr}+v_rv_{rr})}{u_r^2+v_r^2}\\&=r\frac{\partial}{\partial r}\ln(u_r^2+v_r^2)^{1/2}\\&=r\frac{\partial}{\partial r}\ln|f'(z)|\end{aligned} \tag{3.17}$$

bulunur. Denklem (3.17) ifadesi (3.16)' da yerine yazılır ve $r\neq 0$ ile bölünürse

$$\frac{2r-4}{1-r^2}\le\frac{\partial}{\partial r}\ln|f'(z)|\le\frac{2r+4}{1-r^2} \tag{3.18}$$

eşitsizliği elde edilir. Denklem (3.18) ifadesinin her bir yanının 0' dan r ye integrali alınırsa

$$\ln(1-r)-3\ln(1+r)\le\ln|f'(z)|\le\ln(1+r)-3\ln(1-r)$$

yada

$$\frac{1-r}{(1+r)^3}\le|f'(z)|\le\frac{1+r}{(1-r)^3}$$

eşitsizliği elde edilir ki, bu da (denklem 3.13 ifadesidir. r=0 için eşitsizlikler açıktır. Şimdi de denklem (3.14)' ü ispatlayalım.

İlk olarak $0\le t\le r$ olmak üzere yukarıdaki eşitsizliğin ikinci kısmını kullanarak $\zeta=te^{i\theta}$ eğrisi boyunca $\zeta=0$ dan $\zeta=z=re^{i\theta}$ 'ya kadar integrali alınırsa,

$$
\begin{aligned}
|f(z)| = \left| \int_0^z f'(\zeta)\,d\zeta \right| &\le \int_0^r |f'(\zeta)|\,dt \\
&\le \int_0^r \frac{1+t}{(1-t)^3}\,dt \\
&= \frac{r}{(1-r)^2}
\end{aligned} \tag{3.19}
$$

bulunur. $\frac{r}{(1+r)^2} \le |f(z)|$ olduğunu göstermek için $0 \le r < 1$ iken $\frac{r}{(1+r)^2} < \frac{1}{4}$ olduğunu göz önüne alalım. $|f(z)| \ge \frac{1}{4}$ olursa eşitsizlik doğrudur. Şimdi kabul edelim ki $|f(z)| < \frac{1}{4}$ olsun. Koebe - Bieberbach teoreminden dolayı w=f(z) noktasını orijine birleştiren γ_1 doğru parçası $f(D)$ de ihtiva edilir. Eğer $\gamma = f^{-1}(\gamma_1)$ ise, yani γ, f altında görüntüsü γ_1 olan 0 noktasının z noktasına birleştiren eğri ise

$$
|w| = (\gamma_1)\int_0^{|w|} |dw| = L(\gamma_1)
$$

ve denklem (3.13)' deki ilk eşitsizlikten

$$
|f(z)| = (\gamma)\int_0^{|z|} |f'(z)||dz| \ge \int_0^r \frac{1-r}{(1+r)^3}\,dr = \frac{r}{(1+r)^2} \tag{3.20}
$$

yazılır.Burada $|dz| = (dr^2 + r^2 d\theta^2)^{1/2} \ge dr$ dir. Denklem (3.19) ve denklem (3.20) eşitsizlikleri birleştirilerek denklem (3.14) sonucu elde edilir. Denklem (3.14)' ün eşitlik hali Koebe fonksiyonu ile elde edilir.

3.14. KONVEKS VE STARLİKE FONKSİYONLAR

S sınıfının alt sınıfının hangi geometrik koşullarda tanımlandığına bakarsak Bieberbachın varsayımlarını bütün altsınıflar için ispatlamak gereklidir.

Eğer E kümesi içerisindeki bütün $w \in E$ noktaları w_0'ın lineer segmenti ise $w_0 \in E$ noktasında $E \subset \mathbb{C}$ starlike olur. Daha açık şekilde ihtiyacımız olan bütün E noktaları w_0 da görünür. E nin herhangi iki noktası E' nin içinde ise ve bu noktalarda starlike ise E kümesi konveks olur. Konveks fonksiyonlar birim diskiyle konveks alanına dönüşür.Starlike fonksiyonlarda birim diskiyle starlike alanına dönüşür. S' nin altsınıfı olan konveks fonksiyonlar C olarak gösterilir ve S^* starlike fonksiyonların altsınıfıdır [15].

C $\subset$ $S^* \subset$ S olur. Koebe fonksiyonları starlikedır ama konveks değildir.

P sınıfının bütün analitik φ fonksiyonları C ve S^* sınıfları ile alakalıdır ve φ(0)=1 de D' nin pozitif gerçek kısımları olur. Herglotz formülü bunun $\varphi \in P$ Poisson - Stieltjes integralinde temsil edersek

$$\varphi(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} d\mu(t) \tag{3.21}$$

$$d\mu(t) \geq 0 \text{ ve } \int d\mu(t) = 1$$

3.14.1. Tanım (Carathéodory Lemma)

Eğer $\varphi \in P$ ve

$$\varphi(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n ,$$

$|c_n| \leq 2$, n=1,2,3,... Eşitsizlikteki bütün n'ler için.

İspat

$$\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mathrm{int}} z^n \quad \text{(3.21) bakarsak}$$

$$c_n = 2\int_0^{2\pi} e^{-\mathrm{int}} d\mu(t) \quad \text{n=1,2,3,...}$$

$|c_n| \leq 2$ eşitliğinde ancak ve ancak $e^{-\mathrm{int}}$ sabit işaretleri için $d\mu$ ölçümünde.

Eşitliklerdeki n ler için fonksiyon

$$\varphi(z) = \frac{1+z}{1-z} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

şeklinde elde edilir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde $f(z)=\frac{1}{2}\left[z(1-z)^{-2}+z(1+z)^{-2}\right]$ iki fonksiyonun ortalaması S kümesindedir ama bu iki fonksiyonun ortalaması ünivalent olmadığını ifade eden özel problemi elde edeceğiz.

İlk olarak

$$f(z)=\frac{1}{2}\left[g(z)+h(z)\right]$$

şeklinde fonksiyonumuzu düzenleyerek g(z) ve h(z) fonksiyonlarını inceleyelim.

$$g(z)=\frac{z}{(1-z)^2}$$

şeklinde fonksiyonumuzun Koebe fonksiyonundan yararlanarak

$$z+\sum_{n=2}^{\infty} nz^n = z+2z^2+3z^3+4z^4+\ldots \tag{4.1}$$

$$g(0)=0+2.0^2+3.0^3+\ldots=0$$

$$g'(z)=1+4z+9z^2+\ldots=1+4.0+9.0^2+\ldots \;=1$$

g(0)=0, g'(0)=1 sağladığından analitik fonksiyondur ve A sınıfındandır deriz. Şimdi g(z) fonksiyonumuzun ünivalent olup olmadığına bakalım.

$z_1 \neq z_2$ için

$$g(z_1)-g(z_2)\neq 0$$

olursa ünivalent olur.

$z_1 \neq z_2$ için

$$z_1+\sum_{n=2}^{\infty} nz_1^{\,n}-z_2-\sum_{n=2}^{\infty} nz_2^{\,n} = z_1-z_2+\sum_{n=2}^{\infty} nz_1^{\,n}-\sum_{n=2}^{\infty} nz_2^{\,n}$$

$$=z_1-z_2+2z_1^{\,2}+3z_1^{\,3}+4z_1^{\,4}+\ldots-2z_2^{\,2}-3z_2^{\,3}-4z_2^{\,4}-\ldots$$

$$=z_1-z_2+2z_1^{\,2}-2z_2^{\,2}+3z_1^{\,3}-3z_2^{\,3}+4z_1^{\,4}-4z_2^{\,4}+\ldots$$

$$=z_1-z_2+2\left(z_1^{\,2}-z_2^{\,2}\right)+3\left(z_1^{\,3}-z_2^{\,3}\right)+4\left(z_1^{\,4}-z_2^{\,4}\right)+\ldots$$

$$= z_1 - z_2 + 2(z_1 - z_2)(z_1 + z_2) + 3(z_1 - z_2)(z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2) + \ldots$$

$$= (z_1 - z_2)[\ 1 + 2(z_1 + z_2) + 3(z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2) + \ldots]\ \neq 0$$

$z_1 \neq z_2$ için

$$1 + 2(z_1 + z_2) + 3(z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2) + \ldots \neq 0$$

olur. Bundan dolayı g(z)' nin ünivalent olduğunu göstermiş oluruz. Şimdi g(z) fonksiyonunun görüntüsünün nereden nereye dönüştüğüne bakalım.

$$\text{w} = g(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

$$w = \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{z}{z^2 - 2z + 1}$$

$$wz^2 - 2wz + w = z$$

$$wz^2 - 2wz + w - z = 0$$

$$wz^2 - (2w+1)z + w = 0$$

buradan elde ettiğimiz denklemin diskriminantına bakarsak

$$\Delta = b^2 - 4ac \text{ den}$$

$$\Delta = (2w+1)^2 - 4ww$$

$$= 4w^2 + 4w + 1 - 4w^2$$

$$= 4\text{w} + 1$$

$$\text{z}_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2w + 1 \pm \sqrt{4w+1}}{2w}$$

Buradan

$$\sqrt{4w+1}$$

bakarsak

$$\sqrt{4w+1} = \sqrt{4(u+iv)+1} = \sqrt{4u + 4iv + 1}$$

$$\Rightarrow 4u + 4v + 1 \geq 0$$

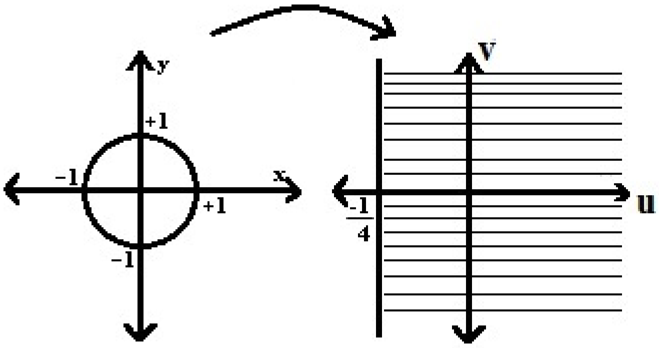
$$\Rightarrow u + v + \frac{1}{4} \geq 0$$

olur.

Gerçek kısma bakarsak

$$u+\frac{1}{4}\geq 0,\quad u\geq -\frac{1}{4}.$$

Birim çemberin dönüşümü Şekil 0.1' deki gibi oluşur.



Şekil 0.1. g(z) fonksiyonunun görüntüsü.

Şimdi diğer fonksiyonumuz olan h(z) fonksiyonumuzu inceleyelim.

$$h(z)=\frac{z}{(1+z)^2}=z(1+z)^{-2}$$

şeklinde fonksiyonumuzu düzenlemek için Binom açılımını kullanmamız gerekiyor. Bu açılımı kullanırsak $(1+z)^{-2}$ düzenlersek binom açılımından

$$(1+z)^{-2}=1^{-2}+\frac{(-2)1^{-3}z}{1!}+\frac{(-2)(-3)1^{-4}z^2}{2!}+\frac{(-2)(-3)(-4)1^{-5}z^3}{3!}+\ldots$$

$$=1-2z+3z^2-4z^3+5z^4-\ldots$$

Elde ettiğimiz sonucu z ile çarparsak

$$z(1+z)^{-2}=z(1-2z+3z^2-4z^3+5z^4-\ldots)$$

$$=z-2z^2+3z^3-4z^4+5z^5-\ldots=z+\sum_{n=2}(-1)^{n-1}nz^n\,. \tag{4.2}$$

h(0)=0 ve h'(z)=1-4z+9z^2-16z^3+... h'(0)=1 sağladığından analitiktir ve h(z) A sınıfındandır deriz.

Şimdi h(z) fonksiyonumuzun ünivalent olup olmadığına bakalım.

$z_1\neq z_2$ için

$$h(z_1)-h(z_2)\neq 0$$

olursa ünivalent olur.

$z_1\neq z_2$ için

$$z_1+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}nz_1{}^n-z_2-\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}nz_2{}^n=z_1-z_2+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}nz_1{}^n-\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}nz_2{}^n$$

$$=z_1-z_2-2z_1{}^2+2z_2{}^2+3z_1{}^3-3z_2{}^3-4z_1{}^4+4z_2{}^4+\ldots$$

$$=z_1-z_2-2(z_1{}^2-z_2{}^2)-3(z_1{}^3+z_2{}^3)-\ldots$$

$$=(z_1-z_2)\left[1-2(z_1+z_2)-3(z_1{}^2-z_1\ldots)\right]\neq 0$$

olduğundan h(z) fonksiyonumuz ünivalent olur. h(z) fonksiyonumuzun görüntüsünün nereye dönüştüğüne bakmak için

$$\text{w}=h(z)=\frac{z}{(1+z)^2}$$

$$w=\frac{z}{(1+z)^2}=\frac{z}{z^2+2z+1}$$

$$wz^2+2wz+w=z$$

$$wz^2+2wz+w-z=0$$

$$wz^2-(2w-1)z+w=0$$

elde edilen denklemin diskriminantına bakarsak

$$\Delta=(2w-1)^2-4ww$$

$$=4w^2-4w+1-4w^2$$

$$=-4\text{w}+1$$

$$\text{z}_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2w+1\pm\sqrt{-4w+1}}{2w}$$

Buradan

$$\sqrt{-4w+1}$$

bakacak olursak

$$\sqrt{-4w+1}=\sqrt{-4(u+iv)+1}=\sqrt{-4u-4iv+1}$$

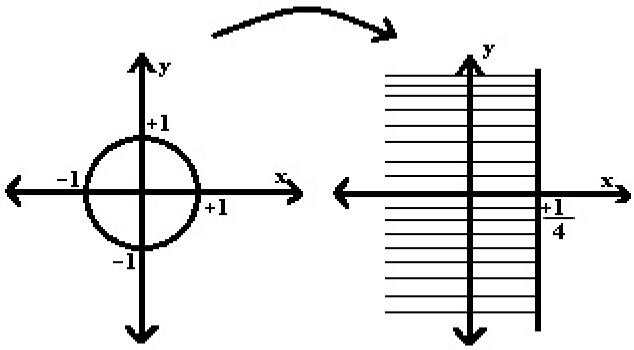
$$\Rightarrow -4u-4v+1\geq 0$$

$$\Rightarrow -u-v+\frac{1}{4}\geq 0$$

olur. Gerçek kısmına bakarsak

$$u\leq\frac{1}{4}$$

Birim çemberin dönüşümü Şekil 4.2' deki gibi oluşur.



Şekil 4.2. h(z) fonksiyonunun görüntüsü.

g(z) ve h(z) fonksiyonlarının A sınıfından ünivalent ve S sınıfına ait olduklarını ve görüntülerinin oluşturdukları bölgeleri gösterdik.Şimdi f(z) fonksiyonun inceleyelim.

f(z) fonksiyonunu elde ederken (4.1) ve (4.2)' yi yerine koyarız.

$$f(z) = \frac{1}{2}\left[g(z) + h(z)\right] = \frac{1}{2}\left(2z + 6z^3 + 10z^5 + ...\right)$$

$$= z + 3z^3 + 5z^5 + ... = z + \sum_{n=2}^{\infty}(2n+1)z^{(2n+1)}$$

$f(-z) = -z - 3z^3 - 5z^5 + ... \Rightarrow -f(z) = z + 3z^3 + 5z^5 + ...$

Buradan

$$f(-z) = -f(z).$$

Sonuç olarak f(z) tek fonksiyondur.

f(0)=0 ve f'(0)=1 olduğundan f(z) analitiktir fonksiyondur ve f(z)$\in$A

f(z) fonksiyonunun ünivalent olup olmadığını araştıralım.

Eğer

$$z_1 \neq z_2$$

iken

$$f(z_1) - f(z_2) \neq 0$$

olduğunda f(z) fonksiyonu ünivalent olur.

$$z_1 - z_2 \neq 0 \text{ ve } f(z_1) - f(z_2) = z_1 + \sum_{n=2}^{\infty}(2n+1)z_1^{(2n+1)} - z_2 - \sum_{n=2}^{\infty}(2n+1)z_2^{(2n+1)}$$

$$= z_1 - z_2 + \sum_{n=2}^{\infty}(2n+1)z_1^{(2n+1)} - \sum_{n=2}^{\infty}(2n+1)z_2^{(2n+1)}$$

$$= z_1 - z_2 + 3z_1^3 + 5_1^5 + \ldots - 3z_2^3 - 5z_2^5 - \ldots$$

$$= z_1 - z_2 + 3z_1^3 - 3z_2^3 + 5_1^5 - 5z_2^5 + \ldots$$

$$= z_1 - z_2 + 3\left(z_1^3 - z_2^3\right) + 5\left(z_1^5 - z_2^5\right) + \ldots$$

$$= \left(z_1 - z_2\right)[1 + 3\left(z_1^3 + z_1 z_2 + z_2^2\right) + 5\,[\,(z_1 - z_2)^4 - 5z_1 z_2\left(z_1 + z_2\right) - 10z_1 z_2 \ldots]] + \ldots$$

$\left(z_1 - z_2\right) \neq 0$ ve $[1 + 3\left(z_1^3 + z_1 z_2 + z_2^2\right) + 5\,[\,(z_1 - z_2)^4 - 5z_1 z_2\left(z_1 + z_2\right) - 10z_1 z_2 \ldots]] + \ldots$ her zaman 0 olmayacaktır. Bundan dolayı daima $f(z_1) - f(z_2) \neq 0$ olmaz.

Böylece f(z) ünivalent değildir. Bu şekilde ispatımız tamamlanmış olur.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Analitik olan bir özel fonksiyonun içerisindeki ayrı analitik ve ünivalent fonksiyonların aritmetik ortalamalarının analitik olduğunu ama daima ünivalent olmayabileceğini gösterdik. Bu şekilde A sınıfında ve ünivalent fonksiyonların özelliklerini özel fonksiyonlar için düzenleyerek özel olarak seçtiğimiz problemin ispatını tamamlamış olduk.

6. KAYNAKLAR

[1] E. Kadıoğlu, M. Kamali, *Genel Matematik*, pp. 419-431, 1998.

[2] M. Bakı, *Matematik Analiz, I. Cilt.* Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, no. 142, pp. 37-42, 1985.

[3] A. Dernek, "Kompleks Analiz ve Uygulamaları," *Nobel Akademi Yayıncılık*, pp. 213-214, 2013

[4] P. L. Duren, *Univalent Functions*, pp. 32-33, 1983.

[5] P. L. Duren, "Coefficients of Univalents Functions," *Bulletin of the American Mathematical Society 83*, pp. 891-911, 1977.

[6] S. D. Bernardı, "Convex and Starlike Functions," *Transactions of the American Mathematical Society 135*, pp. 429-446, 1969.

[7] N. Tuneski, "Some Results on Starlike and Conveks Functions," *Applicable analysis and Discrete Mathematics*, pp. 293-298, 2007.

[8] K. Sakagochi, "On a certain Univalent Mapping," *Journal of the Mathematical Society of Japan 11*, pp. 72-75, 1959.

[9] M. Nunokawa, M. Aydogan, K. Kuroki and I. Yildiz, S. Owa, "On the order of Close-to-Convexity of Convex functions of order alpha," *Journal of Inequalities and Applications*, 2012.

[10] S. Owa, "The order of close-to-Convexity for Certain Univalent Functions," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, pp. 393-396, 1989.

[11] T. Hayami, H. Shiraishi, S. Owa and I. Yildiz, "Notes on Nunokawa Lemmas," *International Journal of Applied Mathematics*, pp. 429-441, 2012

[12] Y. J. Leung, "Integral means of the derivative of some univalent functions," *Bull. London Math. Soc. 11*, pp. 289-294, 1979.

[13] R. Ocak, "Kompleks Analiz," *Atatürk Üniversitesi Yayınları* no.750, pp. 1-226, 2001.

[14] V. Bertoni and D. K. Dimitrov, "Generating Starlike and Convex Univalent Functions," *Mathematica Balkanica New Series* Vol. 19 Fasc. 3-4, 2005.

[15] İ. Yıldız ve S. Özgül, "Ünivalent Fonksiyonlar Teorisinde Geometrik Fonksiyonların Sağladığı Bazı Özellikler," *Düzce Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi*, pp. 154-168, 2014.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	: Hasan ŞAHİN
Doğum Tarihi ve Yeri	:01.06.1988/Kırşehir
Yabancı Dili	: İngilizce
E-posta	: hasansahin13@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Y. Lisans	Matematik Bölümü	Düzce Üniversitesi	2018
Lisans	İlköğretim Matematik Öğretmenliği.	Gazi Üniversitesi	2011
Lise		Hasan Ali Yücel Anadolu Öğretmen Lisesi	2006