



**T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ÜÇ SERBESTLİK DERECELİ İKİ ASİMETRİK DÜZLEMSEL
PARALEL ROBOT MEKANİZMASININ VİDA TEORİSİ İLE
KİNEMATİK ANALİZİ**

MUSA YİĞİT

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRİK-ELEKTRONİK VE BİLGİSAYAR MÜHENDİSLİĞİ
ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
DR. ÖĞRETİM ÜYESİ METİN TOZ**

DÜZCE, 2019

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÜÇ SERBESTLİK DERECELİ İKİ ASİMETRİK DÜZLEMSEL
PARALEL ROBOT MEKANİZMASININ VİDA TEORİSİ İLE
KİNEMATİK ANALİZİ

..... tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr.

Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. (tez danışmanınızın ismi tekrar yazılmalıdır)

Düzce Üniversitesi

Prof. Dr. (jüri üyesinin ismi yazılmalıdır)

Düzce Üniversitesi

Prof. Dr. (jüri üyesinin ismi yazılmalıdır)

Düzce Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: .../.../2019

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

22 Temmuz 2019

Musa Yiğit

TEŐEKKÜRLER

Yüksek Lisans öğrenimimde bu tez ve bilgileri elde etmem ve hazırlamamda elinden gelen destek ve yardımından dolayı değerli hocam ve danışmanım Dr. Öğretim Üyesi Metin TOZ'a içtenlikle teşekkürlerimi iletirim.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme ve çalışma arkadaşlarıma ve eşime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

22 Temmuz 2019

Musa Yiğit

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ŞEKİL LİSTESİ.....	VI
ÇİZELGE LİSTESİ.....	VII
KISALTMALAR.....	VIII
SİMGELER	IX
ÖZET	X
ABSTRACT	XI
1. GİRİŞ	1
2. VİDA TEORİSİ.....	8
2.1. PLÜCKER KOORDİNATLARI VE VİDA	8
2.2. TWİST VE WRENCH	11
2.3. RECİPROCAL PRODUCT.....	11
3. <u>RRR1RPR2</u> TİPİ ASİMETRİK DÜZLEMSEL PARALEL MANİPÜLATÖRÜN VİDA TEORİSİ İLE KİNEMATİK VE SERBESTLİK DERECESESİ ANALİZİ	12
3.1. VİDA TEORİSİ İLE KİNEMATİK ANALİZ	15
3.2. VİDA TEORİSİ İLE JACOBIAN MATRİSİ.....	19
3.3. VİDA TEORİSİ İLE SERBESTLİK DERECESESİ HESABI	22
4. <u>RRR2RPR1</u> TİPİ ASİMETRİK DÜZLEMSEL PARALEL MANİPÜLATÖRÜN VİDA TEORİSİ İLE KİNEMATİK VE SERBESTLİK DERECESESİ ANALİZİ	24
4.1. VİDA TEORİSİ İLE KİNEMATİK ANALİZ	26
4.2. VİDA TEORİSİ İLE JACOBIAN MATRİSİ.....	29
4.3. VİDA TEORİSİ İLE SERBESTLİK DERECESESİ HESABI	31
5. SONUÇLAR	33
6. KAYNAKLAR.....	35
ÖZGEÇMİŞ.....	37

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 1.1. ABB IRB 140 Seri Maniplatör.	1
Şekil 1.2. Pollard'ın uzaysal endüstriyel robotu.	3
Şekil 1.3. Gough Platform (1947).....	3
Şekil 1.4. Geliştirilmiş Gough Platformunun modern zamanda kullanımı.....	4
Şekil 1.5. Hussein de la Torre and Ernesto Rodriguez-Leal'in 3-CRC paralel mekanizması.....	5
Şekil 1.6. Hassen,Ajit Pal ve P.Praphu'n incelediği paralel maniplatör mekanizması.....	5
Şekil 2.1. Bir doğrunun Plücker koordinatı	8
Şekil 3.1. Üç SD'li RPR2RRR1 tipi düzlemsel paralel robot mekanizması (3-DOF RPR2RRR1 type planar parallel robot mechanism).....	11
Şekil 3.2. Tip 1 birinci bacak için vida eksenleri ve eklem tip tanımlamaları.....	15
Şekil 3.3. Tip 1 ikinci bacak için vida eksenleri ve eklem tip tanımlamaları.....	16
Şekil 3.4. Tip 1 üçüncü bacak için vida eksenleri ve eklem tip tanımlamaları.. ..	17
Şekil 4.1. RRR2RPR1 tipindeki düzlemsel paralel maniplatör mekanizması (3-DOF RRR2RPR1 type planar parallel robot mechanism).....	23
Şekil 4.2. Tip 2 birinci bacak için vida eksenleri ve eklem tip tanımlamaları.....	25
Şekil 4.3. Tip 2 ikinci bacak için vida eksenleri ve eklem tip tanımlamaları.	26
Şekil 4.4. Tip 2 üçüncü bacak için vida eksenleri ve eklem tip tanımlamaları	27

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa No

Çizelge 1.1.Seri ve Paralel robotların karşılaştırılması..... 2



KISALTMALAR

C	Silindirik Eklem
<u>C</u>	Aktif Silindirik Eklem
DOF	Degree of Freedom
P	Prizmatik Eklem
<u>P</u>	Aktif Prizmatik Eklem
R	Revolute (Döner) Eklem
<u>R</u>	Aktif Revolute (Döner) Eklem
<u>RPR2RRR1</u>	2 Döner-Prizmatik-Döner bacaklı 1 Döner-Döner-Döner
S	Küresel Eklem
<u>S</u>	Aktif Küresel Eklem
U	Universal Eklem
<u>U</u>	Aktif Universal Eklem

SİMGELER

$v_{ }$	v vektörünün y Bileşeni
$\dot{\sigma}$	σ ifadesinin birinci türevi
\dot{d}_1	d_1 in birinci türevi
\dot{d}_2	d_2 in birinci türevi
\dot{P}_x	P_x in birinci türevi
\dot{P}_y	P_y in birinci türevi
\dot{A}_x	A_x in birinci türevi
\dot{A}_y	A_y in birinci türevi
τ	Tork
f	Doğrusal Kuvvet
\circ	Reciprocal Product (Karşıt İşlem)

ÖZET

ÜÇ SERBESTLİK DERECELİ İKİ ASİMETRİK DÜZLEMSEL PARALEL ROBOT MEKANİZMASININ VIDA TEORİSİ İLE KİNEMATİK ANALİZİ

Musa YİĞİT

Düzce Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü Elektrik-Elektronik ve Bilgisayar Müh. Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Metin TOZ

Temmuz 2019, 36 sayfa

Vida teorisi robot kinematığında son yıllarda gittikçe artan şekilde kullanılmaya başlanan önemli bir matematiksel yöntemdir. Bu yöntemde robot kinematığı oldukça sade bir şekilde ifade edilebilmektedir. Bu tez çalışmasında 3-RPR (R:Dönel Eklem, P:Aktif Prizmatik eklem) tipi düzlemsel paralel robotun bacak yapısı değiştirilerek elde edilen iki asimetrik üç serbestlik dereceli düzlemsel paralel robotun vida teorisi ile kinematik analizi yapılmıştır. Her iki mekanizmanın da hem jacobian matrisi vida teorisi ile elde edilmiş hem de serbestlik dereceleri bu yöntemle hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar aynı mekanizmalar için vektörel yöntemle elde edilen denklemlerle karşılaştırılmış ve aynı oldukları görülmüştür. Sunulan bu tez çalışması ile özellikle ülkemizde henüz çok kullanılmayan bu teorinin robot kinematığı ile ilgilenen araştırmacılara bir örnek teşkil etmesi hedeflenmiştir.

Anahtar sözcükler: Düzlemsel Paralel Robot Mekanizmaları, 3 SD, Vida Teorisi, Jacobian.

ABSTRACT

KINEMATIC ANALYSIS OF THREE DOF-LEVEL TWO ASYMMETRIC PLANE PARALLEL ROBOT MECHANISMS WITH SCREW THEORY

Musa YİĞİT

Duzce University

Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Electric-Electronics
and Computer Engineering

Master's Thesis

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Metin TOZ

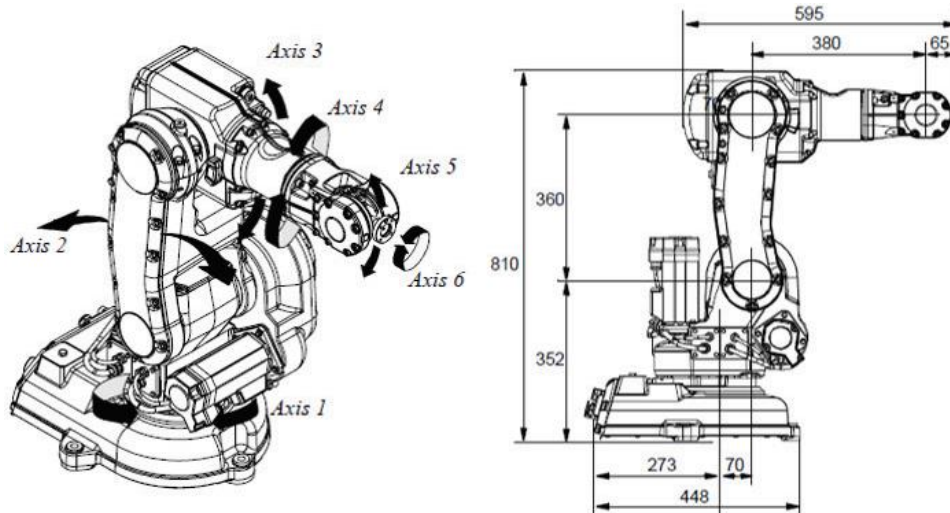
July 2019, 36 pages

Screw theory is an important mathematical method in robot kinematics which has been increasingly used in recent years. In this method, robot kinematics can be expressed quite simply. In this thesis, the kinematic analysis of two asymmetric three degrees of freedom planar parallel robots obtained by changing the leg structure of 3-RPR (R: Rotary Joint, P: Active Prismatic Joint) planar parallel robot was carried out with the screw theory. The Jacobian matrix of both mechanisms was obtained by screw theory and the degrees of freedom were calculated by this method. The results obtained were compared with the equations obtained by the vector method for the same mechanisms and were found to be the same. With this thesis, it is aimed to set an example for researchers interested in robot kinematics.

Keywords: Planar Parallel Robot Mechanisms, 3 DOF, Screw Theory, Jacobian.

1. GİRİŞ

Modern zamanı yaşadığımız bu günlerde robotlar hayatımızın hemen her alanında yaygın bir şekilde kullanılmaya başlanmışlardır. Bu mekanizmalar kullanılış amaçlarına göre farklı tasarım ve özelliklerde olmaktadır. Kullanım alanlarındaki artış robotların tasarımlarının da çeşitlenmesine dolayısıyla bu mekanizmalar için yapılan hesaplamaların da gittikçe karmaşıklaşmasına yol açmaktadır. En genel açıdan bakıldığında robot mekanizmaları kendi içinde seri ve paralel mekanizmalara olarak ikiye ayrılmaktadır. Seri robotlar, en yaygın endüstriyel robotlardır ve bir tabandan bir uç işlevciye uzanan eklemlerle bağlı katı cisimlerin oluşturduğu bir yapıdadırlar. Bu yapıda her eklemden bir motor yer almaktadır ve bu motorlar sayesinde uç işlevci üç boyutlu uzayda hareket ettirilmektedir. Bu mekanizmalar insan kolunun taklit edilmesi ile ortaya çıkmışlardır ve genellikle “omuz (shoulder)”, “dirsek (elbow)” ve “bilek (wrist)” olarak tanımlanan antropomorfik bir kol yapısına sahiptirler. Bu robotlar çoğunlukla dört-altı bağlantıya sahiptirler, bunun nedeni üç boyutlu uzayda bir nesneyi rasgele bir konuma en az bir yönde belirli bir yönelimle yerleştirmek için en az dört-altı serbestlik derecesinin gerekli olmasıdır. Şekil 1’de ABB firmasının altı serbestlik derecesine sahip bir seri robot mekanizması görülmektedir.



Şekil 1.1. ABB IRB 140 Seri Manipülator [1].

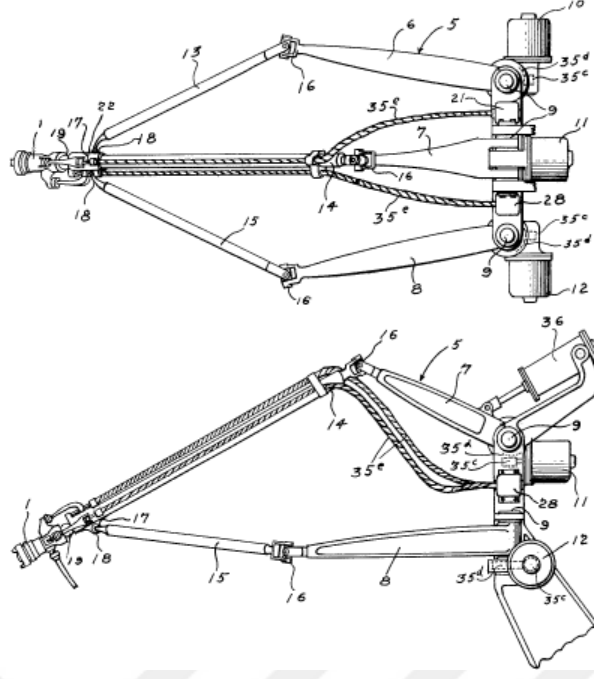
Paralel robotlar ise seri robotlardan farklı olarak temel çerçevenin uç işlevci çerçevesine birden fazla kol ile bağlandığı mekanizmalardır. Bu mekanizmalar en az bir tane kapalı

çevrim içerirler. Seri robotlar ile paralel robotlar birçok farklı yönden birbirlerine üstünlük gösterirler. Ancak özellikle son yıllarda endüstride robotlar ile ilgili artan yüksek konumlanma hassasiyeti ve yüksek kaldırabileceği yük/kendi kütlesi oranı gibi ihtiyaçlar paralel robotların bir adım öne çıkmasını sağlamıştır. Seri ve paralel robotlar arasındaki farklılıklar kısaca aşağıdaki çizelgede yer aldığı gibi özetlenebilir [2].

Çizelge 1.1. Seri ve Paralel robotların karşılaştırılması [2].

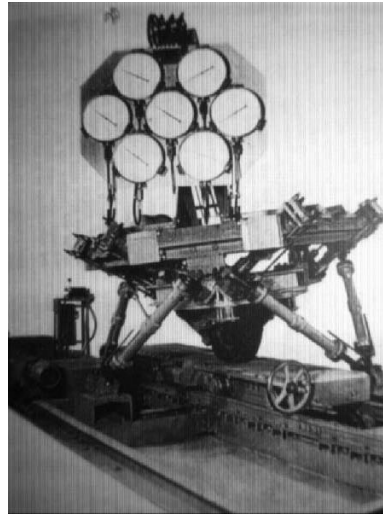
ÖZİNİTELİKLER	PARALEL MANİPLATÖR	SERİ MANİPLATÖR
Manipülör Tipi	Kapalı Çevrim	Açık Çevrim
Uç İşlevci	Platform	Gripper
Doğal Tanımlama	Kartezyen Uzay	Eklemsel Uzay
Aktüatör Menzili	Sabit Zemine Yakın	Bağlantı Üzerinde
Atalet Kuvveti ve Sertlik	Sırası ile Düşük ve Yüksek	Sırası ile Yüksek ve Düşük
Tercih Edilen Özellik	Sertlik	Becerili, Seri
İleri Kinematik Kullanımı	Zor ve Karmaşık	Basit ve Özgün
Ters Kinematik Kullanımı	Basit ve Özgün	Karmaşık
Özellik(Singularity)	Statik	Kinematik
Direkt Etki Dönüşümü	İyi Tanımlı ve Özgün	İyi Tanımlı Değil;Var olmayabilir,Özgün veya Sonsuz
Tercih Edilen Uygulama	Tam Pozisyonlama	Bütünsel Hareketlilik

İlk paralel robot örneklerinden biri Willard L. V. Polard [3] tarafından geliştirilen ve patenti alınan mekanizmadır. Bu mekanizma Şekil 1.2’de gösterilmiştir.



Şekil 1.2. Pollard'ın uzaysal endüstriyel robotu [3].

Bu ilk paralel robot mekanizmasından sonra Gough ve Whitehall [4] tarafından geliştirilen ve lastik test cihazı olarak tasarlanan paralel robot mekanizması literatürde en çok bilinen mekanizmalardan biri olmuştur. Bu mekanizma ayrıca daha sonra, uçuş simülatörü vb. amaçla kullanılan mekanizmaların temelini oluşturmuş ve Gough-Stewart platformu olarak isimlendirilmiştir. Paralel robotlar veya geliştirilmiş Stewart platformları olarak da bilinen bu sistemleri oluşturan robot kolları genellikle birden fazla ekleme sahiptir ve bu eklemlerin bir kısmı aktif eklem diğerleri ise pasif eklemlerden oluşur. Şekil 1.3'de ilk olarak geliştirilen lastik test cihazı gösterilmiştir.



Şekil 1.3. Gough Platform (1947) [5].

Paralel robotlar konusundaki gelişmelere paralel olarak bu mekanizmaların endüstride kullanımları da artmış ve dolayısıyla literatürde de bir çok farklı paralel robot mekanizması yer almıştır. Bunlara örnek olarak Stewart Platform mekanizmasının farklı bir örneği Şekil 1.4’te verilmiştir.



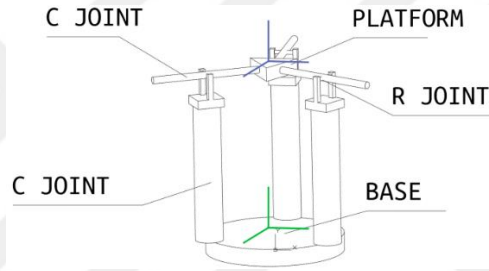
Şekil 1.4. Geliştirilmiş Gough Platformunun modern mamanda kullanımı [6].

Paralel robot mekanizmaları sahip oldukları kolların yapısında, eklem sıralanışında vb. yapılabilecek değişikliklerle oluşacak kombinasyonların tamamı kadar farklı tür ve tasarımda olabilmektedirler. Dolayısıyla bu mekanizmaların birçok farklı çeşidinin olduğunu söylemek mümkündür. Bununla birlikte bu mekanizmaları sınıflandırmak gerekirse genel olarak dört kısımda bu mekanizmalar sınıflandırılabilir. Bunlar:

1. Simetrik
2. Düzlemsel
3. Küresel
4. Uzaysal

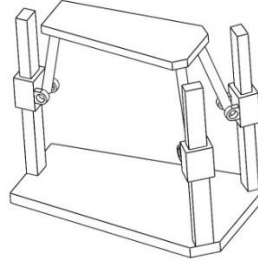
Paralel robot mekanizmalarıdır. Bu mekanizmaların temel özellikleri şu şekilde sıralanabilir. Simetrik mekanizmaları oluşturan toplam bacak sayısı mekanizmanın serbestlik derecesine eşittir. İki veya daha fazla düzlemsel kinematik zincir ortak bir uç işlevciyi hareket ettirecek şekilde bağlanıldığında bir düzlemsel paralel robot mekanizması oluşturulur. Küresel manipülatörler, uç işlevcilerinin küresel bir çalışma uzayında hareket etmesini sağlayabilen mekanizmalardır. Uzaysal mekanizmalar ise üç boyutlu uzayda üçten fazla serbestlik derecesine sahip robot mekanizmalarıdır [2]. Paralel robotların konum, hız ve ivme hesapları ile ilgilenen bilim dalı kinematik olarak adlandırılmaktadır [7]. Kinematik analiz kendi içinde iki farklı yöntemi barındırır, bunlar

ileri ve ters kinematiktir. İleri kinematik yöntem, uç işlevcinin konumunu verilen eklem parametrelerini kullanarak bulmak olarak tanımlanabilir [8]. Ters kinematik ise verilen uç işlevci konum ve yönelim bilgisinden hareketle robotun eklem parametrelerinin hesaplanması işlemidir [8]. Paralel robotların kinematik analizi için literatürde birçok yöntem geliştirilmiştir. Bunlardan en sık tercih edileni vektör cebriyle dayalı yöntemlerdir. Ancak vektör cebri özellikle işlem yükünün fazla olduğu durumlarda yetersiz kalabilmektedir. Bunun dışında kullanılan yöntemlerden Vida teorisi vektör cebri ile karşılaştırıldığında özellikle basitlik ve işlem yükünün azlığı açısından son yıllarda öne çıkan bir teknik olmuştur. Literatürde vida teorisini kullanan çalışmalardan bazıları şu şekilde sıralanabilir. Hussein ve Ernesto [9] yeni bir 3-CRC tipi paralel manipülatörün anlık kinematik ve hareketlilik analizini vida teorisi ile incelemişlerdir. Bu araştırmacıların geliştirdiği mekanizma aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil 1.5. Hussein de la Torre and Ernesto Rodriguez-Leal'in 3-CRC paralel mekanizması [9].

Hussein ve Ernesto bu çalışmalarında iki silindirik ve bir revoluteden oluşan bacaklar kullanmışlardır. Bu bacakların her biri CRC tipindedir (R: dönel eklem, C: aktif silindirik eklem). Yazarlar bu mekanizmanın vida teorisi ile anlık kinematik analizini, hız analizini ve serbestlik derecesini incelemişlerdir. Hassen, Ajit Pal ve P. Praphu [10], sınırlı serbestlik derecesine sahip paralel manipülatörün jacobian analizini Wrench ve Reciprocal (karşıt) vida prensibi ile ele almışlardır. Yazarların önerdiği mekanizmanın bacak yapıları PRS (P: Prizmatik eklem, S: Küresel eklem) yapıdadır.



Şekil 1.6. Hassen, Ajit Pal ve P.Praphu'n incelediği paralel manipulatör mekanizması [10].

Jiangua ve arkadaşları [11] ise Reciprocal (karşıt) vidayı geometriksel yaklaşımla elde etmeyi ve bunun sonucunu paralel manipulatöre uygulamayı ele almışlardır. Emre ve diğerleri de vida teorisini seri robotların ters kinematik analizi için kullanmışlardır [12]. Jiateng ve diğerleri [13] çalışmalarında Vida teorisini kullanarak aşırı kısıtlanmış bir paralel izleme mekanizmasının geometrik hata analizini ve hassasiyet analizini yapmışlardır. Jose M. Pardos [14] ise Vida teorisinin matematiksel temelini robotik alanda kullanımı için ele almıştır. Yazar bu çalışmada prizmatik eklemleri çözmek için yararlı olan bazı Pardos-Gotor(PG) kanonik alt problemlerine değinmiştir. Andrej ve Olav [15] ise çalışmalarında mafsal bomlu vinçlerin dinamik modellemesi için vida teorisini kullanmışlardır. Jaime ve diğerleri [16] de 4-PRUR Schönflies paralel manipulatörünün kinematik ve dinamiğini Vida teorisi ve sanal iş prensibi ile ele almışlardır. Bu çalışmada, 3T1R (T:Öteleme, R:Dönme) hareketini gerçekleştiren aktif prizmatik eklemlere sahip 4-PRUR (U: universal eklem) paralel manipulatörün kinematiği ve dinamiği, vida teorisi ve sanal iş prensibi ile incelenmiştir. Jinlong ve arkadaşları [17] da nütasyon sürüşün kinematik modellemesini vida teori ile ele almışlardır. Jiangua ve arkadaşları da [18] genelleştirilmiş açılı makas benzeri elemanların reciprocal (karşıt) vida teorisi ile hareketlilik analizini incelemişlerdir. Gallardo-Alvarado [19] ise Vida teorisi ile 3 bacaklı Paralel bir manipulatörün kinematik analizini gerçekleştirmiştir. Bu çalışmada, üç bacaklı paralel manipulatör sınıfının hız ve ivme analizlerine değinilmiş, hız ve ivmenin giriş-çıkış denklemleri, reciprocal vida teorisine başvurularak sistematik olarak elde edilmiştir. Santiago Arroyave ve diğerleri [20] ise Geometrik toleransta kısıtlama kümelerinin toplanması için vida teorisini kullanmışlardır [21] de yer alan çalışmada ise graf ve vida teorileri kullanılarak karmaşık dişli birleşimlerinin verimliliğini belirlemek için yeni bir yöntem geliştirilmiştir.

Yukarıda sunulan çalışmalarda görüldüğü gibi vida teorisi özellikle robotların kinematik analizi konusunda son yıllarda oldukça ilgi çekmektedir. Bu nedenle bu tez çalışmasında da asimetrik üç serbestlik dereceli ve iki robottan oluşan bir düzlemsel paralel robot ailesinin kinematik analizi vida teorisi kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Çalışmada bu mekanizmaların jacobian matrisleri ve serbestlik derecesi hesapları vida teorisi yolu ile elde edilmiştir. Çalışmanın bir sonraki bölümünde vida teorisi hakkında temel bilgiler verilmiş, diğer bölümlerde ise söz konusu robotların vida teorisi ile kinematik analizi sunulmuştur.



2. VIDA TEORİSİ

Doğru geometrisi ve vektörler üç boyutlu hareketi tanımlamak için kullanılan önemli bileşenlerdir. Bu bileşenler sadece hareketi değil kuvvetlerin hareketini temsil etmek için de kullanılabilirler. Vida teorisi de temelini doğru geometrisinden alan bir teodir. Bu teori ilk olarak 18. yüzyılda, herhangi bir iki uzamsal konum arasında katı bir cismin yer değiştirmesinin, sabit bir eksen etrafındaki bir dönüş ve bu eksen boyunca bir vida hareketi olarak bilinen bir öteleme ile gerçekleştirilebilmesinin keşfedilmesi ile ortaya çıkmıştır. Bu varsayım dikkate alındığında, bir vida birleştirilmiş iki vektör olarak düşünülebilir: Bunlardan ilk vektör, yani vidanın ilk kısmı, vida eksenini boyunca bir birim vektör iken, ikinci vektör ise ilk vektör tarafından referans nokta adı verilen nokta etrafında üretilen momenttir [22]. Vida teorisi bu bileşenleri ihtiva eden uzaysal mekanizmaların analizi için güçlü bir matematiksel araçtır. Bir vida iki adet üç boyutlu vektörden oluşur ve bir uzaysal vektörün konumunu ve yönünü, katı bir cismin doğrusal hızını ve açısal hızını veya bir kuvvet ve bir tork çiftini belirtmek için kullanılabilir. Bu nedenle, vida kavramı kinematik ve dinamikte kullanışlıdır. Ayrıca vida temelli yöntemin vektör ve matris yöntemlerine dönüşümü de basittir [23]. Vida teorisi mekanizma analizinde uygulandığında, açık geometrik kavramlar, açık fiziksel anlam, basit ifade ve uygun cebirsel hesaplama avantajlarına sahiptir. Bu nedenle, vida teorisi geniş çapta uygulanmış ve ayrıca araştırmacılar mekanizma teorisindeki birçok sınır sorununa büyük katkı sağlamak için vida teorisini kullanmıştır [23]. Vida teorisinin robot kinematikinde diğer yöntemlere olan üstünlükleri; yalnız iki koordinat sisteminin bilinmesi ile kinematik analiz yapılabilir olması ile geometrik olarak çok anlaşılır ve sade olması olarak şeklinde ifade edilebilir. Vida teorisi 3 temel bileşene sahiptir. Bunlar, bir doğrunun tanımlanmasında kullanılan Plücker koordinatları, hız ifade etmek için kullanılan twist ve kuvvet ifade etmek için kullanılan wrench tir. Bu bölümde tez çalışmasında kullanılan bu teonin temellerine yer verilmiştir.

2.1 PLÜCKER KOORDİNATLARI VE VIDA

Plücker koordinat tanımlaması 19.yy'da Julius Plücker tarafından yapılmıştır [24]. Bilindiği gibi uzaydaki katı bir cismin altı serbestlik derecesi vardır. Bunlar; üçü öteleme

diğer üçü ise dönel serbestlik derecelerdir. Bu cisim x, y ve z eksenlerinden biri boyunca çevirebilir veya ötelenebilir. Bununla birlikte, uzayda bir doğru sadece dört serbestlik derecesine sahiptir. Bunun nedeni, eksenini veya çevrimi ile kendi yönünde bir dönüş gerçekleştirirken aynı doğrultuda kalacağıdır.

Şekil 2.1’de gösterildiği gibi $A(x_1, y_1, z_1)$ ve $B(x_2, y_2, z_2)$ noktaları bir doğruyu temsil etmektedir. S vektörü doğrunun yönünü göstermektedir ve şu şekilde ifade edilebilir [23].

$$S = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k \quad (2.1)$$

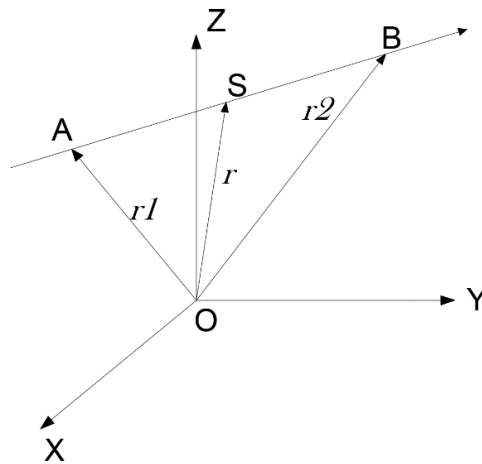
Buradaki i, j, k her bir eksenin birim vektörlerini temsil etmektedir. Denklemi daha sade biçimde yazabilmek için;

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= L \\ y_2 - y_1 &= M \\ z_2 - z_1 &= N \end{aligned} \quad (2.2)$$

İfadeleri yazılabilir. Denklem 2.2’yi denklem 2.1’de yerine koyulup düzenleme yapılırsa aşağıdaki denklem elde edilir [23].

$$S = Li + Mj + Nk \quad (2.3)$$

Burada $L, M, ve N$ yön oranlarını temsil etmektedir. Bilindiği gibi bir doğru yönü ve o doğru üzerindeki bir nokta yardımı ile tanımlanabilir. Bu vektör denklemi Şekil 2.1 kullanılarak şu şekilde yazılabilir.



Şekil 2.1. Bir doğrunun Plücker koordinatı $(l, p \times l)$.

$$(r - r_1) \times S = 0 \quad (2.4)$$

Bu denklem ayrıca aşağıdaki gibi de yazılabilir;

$$r \times S = S_0 \quad (2.5)$$

buradan

$$S_0 = r_1 \times S \quad (2.6)$$

İfadesi elde edilebilir. Bu denklem O noktasına göre doğrunun momentini temsil etmektedir [23].

Burada elde edilen $(S; S_0)$ vektörleri doğrunun Plücker koordinatı olarak anılır ve diklik koşulunu sağlamaktadır. Yani;

$$S \cdot S_0 = 0 \quad (2.7)$$

Olacaktır. $S_0 = 0$ iken doğru orjinden geçer ve doğrunun Plücker koordinatı $(S; 0)$ $(l \ m \ n; 0 \ 0 \ 0)$ olur. $S = 0$ olduğunda ise doğru sonsuzlukta bir düzlem üzerinde uzar ve Plücker Koordinatları $(0; S_0)$, $(0 \ 0 \ 0; l \ m \ n)$ olarak ifade edilir [23].

Plücker koordinatlarını ifade etmek için bir örnek şu şekilde verilebilir. Örnek olarak bir doğrunun a ve b noktardan geçtiğini varsayalım ve bu noktaların koordinatları sırasıyla a için $(2,6,8)$ ve b için $(2,3,7)$ noktaları ile temsil edilsin. O halde plücker koordinatın ilk bileşeni basitçe şu şekilde bulunabilir.

$$d = b - a \quad (2.8)$$

Denklem 2.8'den $d = (2 - 2, 3 - 6, 7 - 8) = (0, -3, -1)$ olur. İkinci bileşen ise momenti gösteren bir vektör olarak, $a \times d = (18, 2, -6)$ şeklinde elde edilir. Yukarıda basitçe ifade edilen plücker koordinatları sembolik olarak $(l; m)$ şeklinde ifade edilir. Bu bileşenler kendi aralarında diklik şartını sağlarlar yani;

$$l \cdot m = 0 \quad (2.9)$$

Plücker koordinatlarından yola çıkılarak bir vida tanımı yapılmak istenirse bu şu şekilde ifade edilebilir. Eğer bir ikili vektörü örneğin $\$ = (S; S^0)$, oluşturan vektörler kendi aralarında diklik şartını sağlamıyorlarsa bu durumda bu ikili vektöre bir vida adı verilir [23]. Yani;

$$S \cdot S^0 \neq 0 \quad (2.10)$$

Denklemleri sağlanıyorsa $\$$ bir vida olarak tanımlanır ve eğer S in normu 1 ise bu durumda $\$$ bir birim vektör olarak isimlendirilir [23].

2.2 TWİST VE WRENCH

Eğer bir vida katı bir cismin diğer bir katı cisme göre hareketini tanımlamak için kullanılırsa bu durumda bu vidaya Twist adı verilir. Twist, vida eksenindeki anlık vida hareketlerini temsil etmektedir. Buna göre bir twist aşağıdaki denklemle ifade edilebilir [25].

$$\xi = \begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Denklemlerde ξ twist, ω açısal hız v ise doğrusal hız ifadesidir. Robot kinematiğinde bu twist tanımının dönel ve prizmatik eklemler için yapılmış olan özel formları kullanılmaktadır. Bu yapının nasıl tanımlandığı bir sonraki bölümde örnek uygulama üzerinde detaylı olarak sunulmuştur.

Wrench, vida eksenine etki eden kuvvetleri temsil eden bir vida bileşeni olarak açıklanabilir. Wrench'in vida teorisindeki gösterimi genellikle (τ, f) çifti ile ifade edilmektedir. Burada, f ve τ değişkenleri 3 boyutlu vektörlerdir. Buradaki τ torku, f ise doğrusal kuvveti temsil etmektedir. Yani bir wrench aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$F = \begin{bmatrix} \tau \\ f \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Denklemlerde F bir wrenchi göstermektedir. Bu tez çalışmasında sadece kinematik analiz yapıldığı için wrench tanımlanması detaylandırılmamıştır.

2.3 RECİPROCAL PRODUCT

İki vidanın Reciprocal product işlemi şu şekilde açıklanabilir:

$\$_1 = (S_1; S_1^0)$, $\$_2 = (S_2; S_2^0)$ verilmiş iki vida olduğu varsayılırsa bu iki vidanın reciprocal product işlemi şu şekilde tanımlanır:

$$\$_1 \circ \$_2 = S_1 \cdot S_2^0 + S_2 \cdot S_1^0 \quad (2.13)$$

Burada S_x, S_x^0 ifadelerinin her biri (3×1) boyutunda vektörlerdir ve \circ sembolü de reciprocal product işlemi temsil etmektedir.

Şekil 2.2'deki mekanizmanın temel çerçevesini (sabit) B_1, B_2 ve B_3 noktaları oluştururken hareketli platformunu yani uç işlevciyi ise C_1, C_2 ve C_3 noktaları oluşturmaktadır. Her iki çerçeve de eşkenar üçgensel forma sahiptir. İncelenen mekanizmanın vida teorisi ile kinematik analizi için bir orijine ihtiyaç vardır. Bunun için B_1 noktasına üç boyutlu bir $O(x, y, z)$ koordinat sistemi eklenmiştir. Hareketli platformun ağırlık merkezine de benzer şekilde bir $P(u, v, w)$ koordinat sistemi tanımlanmıştır. Bu iki koordinat sistemi arasında ki yönelim matrisi aşağıdaki gibi yazılabilir [26].

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\sigma) & -\sin(\sigma) & 0 \\ \sin(\sigma) & \cos(\sigma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Denklemden σ açısı uç işlevci platformunun temel çerçeve ile arasındaki yönelimi (dönme) belirten bir açıdır. Mekanizmanın B_2-C_2 noktaları ve B_3-C_3 noktaları arasındaki bacaklar RPR (Revolute-Prizmatik-Revolute=Dönel-Prizmatik-Dönel), B_1-C_1 noktaları arasındaki bacak ise RRR (Revolute-Revolute-Revolute=Dönel-Dönel-Dönel) tipi bacaklardır. Tüm bacakların hareketli platforma bağlanma noktaları pasiftir. B_1-C_1 bacağına B_1 noktasındaki dönel eklem aktif iken diğer bacaklarda ise prizmatik eklemler aktiftir. Buna göre bacaklarda ki eklem değişkenleri sırasıyla, θ_1, d_2 ve d_3 olacaktır. Şekilde yer alan diğer değişkenler ise şu şekilde ifade edilebilir. $\gamma, \theta_2, \theta_3$ sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü bacaklardaki pasif eklemlerin orijinin x eksenine göre açılarıdır. l_1 ve l_2 ise ilk bacağı oluşturan bölümlerin uzunlukları ve t ise uç işlevci(hareketli platform) platformunu oluşturan üçgensel bölgenin bir kenarının uzunluğunu temsil etmektedir. Son olarak \vec{B}_2 ve \vec{P} vektörleri sırasıyla B ve P noktalarının O koordinat sistemine göre konum vektörleri, \vec{c}_1 ise C_1 noktasının P koordinat sistemine göre olan konum vektörüdür [26]. Benzer şekilde mekanizmanın diğer noktalarına tanımlanabilecek vektörlere okunabilirlik bozulmaması adına şekil üzerinde yer verilmemiştir.

Bu mekanizmanın kinematik analizi için ilk olarak ters kinematik denklemlerinin elde edilmesi ardından bu denklemlerden yola çıkılarak jacobian matrisinin elde edilmesi gerekir. Tez çalışmasında kullanılan vida teorisi ile yapılacak hesaplama sonuçlarını karşılaştırabilmek için aşağıda bu mekanizmanın [26] tarafından vektörel yöntemle elde edilen ters kinematik ve jacobian matrisi denklemleri verilmiştir.

Ters kinematik için mekanizmanın uç işlevci konum ve yönelimi verilir ve bacak değişkenlerinin bulunması istenir. [26] tarafından bu mekanizma için elde edilen ters kinematik denklemleri şu şekildedir.

RPR tipi bacaklar ters kinematik denklemleri;

$$d_2^2 = A_x^2 + A_y^2 \quad (3.2)$$

$$d_3^2 = D_x^2 + D_y^2 \quad (3.3)$$

Denklemlerde $A_x = P_x + \cos(\sigma) c_{2x} - \sin(\sigma) c_{2y} - B_{2x}$, $A_y = P_y + \sin(\sigma) c_{2x} + \cos(\sigma) c_{2y} - B_{2y}$, $D_x = P_x + \cos(\sigma) c_{3x} - \sin(\sigma) c_{3y} - B_{3x}$ ve $D_y = P_y + \sin(\sigma) c_{3x} + \cos(\sigma) c_{3y} - B_{3y}$ dir. Denklemlerde P_x ve P_y sırasıyla P vektörünün B_{ix} ve B_{iy} ise sırasıyla \vec{B}_1 vektörünün x ve y eksenlerindeki bileşenlerini, c_{ix} ve c_{iy} ise \vec{c}_1 vektörünün u ve v eksenlerindeki bileşenlerini ifade etmektedir [26].

Mekanizmanın RRR tipi bacağına ters kinematik denklemi ise aşağıdaki gibidir.

$$\theta_1 = \text{atan2}(F, E) + \text{atan2}\left(\frac{\pm \sqrt{F^2 + E^2 - \left(\frac{E^2 + F^2 + l_1^2 - l_2^2}{2l_1}\right)^2}}{\frac{E^2 + F^2 + l_1^2 - l_2^2}{2l_1}}\right), \quad (3.4)$$

Denklemden $E = P_x + \cos(\sigma) c_{1x} - \sin(\sigma) c_{1y}$ ve $F = P_y + \sin(\sigma) c_{1x} + \cos(\sigma) c_{1y}$ dir.

Mekanizmanın jacobian matrisi ise ters kinematik denklemlerinin zamana göre türevi alınarak aşağıdaki gibi elde edilmiştir [26].

$$K \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{d}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \dot{P}_x \\ \dot{P}_y \\ \dot{\sigma} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Denklemden J ve K mekanizmanın sırasıyla mekanizmanın ters ve ileri jacobian matrisleridir. Ayrıca $\dot{\theta}_1$, \dot{d}_2 , \dot{d}_3 ise eklem hız değişkenleri ve \dot{P}_x , \dot{P}_y ve $\dot{\sigma}$ ise sırasıyla uç işlevcinin x ve y eksenlerindeki doğrusal hız ve z eksenindeki açısal hız bileşenleridir. Söz konusu mekanizma için J ve K matrisleri aşağıdaki gibi yazılabilir [26].

$$K = \begin{bmatrix} l_1(F \cos(\theta_1) - E \sin(\theta_1)) & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$J = \begin{bmatrix} E - l_1 \cos(\theta_1) & F - l_1 \sin(\theta_1) & J_{13} \\ A_x & A_y & J_{23} \\ D_x & D_y & J_{33} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Denklemden,

$$J_{13} = (F - l_1 \sin(\theta_1))(\cos \sigma c_{1x} - \sin(\sigma) c_{1y}) - (E - l_1 \cos(\theta_1))(c_{1x} \sin(\sigma) + c_{1y} \cos \sigma), J_{23} = -A_x(\sin(\sigma) c_{2x} + \cos(\sigma) c_{2y}) + A_y(\cos(\sigma) c_{2x} - \sin(\sigma) c_{2y})$$

$$J_{33} = -D_x(\sin(\sigma) c_{3x} + \cos(\sigma) c_{3y}) - D_y(\cos(\sigma) c_{3x} - \sin(\sigma) c_{3y}) \text{ şeklindedir.}$$

Mekanizmanın vektörel yöntemle kinematik analizinin detayları için [26]'ya bakılabilir.

Bir sonraki bölümde mekanizmanın vida teorisi ile kinematik analizi yapılmıştır.

3.1 VIDA TEORİSİ İLE KİNEMATİK ANALİZ

Seçilen asimetrik paralel robot mekanizmasının vida teorisi ile kinematik analizi yapmak için ilk olarak mekanizmada yer alan her bir eklem için vida eksen tanımlamaları yapılmalıdır. Mekanizmada yer alan eklemlerin tamamı dönel ve prizmatik yapıda oldukları için bu yapılara özgü vida tanımlamaları analiz için yeterli olacaktır. Ayrıca vektörel yöntemden farklı olarak uç işlevci platformuna konumu P ile aynı yönelimi ise temel çerçeve koordinat sistemi ile aynı olan anlık (instantaneous) bir koordinat sistemi daha eklenmelidir çünkü vida eksen tanımlamaları bu anlık koordinat sistemine göre yapılacaktır. Aşağıda tez çalışmasında vida eksen tanımlamaları yapmak için gerekli dönel ve prizmatik eklem vida tanımları verilmiştir.

$$\$_D = \begin{bmatrix} S_D \\ R_D \times S_D \end{bmatrix}; \quad \$_P = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 1} \\ S_P \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Denklemlerde $\$_D$ ve $\$_P$ sırası ile dönel ve prizmatik eklemlere ait eklem vida eksenlerini ifade eden 6 elemanlı vektörlerdir. S_D ve S_P ise dönel ve prizmatik eklem eksenlerini anlık koordinat sistemine göre ifade eden birim vektörler, R_D ise dönel eklem için anlık koordinat sistemine göre eklem eksenini üzerindeki herhangi bir noktayı tanımlayan diğer bir vektördür. S_D , R_D ve S_P 3×1 boyutunda vektörlerdir. Bu tanımlamalara göre önerilen mekanizmanın bacaklarındaki dönel ve prizmatik eklemleri için vida teorisi ile ilgili tanımlamalar aşağıdaki gibi yapılabilir;

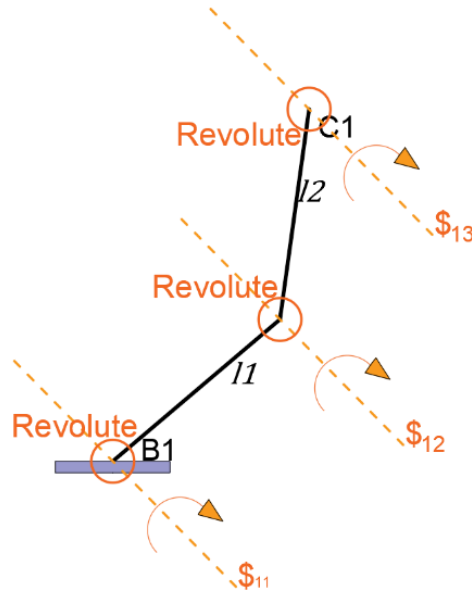
Dönel (Revolute) eklemler için;

$$\begin{aligned} \$_{ij} &= \begin{bmatrix} 0 \\ S_{ij} \\ R_{ij} \times S_{ij} \end{bmatrix}; S_{ij} = [0 \ 0 \ 1]^T; & R_{ij} &= [R_{ijx} \ R_{ijy} \ 0]^T; \\ R_{ij} \times S_{ij} &= [R_{ijy} \ -R_{ijx} \ 0]^T; \$_{ij} &= [0 \ 0 \ 1 \ R_{ijy} \ -R_{ijx} \ 0]^T \end{aligned} \quad (3.9)$$

Denklemlerde $\$_{ij}$ $i, j = 1, 2, 3$ ifadesinde ilk indis olan “i” bacak numarasını diğer indis “j” ise eklem numarasını (sayım yönü temel çerçeveden uç işlevciye doğru) ifade etmektedir. Mekanizma düzlemsel bir yapıya sahip olduğundan dönel eklem birim vektörleri düzleme diktir yani S_{ij} sadece z ekseninde dönmeye izin verecek şekilde, $[0 \ 0 \ 1]^T$ oluşmuştur. R_{ij} ise yine mekanizma sadece düzlemde uzunluk değerlerine sahip olduğu için x ve y eksenlerinde sembolik olarak ifade edilmiş uzunluklar ile tanımlanmıştır ve z ekseninde bu vektör 0 uzunluğa sahiptir. Prizmatik eklemler için ise genel vida eksen tanımlaması;

$$\begin{aligned} \$_{ij} &= \begin{bmatrix} 0 \\ S_{ij} \\ \vec{d}_i \end{bmatrix}; S_{ij} = \vec{d}_i; \vec{d}_i = R\vec{c}_1 - \vec{l}_2 - \vec{l}_1 + \vec{B}_i - R\vec{c}_i \\ S_{ij} &= [S_{ijx} \ S_{ijy} \ 0]; \text{ ve } \$_{ij} = [0 \ 0 \ 0 \ S_{ijx} \ S_{ijy} \ 0]^T \end{aligned} \quad (3.10)$$

Olarak yazılabilir. Denklem 2.8’i revolute(dönel) eklem olan her bir bacak için sıra ile uygularsak;



Şekil 3.1. Birinci bacak için vida eksenleri ve eklem tip tanımlamaları.

Birinci bacak, birinci eklem için uygulanırsa;

$$\$_{11} = \begin{bmatrix} S_{11} \\ R_{11} \times S_{11} \end{bmatrix}; S_{11} = [0 \ 0 \ 1]; R_{11} = [R_{11x} \ R_{11y} \ 0] \quad (3.11)$$

$$R_{11} \times S_{11} = [R_{11y} \ -R_{11x} \ 0]; \$_{11} = [0 \ 0 \ 1 \ R_{11y} \ -R_{11x} \ 0]^T \quad (3.12)$$

Birinci bacak, ikinci eklem için uygulanırsa;

$$\$_{12} = \begin{bmatrix} S_{12} \\ R_{12} \times S_{12} \end{bmatrix}; S_{12} = [0 \ 0 \ 1]; R_{12} = [R_{12x} \ R_{12y} \ 0] \quad (3.13)$$

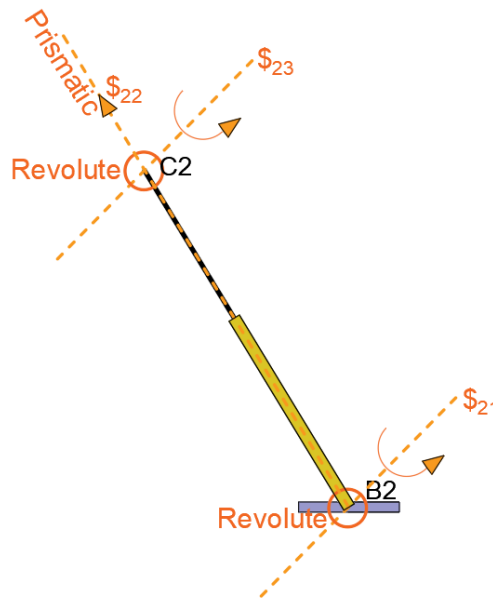
$$R_{12} \times S_{12} = [R_{12y} \ -R_{12x} \ 0]; \$_{12} = [0 \ 0 \ 1 \ R_{12y} \ -R_{12x} \ 0]^T \quad (3.14)$$

Birinci bacak, üçüncü eklem için uygulanırsa;

$$\$_{13} = \begin{bmatrix} S_{13} \\ R_{13} \times S_{13} \end{bmatrix}; S_{13} = [0 \ 0 \ 1]; R_{13} = [R_{13x} \ R_{13y} \ 0] \quad (3.15)$$

$$R_{13} \times S_{13} = [R_{13y} \ -R_{13x} \ 0]; \$_{13} = [0 \ 0 \ 1 \ R_{13y} \ -R_{13x} \ 0]^T \quad (3.16)$$

Sonuçları elde edilmiş olunur. Denklem 3.11-3.16'nın hepsi birinci bacak için orjin noktasından başlayarak sırasıyla tüm eklemlerine ait vida eksen tanımlamalarını temsil eder. İkinci ve üçüncü bacak birinci baccaktan farklı bir yapıda olması sebebi ile bu bacakların birinci baccaktan farklı olduğu eklem noktalarında elde edilen vida eksen tanımlamaları ilkinden farklı olacaktır. Bu adımlar ikinci bacak için tüm eklem noktalarına sırayla uygulanırsa;



Şekil 3.2. İkinci bacak için vida eksenleri ve eklem tip tanımlamaları.

İkinci bacak, birinci eklem için;

$$\$_{21} = \begin{bmatrix} S_{21} \\ R_{21} \times S_{21} \end{bmatrix}; S_{21} = [0 \ 0 \ 1]; R_{21} = [R_{21x} \ R_{21y} \ 0] \quad (3.17)$$

$$R_{21} \times S_{21} = [R_{21y} \ -R_{21x} \ 0]; \$_{21} = [0 \ 0 \ 1 \ R_{21y} \ -R_{21x} \ 0]^T \quad (3.18)$$

İkinci bacak, ikinci eklem için;

$$\$_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ S_{22} \end{bmatrix}; S_{22} = -d_2 = S_{22} = [S_{22x} \ S_{22y} \ 0] \quad (3.19)$$

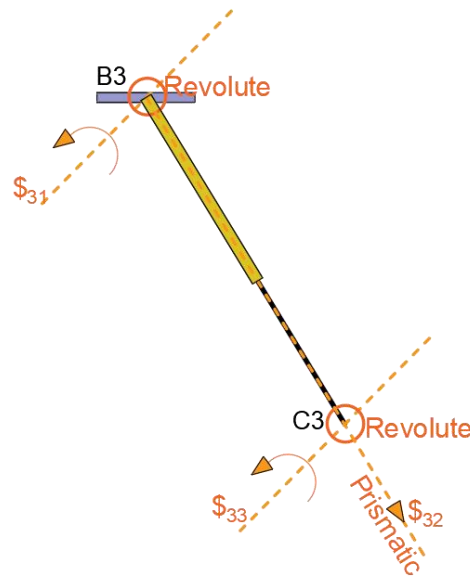
$$\$_{22} = [0 \ 0 \ 0 \ S_{22x} \ S_{22y} \ 0]^T \quad (3.20)$$

İkinci bacak, üçüncü eklem için;

$$\$_{23} = \begin{bmatrix} S_{23} \\ R_{23} \times S_{23} \end{bmatrix}; S_{23} = [0 \ 0 \ 1]; R_{23} = [R_{23x} \ R_{23y} \ 0] \quad (3.21)$$

$$R_{23} \times S_{23} = [R_{23y} \ -R_{23x} \ 0]; \$_{23} = [0 \ 0 \ 1 \ R_{23y} \ -R_{23x} \ 0]^T \quad (3.22)$$

sonuçları elde edilir. Görüldüğü gibi ilk bacadan farklı eklem noktalarında elde edilen denklemler ilk bacadaki denklemlerden farklı bir sonuç vermiştir. Son bacak ikinci bacak yapısından olduğundan tanımlamalarda sadece bacak ve bacadaki eklem numaralarını temsil eden ifadeler değişecektir. Bu adımların son bacak için uygulaması yapılırsa;



Şekil 3.3. Üçüncü bacak için vida eksenleri ve eklem tip tanımlamaları.

Üçüncü bacak, birinci eklem için uygulanırsa;

$$\$_{31} = \begin{bmatrix} S_{31} \\ R_{31} \times S_{31} \end{bmatrix}; S_{31} = [0 \ 0 \ 1]; R_{31} = [R_{31x} \ R_{31y} \ 0] \quad (3.23)$$

$$R_{31} \times S_{31} = [R_{31y} \ -R_{31x} \ 0]; \$_{31} = [0 \ 0 \ 1 \ R_{31y} \ -R_{31x} \ 0]^T \quad (3.24)$$

Üçüncü bacak, ikinci eklem için uygulama;

$$\$_{32} = \begin{bmatrix} 0 \\ S_{32} \end{bmatrix}; S_{32} = -d_3 = [s_{32x} \ s_{32y} \ 0] \quad (3.25)$$

$$\$_{32} = [0 \ 0 \ 0 \ S_{32x} \ S_{32y} \ 0]^T \quad (3.26)$$

Üçüncü bacak, üçüncü eklem için uygulama;

$$\$_{33} = \begin{bmatrix} S_{33} \\ R_{33} \times S_{33} \end{bmatrix}; S_{33} = [0 \ 0 \ 1]; R_{33} = [R_{33x} \ R_{33y} \ 0] \quad (3.27)$$

$$R_{33} \times S_{33} = [R_{33y} \ -R_{33x} \ 0]; \$_{33} = [0 \ 0 \ 1 \ R_{33y} \ -R_{33x} \ 0]^T \quad (3.28)$$

Denklemleri elde edilmiş olunur. Bu denklemler tüm bacaklar için yazılıp her bacak için yazılan reciprocal vida ile reciprocal çarpım işlemine tabi tutulursalar mekanizmanın hem serbestlik derecesi hem de jacobian matrisleri hesaplanabilir.

3.2 VIDA TEORİSİ İLE JACOBIAN MATRİSİ

Jacobian matrisi için ilk olarak uç işlevci platformunun hızı ile aktif eklem değişkenlerinin hızları arasında aşağıdaki ilişki yazılmalıdır.

$$\$_p = \$_{11}\dot{\theta}_1 + \$_{22}\dot{d}_2 + \$_{32}\dot{d}_3 \quad (3.29)$$

Bu denklemin sol tarafı uç işlevci platformunun hızını göstermektedir. Uç işlevci (hareketli platform) iki eksen boyunca öteleme ve bir eksen boyunca dönme hareketi yapabilmektedir. Dolayısıyla denklemin sol tarafı sembolik olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\$_p = [0 \ 0 \ w_{pz} \ v_{px} \ v_{py} \ 0]^T \quad (3.30)$$

Bu denkleme göre mekanizmanın iki eksen boyunca (x ve y) doğrusal bir eksen boyunca da (z) açısal hıza sahip olduğu açıkça görülecektir. Denklemin sağ tarafındaki her bir aktif

eklem ifadesini elde etmek için Denklem 3.30 sadece ilk bacak için aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\$_{P_1} = \$_{11}\dot{\theta}_1 + \$_{12}(\dot{\gamma} + \dot{\theta}_1) + \$_{13}(\dot{\sigma}) \quad (3.31)$$

Bu ifadede sol tarafta yer alan $\$_{P_1}$ aslında $\$_P$ ile aynıdır fakat buna ek olarak sadece ilk bacadaki aktif eklem hız değişkeni $\dot{\theta}_1$ ile ifade eden vidaya olan katkısını göstermek için farklı bir denklem olarak ifade edilmiştir. Denklem sağ tarafında ise bu bacağın her bir eklemi için hız değişkenleri, $\dot{\theta}_1$, $\dot{\gamma}$ ve $\dot{\sigma}$ ile bu eklem vidalarının çarpım sonuçlarının toplamı yer almaktadır. Bunlardan sadece $\dot{\theta}_1$ aktif eklem hız değişkenidir. Bundan dolayı denklemde yer alan diğer iki pasif eklem hız değişkenlerinden kurtulmak gerekir. Bunun için denklemin her iki tarafı bacadaki bulunan bu iki pasif eklem vidasına aynı anda reciprocal (karşıt) olan bir vida ile reciprocal çarpıma tabii tutulmalıdır. Reciprocal çarpım detayları için [27]'e bakılabilir. Böyle bir vida eksenini \vec{l}_2 boyunca uzandır ve aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} \$_{r_1} &= \begin{bmatrix} S_{r_1} \\ R_{r_1} \times S_{r_1} \end{bmatrix}; \\ S_{r_1} &= [l_2 \cos(\theta_1 + \gamma) \quad l_2 \sin(\theta_1 + \gamma) \quad 0] = [S_{r_1x} \quad S_{r_1y} \quad 0] \\ R_{r_1} &= R\vec{c}_1 = [R_{r_1x} \quad R_{r_1y} \quad 0]; \\ R_{r_1} \times S_{r_1} &= [0 \quad 0 \quad R_{r_1x}S_{r_1y} - R_{r_1y}S_{r_1x}]^T \\ \$_{r_1} &= [S_{r_1x} \quad S_{r_1y} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad R_{r_1x}S_{r_1y} - R_{r_1y}S_{r_1x}]^T \end{aligned} \quad (3.32)$$

Denklem 3.32'de yer alan ifadenin her iki tarafı denklem 3.33'ün her iki tarafı ile karşılıklı reciprocal çarpıma tabii tutulursa sol tarafta aşağıdaki eşitlik elde edilir. Denklemde kullanılan “ \circ ” sembolü reciprocal çarpımı ifade etmektedir.

$$\$_{r_1} \circ \$_{P_1} = S_{r_1x}v_{px} + S_{r_1y}v_{py} + (R_{r_1x}S_{r_1y} - R_{r_1y}S_{r_1x})w_{pz} \quad (3.33)$$

Sağ tarafta ise;

$$\$_{r_1} \circ \$_{11}\dot{\theta}_1 = (S_{r_1x}R_{11y} - S_{r_1y}R_{11x} + R_{r_1x}S_{r_1y} - R_{r_1y}S_{r_1x})\dot{\theta}_1 \quad (3.34)$$

Olarak elde edilir. Burada dikkat edilmesi gereken sağ taraftaki pasif eklem vidaları ile onlara reciprocal olan $\$_{r_1}$ in reciprocal çarpımı 0'dır. Sonuç olarak denklemler 3.34 ve

3.35 birlikte düzenlenirse mekanizmanın uç işlevci platform hızları ile ilk bacağın eklem değişkeninin hızı arasındaki ilişkiyi diğer bir değişle ileri ve ters jacobian matrislerinin ilk satırlarını verecek şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$K \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{d}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} v_{px} \\ v_{py} \\ w_{pz} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Denklem 3.36’da yer alan K ve J matrisleri sırasıyla mekanizmanın 3×3 boyutunda ileri ve ters jacobian matrisleridir. Denklemler 3.34 ve 3.35 kullanılarak bu matrislerin ilk satırları aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{bmatrix} S_{r1x}R_{11y} - S_{r1y}R_{11x} + R_{r1x}S_{r1y} - R_{r1y}S_{r1x} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{d}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{r1x} & S_{r1y} & R_{r1x}S_{r1y} - R_{r1y}S_{r1x} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{px} \\ v_{py} \\ w_{pz} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

K ve J matrislerinin ikinci ve üçüncü satırları ise sırasıyla ilk bacak için yapılan işlemlerin ikinci ve üçüncü bacaklar için yapılması ile elde edilebilir. Buna rağmen bu iki bacak RPR tipinde oldukları için pasif eklemlere reciprocal (karşıt) olan vida ilk bacak için yazılıandan daha farklı olacaktır. Böyle bir vida RPR tipindeki bacaklardaki pasif eklemlere aynı anda reciprocal (karşıt) olan bir vida tanımlaması olmalıdır. Bu da ancak vida eksenleri bu bacaklardaki \vec{d}_2 ve \vec{d}_3 vektörlerine paralel olacak şekilde vidalar tanımlamak suretiyle olabilir. Buna göre mekanizmanın ikinci ve üçüncü bacakları için bu bacaklardaki pasif eklemlere aynı anda reciprocal (karşıt) olan vidalar aşağıdaki gibi yazılabilir.

İkinci bacak için reciprocal tanımlaması;

$$\begin{aligned} \$_{r2} &= \begin{bmatrix} S_{r2} \\ R_{r2} \times S_{r2} \end{bmatrix}; \\ S_{r2} &= S_{22} = [S_{r2x} \quad S_{r2y} \quad 0]; \quad R_{r2} = R\vec{C}_2 = [R_{r2x} \quad R_{r2y} \quad 0]; \\ R_{r2} \times S_{r2} &= [0 \quad 0 \quad R_{r2x}S_{r2y} - R_{r2y}S_{r2x}]^T; \\ \$_{r2} &= [S_{r2x} \quad S_{r2y} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad R_{r2x}S_{r2y} - R_{r2y}S_{r2x}]^T \end{aligned} \quad (3.37)$$

Üçüncü bacak için reciprocal tanımlaması;

$$\begin{aligned}
\$_{r3} &= \begin{bmatrix} S_{r3} \\ R_{r3} \times S_{r3} \end{bmatrix}; \\
S_{r3} &= S_{32} = [S_{r3x} \quad S_{r3y} \quad 0]; \quad R_{r3} = R\vec{C}_3 = [R_{r3x} \quad R_{r3y} \quad 0]; \\
R_{r3} \times S_{r3} &= [0 \quad 0 \quad R_{r3x}S_{r3y} - R_{r3y}S_{r3x}]^T; \\
\$_{r3} &= [S_{r3x} \quad S_{r3y} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad R_{r3x}S_{r3y} - R_{r3y}S_{r3x}]^T
\end{aligned} \tag{3.38}$$

RPR yapıdaki iki bacağın uç işlevci platformu hareketine katkısını ifade edebilmek için ilk bacakta yapılan reciprocal çarpımlar aynı şekilde gerçekleştirilmelidir. Öyleyse, ilk olarak denklem 3.30 her iki bacak özelinde aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\$_{p2} = \$_{21}\dot{\theta}_2 + \$_{22}(\dot{d}_2) + \$_{23}(\dot{\sigma}) \tag{3.39}$$

$$\$_{p3} = \$_{31}\dot{\theta}_3 + \$_{32}(\dot{d}_3) + \$_{33}(\dot{\sigma}) \tag{3.40}$$

Bu denklemlerde sadece d_2 ve d_3 aktif eklem hız değişkenleridir. Birinci bacak için yapıldığı gibi denklemler 3.37 ve 3.38 sırası ile denklemler 3.39 ve 3.40 ile reciprocal çarpıma tabii tutulursa her bir bacağın mekanizmanın uç işlevcisinin hareketini ifade eden vidaya katkısı elde edilmiş olur. Bu çarpımlar yapılır ve elde edilen ifadeler matris formunda tekrar güncellenirse J ve K matrislerinin son hali aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$K = \begin{bmatrix} S_{r1x}R_{11y} - S_{r1y}R_{11x} + R_{r1x}S_{r1y} - R_{r1y}S_{r1x} & 0 & 0 \\ 0 & (S_{r2x}S_{22x} + S_{r2y}S_{22y})/|d_2| & 0 \\ 0 & 0 & (S_{r3x}S_{32x} + S_{r3y}S_{32y})/|d_3| \end{bmatrix} \tag{3.41}$$

$$J = \begin{bmatrix} S_{r1x} & S_{r1y} & R_{r1x}S_{r1y} - R_{r1y}S_{r1x} \\ S_{r2x} & S_{r2y} & R_{r2x}S_{r2y} - R_{r2y}S_{r2x} \\ S_{r3x} & S_{r3y} & R_{r3x}S_{r3y} - R_{r3y}S_{r3x} \end{bmatrix} \tag{3.42}$$

Denklemler 3.41 ve 3.42'de elde edilen K ve J matrisleri Toz [26] tarafından vektörel yöntemle elde edilen jacobian matrisleri ile aynıdır. Bu iki matris sırasıyla mekanizmanın ileri ve ters yönlü jacobian matrisleridir. Ele alınan mekanizmanın genel matrisi ise bu iki matris kullanılarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$J_0 = K^{-1}J \tag{3.43}$$

3.3 VIDA TEORİSİ İLE SERBESTLİK DERECESESİ HESABI

Vida teorisi ile serbestlik derecesi hesabı için mekanizmanın hareketini ifade eden tüm vidalara aynı anda reciprocal olan bir vida bulmak yeterlidir. Elde edilen böyle bir vidanın

hareket ifade eden bileşen sayısı mekanizmanın serbestlik derecesini verecektir. Bunun için mekanizmanın tüm eklemleri için eklem vidalarını açık olarak tekrar yazılacak olursa:

$$\begin{aligned}
\$_{11} &= [0 \ 0 \ 1 \ R_{11y} \ -R_{11x} \ 0]^T \\
\$_{12} &= [0 \ 0 \ 1 \ R_{12y} \ -R_{12x} \ 0]^T \\
\$_{13} &= [0 \ 0 \ 1 \ R_{13y} \ -R_{13x} \ 0]^T \\
\$_{21} &= [0 \ 0 \ 1 \ R_{21y} \ -R_{21x} \ 0]^T \\
\$_{22} &= [0 \ 0 \ 0 \ S_{22x} \ S_{22y} \ 0]^T \\
\$_{23} &= [0 \ 0 \ 1 \ R_{23y} \ -R_{23x} \ 0]^T \\
\$_{31} &= [0 \ 0 \ 1 \ R_{31y} \ -R_{31x} \ 0]^T \\
\$_{32} &= [0 \ 0 \ 0 \ S_{32x} \ S_{32y} \ 0]^T \\
\$_{33} &= [0 \ 0 \ 1 \ R_{33y} \ -R_{33x} \ 0]^T
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Elde edilen (tüm bacak ve her bacağın her eklemi için) vidalara aynı anda reciprocal olacak bir vida tanımlamak gerekirse aşağıda gösterildiği gibi iki vidaya reciprocal olan bir vida olmalıdır. Böyle bir vida şu şekilde ifade edilsin;

$$\$r_m = [M_{1x} \ M_{1y} \ M_{1z} \ T_{1x} \ T_{1y} \ T_{1z}] \tag{3.45}$$

Denklem 3.44'de ki vidalara dikkatli bakıldığında aslında sadece iki farklı vida formu olduğu görülebilir. Dolayısıyla bu iki vidaya reciprocal (karşıt) olan bir vida denklem 3.44'de yer alan tüm vidalara da reciprocal olacaktır. Böyle bir vida aşağıdaki gibi yazılabilir.

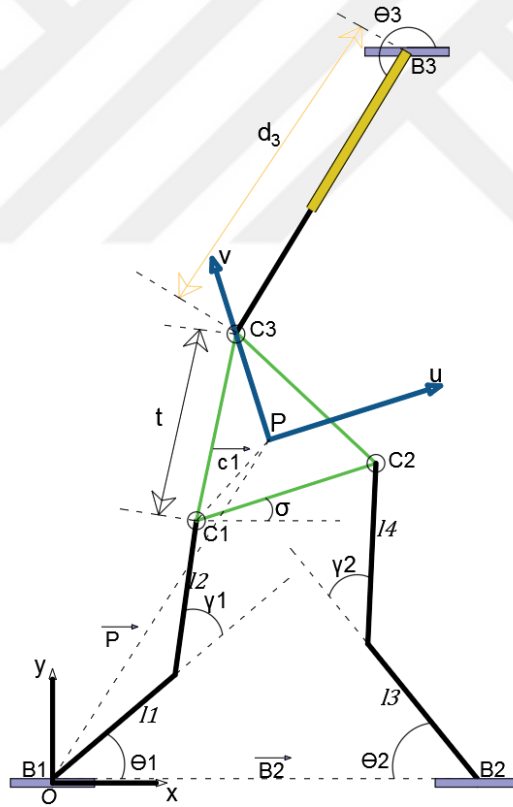
$$\$r_m = [0 \ 0 \ M_{1z} \ T_{1x} \ T_{1y} \ 0] \tag{3.46}$$

Denklem 3.46'da gösterilen vida ise aşağıda verildiği gibi bir hız vidası ile karşılaştırıldığında görülecektir ki böyle bir vida için mekanizmanın x ve y eksenlerinde sadece doğrusal harekete z eksenin de ise sadece açısal harekete izin çıkmaktadır. Bu açıdan bakıldığında mekanizmanın serbestlik derecesinin üç olduğu gösterilmiş olacaktır.

$$\$p = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z \ v_{px} \ v_{py} \ v_{pz}] \tag{3.47}$$

4. RRR2RPR1 TİPİ ASİMETRİK DÜZLEMSEL PARALEL MANİPÜLATÖRÜN VİDA TEORİSİ İLE KİNEMATİK VE SERBESTLİK DERECE Sİ ANALİZİ

Bir önceki bölümde ele alınan mekanizmanın bir RPR bacağı RRR bacak ile yer değiştirmesi yaparak RRR2RPR1 tipinde bir paralel manipülatör mekanizmasını elde etmiş olunur. Bu bölümde elde edilen bu yeni mekanizmanın anlık kinematik ve serbestlik derecesi analizi vida teorisi ile yapılacaktır. Mekanizmanın görsel temsili Şekil 4.1’de gösterilmiştir.



Şekil 4.1. RRR2RPR1 tipindeki düzlemsel paralel manipülatör mekanizması [26].

Bu mekanizma için yapılan değişken tanımlamaları bir önceki bölümde sunulan mekanizma ile aynıdır. Sadece bacaklardan birinin türünün değişmesi nedeniyle oluşan

değişiklikler vardır. Onlar da şekil üzerinde görülebilir. Vida teorisi ile yapılacak çalışmaya referans olması açısından vektörel yöntemle elde edilen mekanizmanın ters kinematik denklemleri ve jacobian matrisi aşağıda sunulmuştur.

RPR tipi bacak için ters kinematik denklemleri

$$d_3^2 = D_x^2 + D_y^2 \quad (4.1)$$

Denklemden $D_x = P_x + \cos(\sigma) c_{3x} - \sin(\sigma) c_{3y} - B_{3x}$ ve $D_y = P_y + \sin(\sigma) c_{3x} + \cos(\sigma) c_{3y} - B_{3y}$ dir.

Mekanizmanın RRR tipi bacakları için ise ters kinematik denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\theta_1 = \text{atan2}(F, E) + \text{atan2}\left(\frac{\pm \sqrt{F^2 + E^2 - \left(\frac{E^2 + F^2 + l_1^2 - l_2^2}{2l_1}\right)}}, \frac{E^2 + F^2 + l_1^2 - l_2^2}{2l_1}\right) \quad (4.2)$$

Denklemden $E = P_x + \cos(\sigma) c_{1x} - \sin(\sigma) c_{1y}$ ve $F = P_y + \sin(\sigma) c_{1x} + \cos(\sigma) c_{1y}$ dir.

$$\theta_2 = \text{atan2}(I, H) + \text{atan2}\left(\frac{\pm \sqrt{I^2 + H^2 - \left(\frac{H^2 + I^2 + l_3^2 - l_4^2}{2l_3}\right)}}, \frac{H^2 + I^2 + l_3^2 - l_4^2}{2l_3}\right) \quad (4.3)$$

Denklemden $H = P_x + \cos(\sigma) c_{2x} - \sin(\sigma) c_{2y}$ ve $I = P_y + \sin(\sigma) c_{2x} + \cos(\sigma) c_{2y}$ dir.

Mekanizmanın jacobian matrisi ise ters kinematik denklemlerinin zamana göre türevi alınarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$K \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \dot{P}_x \\ \dot{P}_y \\ \dot{\sigma} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Denklemden yer alan J ve K matrisleri aşağıdaki gibi yazılabilirler.

$$K = \begin{bmatrix} l_1(F \cos(\theta_1) - E \sin(\theta_1)) & 0 & 0 \\ l_3(I \cos(\theta_2) - H \sin(\theta_2)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$J = \begin{bmatrix} E - l_1 \cos(\theta_1) & F - l_1 \sin(\theta_1) & J_{13} \\ H - l_3 \cos(\theta_2) & I - l_3 \sin(\theta_2) & J_{23} \\ D_x & D_y & J_{33} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Denklemden,

$$J_{13} = (F - l_1 \sin(\theta_1))(\cos \sigma c_{1x} - \sin(\sigma) c_{1y}) - (E - l_1 \cos(\theta_1))(c_{1x} \sin(\sigma) + c_{1y} \cos \sigma),$$

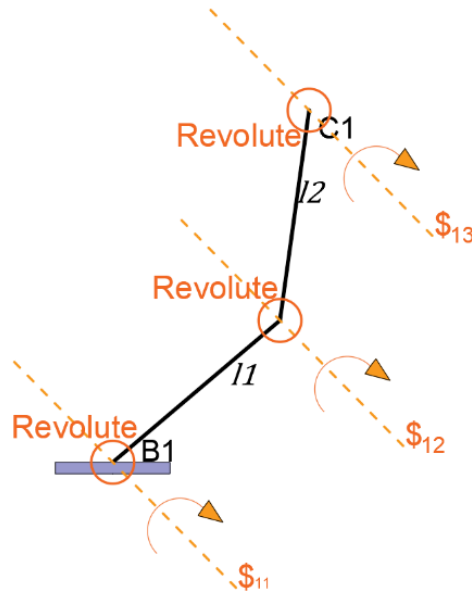
$$J_{23} = (I - l_3 \sin(\theta_2))(\cos \sigma c_{2x} - \sin(\sigma) c_{2y}) - (H - l_3 \cos(\theta_2))(c_{2x} \sin(\sigma) + c_{2y} \cos \sigma),$$

$$J_{33} = -D_x(\sin(\sigma) c_{3x} + \cos(\sigma) c_{3y}) - D_y(\cos(\sigma) c_{3x} - \sin(\sigma) c_{3y}) \text{ dir.}$$

Bir sonraki bölümde mekanizmanın vida teorisi ile kinematik analizi yapılmıştır.

4.1 VIDA TEORİSİ İLE KİNEMATİK ANALİZ

Vida teorisi ile kinematik analiz için bir önceki bölümde gerçekleştirilen hesaplama benzer şekilde bir yol izlenecektir. Bu nedenle bir önceki bölümde sunulan ayrıntılar tekrar olmaması açısından bu bölümde verilmemiştir. Ters kinematik analiz için ilk önce tüm mekanizma için vida eksenleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir.



Şekil 4.2. Birinci bacak için vida eksenleri ve eklem tip tanımlamaları.

Birinci bacak, birinci eklem için;

$$\$_{11} = \begin{bmatrix} S_{11} \\ R_{11} \times S_{11} \end{bmatrix}; S_{11} = [0 \ 0 \ 1]; R_{11} = [R_{11x} \ R_{11y} \ 0] \quad (4.7)$$

$$R_{11} \times S_{11} = [R_{11y} \ -R_{11x} \ 0]; \$_{11} = [0 \ 0 \ 1 \ R_{11y} \ -R_{11x} \ 0]^T \quad (4.8)$$

Birinci bacak, ikinci eklem için;

$$\$_{12} = \begin{bmatrix} S_{12} \\ R_{12} \times S_{12} \end{bmatrix}; S_{12} = [0 \ 0 \ 1]; R_{12} = [R_{12x} \ R_{12y} \ 0] \quad (4.9)$$

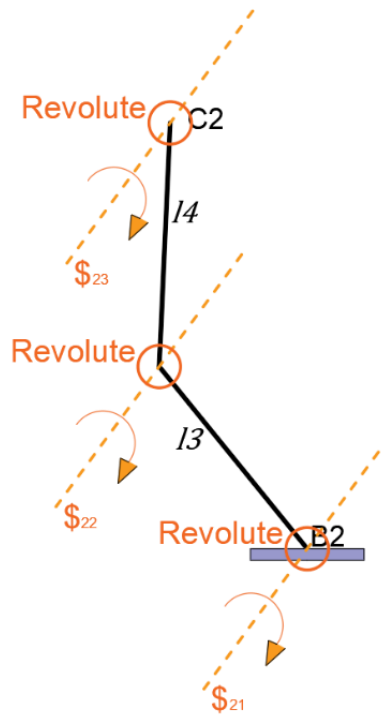
$$R_{12} \times S_{12} = [R_{12y} \ -R_{12x} \ 0]; \$_{12} = [0 \ 0 \ 1 \ R_{12y} \ -R_{12x} \ 0]^T \quad (4.10)$$

Birinci bacak, üçüncü eklem için;

$$\$_{13} = \begin{bmatrix} S_{13} \\ R_{13} \times S_{13} \end{bmatrix}; S_{13} = [0 \ 0 \ 1]; R_{13} = [R_{13x} \ R_{13y} \ 0] \quad (4.11)$$

$$R_{13} \times S_{13} = [R_{13y} \ -R_{13x} \ 0]; \$_{13} = [0 \ 0 \ 1 \ R_{13y} \ -R_{13x} \ 0]^T \quad (4.12)$$

Denklem 4.7-4.12'nin hepsi birinci bacak için tüm eklemlerine ait vida eksen tanımlamalarını temsil etmektedir. İkinci bacak da aynı tipten olduğundan tanımlamalarda sadece temsili değerler değişecektir yani bacak ve eklem indisleri değişim gösterecektir. Bu adımlar ikinci bacak için uygulanırsa;



Şekil 4.3. İkinci bacak için vida eksenleri ve eklem tip tanımlamaları.

İkinci bacak, birinci eklem için;

$$\$_{21} = \begin{bmatrix} S_{21} \\ R_{21} \times S_{21} \end{bmatrix}; S_{21} = [0 \ 0 \ 1]; R_{21} = [R_{21x} \ R_{21y} \ 0] \quad (4.13)$$

$$R_{21} \times S_{21} = [R_{21y} \ -R_{21x} \ 0]; \$_{21} = [0 \ 0 \ 1 \ R_{21y} \ -R_{21x} \ 0]^T \quad (4.14)$$

İkinci bacak, ikinci eklem için uygulama;

$$\$_{22} = \begin{bmatrix} S_{22} \\ R_{22} \times S_{22} \end{bmatrix}; S_{22} = [0 \ 0 \ 1]; R_{22} = [R_{22x} \ R_{22y} \ 0] \quad (4.15)$$

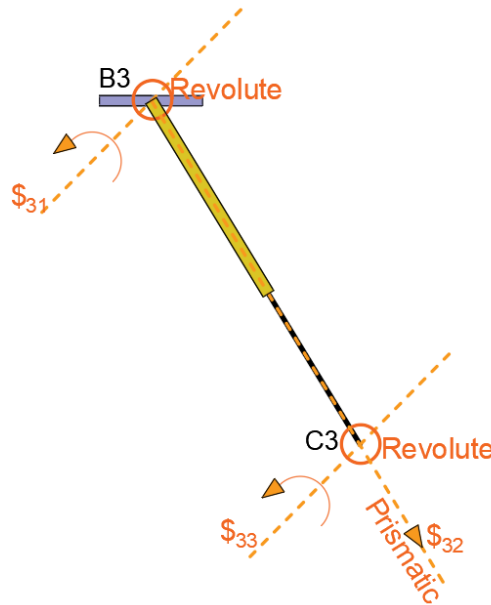
$$R_{22} \times S_{22} = [R_{22y} \ -R_{22x} \ 0]; \$_{22} = [0 \ 0 \ 1 \ R_{22y} \ -R_{22x} \ 0]^T \quad (4.16)$$

İkinci bacak, üçüncü eklem için uygulama;

$$\$_{23} = \begin{bmatrix} S_{23} \\ R_{23} \times S_{23} \end{bmatrix}; S_{23} = [0 \ 0 \ 1]; R_{23} = [R_{23x} \ R_{23y} \ 0] \quad (4.17)$$

$$R_{23} \times S_{23} = [R_{23y} \ -R_{23x} \ 0]; \$_{23} = [0 \ 0 \ 1 \ R_{23y} \ -R_{23x} \ 0]^T \quad (4.18)$$

Denklemleri elde edilir. Görüldüğü gibi sadece temsili ifadeler de değişme söz konusudur. Son bacak ilk iki baktan farklı bir yapıya sahip olduğundan tanımlamalarda ve sonuçlarda değişim meydana gelecektir. Bu adımları son bacak için uygulaması yapılırsa;



Şekil 4.4. Üçüncü bacak için vida eksenleri ve eklem tip tanımlamaları.

Üçüncü bacak, birinci eklem için;

$$\$_{31} = \begin{bmatrix} S_{31} \\ R_{31} \times S_{31} \end{bmatrix}; S_{31} = [0 \ 0 \ 1]; R_{31} = [R_{31x} \ R_{31y} \ 0] \quad (4.19)$$

$$R_{31} \times S_{31} = [R_{31y} \ -R_{31x} \ 0]; \$_{31} = [0 \ 0 \ 1 \ R_{31y} \ -R_{31x} \ 0]^T \quad (4.20)$$

Üçüncü bacak, ikinci eklem için;

$$\$_{32} = \begin{bmatrix} 0 \\ S_{32} \end{bmatrix}; S_{32} = -d_3 = [s_{32x} \ s_{32y} \ 0] \quad (4.21)$$

$$\$_{32} = [0 \ 0 \ 0 \ S_{32x} \ S_{32y} \ 0]^T \quad (4.22)$$

Üçüncü bacak, üçüncü eklem için;

$$\$_{33} = \begin{bmatrix} S_{33} \\ R_{33} \times S_{33} \end{bmatrix}; S_{33} = [0 \ 0 \ 1]; R_{33} = [R_{33x} \ R_{33y} \ 0] \quad (4.23)$$

$$R_{33} \times S_{33} = [R_{33y} \ -R_{33x} \ 0]; \$_{33} = [0 \ 0 \ 1 \ R_{33y} \ -R_{33x} \ 0]^T \quad (4.24)$$

Denklemleri elde edilmiş olunur.

4.2 VİDA TEORİSİ İLE JACOBIAN MATRİSİ

Jacobian matrisi için ilk olarak uç işlevci platformunun hızı ile aktif eklem değişkenlerinin hızları arasında aşağıdaki ilişki tanımlanır.

$$\$_P = \$_{11}\dot{\theta}_1 + \$_{22}\dot{\theta}_2 + \$_{32}\dot{d}_3 \quad (4.25)$$

Bu denklem sadece birinci bacak için aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\$_{P1} = \$_{11}\dot{\theta}_1 + \$_{12}(\gamma + \dot{\theta}_1) + \$_{13}(\dot{\sigma}) \quad (4.26)$$

Denklemden yer alan değişkenlerden sadece $\dot{\theta}_1$ aktif eklem hız değişkenidir. Bundan dolayı denklemden yer alan diğer iki pasif eklem hız değişkenlerinden kurtulmak gerekir. Bunun için denklemin her iki tarafı bacakta bulunan bu iki pasif eklem vidasına aynı anda reciprocal (karşıt) olan bir vida ile reciprocal çarpıma tabii tutulmalıdır.

$$\begin{aligned}
\$_{r1} &= \begin{bmatrix} S_{r1} \\ R_{r1} \times S_{r1} \end{bmatrix}; \\
S_{r1} &= [l_2 \cos(\theta_1 + \gamma) \quad l_2 \sin(\theta_1 + \gamma) \quad 0] = [S_{r1x} \quad S_{r1y} \quad 0] \\
R_{r1} &= R\vec{c}_1 = [R_{r1x} \quad R_{r1y} \quad 0]; \\
R_{r1} \times S_{r1} &= [0 \quad 0 \quad R_{r1x}S_{r1y} - R_{r1y}S_{r1x}]^T \\
\$_{r1} &= [S_{r1x} \quad S_{r1y} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad R_{r1x}S_{r1y} - R_{r1y}S_{r1x}]^T
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Gerekli reciprocal çarpımlar yapılırsa bu bacağın mekanizmanın jacobian matrisine katkıları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} S_{r1x}R_{11y} - S_{r1y}R_{11x} + R_{r1x}S_{r1y} - R_{r1y}S_{r1x} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{r1x} & S_{r1y} & R_{r1x}S_{r1y} - R_{r1y}S_{r1x} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{px} \\ v_{py} \\ w_{pz} \end{bmatrix} \tag{4.28}$$

Yapılan bu işlem iki bacağın aynı tipte olmasından dolayı ikinci bacak için de geçerli olmaktadır. Bu işlemler ikinci bacak için uygulanırsa bu bacadaki pasif eklemlere reciprocal olan vida aşağıdaki gibi tanımlanabilir;

$$\begin{aligned}
\$_{r2} &= \begin{bmatrix} S_{r2} \\ R_{r2} \times S_{r2} \end{bmatrix}; \\
S_{r2} &= [l_4 \cos(\theta_2 + \gamma_2) \quad l_2 \sin(\theta_2 + \gamma_2) \quad 0] = [S_{r2x} \quad S_{r2y} \quad 0] \\
R_{r2} &= R\vec{c}_2 = [R_{r2x} \quad R_{r2y} \quad 0]; \\
R_{r2} \times S_{r2} &= [0 \quad 0 \quad R_{r2x}S_{r2y} - R_{r2y}S_{r2x}]^T \\
\$_{r2} &= [S_{r2x} \quad S_{r2y} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad R_{r2x}S_{r2y} - R_{r2y}S_{r2x}]^T
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Reciprocal çarpımlar için denklem 4.25 ikinci bacak için aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\$_{p2} = \$_{21}\dot{\theta}_2 + \$_{22}(\gamma_2 + \dot{\theta}_2) + \$_{23}(\dot{\sigma}) \tag{4.30}$$

Denklemler 4.29 ve 4.30 reciprocal çarpıma tabii tutulursa bu bacağın mekanizmanın uç işlevcisine katkısı bulunacaktır.

$$\begin{bmatrix} S_{r1x}R_{11y} - S_{r1y}R_{11x} + R_{r1x}S_{r1y} - R_{r1y}S_{r1x} & 0 & 0 \\ S_{r2x}R_{21y} - S_{r2y}R_{21x} + R_{r2x}S_{r2y} - R_{r2y}S_{r2x} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{r1x} & S_{r1y} & R_{r1x}S_{r1y} - R_{r1y}S_{r1x} \\ S_{r2x} & S_{r2y} & R_{r2x}S_{r2y} - R_{r2y}S_{r2x} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{px} \\ v_{py} \\ w_{pz} \end{bmatrix} \tag{4.31}$$

Son olarak üçüncü bacak için reciprocal vida tanımını aşağıdaki gibi yapılabilir;

$$\begin{aligned}
\$_{r3} &= \begin{bmatrix} S_{r3} \\ R_{r3} \times S_{r3} \end{bmatrix}; \\
S_{r3} &= S_{32} = [S_{r3x} \quad S_{r3y} \quad 0]; \quad R_{r3} = R\vec{C}_3 = [R_{r3x} \quad R_{r3y} \quad 0]; \\
R_{r3} \times S_{r3} &= [0 \quad 0 \quad R_{r3x}S_{r3y} - R_{r3y}S_{r3x}]^T; \\
\$_{r3} &= [S_{r3x} \quad S_{r3y} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad R_{r3x}S_{r3y} - R_{r3y}S_{r3x}]^T
\end{aligned} \tag{4.32}$$

RPR yapıdaki bacağın uç işlevci platformu hareketine katkısını ifade edebilmek ve bulmak için ilk bacakta yapılan reciprocal çarpımlar aynı şekilde gerçekleştirilmelidir. Öyleyse, ilk olarak denklem 4.25 bu bacak için aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\$_{p3} = \$_{31}\dot{\theta}_3 + \$_{32}(\dot{d}_3) + \$_{33}(\dot{\sigma}) \tag{4.33}$$

Bu denklemlerde sadece \dot{d}_3 aktif eklem hız değişkenidir. Gerekli reciprocal çarpımlar bu bacak için de yapılar ve elde edilen ifadeler matris formunda tekrar düzenlenirse J ve K matrislerinin son hali aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}
K &= \begin{bmatrix} S_{r1x}R_{11y} - S_{r1y}R_{11x} + R_{r1x}S_{r1y} - R_{r1y}S_{r1x} & 0 & 0 \\ S_{r2x}R_{21y} - S_{r2y}R_{21x} + R_{r2x}S_{r2y} - R_{r2y}S_{r2x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(S_{r3x}S_{32x} + S_{r3y}S_{32y})}{|d_3|} \end{bmatrix} \\
J &= \begin{bmatrix} S_{r1x} & S_{r1y} & R_{r1x}S_{r1y} - R_{r1y}S_{r1x} \\ S_{r2x} & S_{r2y} & R_{r2x}S_{r2y} - R_{r2y}S_{r2x} \\ S_{r3x} & S_{r3y} & R_{r3x}S_{r3y} - R_{r3y}S_{r3x} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.34}$$

4.3 VIDA TEORİSİ İLE SERBESTLİK DERECE Sİ HESABI

Bu mekanizmanın vida teorisi ile serbestlik hesabı için ilk olarak mekanizmanın tüm eklemleri için eklem vidaları açık olarak tekrar yazılacak olursa:

$$\begin{aligned}
\$_{11} &= [0 \quad 0 \quad 1 \quad R_{11y} \quad -R_{11x} \quad 0]^T \\
\$_{12} &= [0 \quad 0 \quad 1 \quad R_{12y} \quad -R_{12x} \quad 0]^T \\
\$_{13} &= [0 \quad 0 \quad 1 \quad R_{13y} \quad -R_{13x} \quad 0]^T \\
\$_{21} &= [0 \quad 0 \quad 1 \quad R_{21y} \quad -R_{21x} \quad 0]^T \\
\$_{22} &= [0 \quad 0 \quad 1 \quad R_{22y} \quad -R_{22x} \quad 0]^T \\
\$_{23} &= [0 \quad 0 \quad 1 \quad R_{23y} \quad -R_{23x} \quad 0]^T \\
\$_{31} &= [0 \quad 0 \quad 1 \quad R_{31y} \quad -R_{31x} \quad 0]^T \\
\$_{32} &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad S_{32x} \quad S_{32y} \quad 0]^T \\
\$_{33} &= [0 \quad 0 \quad 1 \quad R_{33y} \quad -R_{33x} \quad 0]^T
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Elde edilen (tüm bacak ve her vida bacağın her eklemi için) vidalara aynı anda reciprocal olacak bir vida tanımlamak gerekirse bu aşağıda gösterildiği gibi iki vida reciprocal (karşıt) olan bir vida olmalıdır. Böyle bir vida şu şekilde ifade edilsin;

$$\$r_m = [M_{1x} \ M_{1y} \ M_{1z} \ T_{1x} \ T_{1y} \ T_{1z}] \quad (4.36)$$

Denklem 4.35’de ki vidalar dikkatli incelendiğinde aslında sadece 2 farklı vida formu olduğu açıkça görülebilmektedir. Bundan dolayı bu iki vida reciprocal (karşıt) olan bir vida tanımlanması denklem 4.34’de yer alan tüm vidalara da reciprocal (karşıt) olacaktır. Böyle bir vida aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\$r_m = [0 \ 0 \ M_{1z} \ T_{1x} \ T_{1y} \ 0] \quad (4.37)$$

Denklem 4.37’de ifade edilen vida tanımlaması aşağıda verildiği gibi bir hız vidası ile kıyaslandığında görülecektir ki böyle bir vida mekanizmanın x ve y eksenlerinde sadece doğrusal harekete (lineer harekete) ve z ekseninde ise sadece açısal harekete izin çıkmaktadır. Bu yönden bakıldığında mekanizmanın serbestlik derecesinin üç olduğu gösterilmiş olacaktır.

$$\$_p = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z \ v_{px} \ v_{py} \ v_{pz}] \quad (4.38)$$

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada ilk olarak kinematik analizde kullanılan vida teorisinin temel işleyiş mantığına değinilmiştir. Daha sonra vida teorisinde kullanılan bileşenler kısaca açıklanmıştır. İleriki bölümlerde ise iki farklı yapıda ki asimetrik paralel robot mekanizmalarının anlık kinematik analizi ve serbestlik derece hesabı ayrı ayrı yapılmıştır.

Bu çalışmada $\underline{RRR1RPR2}$ adında asimetrik bir düzlemsel robot mekanizması ilk olarak ele alınmıştır. Bu mekanizma; Toz [26] tarafından tasarlanan $\underline{RPR3}$ tipindeki simetrik bir paralel düzlemsel robot mekanizmasının bir bacağına \underline{RRR} tipinde ki bir bacakla yer değiştirmesi ile elde edildiği ifade edilmiştir. Sonraki bölümlerde, bu mekanizmanın bileşenleri açıklanmış ve daha sonra her bacak için ayrı ayrı eklem noktalarına ait vida eksen tanımlamaları gerçekleştirilmiştir. Bu yönü ile mekanizma iki farklı eklem tipi içerdiğine dikkat çekilmiştir. Daha sonra öncelikli olarak her bacağa ait genel bir reciprocal vida tanımlaması yapılmış daha sonra da her bacak için yine ayrı olarak o bacadaki pasif eklemleri elemine edebilmek ve bu sayede eklemlerin uç işlevcisine katkısını elde edebilmek için reciprocal vida (karşıt) tanımlamaları yapılmıştır. Elde edilen bu reciprocal vida tanımlamaları bacadaki tüm eklemlere aynı anda reciprocal olduğu belirtilmiş ve doğruluğu gösterilmiştir. Bunun için , daha önce den elde edilen eklemlere ait vida tanımlamaları her bacak için tanımlanan genel reciprocal vida ile reciprocal işlemine tabi tutulmuşlardır. Bu işlem sonucunda pasif eklemlerin reciprocal çarpım işlem sonucu sıfır değerini, aktif eklem ise bir 3×1 'lik vektör değerini döndürmüştür. Jacobian matrisini oluşturmak için ise aktif eklemlerin döndürdüğü bu değerler kullanılmış ve ileri ve ters jacobian matrisleri elde edilmiştir. Anlık kinematik analizinden sonra mekanizmanın serbestlik derece analizi ele alınmıştır. Serbestlik derecesini elde edebilmek için elde edilen tüm vida tanımlamalarına aynı anda reciprocal olacak bir vida ifade edilmiş ve her bir vida tanımlaması ile reciprocal çarpım işlemi gerçekleştirilmiştir. Bunun sonucunda çalışmada ki mekanizmanın x ve y eksenlerinde doğrusal hareket kabiliyeti bulunurken, z ekseninde sadece açısal harekete sahip olduğu gösterilmiştir. Bu sayede mekanizmanın üç serbestlik dereceli olduğu kanıtlanmıştır.

İkinci mekanizma ise $\underline{R}RR2R\underline{P}R1$ adlı asimetrik paralel düzlemsel bir robot mekanizması olarak ele alınmıştır. Bu mekanizma içinde ilk mekanizmada ki adımlar sırası ile takip edilmiş ve sonuca gidilmiştir. Burada ki tek fark ikinci mekanizmanın ikinci bacağına $\underline{R}RR$ tipinde bir bacak olmasıdır. Bunun sonucunda elde edilen vida tanımlamalarının kısmi yerlerinde sonuç olarak farklılıklar çıkmış ve bu sonuç farklılığı belirtilmiştir. Sonuç olarak ikinci $\underline{R}RR2R\underline{P}R1$ tipindeki asimetrik paralel düzlemsel robot mekanizmasının K ve J jacobian matrisleri elde edilmiştir. Serbestlik derecesi analizi de yine aynı metotla analiz edilmiş ve serbestlik derecesi üç olarak gösterilmiştir.

Her iki mekanizma için vida teorisi ile elde edilen K ve J jacobian matrisleri daha önceden vektör cebri ile elde edilen değerlerle karşılaştırması yapılmış ve sonuçlar aynı çıkmıştır.



6. KAYNAKLAR

- [1] M. Almaged, "Forward and Inverse Kinematic Analysis and Validation of the ABB IRB 140 Industrial Robot," *International Journal Of Electronics, Mechanical And Mechatronics Engineering*, c.7, sayı 2, ss. 1383-1401, 2017.
- [2] Y. Patel, "Parallel Manipulators Applications," *A Survey Modern Mechanical Engineering* 2, c.3, ss. 57-64, 2012.
- [3] W. L. Pollard, "Position Controlling Apparatus," US Patent No. 2286571, 1942.
- [4] V. E. Gough and S. G. Whitehall, "Universal Tyre Test Machine," *Proceedings of 9th International Congress FISITA*, England, 1962, ss. 117-137.
- [5] V.E. Gough, "Contribution to discussion of papers on research in automobile stability, control and tyre performance," *Proc.Auto Div. Inst. Mech. Eng*, c.171, ss. 392-394, 1956.
- [6] Anonim, (2019, July 20), [Online]. Erişim: <https://tft.aero/blog/full-motion-platform-for-aviasimulator>
- [7] D. Myszka, *Machines and Mechanisms: Applied Kinematic Analysis*, 4th ed, Prentice Hall, 2012.
- [8] R.P. Paul, *Robot Manipulators: Mathematics, Programming, and Control : the Computer Control of Robot Manipulators*, Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 1981.
- [9] H. D. L. Torre1 and E. Rodriguez-Leal, "Instantaneous Kinematics Analysis via Screw-theory of a Novel 3-CRC Parallel Mechanism," *International Journal of Advanced Robotic Systems*, c.13, ss. 1-16, 2016.
- [10] H. Nigatu, A. P. Sing and P.Prabhu, "Jacobian Analysis of Limited DOF Parallel Manipulator using Wrench and Reciprocal Screw Principle," *International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT)*, c. 3, 2014.
- [11] J. Zhao, B. Li, X. Yang and H. Yu, "Geometrical method to determine the reciprocal screws and applications o parallel manipulators," *Cambridge University Press*, 2009.
- [12] E. Sariyildiz, E. Cakiray and H. Temeltas, "A Comparative Study of Three Inverse Kinematic Methods of Serial Industrial Robot Manipulators in the Screw Theory Framework," *International Journal of Advanced Robotic Systems*, c. 8, sayı 5, ss. 9-24, 2011.
- [13] J. Zhang, B. Lian and Y. Song, "Geometric error analysis of an over-constrained parallel tracking mechanism using the screw theory," *Chinese Journal of Aeronautics*, c.32, ss. 1541-1554, 2019.

- [14] J. M. P. Gotor, "Screw Theory for robotics-A modern mechatronics mathematical foundation," *Joint Event on 2nd International Conference on Advanced Robotics Mechatronics and Artificial Intelligence & 3rd International Conference on Design & Production Engineering*, Valencia, Spain, 2018, ss. 39.
- [15] A. Cibicik and O. Egeland, "Dynamic modelling and force analysis of a knuckle boom crane using screw theory," *Mechanism and Machine Theory*, c.133, ss. 179-194, 2019.
- [16] J. G. Alvarado, R. R. Castro and P. J. Delossantos-Lara, "Kinematics and dynamics of a 4-PRUR Schönflies parallel manipulator by means of screw theory and the principle of virtual work," *Mechanism and Machine Theory*, c.122, ss. 347-360, 2018.
- [17] J. Hong, L. Yao, W. Ji and Z. Huang, "Kinematic Modeling for the Nutation Drive Based on Screw Theory," *Procedia CIRP*, c.36, ss. 123-128, 2015.
- [18] J. Cai, X. Deng, J. Feng and Y. Xu, "Mobility analysis of generalized angulated scissor-like elements with the reciprocal screw theory," *Mechanism and Machine Theory*, c.82, ss. 256-265, 2014.
- [19] G. A. Jaime, "Ingeniería, Investigación y Tecnología; Kinematics of a Class of Three-Legged Parallel Manipulators by Means of Screw Theory," *Ingeniería Investigación y Tecnología*, c.17, ss. 191-200, 2016.
- [20] S. Arroyave-Tobón, D. Teissandier and V. Delos, "Applying screw theory for summing sets of constraints in geometric tolerancing," *Mechanism and Machine Theory*, c.112, ss. 255-271, 2017.
- [21] L. P. Laus, H. Simas and D. Martins, "Efficiency of gear trains determined using graph and screw theories," *Mechanism and Machine Theory*, c.52, ss. 296-325 2012.
- [22] G.A. Jaime, *Kinematic Analysis of Parallel Manipulators by Algebraic Screw Theory*, Switzerland: Springer International Publishing, 2016.
- [23] Z. Huang, Q. Li and H. Ding, *Theory of Parallel Mechanisms*, Switzerland: Springer Science + Business Media, 2013.
- [24] Y. B. Jia, Plücker Coordinates for Lines in the Space, *Lecture Notes*, 2018.
- [25] M. Carricato, "Screw Theory and its Applications in Robotics," IFAC 2017 World Congress, Toulouse, France, 2017.
- [26] M. Toz, "Asimetrik üç serbestlik dereceli bir düzlemsel paralel robot mekanizmasının kinematik analizi," *Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, c.22, ss. 75-84, 2018.
- [27] L.W. Tsai, *Robot Analysis The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*, A Wiley-Interscience Publication, 1999.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Musa YİĞİT
Doğum Tarihi ve Yeri : 14.09.1988 – Sakarya
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : alayci54@hotmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Elektrik-Elektronik ve Bilgisayar Müh.	Düzce Üniversitesi	2019
Lisans	Yapı Öğretmenliği	Sakarya Üniversitesi	2014
Lise	Telekominikasyon - Bilgisayar	Endüstri Meslek Lisesi	2005

YAYINLAR

M. Yiğit ve M. Toz, “Asimetrik 3 Serbestlik Dereceli Bir Düzlemsel Paralel Robot Mekanizmasının Screw Teori ile Kinematik Analizi,” *IESS 2019 International Engineering And Science Symposium*, 2019.