T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MITTAG-LEFFLER POLİNOMLARI VE ÖZELLİKLERİ

NİHAL YILMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
DR. ÖĞR. ÜYESİ NEJLA ÖZMEN

DÜZCE, 2019

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MITTAG-LEFFLER POLİNOMLARI VE ÖZELLİKLERİ

Nihal YILMAZ tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Dr. Öğr. Üyesi Nejla ÖZMEN

Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Dr. Öğr. Üyesi Nejla ÖZMEN
Düzce Üniversitesi ______________________

Prof. Dr. Yüksel SOYKAN
Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi ______________________

Dr. Öğr. Üyesi Hüseyin BUDAK
Düzce Üniversitesi ______________________

Tez Savunma Tarihi: 02/08/2019

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

02 Ağustos 2019

Nihal YILMAZ

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimimde ve bu tezin hazırlanmasında gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Nejla ÖZMEN'e en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme ve çalışma arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

02 Ağustos 2019 **Nihal YILMAZ**

İÇİNDEKİLER

SİMGELER

$g_n^{(h)}(y)$	Deformed Mittag-Leffler Polinomu
$\hat{g}_n^{(h)}(y)$	Deformed Mittag-Leffler Polinomunun Monik Polinomu
$\mathcal{F}$	Fourier Dönüşüm
$\Gamma(x)$	Gamma Fonksiyonu
${}_2F_1(a,b;c;x)$	Gauss Hipergeometrik Fonksiyonu
$H_n(x)$	Hermite Polinomları
$F_1[\dots;x,y]$	İki değişkenli Appell Hipergeometrik Fonksiyon
$F_2[\dots;x,y]$	İki değişkenli Appell Hipergeometrik Fonksiyon
$P_n^{(\alpha,\beta)}(z)$	Jacobi Polinomu
$L_n^{(\alpha)}(x)$	Laguerre Polinomları
$M_n(z,\beta,x)$	Meixner Polinomu
$g_n(y)$	Mittag-Leffler Polinomu
$\hat{g}_n(y)$	Mittag-Leffler Polinomunun Monik Polinomu
$\varphi_n^{(h)}(y)$	Modified Deformed Mittag-Leffler Polinomu
$\varphi_n(y)$	Modified Mittag-Leffler Polinomu
$\hat{\varphi}_n(y)$	Modified Mittag-Leffler Polinomunun Monik Polinomu
$(\alpha)_n$	Pochhammer Sembolü
$F^{(3)}[\dots;x,y,z]$	Srivastava'nın Genelleştirilmiş Hipergeometrik Fonksiyonu

ÖZET

MITTAG-LEFFLER POLİNOMLARI VE ÖZELLİKLERİ

Nihal YILMAZ
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Nejla ÖZMEN
Ağustos 2019, 47 sayfa

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. Bu tezin ne ile ilgili olduğuna dair kısa bir tanıtım ve Mittag-Leffler polinomlarının literatür özeti verilmiştir. İkinci bölümde önbilgiler ve diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı tanımlar ve lemmalar verilmiştir. Üçüncü bölümde, Mittag-Leffler polinomu, deformed Mittag-Leffler polinomu ve modified Mittag-Leffler polinomunun tanımları ve bu polinomların özelliklerinden oluşmaktadır. Dördüncü bölümde Mittag-Leffler polinomu ve türleri için bilinear ve bilateral doğurucu fonksiyonlarını veren teoremler içerir. Burada verilen teoremlerin sonuçlarına ve uygulamalarına yer verilmiştir. Son bölümde bu tez için bazı sonuç ve öneriler sunulmuştur.

Anahtar sözcükler: Doğurucu fonksiyon, Mittag-Leffler polinomları, Modified Mittag-Leffler polinomları, Deformed Mittag-Leffler polinomları, Multilineer ve multilateral doğurucu fonksiyonlar.

ABSTRACT

MITTAG-LEFFLER POLYNOMIALS AND PROPERTIES

Nihal YILMAZ
Düzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics
Master's Thesis
Supervisor: Assist. Prof. Dr. Nejla ÖZMEN
August 2019, 47 pages

This thesis consists of five chapters. The first section is devoted to the introduction. A brief introduction to what this thesis is about and the literature summary of Mittag Leffler polynomials are given. In the second part, some definitions and lemmas are given. In the third chapter, Mittag-Leffler polynomial, deformed Mittag-Leffler polynomial and modified Mittag-Leffler polynomial are defined and their properties are given. The fourth chapter contains theorems for the Mittag-Leffler polynomials and their types, which give bilinear and bilateral generating functions. The results and applications of the theorems given here are given. In the last chapter, some conclusions and recommendations are presented for this thesis.

Keywords: Generating function, Mittag-Leffler polynomials, Modified Mittag-Leffler polynomials, Deformed Mittag-Leffler polynomials, Multilinear and multilateral generating functions.

1. GİRİŞ

Mittag-Leffler fonksiyonu [1], İsveçli¸ bilim adamı Gösta Mittag-Leffler (16 Mart 1846-7 Temmuz 1927) tarafından 1903 yılında tanımlanmıştır. Mittag-Leffler fonksiyonu ilk olarak kesirli integral denklemlerinin çözümlerinde ortaya çıkmıştır. Daha sonra, kinetik denklemlerin kesirli genelleştirilmesinde, rastgele yürüyüşlerde ve Lévy uçuşlarında kullanılmıştır [1]-[3]. Mittag-Leffler fonksiyonu özellikle fizik ve uygulamalı matematiğin birçok alanında tanımlanmıştır. Son 20 yılda, İsveçli matematikçi tarafından tanımlanan bu fonksiyon, son 10 yılda daha da önem kazanmıştır. Çünkü bu fonksiyonlar mühendislik, biyoloji ve fizik gibi bilim dallarındaki problemlerin çözümü için büyük bir potansiyel teşkil etmektedir. Bu tez, Mittag-Leffler fonksiyonunun özel hali olan hipergeometrik Mittag-Leffler polinomları üzerine yapılan bir çalışmadır. Son yıllarda bu polinomlar üzerine yapılan çalışmalar uygulamalı matematikte önemli bir yer tutmaktadır. Uygun koşullar altında hipergeometrik polinomların farklı tip özellikleri hâlen çalışılmaktadır.

Bu tezde kullanılan Mittag-Leffler polinomları şu şekildedir. İlk olarak 1940 yılında H. Betaman tarafından tanımlanan Mittag-Leffler polinomu

$$g_n(y) = 2y\ {}_2F_1[1-n, 1-y; 2; 2],$$

şeklinde verilmiştir ve bu polinom

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^y = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(y)x^n \qquad |x| < 1,$$

doğurucu fonksiyon bağıntısına sahiptir [4]. Buradaki,

$${}_2F_1(k, l; m; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k)_n (l)_n}{(m)_n} \frac{x^n}{n!},$$

şeklinde bir hipergeometrik fonksiyondur. 2005 yılında Mittag-Leffler polinomu, S. Roman tarafından,

$$M_n(y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (n-1)_{n-k} 2^k (x)_k,$$

şeklinde tanımlanmıştır ve bu polinom

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n(y) \frac{x^n}{n!} = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^y, \quad |x| < 1$$

doğurucu fonksiyonuna sahiptir [5]. 2011 yılında Stanković ve arkadaşları deformed Mittag-Leffler polinomlarını

$$G_h(x,y) = e_h(x,y) e_{-h}(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n{}^{(h)}(y) x^n, \quad (h \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

şeklinde tanımlamışlardır [6]. Burada $e_h(x,y)$, üstel fonksiyonu

$$e_h(x,y) = (1+hx)^{y/h} \quad \left(x \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{1}{h}\right\}, y \in \mathbb{R}\right)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Yine, 2011 yılında Stanković ve arkadaşları modified Mittag-Leffler polinomlarını

$$\varphi_n(y) = \frac{g_{n+1}(iy)}{i^{n+1} y} \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

şeklinde tanımlamışlardır [6]. Günümüzde daha hâlen Mittag-Leffler polinomuyla ilgili birçok çalışma ve özelliklerini bulmak mümkündür [7]-[13].

Ayrıca tezimizde, Mittag-Leffler polinomları, deformed Mittag-Leffler polinomları ve modified Mittag-Leffler polinomları tarafından üretilen başka polinomların özelliklerinide bulmak mümkündür. Mittag-Leffler polinomları, deformed Mittag-Leffler polinomları, modified Mittag-Leffler polinomları için bilinear ve bilateral doğurucu fonksiyonları veren teoremler elde edildi. Bu teoremler kullanılarak bazı bilinear ve bilateral doğurucu fonksiyon bağıntıları verildi. Son olarak sonuç ve önerilere yer verildi.

2. TANIMLAR VE TEMEL KAVRAMLAR

2.1. GAMMA FONKSİYONU

$\Gamma(x)$ ile gösterilen Gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

genelleştirilmiş integrali yardımıyla tanımlanır. Gamma fonksiyonuna bazen genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu da denir. $x > -1$ olan herhangi bir reel sayı olmak üzere

$$x! = \int_0^\infty t^x e^{-t}dt = \Gamma(x+1)$$

yazılabilir. Ayrıca, Γ fonksiyonu şu özelliğe de sahiptir [14]:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{sin\pi x}, \quad x \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots. \tag{2.1}$$

2.2. POCHHAMMER SEMBOLÜ

β reel ya da kompleks bir sayı, n sıfır veya pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$(\beta)_n = \beta(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+n-1) \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanan $(\beta)_n$ ifadesine Pochhammer sembolü denir ve $(\beta)_0 = 1\,, (\beta \neq 0)$ olarak tanımlanır.

2.3. HİPERGEOMETRİK SERİ VE HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR

a, b ve c reel ya da kompleks sabitler olmak üzere

$$1 + \frac{ab}{c}\frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{x^2}{2!} + \cdots \tag{2.3}$$

olarak ifade edilen seriye Gauss hipergeometrik serisi veya hipergeometrik seri denir. Eşitlik (2.3)'ten görülmektedir ki c değeri sıfır veya negatif bir tamsayı olmamalıdır. Eşitlik (2.3) ifadesi $1 + x + x^2 + \cdots$ geometrik serisinin bir genelleştirilmesi olduğundan bu adı alır. Eşitlik (2.3) hipergeometrik serisi $|x| < 1$ için yakınsak, $|x| > 1$ için ıraksaktır. $|x| = 1$ olduğu zaman $c > a + b$ ise seri mutlak yakınsaktır. $|x| = -1$ iken $c > a + b - 1$ ise seri yakınsaktır.

Eşitlik (2.3) gösterimi dikkate alınarsa, bu hipergeometrik serisi

$${}_2F_1(a, b; c, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!} \tag{2.4}$$

şeklinde yazılır.

Eşitlik (2.4)'ten görülen F'nin altındaki 2 ve 1 alt indisleri F'nin yapısında biri a ve b diğeri c olmak üzere iki tip parametre bulunduğunu ifade eder. Eşitlik (2.4)'ün genelleştirilmiş ifadesi

$${}_pF_q\left(a_1, \ldots, a_p; c_1, \ldots, c_q; x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n \cdots (a_p)_n}{(c_1)_n (c_2)_n \cdots (c_q)_n} \frac{x^n}{n!} \tag{2.5}$$

dir.

Lemma 2.2. Hipergeometrik serilerin tanımında Eşitlik (2.4)'teki ifadesinde a, b, c değerlerini bazı özel değerler alındığında aşağıdaki eşitlik geçerlidir [14]:

$$(1 - z)^{-m} = {}_2F_1(m, n; n; z) \tag{2.6}$$

2.4. ÖNEMLİ BAZI ÖZELLİKLER

Bilinear ve bilateral doğurucu fonksiyonlar konusunda çok sık kullanılan bazı seri özellikleri aşağıdaki gibidir [15]:

Lemma 2.3. Aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A(k,n) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{p}\right]} A(k,n-pk)$ (2.7)

b) $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{p}\right]} A(k,n) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A(k,n+pk)$ (2.8)

İspat:

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A(k,n)t^{n+pk}$ (2.9)

serisi dikkate alınır ve $n+pk$ yerine m yazılırsa, Eşitlik (2.9)'daki k ve n indisleri

$k=j\,,\ n=m-pj$ (2.10)

olmak üzere yeni j ve m indisleri tanımlanır. Eşitlik (2.9)'da $n \geq 0$ ve $k \geq 0$ olup Eşitlik (2.10)'dan

$m-pj \geq 0\,,\quad j \geq 0$

veya

$0 \leq pj \leq m\,,\quad m \geq 0$

yazılır. Böylece $0 \leq j \leq \frac{m}{p}$ olup, j 0'dan $\frac{m}{p}$'ye kadar değişen tamsayılardır. Bu durumda,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A(k,n)t^{n+pk}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{p}\right]}A(j,m-pj)t^{m} \tag{2.11}$$

bağıntısına ulaşılır.

Böylece Eşitlik (2.11)'de $t=1$ ve sağ taraftaki j ve m indisleri yerine k ve n alınırsa Eşitlik (2.7) elde edilir.

b) Eşitlik (2.8) ifadesi, Eşitlik (2.7) ifadesinin ispatına benzer şekilde gösterilir.

Tanım 2.1. Deformed üstel fonksiyonu

$$e_h(x,y)=(1+hx)^{y/h} \qquad \left(x\in\mathbb{C}\setminus\left\{-\frac{1}{h}\right\},\quad y\in\mathbb{R}\right)$$

şeklinde tanımlanır [16].

$e_h(x,y)$ üstel fonksiyonun bazı temel özellikleri şu şekildedir:

- $e_h(x,y)>0 \quad y\in\mathbb{R},\ h<0\ için\ x<-\frac{1}{h}\ \ veya\ \ h>0\ için\ x>-\frac{1}{h}.$
- $e_h(0,y)=e_h(x,0)=1.$
- Eğer h, işaretini değiştirirse

$$e_{-h}(x,y)=e_h(-x,-y) \qquad \left(x\neq\frac{1}{h}\right). \tag{2.12}$$

elde edilir.

- Sadece ikinci değişkene göre olan toplama özelliği;

$$e_h(x,y_1)e_h(x,y_2)=e_h(x,y_1+y_2)$$

dir.

- Deformed üstel fonksiyonlar aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$e_h(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n y^{(n,h)} \qquad (|hx|<1), \tag{2.13}$$

$$e_{-h}(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n y^{[n,h]} \qquad (|hx|<1), \tag{2.14}$$

Özellik 2.1. Gerçek sayıların genelleştirilmiş tamsayı kuvvetlerinin $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için, bazı özellikleri şu şekildedir [16].

- $z^{(0,h)} = z^{[0,h]} = 1,$
- $z^{(n,h)} = \prod_{k=0}^{n-1}(z - kh), \quad (n \in \mathbb{N}),$
- $z^{[n,h]} = \prod_{k=0}^{n-1}(z + kh) \quad (n \in \mathbb{N}),$

Tanım 2.2. Türev operatörünün tanımı şu şekildedir [16]:

$$\Delta_{z,h} f(z) = \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{1}{h}(E_h - I) f(z), \tag{2.15}$$

dir. Burada I birim operatörü, E_h ise shift operatörüdür. Bu h-türev operatörü lineerdir. Bununla birlikte türev operatörünün genel kuralı şu şekildedir:

$$\Delta_{z,h}\big(f(z)g(z)\big) = f(z+h)\Delta_{z,h} g(z) + \Delta_{z,h} f(z) g(z). \tag{2.16}$$

Özellik 2.2. Eğer deformed üstel fonksiyonlar üzerinde h-türev operatörü uygulanırsa şunlar elde edilir [16]:

- $\Delta_{y,h} e_h(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n n y^{(n-1,h)} = x e_h(x,y),$ (2.17)
- $\Delta_{y,h} e_{-h}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n n (y+h)^{[n-1,h)]} = x e_{-h}(x, y+h),$ (2.18)
- $\Delta_{z,h} z^{(n,h)} = n z^{(n-1,h)}, \quad (n \in \mathbb{N}),$
- $\Delta_{z,h} z^{[n,h]} = n(z+h)^{[n-1,h]}, \ (n \in \mathbb{N}).$
- Bu fonksiyonun ilginç bir diferensiyel özelliği de şöyledir:

$$\left((1 + hx)\frac{\partial}{\partial x}\right) e_h(x,y) = y e_h(x,y). \tag{2.19}$$

2.5. DOĞURUCU FONKSİYON

$G(x_1, x_2, \dots, x_p; t)$ fonksiyonu,

$$G(x_1, x_2, \dots, x_p; t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n f_n(x_1, x_2, \dots, x_p) t^n$$

şeklinde t^n'nin kuvvetlerine göre açılabiliyorsa, $G(x_1, x_2, \dots, x_p; t)$ fonksiyonuna $f_n(x_1, x_2, \dots, x_p)$ fonksiyonu için doğurucu fonksiyon denir.

Tanım 2.3. $G(x, y, t)$ fonksiyonu

$$G(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n f_n(x) f_n(y) t^n$$

şeklinde t^n'nin kuvvetlerine göre açılabiliyorsa, $G(x, y, t)$'ye bilinear doğurucu fonksiyon denir. Burada u_n, x ve y'den bağımsızdır. Örneğin, Hermite polinomlarının bilinear doğurucu fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) H_n(y) \frac{t^n}{n!} = (1-4t^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{4xyt - 4(x^2+y^2)t^2}{1-4t^2}\right)$$

şeklindedir [17].

Eğer $G(x_1, x_2, \dots, x_r; t)$, $r+1$ değişkenli fonksiyonu t'nin kuvvetlerine göre

$$G(x_1, \dots, x_r; t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n f_n(x_1) f_n(x_2) \dots f_n(x_r) t^n$$

şeklinde bir seriye açılabiliyorsa $G(x_1, \dots, x_r; t)$ fonksiyonuna, $f_n(x_1)$, $f_n(x_2)$, ... , $f_n(x_r)$ fonksiyonları için multilineer doğurucu fonksiyon denir.

Tanım 2.4. $H(x, y, t)$ fonksiyonu

$$H(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n f_n(x) g_n(y) t^n$$

şeklinde t^n'nin kuvvetlerine göre açılabiliyorsa $H(x,y,t)$'ye bilateral doğurucu fonksiyon denir. Burada h_n, x ve y'den bağımsız, $f_n(x)$ ve $g_n(y)$'ler birbirinden farklı fonksiyonlardır. Bilateral doğurucu fonksiyonlar için

$$(1-y)^{b-c}(1+(x-1)y)^{-b} exp\left\{-\frac{sy}{1-y}\right\} {}_1F_1\left[b;c;\frac{xys}{(1-y)(1-y+xy)}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} {}_2F_1[-n,b;c;x]L_n^{(c-1)}(s)y^n \qquad (|y|<1,\ |(x-1)y|<1),$$

bağıntısı örnek olarak verilebilir [14]. Buradaki $L_n^{(\alpha)}(x)$, Laguerre polinomudur.

Eğer $H(x_1,\dots,x_r;t)$, $r+1$ değişkenli fonksiyonu t'nin kuvvetlerine göre

$$H(x_1,\dots,x_r;t)=\sum_{n=0}^{\infty} h_n f_{1,n}(x_1)\, f_{2,n}(x_2)\dots f_{r,n}(x_r)t^n$$

şeklindeki bir seriye açılabiliyorsa, $H(x_1,\dots,x_r;t)$ fonksiyonuna $f_{1,n}(x_1)$, $f_{2,n}(x_2),\dots,f_{r,n}(x_r)$ fonksiyonları için multilateral doğurucu fonksiyon denir.

3. MITTAG-LEFFLER POLİNOMLARI VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde Mittag-Leffler polinomları, deformed Mittag-Leffler polinomları ve modified Mittag-Leffler polinomları tanıtılacak ve bazı özellikleri verilecektir.

3.1. MITTAG-LEFFLER POLİNOMUNUN TANIMI VE ÖZELLİKLERİ

Mittag-Leffler polinomu 1940 yılında H. Betaman tarafından tanımlanmıştır. Bu polinom $g_n(y)$ ile gösterilir ve

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^y = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(y)x^n \qquad |x| < 1, \tag{3.1}$$

doğurucu fonksiyonuna sahiptir [4]. Bu polinom

$$\begin{aligned} g_n(y) &= 2y\ {}_2F_1[1-n, 1-y; 2; 2] \\ &= 2y \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(1-n)_m (1-y)_m}{(2)_m} \frac{2^m}{m!} \end{aligned} \tag{3.2}$$

toplam ifadesine sahiptir [4]. S. Roman 2005 yılında Mittag-Leffler polinomunu

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} M_n(y)\frac{x^n}{n!} = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^y, \\ &M_n(y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (n-1)_{n-k} 2^k (y)_k \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

şeklinde tanımlamıştır [5]. Buradaki, $(y)_k = y(y-1)(y-2)\ldots(y-k+1)$ dir. Başlangıç değerleri $g_0(y) = 1$, $g_1(y) = 2y$ olan bu polinomun reküran bağıntıları

$$g_n(y+1) - g_{n-1}(y+1) = g_n(y) + g_{n-1}(y) \tag{3.4}$$

ve

$$(n+1)g_{n+1}(y) - 2yg_n(y) + (n-1)g_{n-1}(y) = 0 \tag{3.5}$$

şeklindedir [18], [19]. Bu reküans bağıntıları yardımıyla Mittag-Leffler polinomlarının bazı değerleri aşağıdaki gibidir:

$g_0(y) = 1,$

$g_1(y) = 2y,$

$g_2(y) = 2y^2,$

$$g_3(y) = \frac{4y^3 - 2y}{3},$$

$$g_4(y) = \frac{2y^4 - 4y^2}{3},$$

$$g_5(y) = \frac{4y^5 - 20y^3 + 6y}{15}.$$

Ayrıca bu polinom,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(-iy)g_m(iy)\frac{dy}{ysinh\pi y} = \frac{2}{n}\delta_{mn}, \quad \delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m = n \\ 1\,, & m \neq n \end{cases} \quad (m, n \in N) \tag{3.6}$$

şeklinde bir ortogonal bağıntısına sahiptir [6]. Mittag-Leffler polinomlarına karşılık gelen bir monik polinom

$$\hat{g}_n(y) = \frac{(n!)}{2^n} g_n(y) \tag{3.7}$$

şeklindedir [6]. Bu oluşan monik polinom

$$\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^y = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{g}_n(y)\frac{x^n}{n!} \tag{3.8}$$

şeklinde doğurucu fonksiyona sahiptir [6].

Teorem 3.1. Mittag-Leffler polinomları için aşağıdaki bağıntılar geçerlidir [7]:

a) $g_n(y) = \frac{2y}{n!} M_{n-1}(y-1; 2; -1)$. Buradaki $M_n(y; \beta, c)$, Meixner polinomudur.

b) $M_n(y) = n!\, g_n(y)$. Buradaki $M_n(y)$, Eşitlik (3.3)'te tanımlanmıştır.

c) $g_n(-y) = (-1)^n g_n(y)$ dir.

İspat:

a) $M_n(y; \beta, c)$, Meixner polinomu

$$M_n(y; \beta, c) = (\beta)_n \, {}_2F_1\left[-n, -y; \beta; 1 - \frac{1}{c}\right]$$

şeklinde bir bağıntıya sahiptir [21].

Bu bağıntıda $n = n-1,\ y = y-1,\ \beta = 2,\ c = -1$ alınıp, Pochhammer sembolünün tanımını kullanılır ve Eşitlik (3.3) ifadesi yerine yazılıp, gerekli düzenlemeler yapılırsa ispat tamamlanır. ■

b) Eşitlik (3.1) ve Eşitlik (3.3) bağıntıları birbirine eşitlenir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa istenen eşitlik gösterilmiş olur. Böylece ispat tamamlanır. ■

c) Eşitlik (3.1) bağıntısında $y = -y, x = -x$ yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(-y)(-x)^n = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-y} = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{y} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(y)x^n$$

elde edilir. İki serinin eşitliği kullanılırsa ispat tamamlanır. ■

3.2. DEFORMED MITTAG-LEFFLER POLİNOMUNUN TANIMI VE ÖZELLİKLERİ

2011 yılında Stanković ve arkadaşları deformed Mittag-Leffler polinomlarını

$$G_h(x,y) = e_h(x,y)e_{-h}(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(h)}(y)x^n, \quad (h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \tag{3.9}$$

şeklinde tanımlamışlardır. Buradaki $G_h(x,y)$, deformed Mittag-Leffler polinomunun bir doğurucu fonksiyonudur [6]. Bu polinom için, Eşitlik (2.13) ve Eşitlik (2.14) bağıntıları taraf tarafa çarpılırsa,

$$e_h(x,y)e_{-h}(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n,h)}}{n!} x^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^{[m,h]}}{m!} x^m$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{y^{(m,h)} y^{[n-m,h]}}{m!(n-m)!} x^n,$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa, deformed Mittag-Leffler polinomunun

$$g_n^{(h)}(y) = \sum_{m=0}^{n} \frac{y^{(m,h)} y^{[n-m,h]}}{m!(n-m)!} = \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} y^{(m,h)} y^{[n-m,h]} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

toplam ifadesi elde edilir. Deformed Mittag-Leffler polinomları için, Eşitlik (3.9) ve Eşitlik (2.12) bağıntıları kullanılırsa şu özellikler elde edilir:

a) $G_h(x,y) = \ G_h(-x,-y) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(h)}(-y)(-1)^n x^n$

b) $g_n^{(h)}(-y) = (-1)^n g_n^{(h)}(y)$

c) $G_h(x,y) = G_{-h}(x,y)$

d) $g_n^{(-h)}(y) = g_n^{(h)}(y)$

Teorem 3.2. Deformed Mittag-Leffler polinomları $g_n^{(h)}(y)$ için aşağıdaki rekürans bağıntısı geçerlidir [6]:

$$(n+1)g_{n+1}^{(h)}(y) - 2yg_n^{(h)}(y) - h^2(n-1)g_{n-1}^{(h)}(y) = 0 \qquad (n \geq 2), \tag{3.10}$$

$$g_0^{(h)}(y) = 1, \qquad g_1^{(h)}(y) = 2y.$$

İspat: İlk olarak,

$$\frac{\partial}{\partial x} G_h(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} e_h(x,y)e_{-h}(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} e_h(x,y)\right) e_{-h}(x,y) + e_h(x,y) \left(\frac{\partial}{\partial x} e_{-h}(x,y)\right)$$

çarpmanın türevi alınır.

$e_h(x,y)$'nin (2.19)'daki özelliğine göre $(1-hx)(1+hx)$ ile çarpılırsa

$$(1-h^2x^2)\frac{\partial}{\partial x} G_h(x,y) = (1-hx)y\, e_h(x,y)e_{-h}(x,y) + (1+hx)e_h(x,y)y\, e_{-h}(x,y)$$

$$= 2yG_h(x,y).$$

elde edilir.

Yani,

$$\frac{\partial}{\partial x} G_h(x,y) = \frac{2y}{(1-h^2x^2)} G_h(x,y) \tag{3.11}$$

elde edilir.

Eşitlik (3.9) bağıntısının her iki tarafının x'e göre türevi alınır, Eşitlik (3.11) bağıntısı kullanılırsa ispat tamamlanmış olur. ■

Eşitlik (3.10) yardımıyla deformed Mittag-Leffler polinomlarının bazı değerleri aşağıdaki gibidir:

$$g_0^{(h)}(y) = 1,$$

$$g_1^{(h)}(y) = 2y,$$

$$g_2^{(h)}(y) = 2y^2,$$

$$g_3^{(h)}(y) = \frac{2}{3}y(2y^2 + h^2),$$

$$g_4^{(h)}(y) = \frac{2}{3}y^2(y^2 + 2h^2),$$

$$g_5^{(h)}(y) = \frac{2}{15}y(2y^4 + 10h^2y^2 + 3h^4).$$

Teorem 3.3. Deformed Mittag-Leffler polinomları $g_n^{(h)}(y)$ aşağıdaki rekürans bağıntısına sahiptir [6]:

$$g_n^{(h)}(y+h) - g_n^{(h)}(y) = h\left(g_{n-1}^{(h)}(y+h) + g_{n-1}^{(h)}(y)\right) \qquad (n \geq 1).$$

İspat: Eşitlik (2.16), Eşitlik (2.17), Eşitlik (2.18) bağıntıları kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\Delta_{y,h}G_h(x,y) &= \Delta_{y,h}(e_h(x,y)e_{-h}(x,y)) \\
&= e_h(x,y+h)\Delta_{y,h}e_{-h}(x,y) + e_{-h}(x,y)\Delta_{y,h}e_h(x,y) \\
&= x(e_h(x,y+h)e_{-h}(x,y+h) + e_h(x,y)e_{-h}(x,y)) \\
&= x(G_h(x,y+h) + G_h(x,y))
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. $\Delta_{y,h}$ operatörünün doğrusallığı dikkate alınıp, bu son ifade Eşitlik (3.9) bağıntısında kullanılırsa ve $n \to n-1$ dönüşümü uygulanırsa ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.4. Deformed Mittag-Leffler polinomları aşağıdaki bağıntıya sahiptir [6]:

$$g_n^{(h)}(y) = 2yh^{n-1}\ {}_2F_1[1-n, 1-\tfrac{y}{h}; 2; 2] \qquad (n \in \mathbb{N}), \tag{3.12}$$

Buradaki, ${}_2F_1$ Gauss hipergeometrik fonksiyondur.

Teorem 3.5. Deformed Mittag-Leffler polinomları aşağıdaki bağıntıya sahiptir [20]:

$$g_n^{(h)}(y) = 2y\left(\tfrac{1-y}{h}\right)^{1-n} F_1\left[1-n, 1-\tfrac{y}{h}; 1+\tfrac{y}{h}; 2; 2-y, y\right] \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Buradaki, F_1 iki değişkenli Appell hipergeometrik fonksiyondur.

İspat: F_1 iki değişkenli Appell hipergeometrik fonksiyonu

$${}_2F_1\left[a, b; b+b'; \tfrac{x-y}{1-y}\right] = \tfrac{1}{(1-y)^{-a}}\ F_1[a, b, b'; b+b'; x, y]$$

şeklinde tanımlanmıştır [14].

Bu bağıntıda $a = 1-n$, $b = 1-\frac{y}{h}$, $b' = 1+\frac{y}{h}$, $x = 2-y$ alınırsa,

$${}_2F_1[1-n, 1-\tfrac{y}{h}; 2; 2] = \tfrac{1}{(1-y)^{n-1}} F_1\left[1-n, 1-\tfrac{y}{h}, 1+\tfrac{y}{h}; 2; 2-y, y\right]$$

elde edilir. Eşitlik (3.12) bağıntısı kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} g_n^{(h)}(y) &= 2yh^{n-1}\ {}_2F_1\left[1-n, 1-\frac{y}{h}; 2; 2\right] \\ &= 2yh^{n-1} \tfrac{1}{(1-y)^{n-1}} F_1\left[1-n, 1-\tfrac{y}{h}, 1+\tfrac{y}{h}; 2; 2-y, y\right] \\ &= 2y\left(\tfrac{h}{1-y}\right)^{n-1} F_1\left[1-n, 1-\tfrac{y}{h}, 1+\tfrac{y}{h}; 2; 2-y, y\right] \\ &= 2y\left(\tfrac{1-y}{h}\right)^{1-n} F_1\left[1-n, 1-\tfrac{y}{h}, 1+\tfrac{y}{h}; 2; 2-y, y\right] \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 3.6. Deformed Mittag-Leffler polinomları aşağıdaki bağıntıya sahiptir [20]:

$$g_n^{(h)}(y) = 2y\left(\frac{1-y}{h}\right)^{1-n}\left(\frac{y}{2-y}\right)^{1-\frac{y}{h}} F_2\left[2,1-\frac{y}{h},1-n;2,2;\frac{2-2y}{2-y},y\right] \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

Buradaki, F_2 iki değişkenli Appell hipergeometrik fonksiyondur.

İspat: : F_1 iki değişkenli Appell hipergeometrik fonksiyonu

$${}_2F_1\left[a,b;b+b';\frac{x-y}{1-y}\right] = \frac{1}{(1-y)^{-a}}\ F_1[a,b,b';b+b';x,y]$$

şeklinde bir bağıntıya sahiptir [14]. Bu bağıntıda $a = 1-n$, $b = 1-\frac{y}{h}$, $b' = 1+\frac{y}{h}$, $x = 2-y$ alınırsa,

$${}_2F_1\left[1-n,1-\frac{y}{h};2;2\right] = \frac{1}{(1-y)^{n-1}} F_1\left[1-n,1-\frac{y}{h},1+\frac{y}{h};2;2-y,y\right]$$

elde edilir. Aynı zamanda, F_2 iki değişkenli Appell hipergeometrik fonksiyonu

$$F_1\left[b',b,a-b;c';\frac{y}{1-x},y\right] = \frac{1}{(1-x)^{-b}}\ F_2[a,b,b';a,c';x,y]$$

şeklinde bir bağıntıya sahiptir [14]. Bu bağıntıda $b' = 1-n$, $b = 1-\frac{y}{h}$, $a = 2$, $c' = 2$, $\frac{y}{1-x} = 2-y$ alınırsa,

$$F_1\left[1-n,1-\frac{y}{h},1+\frac{y}{h};2;2-y,y\right] = \frac{1}{\left(1-\frac{2-2y}{2-y}\right)^{-1+\frac{y}{h}}} F_2\left[2,1-\frac{y}{h},1-n;2,2;\frac{2-2y}{2-y},y\right]$$

$$= \left(\frac{y}{2-y}\right)^{1-\frac{y}{h}} F_2\left[2,1-\frac{y}{h},1-n;2,2;\frac{2-2y}{2-y},y\right]$$

elde edilir.

Teorem 3.5'deki bağıntı kullanılırsa,

$$g_n^{(h)}(y) = 2yh^{n-1}\ {}_2F_1\left[1-n, 1-\frac{y}{h}; 2; 2\right]$$

$$= 2yh^{n-1}\frac{1}{(1-y)^{n-1}}F_1\left[1-n, 1-\frac{y}{h}, 1+\frac{y}{h}; 2; 2-y, y\right]$$

$$= 2yh^{n-1}\frac{1}{(1-y)^{n-1}}\frac{1}{\left(1-\frac{2-2y}{2-y}\right)^{-1+\frac{y}{h}}}\ F_2\left[2,1-\frac{y}{h}, 1-n; 2,2; \frac{2-2y}{2-y}, y\right]$$

$$= 2y\left(\frac{h}{1-y}\right)^{n-1}\left(\frac{y}{2-y}\right)^{1-\frac{y}{h}}F_2\left[2,1-\frac{y}{h}, 1-n; 2,2; \frac{2-2y}{2-y}, y\right]$$

$$= 2y\left(\frac{1-y}{h}\right)^{1-n}\left(\frac{y}{2-y}\right)^{1-\frac{y}{h}}F_2\left[2,1-\frac{y}{h}, 1-n; 2,2; \frac{2-2y}{2-y}, y\right]$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.7. Deformed Mittag-Leffler polinomu için aşağıdaki doğurucu fonksiyon bağıntısı geçerlidir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(h)}(y)x^n = \frac{2y}{h}(1-xh)^{-1}F_1\left[1-\frac{y}{h}, 1,1; 2; 2, \frac{2xh}{xh-1}\right].$$

İspat: Eşitlik (3.12) bağıntısı kullanılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(h)}(y)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2yh^{n-1}\ {}_2F_1\left(1-n, 1-\frac{y}{h}; 2; 2\right)x^n \tag{3.13}$$

elde edilir. Gauss hipergeometrik fonksiyonlar için

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n}{n!}\ {}_2F_1[\rho-n, \alpha; \gamma; z]t^n = (1-t)^{-\lambda}\ F_1\left[\alpha, \rho, \lambda; \gamma; z, \frac{zt}{t-1}\right], \quad |t| < 1. \tag{3.14}$$

bağıntısına sahiptir [14].

Eşitlik (3.14) bağıntısında $\lambda = 1,\ \rho = 1, \alpha = 1-\frac{y}{h},\ \gamma = 2,\ z = 2,\ t = xh$ alınırsa

Eşitlik (3.13) bağıntısı,

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(h)}(y)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2yh^{n-1}\ {}_2F_1\left(1-n, 1-\frac{y}{h}; 2; 2\right) x^n$$

$$= \frac{2y}{h}\sum_{n=0}^{\infty}\ {}_2F_1\left(1-n, 1-\frac{y}{h}; 2; 2\right)(xh)^n$$

$$= \frac{2y}{h}(1-xh)^{-1}F_1\left[1-\frac{y}{h}, 1,1; 2; 2, \frac{2xh}{xh-1}\right],\ |xh| < 1,$$

şeklinde elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 3.8. Deformed Mittag-Leffler polinomu için aşağıdaki doğurucu fonksiyon bağıntısı geçerlidir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(h)}(y)x^n = \frac{2y}{h}(1-xh)^{-1}\ {}_2F_1\left[1-\frac{y}{h}, 1; 2; \frac{2}{1-xh}\right].$$

İspat: Gauss hipergeometrik fonksiyon aşağıdaki bağıntıya sahiptir [14].

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n}{n!}\ {}_2F_1[\rho-n, \alpha; \lambda+\rho; z]t^n$$

$$= (1-z)^{-\alpha}(1-t)^{-\lambda}\ {}_2F_1\left[\alpha, \lambda; \lambda+\rho; \frac{z}{(1-z)(t-1)}\right]. \quad (3.15)$$

Eşitlik (3.15) bağıntısında $\lambda = 1,\ \rho = 1,\ \alpha = 1-\frac{y}{h}, z = 2,\ t = xh$ alınır ve Eşitlik (3.13) bağıntısı kullanılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(h)}(y)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2yh^{n-1}\ {}_2F_1\left(1-n, 1-\frac{y}{h}; 2; 2\right) x^n$$

$$= \frac{2y}{h}\sum_{n=0}^{\infty}\ {}_2F_1\left(1-n, 1-\frac{y}{h}; 2; 2\right)(xh)^n$$

$$= \frac{2y}{h}(1-xh)^{-1}\ {}_2F_1\left[1-\frac{y}{h}, 1; 2; \frac{2}{(1-2)(xh-1)}\right]$$

$$= \frac{2y}{h}(1-xh)^{-1}\ {}_2F_1\left[1-\frac{y}{h}, 1; 2; \frac{2}{1-xh}\right],$$

elde edilir. İspat tamamlanır. ■

Teorem 3.9. Deformed Mittag-Leffler polinomu için aşağıdaki bilateral doğurucu fonksiyon bağıntısı geçerlidir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(h)}(y) F_{v:q;s}^{u+1:p;r}\left[\begin{array}{c} -n,(e_u):(a_p);(c_r); \\ \\ (f_v):(b_q);(d_s); \end{array} z,t\right] x^n$$

$$= \frac{2y}{h}(-1)^{-1+\frac{y}{h}}(1-xh)^{-1}$$

$$\times F^{(3)}\left[\begin{array}{l} 1::-;\ (e_u);\ -:\ 1-\frac{y}{h};(a_p);(c_r); \\ \\ -::-;\ (f_v);\ \ -:\ \ 2\ ;\ \ (b_q);\ (d_s); \end{array} \frac{2}{1-xh},\frac{zxh}{xh-1},\frac{txh}{xh-1}\right].$$

İspat: Gauss hipergeometrik fonksiyon aşağıdaki bağıntıya sahiptir [14].

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n}{n!}\ {}_2F_1[\rho-n,\alpha;\lambda+\rho;\omega] F_{v:q;s}^{u+1:p;r}\left[\begin{array}{c} -n,(e_u):(a_p);(c_r); \\ \\ (f_v):(b_q);(d_s); \end{array} z,t\right] x^n$$

$$= (1-\omega)^{-\alpha}(1-x)^{-\lambda}$$

$$\times F^{(3)}\left[\begin{array}{l} \lambda::-;(e_u);-:\qquad \alpha;\ (a_p);\ (c_r); \\ \\ -::-\ ;\ (f_v);\ -:\ \lambda+\rho;\ (b_q);\ (d_s); \end{array} \frac{\omega}{(1-\omega)(x-1)},\frac{zx}{x-1},\frac{tx}{x-1}\right]. \qquad (3.16)$$

Eşitlik (3.16) bağıntısında $\lambda=1,\ \ \rho=1,\ \ \alpha=1-\frac{y}{h},\ \ \omega=2$ alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}\ {}_2F_1\left[1-n,1-\frac{y}{h};2;2\right] F_{v:q;s}^{u+1:p;r}\left[\begin{array}{c} -n,(e_u):(a_p);(c_r); \\ \\ (f_v):(b_q);(d_s); \end{array} z,t\right] x^n$$

$$= (-1)^{-1+\frac{y}{h}}(1-x)^{-1}$$

$$\times F^{(3)}\left[\begin{array}{l} 1::-;(e_u);\ \ -:\ \ 1-\frac{y}{h};(a_p);(c_r); \\ \\ -::\ \ -;\ (f_v);\ \ -:\ \ 2;\ \ \ (b_q);\ (d_s); \end{array} \frac{2}{1-x},\frac{zx}{x-1},\frac{tx}{x-1}\right]$$

elde edilir.

Bu bağıntıda $x = xh$ alınır ve Eşitlik (3.12) bağıntısı kullanılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(h)}(y) F_{v:q;s}^{u+1:p;r}\left[\begin{matrix} -n,(e_u):(a_p);(c_r); \\ \\ (f_v):(b_q);(d_s); \end{matrix}\ z,t\right] x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 2yh^{n-1}\ {}_2F_1\left(1-n,1-\frac{y}{h};2;2\right) F_{v:q;s}^{u+1:p;r}\left[\begin{matrix} -n,(e_u):(a_p);(c_r); \\ \\ (f_v):(b_q);(d_s); \end{matrix}\ z,t\right] x^n$$

$$= \frac{2y}{h}\sum_{n=0}^{\infty}\ {}_2F_1\left(1-n,1-\frac{y}{h};2;2\right) F_{v:q;s}^{u+1:p;r}\left[\begin{matrix} -n,(e_u):(a_p);(c_r); \\ \\ (f_v):(b_q);(d_s); \end{matrix}\ z,t\right] (xh)^n$$

$$= \frac{2y}{h}(-1)^{-1+\frac{y}{h}}(1-xh)^{-1}$$

$$\times F^{(3)}\left[\begin{matrix} 1 :: -;\ (e_u);\ -:\ 1-\frac{y}{h};(a_p);(c_r); \\ \\ -:: -;\ (f_v);\ \ -:\ \ 2\ ;\ \ (b_q);\ (d_s); \end{matrix}\ \frac{2}{1-xh},\frac{zxh}{xh-1},\frac{txh}{xh-1}\right]$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 3.10. Deformed Mittag-Leffler polinomu için aşağıdaki doğurucu fonksiyon bağıntısı geçerlidir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(h)}(y) z^n = \frac{2y}{h}(1-zh)^{-1} F_{1:0;0}^{1:1;1}\left[\begin{matrix} 1-\frac{y}{h}:1;1; \\ \\ 2:-;-; \end{matrix}\ 2,\frac{2zh}{zh-1}\right].$$

İspat: Genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon aşağıdaki bağıntıya sahiptir [14].

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n}{n!}\ {}_{p+1}F_q\left[-m-n,(a_p);(b_q);x\right] z^n$$

$$= (1-z)^{-\lambda} F_{q:0;0}^{p:1;1}\left[\begin{matrix} (a_p):-m;\lambda; \\ \\ (b_q):-;-; \end{matrix}\ x,\frac{xz}{z-1}\right], |z|<1.$$

Bu bağıntıda $\lambda = 1,\ p = 1,\ q = 1,\ m = -1,\ (a_p) = 1 - \frac{y}{h},\ (b_q) = 2,\ x = 2,$ alınır ve Eşitlik (3.13) bağıntısı kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(h)}(y) z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} 2yh^{n-1}\ {}_2F_1\left(1-n, 1-\frac{y}{h}; 2; 2\right) z^n \\ &= \frac{2y}{h} \sum_{n=0}^{\infty}\ {}_2F_1\left(1-n, 1-\frac{y}{h}; 2; 2\right)(zh)^n \\ &= \frac{2y}{h}(1-zh)^{-1} F_{1:0;0}^{1:1;1}\left[\begin{array}{c} 1-\frac{y}{h} : 1; 1; \\ \\ 2: -; -; \end{array} 2, \frac{2zh}{zh-1}\right],\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 3.11. Deformed Mittag-Leffler polinomu için aşağıdaki bilinear doğurucu fonksiyon bağıntısı geçerlidir:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(h)}(y) g_{n+1}^{(h)}(z) x^n &= \frac{4yz}{h}(-1)^{-1+\frac{y}{h}}(1-xh^2)^{-1} \\ &\times F_2\left[1, 1-\frac{y}{h}, 1-\frac{z}{h}; 2, 2; \frac{2}{1-xh^2}, \frac{2xh^2}{xh^2-1}\right].\end{aligned}$$

İspat: Gauss hipergeometrik fonksiyon aşağıdaki bağıntıya sahiptir [14].

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta-\rho)_n}{n!}\ {}_2F_1(\rho-n, \alpha; \beta; x)\ {}_2F_1(-n, \gamma; \delta; y) t^n &= (1-x)^{-\alpha}(1-t)^{\rho-\beta} \\ &\times F_2\left[\beta-\rho, \alpha, \gamma; \beta, \delta; \frac{x}{(1-x)(t-1)}, \frac{yt}{t-1}\right]. \qquad (3.17)\end{aligned}$$

Eşitlik (3.17) bağıntısında $x = 2,\ \rho = 1,\ \beta = 2,\ \alpha = 1 - \frac{y}{h},\ \gamma = 1 - \frac{z}{h},\ \delta = 2,$ $y = 2,\ \ t = xh^2$ alınır ve Eşitlik (3.13) bağıntısı kullanılırsa,

$\sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(h)}(y) g_{n+1}^{(h)}(z) x^n$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 2yh^{n-1} \; {}_2F_1\left(1-n, 1-\frac{y}{h}; 2; 2\right) 2zh^n \; {}_2F_1\left(-n, 1-\frac{z}{h}; 2; 2\right) x^n$$

$$= \frac{4yz}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \; {}_2F_1\left(1-n, 1-\frac{y}{h}; 2; 2\right) \; {}_2F_1\left(-n, 1-\frac{z}{h}; 2; 2\right) (xh^2)^n$$

$$= \frac{4yz}{h} (1-2)^{-1+\frac{y}{h}} (1-xh^2)^{-1} F_2\left[1,1-\frac{y}{h}, 1-\frac{z}{h}; 2,2; \frac{2}{(1-2)(xh^2-1)}, \frac{2xh^2}{xh^2-1}\right]$$

$$= \frac{4yz}{h} (-1)^{-1+\frac{y}{h}} (1-xh^2)^{-1} F_2\left[1,1-\frac{y}{h}, 1-\frac{z}{h}; 2,2; \frac{2}{1-xh^2}, \frac{2xh^2}{xh^2-1}\right],$$

elde edilir. İspat tamamlanır. ■

Teorem 3.12. Deformed Mittag-Leffler polinomu için aşağıdaki ortogonal bağıntısı geçerlidir [6]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_n^{(h)}(iy)\, g_m{}^{(h)}(-iy) \frac{dy}{y\sinh\left(\frac{\pi y}{h}\right)} = \frac{2h^{2n-2}}{n} \delta_{mn} \qquad (m, n \in \mathbb{N}).$$

İspat: Gauss hipergeometrik fonksiyonların integral gösterimi için [14],

$${}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-zt)^{-b} dt,$$

bağıntısı geçerlidir. Bu bağıntıda $a = 1-\frac{y}{h},\ b = 1-n,\ c = 2,\ z = 2,\ t = u$ alınır ve Eşitlik (3.12) bağıntısı kullanılırsa,

$$g_n^{(h)}(y) = 2yh^{n-1} \frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(1-\frac{y}{h}\right)\Gamma(1+\frac{y}{h})} \int_0^1 u^{-\frac{y}{h}}(1-u)^{\frac{y}{h}}(1-2u)^{n-1} du$$

$$= \frac{h^n}{\pi} \sin\frac{\pi y}{h} \int_{-1}^{1} u^{n-1}(1+u)^{\frac{y}{h}}(1-u)^{-\frac{y}{h}} du \qquad (3.18)$$

elde edilir. Eşitlik (3.18) bağıntısında $u = \tanh\left(\frac{ht}{2}\right)$ dönüşümü yapılırsa,

$$g_n^{(h)}(y) = \frac{h^n}{\pi} \sin\frac{\pi y}{h} \int_{-\infty}^{\infty} (\tanh\frac{ht}{2})^n \frac{e^{ty}}{\sinh ht} dt,$$

elde edilir. Böylece, bu son eşitlikten,

$$g_n^{(h)}(iy) = \frac{ih^n}{\pi}\sinh\frac{\pi y}{h}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ity}(\tanh\frac{ht}{2})^n \frac{dt}{\sinh ht}$$

$$= ih^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, sinh\frac{\pi y}{h}\mathcal{F}\left((tanh\frac{ht}{2})^n \frac{1}{sinh\, ht}\right),$$

elde edilir. Buradaki $\varphi(t) \to \Phi(y) = \mathcal{F}(\varphi(t))$ Fourier dönüşümüdür. Ters Fourier dönüşümü uygulanırsa,

$$\left(tanh\frac{ht}{2}\right)^n \frac{1}{sinh\, ht} = ih^n\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{g_n{}^{(h)}(iy)}{sinh\left(\frac{\pi y}{h}\right)}\right),$$

elde edilir. Diğer bir deyişle,

$$(tanh\frac{ht}{2})^n = \frac{1}{2ih^n}\, sinh\, ht\int_{-\infty}^{\infty} e^{ity}\frac{g_n{}^{(h)}(iy)}{sinh\left(\frac{\pi y}{h}\right)}dy. \tag{3.19}$$

Ayrıca Eşitlik (3.11)'e göre,

$$\sinh ht\, e^{ity} = \frac{2\tanh\left(\frac{ht}{2}\right)}{1-\tan h^2\left(\frac{ht}{2}\right)}\left(\frac{1+\tanh\left(\frac{ht}{2}\right)}{1-\tanh\left(\frac{ht}{2}\right)}\right)^{\frac{-iy}{h}}$$

$$= \frac{ih}{y}\tanh\frac{ht}{2}\frac{\partial}{\partial x}G_h(x,-iy)\Big|_{x=\frac{1}{h}\tanh\left(\frac{ht}{2}\right)}$$

elde edilir. Buradan,

$$\frac{\partial}{\partial x}G_h(x,-iy)\Big|_{x=\frac{1}{h}\tanh\left(\frac{ht}{2}\right)} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{h^{m-1}}g_m{}^{(h)}(-iy)\left(\tanh\frac{ht}{2}\right)^{m-1}$$

olduğundan dolayı,

$$\sinh ht\, e^{-ity} = \frac{ih}{y}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{h^{m-1}}\, g_m{}^{(h)}(-iy)\left(\tanh\frac{ht}{2}\right)^m,$$

elde edilir. Son ifade, Eşitlik (3.19)'da yerine yazılırsa,

$$\left(\tanh\frac{ht}{2}\right)^n = \frac{1}{2h^{n-1}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{h^{m-1}}\left(\tanh\frac{ht}{2}\right)^m \int_{-\infty}^{\infty}\frac{g_n{}^{(h)}(iy)g_m{}^{(h)}(-iy)}{ysinh\left(\frac{\pi y}{h}\right)}\,dy,$$

elde edilir. $\tanh\left(\frac{ht}{2}\right)$ ile katsayıların karşılaştırılmasıyla gerekli bağıntılar elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Deformed Mittag-Leffler polinomlarına $g_n^{(h)}(y)$ karşılık gelen bir monik polinom $\hat{g}_n^{(h)}(y)$,

$$\hat{g}_n^{(h)}(y) = \frac{n!}{2^n}\, g_n^{(h)}(y). \tag{3.20}$$

şeklinde tanımlanmıştır [6]. Bu oluşan monik polinom

$$\hat{G}_h(x,y) = e_h\left(\frac{x}{2},y\right)e_{-h}\left(\frac{x}{2},y\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\hat{g}_n(y)\frac{x^n}{n!}.$$

şeklinde doğurucu fonksiyon bağıntısına sahiptir [6]. Bu polinomun rekürans bağıntısı aşağıdaki gibidir [6]:

$$\hat{g}_{n+1}^{(h)}(y) = y\hat{g}_n^{(h)}(y) + h^2\frac{n(n-1)}{4}\hat{g}_{n-1}^{(h)}(y)\,. \tag{3.21}$$

Eşitlik (3.20) ve Eşitlik (3.21) bağıntıları yardımıyla bu oluşan monik polinomun bazı değerleri şu şekildedir:

$$\hat{g}_0^{(h)}(y) = 1$$

$$\hat{g}_1^{(h)}(y) = y$$

$$\hat{g}_2^{(h)}(y) = y^2$$

$$\hat{g}_3^{(h)}(y) = y^3 + \frac{h^2 y}{2}$$

$$\hat{g}_4^{(h)}(y) = y^4 + 2h^2 y^2$$

$$\hat{g}_5^{(h)}(y) = y^5 + 5h^2 y^3 + \frac{3}{2} h^4 y.$$

3.3. MODIFIED MITTAG-LEFFLER POLİNOMUNUN TANIMI VE ÖZELLİKLERİ

Modified Mittag-Leffler polinomları, Mittag-Leffler polinomları yardımıyla aşağıdaki gibi tanımlanır [6]:

$$\varphi_n(y) = \frac{g_{n+1}(iy)}{i^{n+1} y} \qquad (n \in \mathbb{N}_0). \tag{3.22}$$

Teorem 3.13. Modified Mittag-Leffler polinomları $\varphi_n(y)$ aşağıdaki rekürans bağıntısına sahiptir [6]:

$$(n+2)\varphi_{n+1}(y) = 2y\varphi_n(y) + n\varphi_{n-1}(y) \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{3.23}$$
$$\varphi_0(y) = 2, \quad \varphi_1(y) = 2y.$$

İspat: Eşitlik (3.23) bağıntısını ispatlamak için, Eşitlik (3.5) ve Eşitlik (3.22) bağıntısı kullanılırsa ve gerekli düzenlemeler yapılırsa ispat tamamlanır. ■

Eşitlik (3.22) ve Eşitlik (3.23) bağıntıları yardımıyla bu polinomun bazı değerleri şu şekildedir:

$\varphi_0(y) = 2,$

$\varphi_1(y) = 2y$

$\varphi_2(y) = \frac{4y^2 + 2}{3},$

$\varphi_3(y) = \frac{2y^3 + 4y}{3},$

$\varphi_4(y) = \frac{4y^4 + 20y^2 + 6}{15},$

$\varphi_5(y) = \frac{4y^5 + 40y^3 + 41y}{45}.$

Teorem 3.14. Modified Mittag-Leffler polinomları aşağıdaki doğurucu fonksiyona sahiptir [6]:

$$\mathcal{G}(x,y) = \frac{exp(2yarctanx)-1}{xy} = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(y)x^n. \quad (3.24)$$

İspat: Eşitlik (3.23) bağıntısının her iki tarafının $n = 1$'den ∞'a kadar toplamı alınırsa,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)\varphi_{n+1}(y)x^n - 2y\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(y)x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n\varphi_{n-1}(y)x^n = 0$$

bağıntısı elde edilir. Bu bağıntıda gerekli dönüşümler yapılırsa,

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)\varphi_n(y)x^{n-1} - 2y\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(y)x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\varphi_n(y)x^{n+1} = 0$$

elde edilir. Bu ifadenin yerine aşağıdaki bağıntı yazılabilir.

$$\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\sum_{n=2}^{\infty}\varphi_n(y)x^n\right) - 2y\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(y)x^n + x\frac{\partial}{\partial x}\left(x\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(y)x^n\right) = 0.$$

Buradan,

$$(1+x^2)\frac{\partial}{\partial x}\big(x\mathcal{G}(x,y)\big)-2yx\mathcal{G}(x,y)-2=0$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Başlangıç değeri $x\mathcal{G}(x,y)|_{x=0}=0$ ile elde edilen diferensiyel denklemin çözümü, doğurucu fonksiyonu verir. Böylece ispat tamamlanır.■

Özellik 3.1. Modified Mittag-Leffler polinomları aşağıdaki bağıntıya sahiptir [6]:

$$\varphi_n(-y)=(-1)^n\varphi_n(y) \qquad (n\in\mathbb{N}). \tag{3.25}$$

İspat: Teorem (3.1)/c ifadesi ve Eşitlik (3.22)'deki bağıntı kullanılırsa,

$$\varphi_n(y)=\frac{g_{n+1}(iy)}{i^{n+1}y} \quad \text{ve} \quad \varphi_n(-y)=\frac{g_{n+1}(-iy)}{-i^{n+1}y}=\frac{(-1)^{n+1}g_{n+1}(iy)}{-i^{n+1}y}$$

elde edilir. Bu iki ifade taraf tarafa oranlanırsa,

$$\frac{\varphi_n(-y)}{\varphi_n(y)}=\frac{\frac{(-1)^{n+1}g_{n+1}(iy)}{-i^{n+1}y}}{\frac{g_{n+1}(iy)}{i^{n+1}y}}=-(-1)^{n+1}=-[(-1)^n(-1)]=(-1)^n$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 3.15. Modified Mittag-Leffler polinomu aşağıdaki ortogonal bağıntısına sahiptir [6]:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n(y)\varphi_m(y)\frac{y}{sinh(\pi y)}dy=\frac{2}{n+1}\delta_{mn} \qquad (m,n\in\mathbb{N}_0).$$

İspat: Eşitlik (3.6) ve Eşitlik (3.23) bağıntıları kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa ispat tamamlanır. ■

Modified Mittag-Leffler polinomlarına karşılık gelen bir monik polinom $\hat{\varphi}_n(y)$,

$$\hat{\varphi}_n(y) = \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} \varphi_n(y) \qquad (n \in \mathbb{N}_0). \tag{3.26}$$

şeklinde tanımlanmıştır [6]. Bu oluşan monik polinomun rekürans bağıntısı aşağıdaki gibidir [6]:

$$\hat{\varphi}_{n+1}(y) = y\hat{\varphi}_n(y) + \frac{n(n+1)}{4} \hat{\varphi}_{n-1}(y) \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{3.27}$$

Eşitlik (3.26) ve Eşitlik (3.27) bağıntıları yardımıyla bu oluşan monik polinomun bazı değerleri şu şekildedir:

$$\hat{\varphi}_0(y) = 1,$$

$$\hat{\varphi}_1(y) = y,$$

$$\hat{\varphi}_2(y) = y^2 + \frac{1}{2},$$

$$\hat{\varphi}_3(y) = y^3 + 2y,$$

$$\hat{\varphi}_4(y) = y^4 + 5y^2 + \frac{3}{2},$$

$$\hat{\varphi}_5(y) = y^5 + 10y^3 + \frac{23}{2}y.$$

Teorem 3.16. Monik modified Mittag-Leffler polinomu $\hat{\varphi}_n(y)$, aşağıdaki doğurucu fonksiyon bağıntısına sahiptir [6]:

$$\hat{G}(x,y) = \frac{4\,exp\left(2yarctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{x^2+4} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\varphi}_n(y) \frac{x^n}{n!} \tag{3.28}$$

İspat: Eşitlik (3.27) bağıntısının her iki tarafının $n = 1$'den ∞'a kadar toplamı alınırsa,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \hat{\varphi}_{n+1}(y)\frac{x^n}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty} y\hat{\varphi}_n(y)\frac{x^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{4}\hat{\varphi}_{n-1}(y)\frac{x^n}{n!} = 0$$

bağıntısı elde edilir. Gerekli dönüşümler yapılırsa,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \hat{\varphi}_n(y)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - y\sum_{n=1}^{\infty} \hat{\varphi}_n(y)\frac{x^n}{n!} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)\hat{\varphi}_n(y)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

elde edilir. Bu ifadenin yerine aşağıdaki bağıntı yazılabilir.

$$\frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathcal{G}}(x,y) - y\hat{\mathcal{G}}(x,y) + \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\hat{\mathcal{G}}(x,y)\right) = 0$$

Buradan,

$$\frac{d\hat{\mathcal{G}}}{\hat{\mathcal{G}}} = 2\frac{2y-x}{x^2+4}dx$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Başlangıç değeri $\hat{\mathcal{G}}(0,y) = 1$ ile elde edilen diferensiyel denklemin çözümü, doğurucu fonksiyonu verir. Böylece ispat tamamlanır.■

Aynı şekilde modified deformed Mittag-Leffler polinomları, deformed Mittag-Leffler polinomları yardımıyla aşağıdaki gibi tanımlanmıştır [6]:

$$\varphi_n^{(h)}(y) = \frac{g_{n+1}^{(h)}(iy)}{i^{n+1}y} \qquad (n \in \mathbb{N}_0). \tag{3.29}$$

Modified deformed Mittag-Leffler $\varphi_n^{(h)}(y)$ polinomu, modified Mittag-Leffler $\varphi_n(y)$ polinomunun özellikleri yardımıyla türetilebilir. Bu yüzden modified deformed Mittag-Leffler polinomlarının sonuçları ispatsız olarak verilecektir.

İlk olarak,

$$\varphi_n^{(h)}(-y) = (-1)^n \varphi_n^{(h)}(y) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

özelliğine sahiptir.

Teorem 3.17. Modified deformed Mittag-Leffler $\varphi_n^{(h)}(y)$ polinomu aşağıdaki rekürans bağıntısına sahiptir [6]:

$$(n+2)\varphi_{n+1}^{(h)}(y) = 2y\varphi_n^{(h)}(y) - h^2 n \varphi_{n-1}^{(h)}(y) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Eşitlik (3.29) ve Teorem 3.17'deki bağıntı yardımıyla bu oluşan monik polinomun bazı değerleri şu şekildedir:

$$\varphi_0^{(h)}(y) = 2,$$

$$\varphi_1^{(h)}(y) = 2y,$$

$$\varphi_2^{(h)}(y) = \frac{4y^2 - 2h^2}{3},$$

$$\varphi_3^{(h)}(y) = \frac{2}{3}y(y^2 - 2h^2),$$

$$\varphi_4^{(h)}(y) = \frac{4y^4 - 20h^2y^2 + 18h^4}{15},$$

$$\varphi_5^{(h)}(y) = \frac{4y^5 - 40h^2y^3 + 58yh^4}{45}.$$

Teorem 3.18. Modified deformed Mittag-Leffler $\varphi_n^{(h)}(y)$ polinomu aşağıdaki doğurucu fonksiyona sahiptir [6]:

$$\mathcal{G}_h(x,y) = \frac{1}{xy}\left(exp\left(2\frac{y}{h}arctanhx\right) - 1\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^{(h)}(y)x^n.$$

Teorem 3.19. Modified deformed Mittag-Leffler polinomu aşağıdaki ortogonal bağıntısına sahiptir [6]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n^{(h)}(y)\varphi_m^{(h)}(y)\frac{y}{sinh\left(\frac{\pi y}{h}\right)}dy = \frac{2h^{2n}}{n+1}\delta_{mn} \qquad (m,n \in \mathbb{N}_0).$$

Modified deformed Mittag-Leffler polinomları $\varphi_n^{(h)}(y)$ yardımıyla oluşan monik polinom,

$$\hat{\varphi}_n^{(h)}(y) = \frac{(n+1)!}{2^{n+1}}\varphi_n^{(h)}(y) \qquad (n \in \mathbb{N}_0). \tag{3.30}$$

şeklindedir [6].

Teorem 3.20. Monik modified deformed Mittag-Leffler polinomları $\hat{\varphi}_n^{(h)}(y)$ aşağıdaki rekürans bağıntısına sahiptir [6]:

$$\hat{\varphi}_{n+1}^{(h)}(y) = y\hat{\varphi}_n^{(h)}(y) - \frac{h^2}{4}n(n+1)\hat{\varphi}_{n-1}^{(h)}(y) \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{3.31}$$

Eşitlik (3.30) ve Eşitlik (3.31) bağıntıları yardımıyla bu oluşan monik polinomun bazı değerleri şu şekildedir:

$$\hat{\varphi}_0^{(h)}(y) = 1,$$

$$\hat{\varphi}_1^{(h)}(y) = y,$$

$$\hat{\varphi}_2^{(h)}(y) = y^2 - \frac{h^2}{2},$$

$$\hat{\varphi}_3^{(h)}(y) = y^3 - 2h^2y,$$

$$\hat{\varphi}_4^{(h)}(y) = y^4 - 5h^2y^2 + \frac{9}{2}h^4,$$

$$\hat{\varphi}_5^{(h)}(y) = y^5 - 10h^2y^3 + \frac{29}{2}yh^4.$$

Teorem 3.21. Monik modified deformed Mittag-Leffler polinomu $\hat{\varphi}_n^{(h)}(y)$ aşağıdaki doğurucu fonksiyona sahiptir [6]:

$$\hat{\mathcal{G}}_h(x,y) = (4+h^2x^2)^{\frac{-1}{h^2}} exp\left(2\frac{y}{h} arctan\frac{hx}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\varphi}_n^{(h)}(y)\frac{x^n}{n!}\,. \tag{3.32}$$

4. MITTAG-LEFFLER POLİNOMLARI VE TÜRLERİ İÇİN BILINEAR VE BILATERAL DOĞURUCU FONKSİYONLAR

Bu bölümde, Mittag-Leffler polinomları, deformed Mittag-Leffler polinomları ve modified Mittag-Leffler polinomları için bilinear ve bilateral doğurucu fonksiyon bağıntıları verilecektir. Bu bağıntılar yardımıyla bazı özel durumlar elde edilecektir.

4.1. MITTAG-LEFFLER POLİNOMLARI İÇİN BILINEAR VE BILATERAL DOĞURUCU FONKSİYONLAR

Bu kısımda Mittag-Leffler polinomları için bilinear ve bilateral doğurucu fonksiyon bağıntıları verildi. Burada kullanılan yöntem ve uygulamaları [22]-[28] numaralı çalışmalarda bulmak mümkündür.

Teorem 4.1. μ -üncü basamaktan $s_1, \dots, s_r,\ r \geq 1$ kompleks değişkenli sıfıra denk olmayan $\Omega_\mu(s_1, \dots, s_r)$ $(r \in \mathbb{N})$ fonksiyonu için,

$$\Lambda_{\mu,\psi}(s_1, \dots, s_r; \xi) \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, \Omega_{\mu+\psi k}(s_1, \dots, s_r)\xi^k,\ \ (a_k \neq 0,\ \ \mu, \psi \in \mathbb{C})$$

ve $p, n \in \mathbb{N}$

$$\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(y; s_1, \dots, s_r; \tau) \coloneqq \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{p}\right]} a_k\, g_{n-pk}(y)\Omega_{\mu+\psi k}(s_1, \dots, s_r)\tau^k \tag{4.1}$$

olsun. Bu durumda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,p}^{\mu,\psi}\left(y; s_1, \dots, s_r; \frac{\eta}{x^p}\right) x^n = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^y \Lambda_{\mu,\psi}(s_1, \dots, s_r; \eta) \tag{4.2}$$

ifadesi gerçekleşir [20].

İspat: Eşitlik (4.2) ifadesinin sol tarafı T olsun. Eşitlik (4.1) ifadesi Eşitlik (4.2)'de yerine yazılır ve Eşitlik (3.1) bağıntısı kullanılırsa,

$$T=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{p}\right]} a_k\, g_{n-pk}(y)\Omega_{\mu+\psi k}(s_1,\dots,s_r)\left(\frac{\eta}{x^p}\right)^k\right)x^n$$

elde edilir. Bu son ifadede Eşitlik (2.8) bağıntısı kullanılırsa,

$$T=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, g_n(y)\Omega_{\mu+\psi k}(s_1,\dots,s_r)\left(\frac{\eta}{x^p}\right)^k\right)x^{n+pk}$$

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n(y)x^n\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, \Omega_{\mu+\psi k}(s_1,\dots,s_r)\eta^k\right)$$

$$=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^y \Lambda_{\mu,\psi}(s_1,\dots,s_r;\eta)$$

ifadesi elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Sonuç 4.1. Teorem 4.1'de

$$\Omega_{\mu+\psi k}(s_1,\dots,s_r)=\Phi_{\mu+\psi k}^{(\alpha)}(s_1,\dots,s_r)$$

alınırsa

$$\Lambda_{\mu,\psi}(s_1,\dots,s_r;\xi):=\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, \Phi_{\mu+\psi k}^{(\alpha)}(s_1,\dots,s_r)\xi^k \qquad (a_k\neq 0,\ \mu,\psi\in\mathbb{C}),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{p}\right]} a_k\, g_{n-pk}(y)\Phi_{\mu+\psi k}^{(\alpha)}(s_1,\dots,s_r)\left(\frac{\eta}{x^p}\right)^k\right)x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, g_n(y)\Phi_{\mu+\psi k}^{(\alpha)}(s_1,\dots,s_r)\left(\frac{\eta}{x^p}\right)^k\right)x^{n+pk}$$

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n(y)x^n\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, \Phi_{\mu+\psi k}^{(\alpha)}(s_1,\dots,s_r)\eta^k\right)$$

$$=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^y \Lambda_{\mu,\psi}(s_1,\dots,s_r;\eta)$$

olur.

Burada kullanılan $\Phi_{\mu+\psi k}^{(\alpha)}(s_1,\dots,s_r)$ çok değişkenli bir polinomdur. Bu polinom

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n^{(\alpha)}(x_1,\dots,x_r)z^n=(1-x_1z)^{-\alpha}e^{(x_2,\dots,x_r)z}\quad,(|z|<\{|x_1|^{-1}\},\alpha\in\mathbb{C}),\qquad(4.3)$$

doğurucu fonksiyonuna sahiptir [28].

Uyarı 4.1. Sonuç 4.1'de $a_k=1,\ \mu=0,\ \psi=1$ alınır ve Eşitlik (4.3) bağıntısı kullanılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{p}\right]}g_{n-pk}(y)\Phi_k^{(\alpha)}(s_1,\dots,s_r)\left(\frac{\eta}{x^p}\right)^k\right)x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}g_n(y)\Phi_k^{(\alpha)}(s_1,\dots,s_r)\left(\frac{\eta}{x^p}\right)^k\right)x^{n+pk}$$

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}g_n(y)x^n\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\Phi_k^{(\alpha)}(s_1,\dots,s_r)\eta^k\right)$$

$$=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^y(1-s_1\eta)^{-\alpha}e^{(s_2,\dots,s_r)\eta},\ (|x|<1,\ \ |\eta|<\{|s_1|^{-1}\}),$$

elde edilir. Böylece Mittag-leffler polinomunun bir ailesi için bilateral doğurucu fonksiyonu elde edilmiş olur [20].

4.2. DEFORMED MITTAG-LEFFLER POLİNOMLARI İÇİN BILINEAR VE BILATERAL DOĞURUCU FONKSİYONLAR

Bu kısımda deformed Mittag-Leffler polinomları için bilinear ve bilateral doğurucu fonksiyon bağıntıları verildi.

Teorem 4.2. μ-üncü basamaktan $s_1,\dots,s_r,\ r\geq 1$ kompleks değişkenli sıfıra denk olmayan $\Omega_\mu(s_1,\dots,s_r)$ $(r\in\mathbb{N})$ fonksiyonu için,

$$\Lambda_{\mu,\varphi}(s_1,\dots,s_r;\tau):=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\,\Omega_{\mu+\varphi k}(s_1,\dots,s_r)\tau^k,\ (a_k\neq 0,\mu,\varphi\in\mathbb{C})$$

ve $p,n\in\mathbb{N}$

$$\theta_{\mu,\varphi}^{h}(y; s_1, \dots, s_r; \zeta) := \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{p}\right]} a_k \, g_{n-pk}^{(h)}(y) \Omega_{\mu+\varphi k}(s_1, \dots, s_r) \zeta^k \tag{4.4}$$

olsun. Bu durumda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{\mu,\varphi}^{h}\left(y; s_1, \dots, s_r; \frac{\eta}{x^p}\right) x^n = G_h(x,y) \, \Lambda_{\mu,\varphi}(s_1, \dots, s_r; \eta), \tag{4.5}$$

ifadesi gerçekleşir. Buradaki $G_h(x,y)$, Eşitlik (3.9)'da verilmiştir [20].

İspat: Eşitlik (4.5) ifadesinin sol tarafı H olsun. Eşitlik (4.4) ifadesi Eşitlik (4.5)'de yerine yazılır ve Eşitlik (3.8) bağıntısı kullanılırsa,

$$H = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{p}\right]} a_k \, g_{n-pk}^{(h)}(y) \Omega_{\mu+\varphi k}(s_1, \dots, s_r) \left(\frac{\eta}{x^p}\right)^k \right) x^n$$

elde edilir. Bu son ifadede n yerine $n + pk$ dönüşümü yapılırsa,

$$H = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \, g_{n}^{(h)}(y) \Omega_{\mu+\varphi k}(s_1, \dots, s_r) \left(\frac{\eta}{x^p}\right)^k \right) x^{n+pk}$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(h)}(y) x^n \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \, \Omega_{\mu+\varphi k}(s_1, \dots, s_r) \eta^k \right)$$

$$= G_h(x,y) \Lambda_{\mu,\varphi}(s_1, \dots, s_r; \eta).$$

ifadesi elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Sonuç 4.2. Teorem 4.2'de

$$\Omega_{\mu+\varphi k}(s_1, \dots, s_r) = h_{\mu+\varphi k}^{(\beta_1, \dots, \beta_s)}(s_1, \dots, s_r)$$

alınırsa

$$\Lambda_{\mu,\varphi}(s_1,\dots,s_r;\tau) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, h_{\mu+\varphi k}^{(\beta_1,\dots,\beta_s)}(s_1,\dots,s_r)\tau^k \quad (a_k \neq 0,\ k \in \mathbb{N}_0),$$

$$\theta_{\mu,\varphi}^{h}(y;s_1,\dots,s_r;\zeta) := \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{p}\right]} a_k\, g_{n-pk}^{(h)}(y) h_{\mu+\varphi k}^{(\beta_1,\dots,\beta_s)}(s_1,\dots,s_r)\zeta^k,$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{\mu,\varphi}^{h}\left(y;s_1,\dots,s_r;\frac{\eta}{x^p}\right)x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{p}\right]} a_k g_{n-pk}^{(h)}(y) h_{\mu+\varphi k}^{(\beta_1,\dots,\beta_s)}(s_1,\dots,s_r)\left(\frac{\eta}{x^p}\right)^k\right)x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k g_{n}^{(h)}(y) h_{\mu+\varphi k}^{(\beta_1,\dots,\beta_s)}(s_1,\dots,s_r)\left(\frac{\eta}{x^p}\right)^k\right)x^{n+pk}$$

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty} g_{n}^{(h)}(y)x^n\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k h_{\mu+\varphi k}^{(\beta_1,\dots,\beta_s)}(s_1,\dots,s_r)\,\eta^k\right)$$

$$= G_h(x,y)\Lambda_{\mu,\varphi}(s_1,\dots,s_r;\eta),$$

olur. Burada kullanılan $h_{\mu+\varphi k}^{(\beta_1,\dots,\beta_s)}(s_1,\dots,s_r)$ çok değişkenli Lagrange-Hermite polinomudur. Bu polinom

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_{n}^{(\beta_1,\dots,\beta_r)}(z_1,\dots,z_r)t^n = \prod_{j=1}^{r}\left\{\left(1-z_j t^j\right)^{-\beta_j}\right\}$$

$$\left(|t| < min\left\{|z_1|^{-1},\ |z_2|^{-1/2},\dots,|z_r|^{-1/r}\right\}\right), \tag{4.6}$$

doğurucu fonksiyonuna sahiptir [29].

Uyarı 4.2. Sonuç 4.2'de $a_k = 1,\ \mu = 0,\ \varphi = 1$ alınır ve Eşitlik (4.6) bağıntısı kullanılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} g_{n}^{(h)}(y) h_{k}^{(\beta_1,\dots,\beta_s)}(s_1,\dots,s_r)\left(\frac{\eta}{x^p}\right)^k\right)x^{n+pk} =$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} g_{n}^{(h)}(y)x^n\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} h_{k}^{(\beta_1,\dots,\beta_s)}(s_1,\dots,s_r)\,\eta^k\right)$$

$$= G_h(x,y)\prod_{j=1}^{r}\left\{\left(1-s_j\eta^j\right)^{-\beta_j}\right\},$$

$$\left(|\eta| < min\left\{|s_1|^{-1},\ |s_2|^{-1/2},\dots,|s_r|^{-1/r}\right\},\ \ j=1,2,\dots,r\right).$$

elde edilir. Böylece deformed Mittag-leffler polinomunun bir ailesi için bilateral doğurucu fonksiyon bağıntısı elde edilmiş olur [20].

Sonuç 4.3. Teorem 4.2'de $r=1,\ s_1=s,$

$$\Omega_{\mu+\varphi k}(s) = g_{\mu+\varphi k}^{(h)}(s)$$

alınırsa

$$\Lambda_{\mu,\varphi}(s;\tau) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, g_{\mu+\varphi k}^{(h)}(s)\tau^k \qquad (a_k \neq 0,\ k \in \mathbb{N}_0),$$

$$\theta_{\mu,\varphi}^{h}(y;s;\zeta) := \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{p}\right]} a_k\, g_{n-pk}^{(h)}(y) g_{\mu+\varphi k}^{(h)}(s)\zeta^k,$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Theta_{\mu,\varphi}^{h}\left(y;s;\frac{\eta}{x^p}\right)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{p}\right]} a_k\, g_{n-pk}^{(h)}(y) g_{\mu+\varphi k}^{(h)}(s)\left(\frac{\eta}{x^p}\right)^k\right)x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, g_{n}^{(h)}(y) g_{\mu+\varphi k}^{(h)}(s)\left(\frac{\eta}{x^p}\right)^k\right)x^{n+pk}$$

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(h)}(y)x^n\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, g_{\mu+\varphi k}^{(h)}(s)\eta^k\right)$$

$$= G_h(x,y)\Lambda_{\mu,\varphi}(s;\eta),$$

elde edilir [20].

Uyarı 4.3. Sonuç 4.3'de $a_k = 1,\ \mu = 0,\ \varphi = 1$ alınır ve Eşitlik (3.9) bağıntısı kullanılırsa,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(h)}(y)x^n\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} g_k^{(h)}(s)\eta^k\right) = G_h(x,y)G_h(\eta,s),$$

elde edilir. Böylece deformed Mittag-leffler polinomunun bir ailesi için bilinear doğurucu fonksiyon bağıntısı elde edilmiş olur [20].

4.3. MODIFIED MITTAG-LEFFLER POLİNOMLARI İÇİN BILINEAR VE BILATERAL DOĞURUCU FONKSİYONLAR

Bu kısımda modified Mittag-Leffler polinomları için bilinear ve bilateral doğurucu fonksiyon bağıntıları verildi.

Teorem 4.3. μ-üncü basamaktan $s_1, \ldots, s_r,\ r \geq 1$ kompleks değişkenli sıfıra denk olmayan $\Omega_\mu(s_1, \ldots, s_r)$ $(r \in \mathbb{N})$ fonksiyonu için,

$$\Lambda_{\eta,\psi}(s_1, \ldots, s_r; \xi) \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, \Omega_{\eta+\psi k}(s_1, \ldots, s_r)\xi^k,\ \ (a_k \neq 0, \eta, \psi \in \mathbb{C})$$

ve $p, n \in \mathbb{N}$

$$\Theta_{n,p}^{\eta,\psi}(y; s_1, \ldots, s_r; \tau) \coloneqq \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{p}\right]} a_k\, \varphi_{n-pk}(y)\Omega_{\eta+\psi k}(s_1, \ldots, s_r)\tau^k \tag{4.7}$$

olsun. Bu durumda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,p}^{\eta,\psi}\left(y; s_1, \ldots, s_r; \frac{\omega}{x^p}\right) x^n = \frac{\exp(2y\arctan x) - 1}{xy} \Lambda_{\eta,\psi}(s_1, \ldots, s_r; \omega) \tag{4.8}$$

ifadesi gerçekleşir.

İspat: Eşitlik (4.8) ifadesinin sol tarafı K olsun. Eşitlik (4.7) ifadesi Eşitlik (4.8)'de yerine yazılır ve Eşitlik (3.24) eşitliği kullanılırsa,

$$K = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{p}\right]} a_k\, \varphi_{n-pk}(y)\Omega_{\eta+\psi k}(s_1, \ldots, s_r)\left(\frac{\omega}{x^p}\right)^k\right) x^n$$

elde edilir.

Bu son ifadede Eşitlik (2.8) bağıntısı kullanılırsa,

$$K = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, \varphi_n(y) \Omega_{\eta+\psi k}(s_1, \dots, s_r) \left(\frac{\omega}{x^p}\right)^k \right) x^{n+pk}$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(y) x^n \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, \Omega_{\eta+\psi k}(s_1, \dots, s_r) \omega^k \right)$$

$$= \frac{\exp(2yarctanx)-1}{xy} \Lambda_{\eta,\psi}(s_1, \dots, s_r; \omega)$$

ifadesi elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Sonuç 4.4. Teorem 4.3'de $r = 1$ için $s_1 = s$ ve

$$\Omega_{\eta+\psi k}(s) = P_{\eta+\psi k}(s)$$

alınırsa

$$\Lambda_{\eta,\psi}(s;\tau) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, P_{\eta+\psi k}(s) \tau^k \quad (a_k \neq 0, k \in \mathbb{N}_0),$$

$$\Theta_{n,p}^{\eta,\psi}(y;s;\zeta) := \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{p}\right]} a_k\, \varphi_{n-pk}(y) P_{\eta+\psi k}(s) \zeta^k,$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,p}^{\eta,\psi}\left(y; s; \frac{\omega}{x^p}\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{p}\right]} a_k\, \varphi_{n-pk}(y) P_{\eta+\psi k}(s) \left(\frac{\omega}{x^p}\right)^k \right) x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, \varphi_n(y) P_{\eta+\psi k}(s) \left(\frac{\omega}{x^p}\right)^k \right) x^{n+pk}$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(y) x^n \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k P_{\eta+\psi k}(s)\, \omega^k \right)$$

$$= \frac{\exp(2yarctanx)-1}{xy} \Lambda_{\mu,\psi}(s;\omega),$$

olur. Burada kullanılan $P_{\eta+\psi k}(s)$ Jacobi polinomudur.

Bu polinom

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} \tag{4.9}$$

doğurucu fonksiyonuna sahiptir [14].

Uyarı 4.4. Sonuç 4.4'de $a_k = 1,\ \eta = 0,\ \psi = 1$ alınır ve Eşitlik (4.9) bağıntısı kullanılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,p}^{\eta,\psi}\left(y; s; \frac{\eta}{x^p}\right) x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n\ (y)x^n\ \right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} P_k\ (s)\ \omega^k\right)$$

$$= \frac{\exp(2yarctanx)-1}{xy} \frac{1}{\sqrt{1-2s\omega+\omega^2}}$$

elde edilir. Böylece modified Mittag-Leffler polinomunun bir ailesi için bilateral doğurucu fonksiyon bağıntısı elde edilmiş olur.

Sonuç 4.5. Teorem 4.3'de $r = 1$ için $s_1 = s$ ve

$$\Omega_{\eta+\psi k}(s) = \varphi_{\eta+\psi k}(s)$$

alınırsa

$$\Lambda_{\eta,\psi}(s;\tau) \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} a_k\ \varphi_{\eta+\psi k}(s)\tau^k \quad (a_k \neq 0, k \in \mathbb{N}_0),$$

$$\Theta_{n,p}^{\eta,\psi}(y; s; \zeta) \coloneqq \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{p}\right]} a_k\ \varphi_{n-pk}(y)\varphi_{\eta+\psi k}(s)\zeta^k,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,p}^{\eta,\psi}\left(y; s; \frac{\omega}{x^p}\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{p}\right]} a_k\ \varphi_{n-pk}(y)\varphi_{\eta+\psi k}(s)\left(\frac{\omega}{x^p}\right)^k\right) x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\ \varphi_n\ (y)\varphi_{\eta+\psi k}(s)\left(\frac{\omega}{x^p}\right)^k\right) x^{n+pk}$$

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n\ (y)x^n\ \right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\varphi_{\eta+\psi k}(s)\ \omega^k\right)$$

$$= \frac{\exp(2yarctanx)-1}{xy}\Lambda_{\mu,\varphi}(s;\omega),$$

olur.

Uyarı 4.5. Sonuç 4.5'de $a_k = 1,\ \eta = 0,\ \psi = 1$ alınır ve Eşitlik (3.24) bağıntısı kullanılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,p}^{\eta,\psi}\left(y; s; \frac{\eta}{x^p}\right) x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n\ (y) x^n\ \right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k\ (s)\ \omega^k\right)$$

$$= \frac{\exp(2yarctanx)-1}{xy}\frac{\exp(2sarctan\omega)-1}{s\omega}$$

elde edilir. Böylece modified Mittag-Leffler polinomunun bir ailesi için bilinear doğurucu fonksiyon bağıntısı elde edilmiş olur.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada hipergeometrik Mittag-Leffler polinomu, deformed Mittag-Leffler polinomu ve modified Mittag-Leffler polinomları incelenmiştir. Bu polinomların bazı özellikleri verildikten sonra bu polinomlar için multilineer ve multilateral doğurucu fonksiyon bağıntılarını veren teoremler elde edilmiştir. Ayrıca bu teoremlerin özel durumları elde edildi ve özel tipten bazı polinomların Mittag-Leffler polinomları ile ilişkileri verildi.

Bu tezde çalışılan konuların ışığı altında gelecekte farklı polinomların doğurucu fonksiyon bağıntıları, başka polinomlarla ilişkisi elde edilebilir. Ayrıca burada kullanılan yöntemler yardımıyla başka polinomların ortogonalliği, bilinear ve bilateral doğurucu fonksiyon bağıntıları, rekürans bağıntıları incelenebilir. Hipergeometrik ve ortogonal olan birçok polinomun farklı özelliklerinin incelenmesi konusunda yardımcı bir kaynak oluşturmaktadır.

6. KAYNAKLAR

[1] M. Mittag-Leffler, ‘‘Sur la fonction nouvelle,’’ *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, c. 2, sayı 137, ss. 554–558, 1903.

[2] K. R. Lang, *Astrophysical Formulae: Space, time, matter and cosmology*, Springer, Berlin, Heidelberg: 2013.

[3] R. Saxena, A. Mathai and H. Haubold, ‘‘On fractional kinetic equations,’’ *Astrophysics and Space Science*, c. 282, sayı 1, ss. 281–287, 2002.

[4] H. Bateman, ‘‘The polynomial of Mittag-Leffler,’’ *Proceedings of the National Academy of Sciences*, c. 26, ss. 491-496, 1940.

[5] S. Roman, *The umbral calculus*, Mineola, New York: Dover Publications Inc, 2005.

[6] M. S. Stanković, S. D. Marinković, P. M. Rajković, ‘‘The deformed and modified Mittag-Leffler polynomials,’’ *Applied Mathematics and Computation*, c. 54, ss. 721-728, 2011.

[7] D. S. Kim, T. Kim, T. Mansour and J.-J. Seo, ‘‘Degenerate Mittag-Leffler Polynomials,’’ *Applied Mathematics and Computation*, c. 274, ss. 258-266, 2016.

[8] R. Koekoek, R. F. Swarttouw, *Askey scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue*, Delft University of Technology Faculty of Information Technology and Systems Department of Technical Mathematics and Informatics, Netherlands, Rep. 98-17, 1998.

[9] T. Kim, D. S. Kim, L.-C. Jang and H. I. Kwon, ‘‘Differential equations associated with Mittag-Leffler polynomials,’’ *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, c. 12, sayı 4, ss. 2839–2847, 2016.

[10] A. K. Shukla and J. C. Prajapati, ‘‘A general class of polynomials associated with generalized Mittag–Leffler function,’’ *Integral Transforms and Special Functions*, c. 19, sayı 1, ss. 23–34, 2008.

[11] R. B. Paris, ‘‘The asymptotics of the Mittag-Leffler polynomials,’’ *Journal of Classical Analysis*, c. 1, sayı 1, ss. 1–16, 2012.

[12] G. Yasmin, S. Khan and N. Ahmad, ‘‘Operational methods and truncated exponential-based Mittag-Leffler polynomials,’’ *Mediterranean Journal of Mathematics*, c. 13, ss. 1555–1569, 2016.

[13] M. Akhlaq, ‘‘Generating functions of q-Sylvester and q-Mittag-Leffler polynomials,’’ *JK Research Journal in Mathematics and Computer Sciences*, c. 1, sayı 1, ss. 45-48, 2018.

[14] H. M. Srivastava and H. L. Monacha, *A Treatise on Generating Functions*, New York, USA: Ellis Horwood Limited, 1984.

[15] E. D. Rainville, *Special Functions*, New York, USA: The Macmillan Company, 1960.

[16] M. S. Stanković, S. D. Marinković, P. M. Rajković, ‘‘The deformed exponential functions of two variables in the context of various statistical mechanics,’’ *Applied Mathematics and Computation*, c. 218, ss. 2439–2448, 2011.

[17] E. Uzel, “Hermite polinomları,” Yüksek lisans tezi, Matematik Bölümü, Fen Bilimleri Enstitüsü, Sakarya Üniversitesi, Sakarya, Türkiye, 2008.

[18] T. X. He, L. C. Hsu, P. J. -S. Shiue, ‘‘The Sheffer group and the Riordan group,’’ *Discrete Applied Mathematics*, c. 155, ss. 1895-1909, 2007.

[19] A. Luzon, M. A. Moron, ‘‘Recurrence relations for polynomial sequences via Riordan matrices,’’ *Linear Algebra and its Applications*, c. 433, ss. 1422–1446, 2010.

[20] N. Özmen and N. Yılmaz, “On the Mittag-Leffler polynomials and the deformed Mittag-Leffler polynomials,” *Konuralp Journal of Mathematics*, yayımlanmak üzere gönderildi, 2019.

[21] Anonim, (2018, 12 Ocak). [Online]. Erişim: http://mathworld.wolfram.com/MeixnerPolynomialoftheFirstKind.html.

[22] N. Özmen and Y. Cin, “On the Konhauser poynomials,” *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, c. 7, ss. 48-55, 2017.

[23] N. Özmen and H. Göksu, “Some properties of hypergeometric Meixner-Pollaczek polynomials,” *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, c. 7, ss. 21-31, 2017.

[24] R. Aktaş and E. Erkuş-Duman, “The Laguerre polynomials in several variables,” *Mathematica Slovaca*, c. 63, sayı 3, ss. 531-544, 2013.

[25] N. Özmen and E. Erkuş-Duman, “Some families of generating functions for the generalized Cesàro polynomials,” *Journal Computational Analysis and Applications*, c. 25, sayı 4, ss. 670-683, 2018.

[26] N. Özmen, ‘‘New generating function relations for the $q-$generalized Cesàro polynomials,’’ *Journal of Function Spaces*, c. 2019, 2019.

[27] N. Özmen, ‘‘Some new properties of generalized Bessel polynomials,’’ *Applicationes Mathematicae*, c. 46, sayı 1, ss. 85-98, 2019.

[28] N. Özmen and E. Erkuş-Duman, “Some results for a family of multivariable polynomials,” *American Institute of Physics Conference Proceedings*, c. 1558, ss. 1124-1127, 2013.

[29] A. Altın, E. Erkus, ‘‘On a multivariable extension of the Lagrange-Hermite polynomials,’’ *Integral Transforms and Special Functions*, c. 17, ss 239-244, 2006.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	: Nihal YILMAZ
Doğum Tarihi ve Yeri	: 17.07.1987 Düzce
Yabancı Dili	: İngilizce
E-posta	: nhlylmz87@hotmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik	Düzce Üniversitesi	2019
Lisans	Matematik	Abant İzzet Baysal Üniversitesi	2012
Lise		Akçakoca Anadolu Lisesi	2005

YAYIN

N. Özmen and N. Yılmaz, “On the Mittag-Leffler polynomials and the deformed Mittag-Leffler polynomials,” *Konuralp Journal of Mathematics*, kabul edildi, 2019.