T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

YONCA BAKIŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
DOÇ. DR. HÜSEYİN BUDAK

DÜZCE, 2020

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Yonca BAKIŞ tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Hüseyin BUDAK
Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Hüseyin BUDAK
Düzce Üniversitesi

Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Düzce Üniversitesi

Doç. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ
Kütahya Dumlupınar Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 28/02/2020

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

28/02/2020

Yonca BAKIŞ

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmam boyunca tez konumda çalışmamı sağlayan ve bu tezin hazırlanması esnasında ilgisini hiç eksik etmeyen, beni yönlendiren, bana rehberlik eden çok değerli hocam Doç. Dr. Hüseyin BUDAK'a gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Ayrıca, çalışmalarım boyunca desteklerini esirgemeyen Düzce Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyeleri ve araştırma görevlilerine en içten şükranlarımı sunuyorum.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme ve çalışma arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

28/02/2020 **Yonca BAKIŞ**

İÇİNDEKİLER

SİMGELER

B	Beta Fonksiyonu
I	Reel Sayılar Kümesinde Bir Aralık
J_{a+}^{α}	α. Riemann-Liouville Sağ Taraflı Kesirli İntegrali
J_{b-}^{α}	α. Riemann-Liouville Sol Taraflı Kesirli İntegrali
K_S^1	Birinci Anlamda s-Konveks Fonksiyonların Kümesi
K_S^2	İkinci Anlamda s-Konveks Fonksiyonların Kümesi
$L_1[a,b]$	[a,b] Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar
$\mathbb{R}^+$	Pozitif Reel Sayılar
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar
Γ	Gamma Fonksiyonu

ÖZET

KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Yonca BAKIŞ
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Doç. Dr. Hüseyin BUDAK
Şubat 2020, 52 sayfa

Bu tez çalışması konveks ve s-konveks fonksiyonlar yardımıyla elde edilen genelleştirilmiş Hermite-Hadamard ve Fejer tipli eşitsizlikler üzerinedir. Altı bölüm olarak hazırlanan bu çalışmanın birinci bölümü giriş niteliğinde olup ikinci bölümde tezin hazırlanmasında kullanılan bazı tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde literatürde var olan bazı Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler sunulmuştur. Dördüncü bölümde konveks ve s-konveks fonksiyonların çarpımı için Fejer tipli eşitsizlikler incelenmiştir. Beşinci bölümde ise dördüncü bölümde ispatlanan eşitsizlikler yardımıyla Riemann-Liouville kesirli integrallerini içeren bazı Fejer tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Tezin son kısmı olan altıncı bölümde ise bazı sonuçlar ve sonraki çalışmalar için öneriler verilmiştir.

Anahtar sözcükler: Hermite-Hadamard eşitsizliği, Fejer eşitsizliği, Konveks fonksiyon, Kesirli integral.

ABSTRACT

GENERALIZED INTEGRAL INEQUALITIES FOR CONVEX FUNCTIONS

Yonca BAKIŞ
Düzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics
Master Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Hüseyin BUDAK
February 2020, 52 pages

This thesis is about generalized Hermite-Hadamard and Fejer type inequalities obtained with the help of convex and s-convex functions. The first part of this study, which is prepared as six chapters, is an introduction and in the second chapter some definitions and theorems used in the preparation of the thesis are given. In the third chapter, some Hermite-Hadamard type inequalities in the literature is presented. In the fourth chapter, Fejer type inequalities is examined for the product of convex and s-convex functions. In the fifth chapter, some Fejer type inequalities including Riemann-Liouville fractional integrals is established with the help of the inequalities that are proved in the fourth chapter. In the sixth chapter that is the final section of the thesis, some conclusions and some directions for future researches are given.

Keywords: Hermite-Hadamard inequality, Fejer inequality, Convex function, Fractional integral.

1. GİRİŞ

İntegral eşitsizlikleri, A. L. Cauchy, P. L. Čebysev, ve C. F. Gaus döneminden beri yaklaşım metotlarının temellerinin elde edilmesinde önemli rol oynamaktadır. Yirminci yüzyılın başlarında, çok sayıda eşitsizlik matematiğin hemen tüm alanlarında, bilim ve mühendisliğin ise birçok alanında incelenmiş ve kullanılmıştır. Eşitsizliklerin birçok tipi, hem teorik hem de uygulama alanında araştırma yapan araştırmacılar tarafından yıllardır çalışılmaktadır. Analitik eşitsizliklerden faydalanmak için farklı araştırmacılar birçok yaklaşım geliştirmiştir. Temel sonuçları, yöntemleri ve uygulamaları yeni araştırmacılara tanıtan birçok temel ve önemli kitap vardır.

Son otuz yılda, integral eşitsizlik alanı dikkate değer bir gelişim göstermiştir. Özellikle Ostrowski, Grüss, Čebysev, Jensen ve Hermite-Hadamard olarak adlandırılan eşitsizlikler ile ilgili pek çok araştırma makalesi yapılmıştır. Son yıllarda yayınlanan bazı araştırma ve monografiler integral eşitsizliği alanındaki ilerlemenin önemli bir kısmını oluşturur.

Konveks fonksiyonlar için en önemli integral eşitsizliklerinden biri olan Hermite-Hadamard eşitsizliği aşağıdaki gibi verilmiştir:

$f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I aralığında bir konveks fonksiyon ve $a, b \in I$ için $a < b$ ise, bu durumda

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{1.1}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Eğer f fonksiyonu konkav ise (1.1) eşitsizliklerinin tersi geçerli olur.

Bu eşitsizlik ilk olarak Charles Hermite tarafından "Mathesis" dergisine gönderilen mektupta yer almıştır. Bu eşitsizliği içeren not, bu dergide Mathesis 3 (1883), p. 82, sayı ve sayfa numarısıyla yayımlanmıştır. Ancak Hermite'in 1901 yılında ölümünden sonra, onun çalışmalarının toplandığı ve biyografisinin yazıldığı [1] çalışmada, bu nottan bahsedilmemiştir. Aynı eşitsizlik J. Hadamard tarafından 1893 yılında ispatlanmıştır [2].

Bu eşitsizlik yıllarca Hadamard eşitsizliği olarak bilinmiştir. 1974 yılında D. S. Mitrinovic C. Hermite'nin bu notunu bulmuş ve bilim dünyasına duyurmuştur. Böylece (1.1) eşitsizliği literatürde Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinmektedir.

Diğer yandan, L. Fejer (1.1) 1906 yılında Hermite-Hadamard eşitsizliğinin ağırlıklı hali olan aşağıdaki eşitsizliği ispatlamıştır [3]:

$f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I aralığında bir konveks fonksiyon ve $a, b \in I$ için $a < b$ ise, bu durumda

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b w(x)dx \le \int_a^b f(x)w(x)dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b w(x)dx \tag{1.2}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Burada $w : [a,b] \to \mathbb{R}$ negatif olmayan, integrallenebilir ve $x = \frac{a+b}{2}$ için simetrik (yani $w(x) = w(a+b-x)$) bir fonksiyondur. Bu eşitsizlik literatürde Fejer eşitsizliği veya Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliği olarak bilinmektedir.

Son yıllarda (1.1) ve (1.2) eşitsizliklerinin birçok genellemesi ve farklı konveks fonksiyonlar için versiyonları elde edilmiştir. Bunlardan bazıları için [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11] referanslarına bakılabilir. Ayrıca bu eşitsizliklerin birçok farklı kesirli integral operatörleri için de genellemeleri yapılmıştır ([12], [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20], [21], [22], [23]). Diğer yandan konveks fonksiyonların çarpımları için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler ispatlanmıştır. Bu tipteki ilk eşitsizlikler Pachpatte tarafından iki konveks fonksiyonun çarpımı için yapılmıştır [24]. Kırmacı ve ark. iki s-konveks fonksiyonun çarpımı için Hermite-Hadamard tipli bazı eşitsizlikler ispatlamışlardır [25]. Farklı konveks fonksiyonların çarpımı için elde edilen çalışmalardan bazıları ([26], [27], [28], [29], [30], [31]) olarak verilebilir. Ayrıca [32] de Chen iki konveks fonksiyonun çarpımı için Riemann-Liouville kesirli integralleri içeren eşitsizlikleri ispatlamıştır. Diğer yandan Latif ve Alomari, ([33]) koordinatlarda konveks fonksiyonların çarpımı yardımıyla iki değişkenli fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde etmişlerdir. Daha sonra, Özdemir ve ark. koordinatlarda s-konveks ve h-konveks fonksiyonlar için benzer eşitsizlikleri elde etmişlerdir ([34], [35]). Ayrıca Budak ve Sarıkaya, koordinatlarda konveks fonksiyonlar yardımıyla Riemann-Liouville kesirli integralleri içeren Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde etmişlerdir [36]. Literatürde konveks fonksiyonların çarpımı için Fejer tipli eşitsizlik mevcut değildir. Bu tezde farklı türden konveks fonksiyonlar için Fejer tipli eşitsizlikler elde edilecektir.

Bu tezin akışı şu şekilde olacaktır: İkinci bölümde sonraki bölümlerde kullanacağımız tanımlar ve bazı önemli özellikler verilerek literatürde var olan bazı önemli eşitsizlikler ispatsız olarak sunulacaktır.

Üçüncü bölümde ise, konveks fonksiyonların çarpımı için Pachpatte ve s-konveks fonksiyonların çarpımı için Kırmacı ve ark. tarafından ispatlanan eşitsizlikler verilecektir. Ayrıca Chen tarafından elde edilen, konveks fonksiyonların çarpımı için Riemann-Liouville kesirli integralleri içeren Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler de sunulacaktır.

Dördüncü bölümde ilk olarak iki konveks fonksiyonun çarpımı için literatürde var olan eşitsizliklerin genellemesi olan bazı Fejer tipli elşitsizlikler elde edilecektir. Daha sonra konveks ve s-konveks fonksiyonların çarpımı için Fejer tipli eşitsizlikler ispatlanacaktır. Ayrıca iki s-konveks fonksiyonun çarpımı için benzer eşitsizlikler sunulacaktır.

Beşinci bölümde, dördüncü bölümde elde edilen eşitsizlikler yardımıyla Riemann-Liouville kesirli integralleri içeren Fejer tipli eşitsizlikler ispatlanacaktır.

Son olarak altıncı bölümde ise tezde elde edilen sonuçlar özetlenerek, sonraki çalışmalarda neler yapılabileceği üzerinde durulacaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde literatürde var olan ve tezin hazırlanmasında kullanılan bazı temel kavramlara ve teoremlere yer verilecektir.

Tanım 2.1. $I, \mathbb{R}$ de bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y) \tag{2.1}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Eşitsizlikte $'' \geq ''$ olması durumunda ise f fonksiyonuna konkav fonksiyon denir. Eğer (2.1) eşitsizliği $t \in (0,1)$ için kesin ise bu durumda f fonksiyonu kesin konvekstir denir [37].

Tanım 2.2. [38] $\alpha, \beta \geq 0,\ \alpha^s + \beta^s = 1$ ve $s \in (0,1]$ olmak üzere tüm $u, v \in \mathbb{R}^+$ için $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(\alpha u+\beta v) \leq \alpha^s f(u)+\beta^s f(v) \tag{2.2}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f ye birinci anlamda s-konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların sınıfı K_S^1 ile gösterilir. Eşitsizlik yön değiştirirse f fonksiyonu birinci anlamda s-konkav olarak adlandırılır.

Tanım 2.3. [38] $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$ ve $s \in (0,1]$ olmak üzere tüm $u, v \in \mathbb{R}^+$ için $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(\alpha u+\beta v) \leq \alpha^s f(u)+\beta^s f(v)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f ye ikinci anlamda s-konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonun sınıfı K_S^2 ile gösterilir. Eşitsizlik yön değiştirirse f fonksiyonu ikinci anlamda s-konkav olarak adlandırılır.

Yukarıda verilen her iki s-konveks fonksiyon tanımları için $s = 1$ olması durumunda bilinen konveks fonksiyona dönüşür.

Tanım 2.4. $x \in \mathbb{R}^+$ için Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \tag{2.3}$$

olarak tanımlanır.

Gamma fonksiyonunun

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \; x \in \mathbb{R}^+ \tag{2.4}$$

$$\Gamma(x) = (x-1)!, \; x \in \mathbb{N} \tag{2.5}$$

gibi önemli özellikleri vardır. (2.5) ten $\Gamma(1) = 1$ dir. Şimdi $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ olduğu gösterilecektir. (2.3) den

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt$$

yazılır. $t = y^2$ dönüşümü yapılırsa, $dt = 2ydy$ olacağından

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-y^2} dy \tag{2.6}$$

bulunur. (2.6) ya denk olarak

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-x^2} dx \tag{2.7}$$

yazılabilir. (2.6) ve (2.7) nin çarpımından,

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy$$

iki katlı integrali elde edilir. Bu integralini hesaplamak için kutupsal koordinatlara geçilirse,

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = \pi$$

yani

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi$$

elde edilmiş olur.

Tanım 2.5. Beta fonksiyonu $x, y \in \mathbb{R}^+$ için

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \tag{2.8}$$

olarak tanımlanır.

Beta Fonksiyonu, Gamma Fonksiyonu cinsinden

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad x, y \in \mathbb{R}^+ \tag{2.9}$$

olarak yazılır.

Tanım 2.6. [39] $f(x) \in L[a,b]$, $\alpha > 0$ ve $a \geq 0$ olsun. Sağ ve sol $J_{a+}^{\alpha} f(x)$ ve $J_{b-}^{\alpha} f(x)$ Riemann-Liouville integralleri sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} J_{a+}^{\alpha} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \; x > a \\ J_{b-}^{\alpha} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt, \; x < b \end{aligned}$$

integrallerine $\alpha > 0$ için α. mertebeden kesirli integral denir. Bu integraller Riemann-Liouville kesirli integrallleri olarak bilinir. Burada $\Gamma(\alpha)$ Gamma fonksiyonu ve

$$J_{a+}^{0} f(x) = J_{b-}^{0} f(x) = f(x)$$

dir.

Şimdi $f(t)=(t-a)^{\frac{1}{2}}$ ve $\alpha=\frac{1}{2}$ olmak üzere aşağıdaki Riemann-Liouville kesirli integrali göz önüne alınırsa

$$J_{a+}^{1/2}f(x)=\frac{1}{\Gamma(1/2)}\int\limits_a^x (x-t)^{-1/2}(t-a)^{1/2}dt,\ x>a$$

olarak yazılır. Şayet $t=a+(x-a)$ değişken değiştirmesi yapılırsa Beta fonksiyonu yardımıyla

$$\begin{aligned}
J_{a+}^{1/2}f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1/2)}\int\limits_a^x (x-t)^{-1/2}(t-a)^{1/2}dt,\ x>a \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^1 (x-a)^{1/2}(x-a)^{-1/2+1}y^{1/2}(1-y)^{1/2}dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}(x-a)\int\limits_0^1 y^{1/2}(1-y)^{1/2}dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}(x-a)B(3/2,1/2) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}(x-a)\frac{\Gamma(3/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(3/2+1/2)} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}(x-a)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Kesirli integrallerle ilgili daha fazla bilgi için [39], [40], [41], [42], [43] nolu referanslardaki kitaplara bakılabilir.

Riemann-Liouville kesirli integrallerini içeren Hermite-Hadamard eşitsizlliği ilk olarak Sarıkaya ve ark. tarafından ispatlanmıştır. Bu eşitsizlik aşağıdaki gibi ifade edilir.

Teorem 2.7. [12] $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ pozitif fonksiyon ve $a<b$ için $f\in L_1[a,b]$ olsun . $\alpha>0$ olmak üzere, eğer f, $[a,b]$ aralığında konveks fonksiyon ise Riemann-Liouville kesirli integralleri için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a+}^{\alpha}f(b)+J_{b-}^{\alpha}f(a)\right]\leq\frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.10}$$

eşitsizliği vardır.

Diğer taraftan Işcan aşağıdaki lemmayı ve Riemann-Liouville kesirli integralleri için Fejer tipli eşitsizlikleri ispatlamıştır.

Lemma 2.8. [13] Eğer $w:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ integrallenebilir ve $(a+b)/2$ için simetrik fonksiyon ise, $a<b$ ve $\alpha>0$ olmak üzere

$$J_{a+}^{\alpha}w(b)=J_{b-}^{\alpha}w(a)=\frac{1}{2}\left[J_{a+}^{\alpha}w(b)+J_{b-}^{\alpha}w(a)\right]$$

eşitliği yazılır.

Teorem 2.9. [13] $0\leq a<b$ ve $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ konveks fonksiyon olsun. Eğer $f\in L_1[a,b]$ ve $w:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ negatif olmayan, integrallenebilir ve $(a+b)/2$ için simetrik ise, $\alpha>0$ olmak üzere kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[J_{a+}^{\alpha}w(b)+J_{b-}^{\alpha}w(a)\right] &\leq \left[J_{a+}^{\alpha}(fw)(b)+J_{b-}^{\alpha}(fw)(a)\right] \qquad (2.11)\\ &\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\left[J_{a+}^{\alpha}w(b)+J_{b-}^{\alpha}w(a)\right]. \end{aligned}$$

3. FARKLI TÜRDEN KONVEKS FONKSİYONLARIN ÇARPIMI İÇİN HERMİTE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde literatürde var olan bazı Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler verilecektir. İlk olarak iki konveks fonksiyonun çarpımı için Pachpatte tarafından elde edilen eşitsizlikler sunulacaktır. Daha sonra konveks ve s-konveks fonksiyonların çarpımı için Kırmacı ve ark. tarafından ispatlanan Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler verilecektir. Son olarak, Riemann-Liouville kesirli integrallerini içeren ve iki konveks fonksiyonun çarpımı ile Chen tarafından elde edilen sonuçlar sunulacaktır.

3.1. KONVEKS FONKSİYONLARIN ÇARPIMI İÇİN BAZI EŞİTSİZLİKLER

Bu alt bölümde iki konveks fonksiyonun çarpımı için Pachpatte [24] tarafından ispatlanan Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler verilecektir.

Teorem 3.1. f ve g ,$[a,b]$ aralığında reel değerli, negatif olmayan ve konveks fonksiyonlar olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \frac{1}{3}M(a,b)+\frac{1}{6}N(a,b) \tag{3.1}$$

eşitsizliği vardır. Burada $M(a,b)=f(a)g(a)+f(b)g(b)$ ve $N(a,b)=f(a)g(b)+f(b)g(a)$ olarak tanımlanmıştır.

İspat. f ve g konveks fonksiyonlar olduğundan, $t\in[0,1]$ için

$$f(ta+(1-t)b) \leq tf(a)+(1-t)f(b)$$

$$g(ta+(1-t)b) \leq tg(a)+(1-t)g(b)$$

eşitsizlikleri yazılır. Bu eşitsizlikler taraf tarafa çarpılırsa

$$
\begin{aligned}
& f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b) && (3.2)\\
\leq\ & t^2 f(a)g(a)+(1-t)^2 f(b)g(b)+t(1-t)\left[f(a)g(b)+f(b)g(a)\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. (3.2) eşitsizliğinin her iki tarafının t ye göre $[0,1]$ aralığında integrali alınırsa,

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)dt \leq \frac{1}{3}M(a,b)+\frac{1}{6}N(a,b) \tag{3.3}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $ta+(1-t)b=x$ dönüşümü yapılırsa

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \tag{3.4}$$

eşitliği elde edilir. (3.4) eşitliği (3.3) eşitsizliğinde kullanılırsa istenen eşitsizlik elde edilir.

□

Teorem 3.2. f ve g ,$[a,b]$ aralığında reel değerli, negatif olmayan ve konveks fonksiyonlar olsun. Bu takdirde

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx+\frac{1}{6}M(a,b)+\frac{1}{3}N(a,b) \tag{3.5}$$

eşitsizliği vardır. Buradaki $M(a,b)$ ve $N(a,b)$ ifadeleri Teorem 3.1 deki gibi tanımlıdır.

İspat. f ve g fonksiyonları $[a,b]$ aralığında konveks olduğundan, $t\in[0,1]$ için

$$
\begin{aligned}
& f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right) && (3.6)\\
=\ & f\left(\frac{ta+(1-t)b}{2}+\frac{(1-t)a+tb}{2}\right)g\left(\frac{ta+(1-t)b}{2}+\frac{(1-t)a+tb}{2}\right)\\
\leq\ & \frac{1}{4}\left[f(ta+(1-t)b)+f(1-t)a+tb\right]\left[g(ta+(1-t)b)+g(1-t)a+tb\right]\\
\leq\ & \frac{1}{4}\left[f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)g((1-t)a+tb)\right]
\end{aligned}
$$

$$+\frac{1}{4}\left[\left[tf(a)+(1-t)f(b)\right]\left[(1-t)g(a)+tg(b)\right]\right.$$

$$\left.+\left[(1-t)f(a)+tf(b)\right]\left[tg(a)+(1-t)g(b)\right]\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)g((1-t)a+tb)\right]$$

$$+\frac{1}{4}\left[2t(1-t)\left[f(a)g(a)+f(b)g(b)\right]+\left[t^2+(1-t)^2\right]\left[f(a)g(b)+f(b)g(a)\right]\right]$$

yazılır. (3.6) eşitsizliğinin her iki tarafının $[0,1]$ aralığında t ye göre integrali alınırsa,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{3.7}$$

$$\leq \frac{1}{4}\int_0^1 \left[f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)g((1-t)a+tb)\right]dt$$

$$+\frac{1}{12}M(a,b)+\frac{1}{6}N(a,b)$$

eşitsizliği elde edilir. (3.7) eşitsizliğinde

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\int_0^1 \left[f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)\right]dt \tag{3.8}$$
$$+\frac{1}{12}M(a,b)+\frac{1}{6}N(a,b)$$

olduğu kolayca görülebilir. Elde edilen (3.8) eşitsizliğinin her iki tarafı 2 ile çarpılıp, (3.4) eşitliği göz önüne alınırsa istenen (3.5) eşitsizliği elde edilir. □

3.2. KONVEKS VE s-KONVEKS FONKSİYONLARIN ÇARPIMI İÇİN HERMİTE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu alt bölümde Kırmacı ve ark.[25] tarafından konveks ve s-konveks fonksiyonların çarpımı için elde edilen Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler sunulacaktır.

Teorem 3.3. $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ $,a,b\in[0,\infty)$, $a<b$ ve $f,g\in L^1([a,b])$ olsun. Eğer f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks ve negatif olmayan bir fonksiyon, g fonksiyonu da $[a,b]$ aralığında $s\in(0,1]$ için s-konveks bir fonksiyon ise

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \le \frac{1}{s+2}M(a,b)+\frac{1}{(s+1)(s+2)}N(a,b) \tag{3.9}$$

eşitsizliği vardır. Buradaki $M(a,b)$ ve $N(a,b)$ ifadeleri Teorem 3.1 deki gibi tanımlıdır.

İspat. $[a,b]$ aralığında f fonksiyonu konveks ve g fonksiyonu s-konveks olduğundan,

$$\begin{aligned} f(ta+(1-t)b) &\le tf(a)+(1-t)f(b) \\ g(ta+(1-t)b) &\le t^s g(a)+(1-t)^s g(b) \end{aligned}$$

eşitsizlikleri her $t\in[0,1]$ için yazılır. f ve g negatif olmayan fonksiyonlar olduğundan

$$\begin{aligned} & f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b) \\ \le\ & t^{s+1}f(a)g(a)+t(1-t)^s f(a)g(b) \\ & +t^s(1-t)f(b)g(a)+(1-t)^{s+1}f(b)g(b) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Her iki tarafın $[0,1]$ aralığında integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)dt \\ =\ & \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \le \frac{1}{s+2}\left(f(a)g(a)+f(b)g(b)\right) \\ & +\frac{1}{(s+1)(s+2)}\left(f(a)g(b)+f(b)g(a)\right) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. □

Sonuç 3.4. Eğer Teorem 3.3 te özel olarak $s = 1$ seçlirse, (3.9) eşitsizliği (3.1) eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 3.5. $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a,b \in [0,\infty)$, $a < b$ ve $f,g \in L^1([a,b])$ olsun. Eğer f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında s_1-konveks ve negatif olmayan bir fonksiyon, g fonksiyonu $[a,b]$ aralığında s_2-konveks ve negatif olmayan bir fonksiyon ($s_1, s_2 \in (0,1]$) ise

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx &\leq \frac{1}{s_1+s_2+1}M(a,b)+B(s_1+1,s_2+1)N(a,b) \qquad (3.10) \\ &= \frac{1}{s_1+s_2+1}\left[M(a,b)+s_1s_2\frac{\Gamma(s_1)\Gamma(s_2)}{\Gamma(s_1+s_2+1)}N(a,b)\right] \end{aligned}$$

eşitsizliği vardır.

Burada $B(x,y)$ fonksiyonu Beta fonksiyonu ve $\Gamma(x)$ ise Gamma fonksiyonudur.
İspat. $[a,b]$ aralığında, f fonksiyonu s_1-konveks ve g fonksiyonu s_2-konveks olduğundan

$$f(ta+(1-t)b) \leq t^{s_1}f(a)+(1-t)^{s_1}f(b)$$

$$g(ta+(1-t)b) \leq t^{s_2}g(a)+(1-t)^{s_2}g(b)$$

eşitsizlikleri her $t \in [0,1]$ için mevcuttur. f ve g negatif olmayan birer fonksiyon olduklarından

$$\begin{aligned} & f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b) \qquad (3.11) \\ \leq\ & t^{s_1+s_2}f(a)g(a)+t^{s_1}(1-t)^{s_2}f(a)g(b) \\ & +t^{s_2}(1-t)^{s_1}f(b)g(a)+(1-t)^{s_1+s_2}f(b)g(b) \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. (3.11) eşitsizliğinin her iki tarafının $[0,1]$ aralığında integrali alınırsa aşağıdaki sonuca ulaşılır:

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)dt \\
= & \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \\
\leq & \frac{1}{s_1+s_2+1}\left[f(a)g(a)+f(b)g(b)\right]+ \\
& +f(a)g(b)\int_0^1 t^{s_1}(1-t)^{s_2}dt+f(b)g(a)\int_0^1 t^{s_2}(1-t)^{s_1}dt \\
= & \frac{1}{s_1+s_2+1}M(a,b)+f(a)g(b)B(s_1+1,s_2+1) \\
& +f(b)g(a)B(s_2+1,s_1+1) \\
= & \frac{1}{s_1+s_2+1}M(a,b)+B(s_1+1,s_2+1)N(a,b) \\
= & \frac{1}{s_1+s_2+1}\left[M(a,b)+s_1s_2\frac{\Gamma(s_1)\Gamma(s_2)}{\Gamma(s_1+s_2+1)}N(a,b)\right].
\end{aligned}$$

Böylece ispat tamamlanır. □

Sonuç 3.6. Eğer Teorem 3.5 te özel olarak $s_1 = s_2 = 1$ seçlirse, (3.10) eşitsizliği (3.1) eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 3.7. $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a,b \in [0,\infty)$, $a<b$ ve $f,g \in L^1([a,b])$ olsun. Eğer f, $[a,b]$ aralığında konveks ve negatif olmayan bir fonksiyon, g, $[a,b]$ aralığında $s \in (0,1]$ için s-konveks bir fonksiyon ise, bu durumda

$$\begin{aligned}
& 2^s f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \qquad (3.12) \\
\leq & \frac{1}{(s+1)(s+2)}M(a,b)+\frac{1}{s+2}N(a,b)
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Her $t \in [0,1]$ için

$$\frac{a+b}{2} = \frac{ta+(1-t)b}{2} + \frac{(1-t)a+tb}{2}.$$

eşitliği vardır. Burada f fonksiyonunun konveksliği ve g fonksiyonunun s-konveksliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
& f\left(\frac{a+b}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
= {} & f\left(\frac{ta+(1-t)b}{2} + \frac{(1-t)a+tb}{2}\right) g\left(\frac{ta+(1-t)b}{2} + \frac{(1-t)a+tb}{2}\right) \\
\leq {} & \frac{1}{2^{s+1}} \left[f(ta+(1-t)b) + f((1-t)a+tb)\right]\left[g(ta+(1-t)b) + g((1-t)a+tb)\right] \\
= {} & \frac{1}{2^{s+1}} \left[f(ta+(1-t)b)\, g(ta+(1-t)b) + f((1-t)a+tb)\, g((1-t)a+tb)\right. \\
& \left. + f(ta+(1-t)b)\, g((1-t)a+tb) + f((1-t)a+tb)\, g(ta+(1-t)b)\right] \\
\leq {} & \frac{1}{2^{s+1}} \left[f(ta+(1-t)b)\, g(ta+(1-t)b) + f((1-t)a+tb)\, g((1-t)a+tb)\right] \\
& + \frac{1}{2^{s+1}} \left\{\left[tf(a) + (1-t)f(b)\right]\left[(1-t)^s g(a) + t^s g(b)\right]\right. \\
& \left. + \left[(1-t)f(a) + tf(b)\right]\left[t^s g(a) + (1-t)^s g(b)\right]\right\} \\
= {} & \frac{1}{2^{s+1}} \left[f(ta+(1-t)b)\, g(ta+(1-t)b) + f((1-t)a+tb)\, g((1-t)a+tb)\right] \\
& + \frac{1}{2^{s+1}} \left[(t(1-t)^s + (1-t)t^s)M(a,b) + (t^{s+1} + (1-t)^{s+1})N(a,b)\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafının $[0,1]$ aralığında integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
& f\left(\frac{a+b}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2^s}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \qquad (3.13) \\
\leq \; & \frac{1}{2^{s+1}}\left[\frac{2}{(s+1)(s+2)}M(a,b) + \frac{2}{s+2}N(a,b)\right] \\
= \; & \frac{1}{2^s}\left[\frac{1}{(s+1)(s+2)}M(a,b) + \frac{1}{s+2}N(a,b)\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. (3.13) eşitsizliğinin her iki tarafı 2^s ile çarpılırsa istenen sonuç elde edilir.

□

Sonuç 3.8. Eğer Teorem 3.7 de özel olarak $s = 1$ seçlirse, (3.12) eşitsizliği (3.5) eşitsizliğine dönüşür.

3.3. KESİRLİ İNTEGRALLERİ İÇEREN BAZI EŞİTSİZLİKLER

Bu alt bölümde Chen [32] tarafından elde edilen konveks fonksiyonların çarpımı için kesirli Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler sunulacaktır.

Teorem 3.9. f ve g fonksiyonları $[a,b]$ aralığında reel değerli, negatif olmayan konveks fonksiyonlar olsun. Bu durumda $\alpha > 0$ için

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}\left[J_{a+}^{\alpha} f(b)g(b) + J_{b-}^{\alpha} f(a)g(a)\right] \qquad (3.14) \\
\leq \; & \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\right)M(a,b) + \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)}N(a,b)
\end{aligned}$$

eşitsizliği vardır. Burada $M(a,b)$ ve $N(a,b)$ Teorem 3.1 deki gibi tanımlanır.

İspat. f ve g $[a,b]$ aralığında konveks fonksiyonlar olduğundan $t \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitsizlikler yazılır:

$$f(ta+(1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b) \qquad (3.15)$$

$$g(ta+(1-t)b) \leq tg(a)+(1-t)g(b). \tag{3.16}$$

(3.15) ve (3.16) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b) &\leq t^2 f(a)g(a)+(1-t)^2 f(b)g(b) \\ &\quad +t(1-t)\left[f(a)g(b)+f(b)g(a)\right] \end{aligned} \tag{3.17}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} f((1-t)a+tb)g((1-t)a+tb) &\leq (1-t)^2 f(a)g(a)+t^2 f(b)g(b) \\ &\quad +t(1-t)\left[f(a)g(b)+f(b)g(a)\right] \end{aligned} \tag{3.18}$$

eşitsizliği vardır. Buradan

$$\begin{aligned} & f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b) \\ & +f((1-t)a+tb)g((1-t)a+tb) \\ \leq\ & (2t^2-2t+1)\left[f(a)g(a)+f(b)g(b)\right] \\ & +2t(1-t)\left[f(a)g(b)+f(b)g(a)\right] \end{aligned} \tag{3.19}$$

eşitsizliği elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafı $t^{\alpha-1}$ ile çarpılıp bulunan ifade $[0,1]$ aralığında t ye göre integre edildiğinde aşağıdaki eşitsizlik yazılır;

$$\begin{aligned} & \int_0^1 t^{\alpha-1} f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)dt \\ & +\int_0^1 t^{\alpha-1} f((1-t)a+tb)g((1-t)a+tb)dt \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_a^b \left(\frac{b-u}{b-a}\right)^{\alpha-1} f(u)g(u)\frac{du}{a-b} + \int_a^b \left(\frac{v-a}{b-a}\right)^{\alpha-1} f(v)g(v)\frac{dv}{b-a} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a+}^{\alpha} f(b)g(b) + J_{b-}^{\alpha} f(a)g(a)\right] \\
&\leq [f(a)g(a)+f(b)g(b)]\int_0^1 t^{\alpha-1}(2t^2-2t+1)dt \\
&\quad +2[f(a)g(b)+f(b)g(a)]\int_0^1 t^{\alpha-1}t(1-t)dt \\
&= \left(\frac{2}{\alpha+2}-\frac{2}{\alpha+1}+\frac{1}{\alpha}\right)[f(a)g(a)+f(b)g(b)] \\
&\quad +\frac{2}{(\alpha+2)(\alpha+1)}[f(a)g(b)+f(b)g(a)] \\
&= \left(\frac{2}{\alpha+2}-\frac{2}{\alpha+1}+\frac{1}{\alpha}\right)M(a,b)+\frac{2}{(\alpha+1)(\alpha+2)}N(a,b).
\end{aligned}
$$

Buradan

$$
\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a+}^{\alpha} f(b)g(b) + J_{b-}^{\alpha} f(a)g(a)\right] \\
&\leq \left(\frac{\alpha}{\alpha+2}-\frac{\alpha}{\alpha+1}+\frac{1}{2}\right)M(a,b)+\frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)}N(a,b)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanmış olur. □

Sonuç 3.10. Eğer Teorem 3.9 da özel olarak $\alpha = 1$ seçlirse, (3.14) eşitsizliği (3.1) eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 3.11. f ve g $[a,b]$ aralığında reel değerli, negatif olmayan konveks fonksiyonlar olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik sağlanır;

$$
\begin{aligned}
&2f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right) \qquad (3.21) \\
&\leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a+}^{\alpha} f(b)g(b) + J_{b-}^{\alpha} f(a)g(a)\right] \\
&\quad +\frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)}M(a,b)+\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\right)N(a,b).
\end{aligned}
$$

Burada $M(a,b)$ ve $N(a,b)$ Teorem 3.1 deki gibi tanımlanır.

İspat. Her $t \in [0,1]$ için

$$\frac{a+b}{2} = \frac{ta+(1-t)b}{2} + \frac{(1-t)a+tb}{2}$$

olarak yazılabilir. Buradan f ve g konveks olduğundan

$$\begin{aligned}
& f\left(\frac{a+b}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}\right) \qquad (3.22)\\
= \; & f\left(\frac{ta+(1-t)b}{2} + \frac{(1-t)a+tb}{2}\right) g\left(\frac{ta+(1-t)b}{2} + \frac{(1-t)a+tb}{2}\right) \\
\leq \; & \frac{1}{4}\left[f(ta+(1-t)b) + f((1-t)a+tb)\right]\left[g(ta+(1-t)b) + g((1-t)a+tb)\right] \\
= \; & \frac{1}{4}\left[f(ta+(1-t)b)\, g(ta+(1-t)b) + f((1-t)a+tb)\, g((1-t)a+tb)\right] \\
& + \frac{1}{4}\left[f(ta+(1-t)b)\, g((1-t)a+tb) + f((1-t)a+tb)\, g(ta+(1-t)b)\right] \\
\leq \; & \frac{1}{4}\left[f(ta+(1-t)b)\, g(ta+(1-t)b) + f((1-t)a+tb)\, g((1-t)a+tb)\right] \\
& + \frac{1}{4}\left\{\left[tf(a)+(1-t)f(b)\right]\left[(1-t)g(a)+tg(b)\right]\right. \\
& \left. + \left[(1-t)f(a)+tf(b)\right]\left[tg(a)+(1-t)g(b)\right]\right\} \\
= \; & \frac{1}{4}\left[f(ta+(1-t)b)\, g(ta+(1-t)b) + f((1-t)a+tb)\, g((1-t)a+tb)\right] \\
& + \frac{1}{4}\left\{2t(1-t)\left[f(a)g(a)+f(b)g(b)\right] + \left[(1-t)^2+t^2\right]\left[f(a)g(b)+f(b)g(a)\right]\right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. Eşitsizliğin her iki tarafı $t^{\alpha-1}$ ile çarpılıp bulunan ifade $[0,1]$ aralığında t ye göre integre edilirse

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_0^1 t^{\alpha-1} dt \qquad (3.23)$$

$$\leq \frac{1}{4}\left[\int_0^1 t^{\alpha-1} f(ta+(1-t)b)\, g(ta+(1-t)b)\, dt + \int_0^1 t^{\alpha-1} f((1-t)a+tb)\, g((1-t)a+tb)\, dt\right] + \frac{1}{4}\left\{[f(a)g(a)+f(b)g(b)] \int_0^1 t^{\alpha-1} 2t(1-t)dt + [f(a)g(b)+f(b)g(a)] \int_0^1 t^{\alpha-1}\left[(1-t)^2+t^2\right] dt\right\}$$

eşitsizliği bulunur. Buradan

$$\frac{1}{\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{3.24}$$

$$\leq \frac{1}{4}\left[\frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a+}^{\alpha} f(b)g(b) + J_{b-}^{\alpha} f(a)g(a)\right]\right] + \frac{1}{4}\left\{M(a,b)\int_0^1 t^{\alpha-1} 2t(1-t)dt + N(a,b)\int_0^1 t^{\alpha-1}\left[(1-t)^2+t^2\right] dt\right\}$$

eşitsizliği yazılır. Burada

$$\int_0^1 t^{\alpha-1} 2t(1-t)dt = \frac{2}{(\alpha+1)(\alpha+2)}$$

ve

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}\left[(1-t)^2+t^2\right] dt = \left(\frac{2}{\alpha+2} - \frac{2}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha}\right)$$

eşitliklerinden

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{3.25}$$

$$\leq \frac{\Gamma(\alpha)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a+}^{\alpha} f(b)g(b) + J_{b-}^{\alpha} f(a)g(a)\right] + M(a,b)\frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + N(a,b)\left(\frac{\alpha}{\alpha+2} - \frac{\alpha}{\alpha+1} + \frac{1}{2}\right)$$

eşitsizliği yazılır ve böylece ispat tamamlanmış olur. □

Sonuç 3.12. Eğer Teorem 3.11 da özel olarak $\alpha = 1$ seçlirse, (3.21) eşitsizliği (3.5) eşitsizliğine dönüşür.

4. KONVEKS FONKSİYONLARIN ÇARPIMI İÇİN FEJER TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde konveks ve s-konveks fonksiyonların çarpımı için Fejer tipli eşitsizlikler elde edilecektir.

4.1. İKİ KONVEKS FONKSİYONUN ÇARPIMI İÇİN FEJER TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu alt bölümde iki konveks fonksiyonun çarpımı için Fejer tipli eşitsizlikler sunulacaktır. Ayrıca elde edilen eşitsizliklerin özel durumları literatürde var olan ve önceki bölümlerde ifade edilen eşitsizliklere dönüşecektir.

Teorem 4.1. $w : I \to \mathbb{R}$ negatif olmayan, sürekli ve $x = \frac{a+b}{2}$ için simetrik (diğer bir deyişle $w(x) = w(a+b-x)$) fonksiyon olsun. Eğer $f, g : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonları I aralığında reel değerli, negatif olmayan ve konveks birer fonksiyon ise $a, b \in I$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)g(x)w(x)dx \qquad (4.1)\\
\leq\ & \frac{M(a,b)}{(b-a)^2}\int_a^b (b-x)^2 w(x)dx + \frac{N(a,b)}{(b-a)^2}\int_a^b (b-x)(x-a)w(x)dx
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. Burada,

$$M(a,b) = f(a)g(a) + f(b)g(b) \text{ ve } N(a,b) = f(a)g(b) + f(b)g(a)$$

olarak tanımlanır.

İspat. f ve g , $[a,b]$aralığında konveks fonsiyonları için

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t) f(a) + t f(b) \qquad (4.2)$$

ve

$$g\left((1-t)a+tb\right) \leq (1-t)g(a)+tg(b) \tag{4.3}$$

dir. (4.2) ve (4.3) ten

$$\begin{aligned} & f\left((1-t)a+tb\right)g\left((1-t)a+tb\right) \\ \leq \; & (1-t)^2 f(a)g(a)+t^2 f(b)g(b) \\ & +t(1-t)\left[f(a)g(b)+f(b)g(a)\right] \end{aligned} \tag{4.4}$$

eşitsizliği yazılır. (4.4) eşitsizliğinin her iki tarafı $w\left((1-t)a+tb\right)$ ile çarpılıp, bulunan ifade $[0,1]$ aralığında t ye göre integre edilirse

$$\begin{aligned} & \int_0^1 f\left((1-t)a+tb\right)g\left((1-t)a+tb\right)w\left((1-t)a+tb\right)dt \\ \leq \; & f(a)g(a)\int_0^1 (1-t)^2 w\left((1-t)a+tb\right)dt \\ & +f(b)g(b)\int_0^1 t^2 w\left((1-t)a+tb\right)dt \\ & +\left[f(a)g(b)+f(b)g(a)\right]\int_0^1 t(1-t)w\left((1-t)a+tb\right)dt \end{aligned} \tag{4.5}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $x=(1-t)a+tb$ değişken değiştirmesi yapılarak

$$\begin{aligned} & \int_0^1 f\left((1-t)a+tb\right)g\left((1-t)a+tb\right)w\left((1-t)a+tb\right)dt \\ = \; & \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)w(x)dx \end{aligned} \tag{4.6}$$

sonucuna ulaşılır. w fonksiyonu $x=\frac{a+b}{2}$ için simetrik fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^2 w((1-t)a+tb)\,dt &= \frac{1}{(b-a)^3}\int_a^b (x-a)^2 w(x)dx \\ &= \frac{1}{(b-a)^3}\int_a^b (b-x)^2 w(x)dx\end{aligned} \tag{4.7}$$

eşitliği elde edilir. Kolayca görülebilir ki

$$\int_0^1 (1-t)^2 w((1-t)a+tb)\,dt = \frac{1}{(b-a)^3}\int_a^b (b-x)^2 w(x)dx \tag{4.8}$$

dir. Ayrıca

$$\int_0^1 t(1-t)w((1-t)a+tb)\,dt = \frac{1}{(b-a)^3}\int_a^b (b-x)(x-a)w(x)dx \tag{4.9}$$

eşitliği yazılır. (4.6)-(4.9) eşitlikleri (4.5) eşitsizliğinde yerine konulursa

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)w(x)dx &\le \frac{f(a)g(a)+f(b)g(b)}{(b-a)^3}\int_a^b (b-x)^2 w(x)dx \\ &\quad +\frac{f(a)g(b)+f(b)g(a)}{(b-a)^3}\int_a^b (b-x)(x-a)w(x)dx\end{aligned} \tag{4.10}$$

ifadesi elde edilir. Eğer (4.10) eşitsizliğinin her tarafı $(b-a)$ ile çarpılır ise istenen sonuca ulaşılır. □

Sonuç 4.2. Eger Teorem 4.1 de her $x\in[a,b]$ için $w(x)=1$ seçilirse (4.1) eşitsizliği Pachpatte tarafından ispatlanan (3.1) eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.3. Eger Teorem 4.1 her $x\in[a,b]$ için $g(x)=1$ seçilirse, (1.2) eşitsizliğinin sağ tarafı olan

$$\int_a^b f(x)w(x)dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b w(x)dx$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Her $x \in [a,b]$ için $g(x) = 1$ ise, (4.1) eşitsizliğinden

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)w(x)dx \qquad (4.11)\\
\leq\; & \frac{f(a)+f(b)}{(b-a)^2}\left[\int_a^b (b-x)^2 w(x)dx + \int_a^b (b-x)(x-a)w(x)dx\right]\\
=\; & \frac{f(a)+f(b)}{(b-a)}\int_a^b (b-x)w(x)dx
\end{aligned}
$$

yazılır. Burada w fonksiyonu $x = \frac{a+b}{2}$ için simetrik fonksiyon olduğundan

$$
\begin{aligned}
\int_a^b (b-x)w(x)dx &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} (b-x)w(x)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x)w(x)dx \qquad (4.12)\\
&= \int_a^{\frac{a+b}{2}} (b-x)w(x)dx + \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)w(a+b-x)dx\\
&= (b-a)\int_a^{\frac{a+b}{2}} w(x)dx\\
&= \frac{(b-a)}{2}\int_a^b w(x)dx
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir. (4.12) eşitliği (4.11) ifadesinde yerine konulursa istenen sonuca ulaşılır.

□

Teorem 4.4. Teorem 4.1 in koşullarının sağlandığı varsayılsın. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik yazılır:

$$
\begin{aligned}
&2f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b w(x)dx \qquad (4.13)\\
\leq\; & \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx
\end{aligned}
$$

$$+\frac{M(a,b)}{(b-a)^2}\int_a^b (b-x)(x-a)\,w(x)\,dx+\frac{N(a,b)}{(b-a)^2}\int_a^b (b-x)^2\,w(x)\,dx.$$

Burada $M(a,b)$ ve $N(a,b)$ Teorem 4.1 deki gibi tanımlanır.

İspat. Her $t\in[0,1]$ için

$$\frac{a+b}{2}=\frac{(1-t)a+tb}{2}+\frac{ta+(1-t)b}{2}$$

eşitliği yazılabilir. f ve g nin konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)\\
=\;&f\left(\frac{(1-t)a+tb}{2}+\frac{ta+(1-t)b}{2}\right)g\left(\frac{(1-t)a+tb}{2}+\frac{ta+(1-t)b}{2}\right)\\
\leq\;&\frac{1}{4}\left[f((1-t)a+tb)+f(ta+(1-t)b)\right]\left[g((1-t)a+tb)+g(ta+(1-t)b)\right]\\
=\;&\frac{1}{4}\left[f((1-t)a+tb)g((1-t)a+tb)+f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)\right]\\
&+\frac{1}{4}\left[f((1-t)a+tb)g(ta+(1-t)b)+f(ta+(1-t)b)g((1-t)a+tb)\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Son eşitlikteki ikinci ifade için tekrardan f ve g nin konveksliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)\\
\leq\;&\frac{1}{4}\left[f((1-t)a+tb)g((1-t)a+tb)+f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)\right]\\
&+\frac{1}{2}t(1-t)\left[f(a)g(a)+f(b)g(b)\right]+\frac{1}{4}\left[t^2+(1-t)^2\right]\left[f(a)g(b)+f(b)g(a)\right]
\end{aligned}\tag{4.14}$$

yazılır. (4.14) un her tarafı $w((1-t)a+tb)$ ile çarpılıp, 0 dan 1 e kadar t ye göre integral alınırsa aşağıdaki ifadeye ulaşılır;

$$
\begin{aligned}
& f\left(\frac{a+b}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_0^1 w((1-t)a+tb)\,dt \\
\leq\; & \frac{1}{4} \int_0^1 [f((1-t)a+tb)g((1-t)a+tb) \\
& +f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)]\, w((1-t)a+tb)\,dt \\
& +\frac{M(a,b)}{2} \int_0^1 t(1-t)\, w((1-t)a+tb)\,dt \\
& +\frac{N(a,b)}{4} \int_0^1 \left[t^2+(1-t)^2\right] w((1-t)a+tb)\,dt.
\end{aligned} \tag{4.15}
$$

(4.6)-(4.9) eşitlikleri (4.15) eşitsizliğinde yazılırsa

$$
\begin{aligned}
& f\left(\frac{a+b}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}\right) \frac{1}{b-a} \int_a^b w(x)dx \\
\leq\; & \frac{1}{4}\left[\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx + \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)w(a+b-x)dx\right] \\
& +\frac{M(a,b)}{2(b-a)^3} \int_a^b (b-x)(x-a)\, w(x)\,dx + \frac{N(a,b)}{2(b-a)^3} \int_a^b (b-x)^2\, w(x)\,dx
\end{aligned} \tag{4.16}
$$

eşitsizliği elde edilir. (4.16) eşitsizliğinde her iki taraf $2(b-a)$ ile çarpılırsa istenen sonuca ulaşılır. □

Sonuç 4.5. Eğer Teorem 4.4 te her $x \in [a,b]$ için $w(x) = 1$ seçilirse (4.13) eşitsizliği Pachpatte tarafından ispatlanan (3.5) eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.6. Eğer Teorem 4.4 de her $x \in [a,b]$ için $g(x) = 1$ seçilirse,

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b w(x)dx \leq \int_a^b f(x)w(x)dx + \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b w(x)\,dx$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. (4.13) eşitsizliğinde her $x \in [a,b]$ için $g(x) = 1$ seçilirse

$$\begin{aligned}
& 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b w(x)dx \\
\leq\ & \int_a^b f(x)w(x)dx + \frac{f(a)+f(b)}{(b-a)^2}\left[\int_a^b (b-x)(x-a)\,w(x)\,dx + \int_a^b (b-x)^2\,w(x)\,dx\right] \\
=\ & \int_a^b f(x)w(x)dx + \frac{f(a)+f(b)}{b-a}\int_a^b (b-x)\,w(x)\,dx
\end{aligned}$$

olur. Buda istenen sonuçtur. □

4.2. KONVEKS ve s-KONVEKS FONKSİYONLARIN ÇARPIMI İÇİN FEJER TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu alt bölümde, bir konveks fonksiyon ve bir s-konveks fonksiyonun çarpımı yardımıyla bazı Fejér tipli eşitsizlikler ispatlanacaktır.

Teorem 4.7. $w : I \to \mathbb{R}$ negatif olmayan, sürekli ve $x = \frac{a+b}{2}$ için simetrik (diğer bir deyişle $w(x) = w(a+b-x)$) fonksiyon olsun. Eğer $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I aralığında reel değerli, negatif olmayan ve konveks bir fonksiyon ve eğer $g : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I da $s \in (0,1]$ için s-konveks fonksiyon ise, bu durumda $a,b \in I$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
& \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx \qquad (4.17) \\
\leq\ & \frac{M(a,b)}{(b-a)^{s+1}}\int_a^b (b-x)^{s+1}\,w(x)dx + \frac{N(a,b)}{(b-a)^{s+1}}\int_a^b (b-x)(x-a)^s\,w(x)dx
\end{aligned}$$

eşitsizliği vardır. Burada $M(a,b)$ ve $N(a,b)$ Teorem 4.1 deki gibi tanımlanır.

İspat. $[a,b]$ aralığında f fonksiyonu konveks ve g fonksiyonu s-konveks olduğundan

$$f\left(ta+(1-t)b\right) \leq tf(a)+(1-t)f(b) \tag{4.18}$$

ve

$$g\left(ta+(1-t)b\right) \leq t^s g(a)+(1-t)^s g(b) \tag{4.19}$$

dır. (4.18) ve (4.19) eşitsizlikleri taraf tarafa çarpılırsa

$$\begin{aligned} & f\left(ta+(1-t)b\right) g\left(ta+(1-t)b\right) \\ \leq \; & t^{s+1} f(a)g(a)+(1-t)^{s+1} f(b)g(b) \\ & +t(1-t)^s f(a)g(b)+t^s(1-t) f(b)g(a) \end{aligned} \tag{4.20}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.20) eşitsizliğinin her iki tarafı $w\left(ta+(1-t)b\right)$ ile çarpılıp $[0,1]$ aralığında integre edildiğinde

$$\begin{aligned} & \int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right) g\left(ta+(1-t)b\right) w\left(ta+(1-t)b\right) dt \\ \leq \; & f(a)g(a) \int_0^1 t^{s+1} w\left(ta+(1-t)b\right) dt \\ & +f(b)g(b) \int_0^1 (1-t)^{s+1} w\left(ta+(1-t)b\right) dt \\ & +f(a)g(b) \int_0^1 t(1-t)^s w\left(ta+(1-t)b\right) dt \\ & +f(b)g(a) \int_0^1 t^s(1-t) w\left(ta+(1-t)b\right) dt \end{aligned} \tag{4.21}$$

bulunur. $x = ta + (1-t)b$, $dx = -(b-a)dt$ değişken değiştirmesi yapılarak

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)\,g(ta+(1-t)b)\,w(ta+(1-t)b)\,dt \tag{4.22}$$
$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)w(x)dx$$

olur. Ayrıca,

$$\int_0^1 t^{s+1} w(ta+(1-t)b)\,dt = \frac{1}{(b-a)^{s+2}}\int_a^b (b-x)^{s+1}\,w(x)dx \tag{4.23}$$

olduğu kolayca görülebilir ve w ,$\frac{a+b}{2}$ için simetrik fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-t)^{s+1} w(ta+(1-t)b)\,dt &= \frac{1}{(b-a)^{s+2}}\int_a^b (x-a)^{s+1}\,w(x)dx \\ &= \frac{1}{(b-a)^{s+2}}\int_a^b (b-u)^{s+1}\,w(a+b-u)du \\ &= \frac{1}{(b-a)^{s+2}}\int_a^b (b-u)^{s+1}\,w(u)du\end{aligned} \tag{4.24}$$

eşitliği bulunur. Benzer şekilde,

$$\int_0^1 t(1-t)^s\,w(ta+(1-t)b)\,dt = \frac{1}{(b-a)^{s+2}}\int_a^b (b-x)(x-a)^s\,w(x)dx \tag{4.25}$$

ve

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^s w(ta+(1-t)b)\,dt &= \frac{1}{(b-a)^{s+2}}\int_a^b (b-x)^s(x-a)\,w(x)dx \\ &= \frac{1}{(b-a)^{s+2}}\int_a^b (b-u)(u-a)^s\,w(a+b-u)du\end{aligned} \tag{4.26}$$

$$= \frac{1}{(b-a)^{s+2}} \int_a^b (b-u)(u-a)^s w(u)du$$

eşitlikleri de elde edilir. (4.22)-(4.26) eşitlikleri (4.21) eşitsizliğinde yazılarak

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx &\leq \frac{[f(a)g(a)+f(b)g(b)]}{(b-a)^{s+2}} \int_a^b (b-x)^{s+1} w(x)dx \qquad (4.27) \\ &+ \frac{f(a)g(b)+f(b)g(a)}{(b-a)^{s+2}} \int_a^b (b-x)(x-a)^s w(x)dx \end{aligned}$$

bulunur. (4.27) eşitsizliğinin her iki tarafı $(b-a)$ ile çarpılırsa istenen sonuca ulaşılır. □

Sonuç 4.8. Eğer Teorem 4.7 de her $x \in [a,b]$ için $w(x) = 1$ seçilirse, (4.17) eşitsizliği Kırmacı ve ark. tarafından ispatlanan (3.9) eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.9. Eğer Teorem 4.7 de $s = 1$ seçilirse, (4.17) eşitsizliği (4.1) eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.10. Teorem 4.7 de her $x \in [a,b]$ için $f(x) = 1$ seçilirse, bu durumda Sarıkaya ve ark. tarafından [4, $h(t) = t^s$ için] da ispatlanan

$$\int_a^b g(x)w(x)dx \leq \frac{g(a)+g(b)}{2(b-a)^s} \int_a^b [(b-x)^s + (x-a)^s] w(x)dx$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Her $x \in [a,b]$ için $f(x) = 1$ ise, (4.17) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x)w(x)dx &\leq \frac{g(a)+g(b)}{(b-a)^{s+1}} \int_a^b (b-x)^{s+1} w(x)dx \qquad (4.28) \\ &+ \frac{g(a)+g(b)}{(b-a)^{s+1}} \int_a^b (b-x)(x-a)^s w(x)dx \\ &= \frac{g(a)+g(b)}{(b-a)^{s+1}} \left[\int_a^b (b-x)^{s+1} w(x)dx + \int_a^b (b-x)(x-a)^s w(x)dx \right] \end{aligned}$$

olur. Burada $M(a,b)$ ve $N(a,b)$ Teorem 4.1 deki gibi tanımlanır. $x=\frac{a+b}{2}$ için simetrik olduğundan aşağıdaki eşitlik yazılabilir;

$$\int_a^b (b-x)^{s+1} w(x)dx = \int_a^b (x-a)^{s+1} w(x)dx.$$

(4.28) eşitliği kullanılarak aşağıdaki ifade elde edilir;

$$\begin{aligned}
\int_a^b g(x)w(x)dx &\leq \frac{g(a)+g(b)}{(b-a)^{s+1}}\left[\int_a^b (x-a)^{s+1} w(x)dx + \int_a^b (b-x)(x-a)^s w(x)dx\right] \\
&= \frac{g(a)+g(b)}{(b-a)^s}\int_a^b (x-a)^s w(x)dx \\
&= \frac{g(a)+g(b)}{2(b-a)^s}\int_a^b \left[(x-a)^s+(b-x)^s\right] w(x)dx.
\end{aligned}$$

Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 4.11. Teorem 4.7 in koşullarının sağlandığı varsayılsın. Bu durumda

$$\begin{aligned}
&2^s f\left(\frac{a+b}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b w(x)\,dx \\
\leq &\int_a^b f(x)g(x)w(x)dx \\
&+\frac{M(a,b)}{(b-a)^{s+1}}\int_a^b (x-a)^s(b-x)w(x)dx + \frac{N(a,b)}{(b-a)^{s+1}}\int_a^b (b-x)^{s+1} w(x)dx
\end{aligned} \tag{4.29}$$

eşitsizliği vardır. Burada $M(a,b)$ ve $N(a,b)$ Teorem 4.1 deki gibi tanımlanır.

İspat. $t\in[0,1]$ için

$$\frac{a+b}{2} = \frac{(1-t)a+tb}{2} + \frac{ta+(1-t)b}{2}$$

eşitliği yazılabilir. f fonksiyonunun konveksliği ve g fonksiyonunun s-konveksliği kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
& f\left(\frac{a+b}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
= \ & f\left(\frac{(1-t)a+tb}{2}+\frac{ta+(1-t)b}{2}\right) g\left(\frac{(1-t)a+tb}{2}+\frac{ta+(1-t)b}{2}\right) \\
\leq \ & \frac{1}{2^{s+1}}\left[f((1-t)a+tb)+f(ta+(1-t)b)\right]\left[g((1-t)a+tb)+g(ta+(1-t)b)\right] \\
= \ & \frac{1}{2^{s+1}}\left[f((1-t)a+tb)g((1-t)a+tb)+f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)\right] \\
& +\frac{1}{2^{s+1}}\left[f((1-t)a+tb)g(ta+(1-t)b)+f(ta+(1-t)b)g((1-t)a+tb)\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. Son eşitsizliğin sağ tarafında f fonksiyonunun konveksliği ve g fonksiyonunun s-konveksliği tekrar kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
& f\left(\frac{a+b}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
\leq \ & \frac{1}{2^{s+1}}\left[f((1-t)a+tb)g((1-t)a+tb)+f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)\right] \\
& +\frac{1}{2^{s+1}}\left[t^{s}(1-t)+t(1-t)^{s}\right]\left[f(a)g(a)+f(b)g(b)\right] \\
& +\frac{1}{2^{s+1}}\left[t^{s+1}+(1-t)^{s+1}\right]\left[f(a)g(b)+f(b)g(a)\right]
\end{aligned}
\tag{4.30}
$$

bulunur. (4.30) eşitsizliğinin iki tarafı $w((1-t)a+tb)$ ile çarpılarak elde edilen eşitsizliğin 0 dan 1 e kadar t ye göre integrali alınırsa,

$$
\begin{aligned}
& f\left(\frac{a+b}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_0^1 w((1-t)a+tb)\,dt \\
\leq \ & \frac{1}{2^{s+1}} \int_0^1 \left[f((1-t)a+tb)g((1-t)a+tb)\right.
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

$$+f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)]\,w((1-t)\,a+tb)\,dt$$

$$+\frac{M(a,b)}{2^{s+1}}\int_0^1 [t^s(1-t)+t(1-t)^s]\,w((1-t)\,a+tb)\,dt$$

$$+\frac{N(a,b)}{2^{s+1}}\int_0^1 \left[t^{s+1}+(1-t)^{s+1}\right]w((1-t)\,a+tb)\,dt$$

eşitsizliği elde edilir. Değişken değiştirmesi yardımıyla

$$\int_0^1 w((1-t)\,a+tb)\,dt=\frac{1}{b-a}\int_a^b w(x)\,dx, \tag{4.32}$$

$$\begin{aligned} &\int_0^1 f((1-t)a+tb)g((1-t)a+tb)w((1-t)\,a+tb)\,dt \\ &+\int_0^1 f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)w((1-t)\,a+tb)\,dt \\ =\;& \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)w(x)dx+\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)w(a+b-x)dx \\ =\;& \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)w(x)dx, \end{aligned} \tag{4.33}$$

$$\begin{aligned} &\int_0^1 [t^s(1-t)+t(1-t)^s]\,w((1-t)\,a+tb)\,dt \\ =\;& \int_0^1 [t^s(1-t)\,w((1-t)\,a+tb)+t(1-t)^s w((1-t)\,a+tb)]\,dt \\ =\;& \frac{1}{(b-a)^{s+2}}\int_a^b (x-a)^s(b-x)\,w(x)dx \end{aligned} \tag{4.34}$$

$$+\frac{1}{(b-a)^{s+2}}\int_a^b (x-a)^s (b-x)\, w(a+b-x)dx$$

$$= \frac{2}{(b-a)^{s+2}}\int_a^b (x-a)^s (b-x)\, w(x)dx$$

ve

$$\int_0^1 \left[t^{s+1}+(1-t)^{s+1}\right] w((1-t)\,a+tb)\,dt \tag{4.35}$$

$$= \int_0^1 \left[t^{s+1} w((1-t)\,a+tb)+(1-t)^{s+1}\, w((1-t)\,a+tb)\right] dt$$

$$= \frac{1}{(b-a)^{s+2}}\int_a^b (b-x)^{s+1}\, w(a+b-x)dx+\frac{1}{(b-a)^{s+2}}\int_a^b (b-x)^{s+1}\, w(x)dx$$

$$= \frac{2}{(b-a)^{s+2}}\int_a^b (b-x)^{s+1}\, w(x)dx$$

eşitlikleri yazılabilir. (4.32)-(4.35) eşitlikleri (4.31) eşitsizliğinde yerine yazılırsa,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{1}{b-a}\int_a^b w(x)\,dx \tag{4.36}$$

$$\leq \frac{1}{2^s(b-a)}\int_a^b f(x)g(x)w(x)dx$$

$$+\frac{M(a,b)}{2^s(b-a)^{s+2}}\int_a^b (x-a)^s (b-x)\, w(x)dx+\frac{N(a,b)}{2^s(b-a)^{s+2}}\int_a^b (b-x)^{s+1}\, w(x)dx$$

olur. (4.36) eşitsizliğinin her iki tarafı $2^s(b-a)$ ile çarpılırsa istenen sonuç elde edilir. □

Sonuç 4.12. Eğer Teorem 4.11 de her $x\in[a,b]$ için $w(x)=1$ seçilirse, (4.29) eşitsizliği Kırmacı ve ark. tarafından elde edilen (3.12) eşitsizliğine indirgenir.

Sonuç 4.13. Eğer Teorem 4.11 de özel olarak $s=1$ alınırsa, (4.29) eşitsizliği (4.13) eşitsizliğine indirgenir.

Sonuç 4.14. Eğer Teorem 4.11 de her $x \in [a,b]$ için $f(x) = 1$ seçilirse, aşağıdaki Fejér tipli eşitsizlik elde edilir;

$$2^s g\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b w(x)\,dx \le \int_a^b g(x)w(x)dx + \frac{g(a)+g(b)}{2(b-a)^s}\int_a^b \left[(x-a)^s+(b-x)\right]^s w(x)dx.$$

İspat. (4.29) eşitsizliğinde $f(x) = 1$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
& 2^s g\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b w(x)\,dx \\
\le\ & \int_a^b g(x)w(x)dx \\
& + \frac{g(a)+g(b)}{(b-a)^{s+1}}\int_a^b (x-a)^s(b-x)\,w(x)dx + \frac{g(a)+g(b)}{(b-a)^{s+1}}\int_a^b (b-x)^{s+1}\,w(x)dx \\
=\ & \int_a^b g(x)w(x)dx + \frac{g(a)+g(b)}{(b-a)^{s+1}}\left[\int_a^b (x-a)^s(b-x)\,w(x)dx + \int_a^b (b-x)^{s+1}\,w(x)dx\right] \\
=\ & \int_a^b g(x)w(x)dx + \frac{g(a)+g(b)}{2(b-a)^s}\int_a^b \left[(x-a)^s+(b-x)^s\right]w(x)dx
\end{aligned}$$

olur. Böylece ispat tamamlanır. □

4.3. İKİ s-KONVEKS FONKSİYONUN ÇARPIMI İÇİN FEJER TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu alt bölümde, Bölüm 4.2 de elde sonuçları genelleştiren iki s-konveks fonksiyonun çarpımı için bazı Fejer tipli eşitsizlikler sunulacaktır.

Teorem 4.15. $w : I \to \mathbb{R}$ negatif olmayan, sürekli ve $x = \frac{a+b}{2}$ için simetrik (diğer bir deyişle $w(x) = w(a+b-x)$) fonksiyon olsun. $s_1, s_2 \in (0,1]$ olmak üzere eğer $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I da s_1-konveks fonksiyon ve $g : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I da s_2-konveks fonksiyon ise, bu durumda $a,b \in I$ için

$$\int_a^b f(x)g(x)w(x)dx \quad \le \quad \frac{M(a,b)}{(b-a)^{s_1+s_2}}\int_a^b (b-x)^{s_1+s_2}\,w(x)dx \tag{4.37}$$

$$+\frac{N(a,b)}{(b-a)^{s_1+s_2}}\int_a^b (b-x)^{s_1}(x-a)^{s_2}w(x)dx$$

eşitsizliği vardır. Burada $M(a,b)$ ve $N(a,b)$ Teorem 4.1 deki gibi tanımlanır.

İspat. f, s_1-konveks fonksiyon ve g, s_2-konveks fonksiyon olduğundan

$$f(ta+(1-t)b) \leq t^{s_1}f(a)+(1-t)^{s_1}f(b) \tag{4.38}$$

ve

$$g(ta+(1-t)b) \leq t^{s_2}g(a)+(1-t)^{s_2}g(b) \tag{4.39}$$

yazılır. (4.38) ve (4.39) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} & f(ta+(1-t)b)\,g(ta+(1-t)b) \\ \leq\ & t^{s_1+s_2}f(a)g(a)+(1-t)^{s_1+s_2}f(b)g(b) \\ & +t^{s_1}(1-t)^{s_2}f(a)g(b)+t^{s_2}(1-t)^{s_1}f(b)g(a) \end{aligned} \tag{4.40}$$

ifadesi bulunur. (4.40) eşitsizliğinin her iki tarafı $w(ta+(1-t)b)$ ile çarpılıp, $[0,1]$ aralığında integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & \int_0^1 f(ta+(1-t)b)\,g(ta+(1-t)b)\,w(ta+(1-t)b)\,dt \\ \leq\ & f(a)g(a)\int_0^1 t^{s_1+s_2}w(ta+(1-t)b)\,dt \\ & +f(b)g(b)\int_0^1 (1-t)^{s_1+s_2}w(ta+(1-t)b)\,dt \\ & +f(a)g(b)\int_0^1 t^{s_1}(1-t)^{s_2}w(ta+(1-t)b)\,dt \end{aligned} \tag{4.41}$$

$$+f(b)g(a)\int_0^1 t^{s_2}(1-t)^{s_1}w(ta+(1-t)b)\,dt$$

elde edilir. $x=ta+(1-t)b$ değişken değiştirmesi yardımıyla

$$\int_0^1 t^{s_1+s_2}w(ta+(1-t)b)\,dt=\frac{1}{(b-a)^{s_1+s_2+1}}\int_a^b (b-x)^{s_1+s_2}w(x)dx \tag{4.42}$$

bulunur ve w fonksiyonu $x=\frac{a+b}{2}$ için simetrik olduğundan

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 (1-t)^{s_1+s_2}w(ta+(1-t)b)\,dt &(4.43)\\
&= \frac{1}{(b-a)^{s_1+s_2+1}}\int_a^b (x-a)^{s_1+s_2}w(x)dx\\
&= \frac{1}{(b-a)^{s_1+s_2+1}}\int_a^b (b-u)^{s_1+s_2}w(a+b-u)du\\
&= \frac{1}{(b-a)^{s_1+s_2+1}}\int_a^b (b-u)^{s_1+s_2}w(u)du
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\int_0^1 t^{s_1}(1-t)^{s_2}w(ta+(1-t)b)\,dt=\frac{1}{(b-a)^{s_1+s_2+1}}\int_a^b (b-x)^{s_1}(x-a)^{s_2}w(x)dx \tag{4.44}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 t^{s_2}(1-t)^{s_1}w(ta+(1-t)b)\,dt &(4.45)\\
&= \frac{1}{(b-a)^{s_1+s_2+1}}\int_a^b (b-x)^{s_2}(x-a)^{s_1}w(x)dx\\
&= \frac{1}{(b-a)^{s_1+s_2+1}}\int_a^b (b-u)^{s_1}(u-a)^{s_2}w(a+b-u)du\\
&= \frac{1}{(b-a)^{s_1+s_2+1}}\int_a^b (b-u)^{s_1}(u-a)^{s_2}w(u)du
\end{aligned}$$

yazılır. (4.42)-(4.45) eşitlikleri (4.41) eşitsizliğinde kullanılarak

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)w(x)dx \leq \frac{f(a)g(a)+f(b)g(b)}{(b-a)^{s_1+s_2+1}}\int_a^b (b-x)^{s_1+s_2}w(x)dx + \frac{f(a)g(b)+f(b)g(a)}{(b-a)^{s_1+s_2+1}}\int_a^b (b-x)^{s_1}(x-a)^{s_2}w(x)dx \tag{4.46}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.46) eşitsizliğinin her iki tarafı $(b-a)$ ile çarpılarak istenen sonuca ulaşılır. □

Sonuç 4.16. Eğer Teorem 4.15 te her $x \in [a,b]$ için $w(x) = 1$ seçilirse, (4.37) eşitsizliği Kırmacı ve ark. tarafından ispatlanan (3.10) eşitsizliğine indirgenir.

Sonuç 4.17. Eğer Teorem 4.15 te özel olarak $s_1 = 1$ ve $s_2 = s$ seçilirse, (4.37) eşitsizliği (4.17) eşitsizliğine indirgenir.

Sonuç 4.18. Eğer Teorem 4.15 te özel olarak $s_1 = s_2 = s$ seçilirse aşağıdaki eşitsizlik elde edilir;

$$\int_a^b f(x)g(x)w(x)dx \leq \frac{M(a,b)}{(b-a)^{2s}}\int_a^b (b-x)^{2s}w(x)dx + \frac{N(a,b)}{(b-a)^{2s}}\int_a^b (b-x)^{s}(x-a)^{s}w(x)dx$$

Teorem 4.19. Teorem 4.15 in koşullarının sağlandığı varsayılsın. Bu takdirde

$$\begin{aligned} & 2^{s_1+s_2-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b w(x)\,dx \\ \leq & \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx \\ & + \frac{M(a,b)}{(b-a)^{s_1+s_2}}\int_a^b (x-a)^{s_1}(b-x)^{s_2}w(x)dx + \frac{N(a,b)}{(b-a)^{s_1+s_2}}\int_a^b (b-x)^{s_1+s_2}w(x)dx \end{aligned} \tag{4.47}$$

dir. Burada $M(a,b)$ ve $N(a,b)$ Teorem 4.1 deki gibi tanımlanır.

İspat. f fonksiyonunun s_1-konveksliği ve g fonksiyonunun s_2-konveksliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
& f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
= \; & f\left(\frac{(1-t)a+tb}{2}+\frac{ta+(1-t)b}{2}\right)g\left(\frac{(1-t)a+tb}{2}+\frac{ta+(1-t)b}{2}\right) \\
\leq \; & \frac{1}{2^{s_1+s_2}}\left[f((1-t)a+tb)+f(ta+(1-t)b)\right]\left[g((1-t)a+tb)+g(ta+(1-t)b)\right] \\
= \; & \frac{1}{2^{s_1+s_2}}\left[f((1-t)a+tb)g((1-t)a+tb)+f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)\right] \\
& +\frac{1}{2^{s_1+s_2}}\left[f((1-t)a+tb)g(ta+(1-t)b)+f(ta+(1-t)b)g((1-t)a+tb)\right]
\end{aligned}
$$

bulunur. Yukarıdaki eşitsizliğin son satırında f fonksiyonunun s_1-konveksliği ve g fonksiyonunun s_2-konveksliği tekrar kullanılarak

$$
\begin{aligned}
& f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right) \qquad (4.48) \\
\leq \; & \frac{1}{2^{s_1+s_2}}\left[f((1-t)a+tb)g((1-t)a+tb)+f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)\right] \\
& +\frac{1}{2^{s_1+s_2}}\left[t^{s_1}(1-t)^{s_2}+t^{s_2}(1-t)^{s_1}\right]\left[f(a)g(a)+f(b)g(b)\right] \\
& +\frac{1}{2^{s_1+s_2}}\left[t^{s_1+s_2}+(1-t)^{s_1+s_2}\right]\left[f(a)g(b)+f(b)g(a)\right]
\end{aligned}
$$

bulunur. (4.48) eşitsizliğinin her iki tarafı $w((1-t)a+tb)$ ile çarpılıp sonrasında $[0,1]$ aralığında t ye göre integrali alınırsa

$$
\begin{aligned}
& f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_0^1 w((1-t)a+tb)\,dt \qquad (4.49) \\
\leq \; & \frac{1}{2^{s_1+s_2}}\int_0^1 \left[f((1-t)a+tb)g((1-t)a+tb)\right.
\end{aligned}
$$

$$+f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)]\,w((1-t)\,a+tb)\,dt$$

$$+\frac{M(a,b)}{2^{s_1+s_2}}\int_0^1 [t^{s_1}(1-t)^{s_2}+t^{s_2}(1-t)^{s_1}]\,w((1-t)\,a+tb)\,dt$$

$$+\frac{N(a,b)}{2^{s_1+s_2}}\int_0^1 \left[t^{s_1+s_2}+(1-t)^{s_1+s_2}\right]w((1-t)\,a+tb)\,dt$$

elde edilir. $x=(1-t)\,a+tb$ değişken değiştirmesi yapılarak

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 [t^{s_1}(1-t)^{s_2}+t^{s_2}(1-t)^{s_1}]\,w((1-t)\,a+tb)\,dt \qquad (4.50)\\
=\;&\int_0^1 [t^{s_1}(1-t)^{s_2}\,w((1-t)\,a+tb)+t^{s_2}(1-t)^{s_1}w((1-t)\,a+tb)]\,dt\\
=\;&\frac{1}{(b-a)^{s_1+s_2+1}}\int_a^b (x-a)^{s_1}(b-x)^{s_2}\,w(x)dx\\
&+\frac{1}{(b-a)^{s_1+s_2+1}}\int_a^b (x-a)^{s_1}(b-x)^{s_2}\,w(a+b-x)dx\\
=\;&\frac{2}{(b-a)^{s_1+s_2+1}}\int_a^b (x-a)^{s_1}(b-x)^{s_2}\,w(x)dx
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left[t^{s_1+s_2}+(1-t)^{s_1+s_2}\right]w((1-t)\,a+tb)\,dt \qquad (4.51)\\
=\;&\int_0^1 \left[t^{s_1+s_2}w((1-t)\,a+tb)+(1-t)^{s_1+s_2}\,w((1-t)\,a+tb)\right]dt\\
=\;&\frac{1}{(b-a)^{s_1+s_2+1}}\int_a^b (b-x)^{s_1+s_2}\,w(a+b-x)dx+\frac{1}{(b-a)^{s_1+s_2+1}}\int_a^b (b-x)^{s_1+s_2}\,w(x)dx\\
=\;&\frac{2}{(b-a)^{s_1+s_2+1}}\int_a^b (b-x)^{s_1+s_2}\,w(x)dx
\end{aligned}$$

eşitlikleri bulunur. Eğer (4.32), (4.33), (4.50) ve (4.51) eşitlikleri (4.49) eşitsizliğinde yazılırsa

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{a+b}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}\right) \frac{1}{b-a} \int_a^b w(x)\, dx \qquad (4.52) \\ \leq & \frac{1}{2^{s_1+s_2-1}(b-a)} \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx \\ & + \frac{M(a,b)}{2^{s_1+s_2-1}(b-a)^{s_1+s_2+1}} \int_a^b (x-a)^{s_1}(b-x)^{s_2} w(x)dx \\ & + \frac{N(a,b)}{2^{s_1+s_2-1}(b-a)^{s_1+s_2+1}} \int_a^b (b-x)^{s_1+s_2} w(x)dx \end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. (4.52) eşitsizliğinin her iki tarafı $2^{s_1+s_2-1}(b-a)$ ile çarpılırsa istenen sonuca ulaşılır. □

Sonuç 4.20. Eğer Teorem 4.19 da her $x \in [a,b]$ için $w(x) = 1$ seçilirse, bu durumda

$$\begin{aligned} & 2^{s_1+s_2-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ \leq & \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx + B(s_1+1, s_2+1)M(a,b) + \frac{1}{s_1+s_2+1} N(a,b) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.21. Eğer Teorem 4.19 da özel olarak $s_1 = 1$ ve $s_2 = s$ seçilirse, (4.47) eşitsizliği (4.29) eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.22. Eğer Teorem 4.19 da özel olarak $s_1 = s_2 = s$ alınırsa, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir;

$$\begin{aligned} & 2^{2s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b w(x)\, dx \\ \leq & \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx \end{aligned}$$

$$+\frac{M(a,b)}{(b-a)^{2s}}\int_a^b (x-a)^s (b-x)^s w(x)dx+\frac{N(a,b)}{(b-a)^{2s}}\int_a^b (b-x)^{2s} w(x)dx.$$

5. RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ İNTEGRALLERİ İÇİN FEJER TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde, Bölüm 4.1 de elde edilen eşitsizliklerden faydalanılarak Riemann-Liouville kesirli integrallerini içeren bazı Fejer tipli eşitsizlikler sunulacaktır. Burada ispatlanan eşitsizlikler Bölüm 3.2 de verilen eşitsizliklerin genelleştirilmesi olacaktır.

Teorem 5.1. $w:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu negatif olmayan, integrallenebilen ve $x=\frac{a+b}{2}$ yani $w(x)=w(a+b-x))$ için simetrik bir fonksiyon olsun. Eğer, $f,g:I\to\mathbb{R}$ fonksiyonları reel değerli, negatif olmayan ve konveks fonksiyonlar ise, $a,b\in I$ ve $\alpha>0$ için aşağıdaki eşitsizlikler vardır.

$$\begin{aligned} & J_{a+}^{\alpha}(fgw)(b)+J_{b-}^{\alpha}(fgw)(a) \qquad (5.1)\\ \leq\ & \frac{M(a,b)}{(b-a)^2\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-x)^{\alpha-1}\left[(b-x)^2+(x-a)^2\right]w(x)dx \\ & +\frac{2N(a,b)}{(b-a)^2\Gamma(\alpha)}\int_a^b (x-a)(b-x)^{\alpha}w(x)dx. \end{aligned}$$

Burada $M(a,b)=f(a)g(a)+f(b)g(b)$ ve $N(a,b)=f(a)g(b)+f(b)g(a)$ olarak tanımlanmıştır ve Γ, Gamma fonksiyonudur.

İspat. w fonksiyonu negatif olmayan, integrallenebilir ve $x=\frac{a+b}{2}$ için simetrik olduğundan $h(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[(b-x)^{\alpha-1}+(x-a)^{\alpha-1}\right]w(x)$ fonksiyonu da negatif olmayan, integrallenebilen ve $x=\frac{a+b}{2}$ için simetrik fonksiyondur. Teorem 4.1 kullanılarak

$$\int_a^b f(x)g(x)h(x)dx \leq \frac{M(a,b)}{(b-a)^2}\int_a^b (b-x)^2h(x)dx+\frac{N(a,b)}{(b-a)^2}\int_a^b (b-x)(x-a)h(x)dx$$

eşitsizliği yazılır. Bu eşitsizlik de

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-x)^{\alpha-1} f(x)g(x)w(x)dx \\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (x-a)^{\alpha-1} f(x)g(x)w(x)dx \\
\leq\ & \frac{M(a,b)}{(b-a)^2\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-x)^2\left[(b-x)^{\alpha-1}+(x-a)^{\alpha-1}\right]w(x)dx \\
&+\frac{N(a,b)}{(b-a)^2\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-x)(x-a)\left[(b-x)^{\alpha-1}+(x-a)^{\alpha-1}\right]w(x)dx
\end{aligned} \tag{5.2}$$

eşitsizliğine denktir. Riemann-Liouville kesirli integral tanımlarından,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-x)^{\alpha-1} f(x)g(x)w(x)dx \\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (x-a)^{\alpha-1} f(x)g(x)w(x)dx \\
&= J_{a+}^{\alpha}(fgw)(b)+J_{b-}^{\alpha}(fgw)(a)
\end{aligned} \tag{5.3}$$

eşitliği yazılır. Burada w fonksiyonu $x=\frac{a+b}{2}$ için simetrik fonksiyondur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
&\int_a^b (b-x)^2\left[(b-x)^{\alpha-1}+(x-a)^{\alpha-1}\right]w(x)dx \\
=\ & \int_a^b (b-x)^{\alpha+1}w(x)dx+\int_a^b (b-x)^2(x-a)^{\alpha-1}w(x)dx \\
=\ & \int_a^b (b-x)^{\alpha+1}w(x)dx+\int_a^b (x-a)^2(b-x)^{\alpha-1}w(x)dx \\
=\ & \int_a^b (b-x)^{\alpha-1}\left[(b-x)^2+(x-a)^2\right]w(x)dx
\end{aligned} \tag{5.4}$$

ve

$$\int_a^b (b-x)(x-a)\left[(b-x)^{\alpha-1}+(x-a)^{\alpha-1}\right]w(x)dx \tag{5.5}$$

$$= \int_a^b (x-a)(b-x)^{\alpha} w(x)dx+\int_a^b (b-x)(x-a)^{\alpha} w(x)dx$$

$$= \int_a^b (x-a)(b-x)^{\alpha} w(x)dx+\int_a^b (x-a)(b-x)^{\alpha} w(x)dx$$

$$= 2\int_a^b (x-a)(b-x)^{\alpha} w(x)dx.$$

eşitlikleri vardır. Eğer (5.3)-(5.5) eşitlikleri (5.2) eşitsizliğinde yazılırsa istenilen (5.1) eşitsizliği elde edilir . □

Sonuç 5.2. Teorem 5.1 de her $x \in [a,b]$ için $w(x) = 1$ seçilirse (5.1) eşitsizliği (3.14) eşitsizliğine indirgenir.

Sonuç 5.3. Teorem 5.1 de $\alpha = 1$ seçilirse (5.1) eşitsizliği (4.1) eşitsizliğine indirgenir.

Sonuç 5.4. Teorem 5.1 de her $x \in [a,b]$ için $g(x) = 1$ seçilirse,

$$J_{a+}^{\alpha}(gw)(b)+J_{b-}^{\alpha}(fw)(a) \le \frac{f(a)+f(b)}{2}\left[J_{a+}^{\alpha}w(b)+J_{b-}^{\alpha}w(a)\right]$$

eşitsizliği yazılır. Bu eşitsizlik ise İşcan tarafından ispatlanan (2.11) eşitsizliğinin sağ tarafıdır.

İspat. $g(x) = 1, x \in [a,b]$ için (5.1) eşitsizliği ve Lemma 2.8 kullanılarak aşağıdaki eşitsizlik yazılır.

$$J_{a+}^{\alpha}(gw)(b)+J_{b-}^{\alpha}(fw)(a) \tag{5.6}$$

$$\le \frac{f(a)+f(b)}{(b-a)^2\Gamma(\alpha)}\left[\int_a^b (b-x)^{\alpha-1}\left[(b-x)^2+(x-a)^2\right]w(x)dx\right.$$

$$\left.+2\int_a^b (x-a)(b-x)^{\alpha} w(x)dx\right]$$

$$= \frac{f(a)+f(b)}{(b-a)^2\Gamma(\alpha)}\left[\int_a^b (b-x)^{\alpha-1}\left[(b-x)^2+(x-a)^2+2(x-a)(b-x)\right]w(x)dx\right]$$

$$= \frac{f(a)+f(b)}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-x)^{\alpha-1}w(x)dx$$

$$= \frac{f(a)+f(b)}{2}\left[J_{a+}^{\alpha}w(b)+J_{b-}^{\alpha}w(a)\right].$$

Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 5.5. Teorem 5.1 in şartlarının sağlandğı varsayılsın. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik yazılır;

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[J_{a+}^{\alpha}w(b)+J_{b-}^{\alpha}w(a)\right] \tag{5.7}$$

$$\leq J_{a+}^{\alpha}(fgw)(b)+J_{b-}^{\alpha}(fgw)(a)$$

$$+\frac{2M(a,b)}{(b-a)^2\Gamma(\alpha)}\int_a^b (x-a)(b-x)^{\alpha}w(x)dx$$

$$+\frac{N(a,b)}{(b-a)^2\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-x)^{\alpha-1}\left[(b-x)^2+(x-a)^2\right]w(x)dx.$$

İspat. w fonksiyonu negatif olmayan, integrallenebilen ve $x=\frac{a+b}{2}$ için simetrik olduğundan $h(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[(b-x)^{\alpha-1}+(x-a)^{\alpha-1}\right]w(x)$ fonksiyonu da negatif olmayan, integrallenebilen ve $x=\frac{a+b}{2}$ için simetrik bir fonksiyondur. Böylece Teorem 4.11 kullanılırsa

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b h(x)dx$$

$$\leq \int_a^b f(x)g(x)h(x)dx$$

$$+\frac{M(a,b)}{(b-a)^2}\int_a^b (b-x)(x-a)h(x)dx+\frac{N(a,b)}{(b-a)^2}\int_a^b (b-x)^2h(x)dx$$

eşitsizliği vardır. Buradan

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^b\left[(b-x)^{\alpha-1}+(x-a)^{\alpha-1}\right]w(x)$$

$$\begin{aligned}
\leq\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^b f(x)g(x)\left[(b-x)^{\alpha-1}+(x-a)^{\alpha-1}\right]w(x)dx \\
& +\frac{M(a,b)}{(b-a)^2\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^b (b-x)(x-a)\left[(b-x)^{\alpha-1}+(x-a)^{\alpha-1}\right]w(x)dx \\
& +\frac{N(a,b)}{(b-a)^2\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^b (b-x)^2\left[(b-x)^{\alpha-1}+(x-a)^{\alpha-1}\right]w(x)dx
\end{aligned}$$

elde edilir. (5.3)-(5.5) eşitlikleri kullanılarak (5.7) eşitsizliği elde edilir. □

Sonuç 5.6. Teorem 5.5 te her $x\in[a,b]$ için $w(x)=1$ seçilirse (5.7) eşitsizliği (3.21) eşitsizliğine indirgenir.

Sonuç 5.7. Teorem 5.5 te $\alpha=1$ seçilirse (5.7) eşitsizliği (4.13) eşitsizliğine indirgenir.

Sonuç 5.8. Teorem 5.5 te her $x\in[a,b]$ için $g(x)=1$ seçilirse,

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[J_{a+}^{\alpha}w(b)+J_{b-}^{\alpha}w(a)\right]$$

$$\leq\ J_{a+}^{\alpha}(fw)(b)+J_{b-}^{\alpha}(fw)(a)+\frac{f(a)+f(b)}{2}\left[J_{a+}^{\alpha}w(b)+J_{b-}^{\alpha}w(a)\right]$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. İspat (5.6) eşitsizliğinden açıktır. □

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında farklı türden konveks fonksiyonların çarpımı için Hermite-Hadamard ve Hermite-Hadamard-Fejer tipli eşitsizlikler üzerinde durulmuştur. Özellikle konveks ve s-konveks fonksiyonların çarpımı için birçok eşitsizlik elde edilmiştir. Ayrıca elde edilen eşitsizliklerin sonucu olarak Riemann-Liouville kesirli integraller için bazı eşitsizlikler verilmiştir.

Sonraki çalışmalarda bu tezde kullanılan yöntemler izlenerek diğer konveks fonksiyonların çarpımı için Hermite-Hadamard ve Fejer tipli eşitsizlikler ispatlanabilir.

7. KAYNAKLAR

[1] C. Jordan and P. Mansio, *Charles Hermite (1822-1901).* Paris, France: CRC, 1993.

[2] J. Hadamard, "Etude sur les propriétés desjonetions entiers et en particulier d'une jonction consideree par riemann," *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, vol. 58, pp. 171–215, 1893.

[3] L. Fejer, "Über die fourierreihen, ii, math," *Naturwiss. Anz Ungar. Akad. Wiss*, vol. 24, pp. 369–390, 1906.

[4] M. Sarikaya, "On new hermite hadamard fejér type integral inequalities," *Studia Universitatis Babes-Bolyai Mathematica*, vol. 57, no. 3, pp. 377–386, 2012.

[5] F. Chen and S. Wu, "Several complementary inequalities to inequalities of hermite-hadamard type for s-convex functions," *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, vol. 9, no. 2, pp. 705–716, 2016.

[6] S. S. Dragomir, "Refinements of the hermite-hadamard integral inequality for log-convex functions," *RGMIA Research Report Collection*, vol. 3, no. 4, 2000.

[7] E. Set, M. E. Özdemir, and S. S. Dragomir, "On the hermite-hadamard inequality and other integral inequalities involving two functions," *Journal of Inequalities and Applications*, vol. 2010, no. 1, p. 148102, 2010.

[8] S. Fitzpatrick and S. Dragomir, "The hadamard's inequality for s-convex functions in the second sense," *Demonstratio Math*, vol. 32, no. 4, pp. 687–696, 1999.

[9] M. Z. Sarikaya and S. Erden, "On the weighted integral inequalities for convex function," *Acta Universitatis Sapientiae Mathematica*, vol. 6, no. 2, pp. 194–208, 2014.

[10] E. Set, I. Iscan, and H. H. Kara, "Hermite-hadamard-fejer type inequalities for s-convex function in the second sense via fractional integrals," *Filomat*, vol. 30, no. 12, pp. 3131–3138, 2016.

[11] J. Wang, C. Zhu, and Y. Zhou, "New generalized hermite-hadamard type inequalities and applications to special means," *Journal of Inequalities and Applications*, vol. 2013, no. 1, p. 325, 2013.

[12] M. Sarikaya, E. Set, H. Yaldiz, and N. Basak, "Hermite -hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities," *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 57, pp. 2403–2407, 2013.

[13] I. Iscan, "Hermite-hadamard-fejer type inequalities for convex functions via fractional integrals," *Studia Universitatis Babes-Bolyai, Mathematica*, vol. 60, no. 3, pp. 355–366, 2015.

[14] M. Jleli and B. Samet, "On hermite-hadamard type inequalities via fractional integrals of a function with respect to another function," *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, vol. 9, no. 3, pp. 1252–1260, 2016.

[15] H. Chen and U. N. Katugampola, "Hermite–hadamard and hermite–hadamard–fejér type inequalities for generalized fractional integrals," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 446, no. 2, pp. 1274–1291, 2017.

[16] G. Farid, A. Rehman, and M. Zahra, "On hadamard-type inequalities for k-fractional integrals," *Konuralp Journal of Mathematics*, vol. 4, no. 2, pp. 79–86, 2016.

[17] M. Iqbal, S. Qaisar, and M. Muddassar, "A short note on integral inequality of type hermite-hadamard through convexity," *Journal of Computational Analysis and Applications*, vol. 21, no. 5, pp. 946–953, 2016.

[18] İ. İşcan, "Generalization of different type integral inequalities for s-convex functions via fractional integrals," *Applicable Analysis*, vol. 93, no. 9, pp. 1846–1862, 2014.

[19] B. Ahmad, M. Alsaedi, A.and Kirane, and B. T. Torebek, "Hermite–hadamard, hermite–hadamard–fejér, dragomir–agarwal and pachpatte type inequalities for convex functions via new fractional integrals," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 353, pp. 120–129, 2019.

[20] M. A. Noor and M. U. Awan, "Some integral inequalities for two kinds of convexities via fractional integrals," *Transylvanian Journal of Mathematics and Mechanics*, vol. 5, no. 2, pp. 129–136, 2013.

[21] M. Z. Sarikaya and H. Budak, "Generalized hermite-hadamard type integral inequalities for fractional integrals," *Filomat*, vol. 30, no. 5, pp. 1315–1326, 2016.

[22] J. Wang, X. Li, and Y. Fe [cbreve] kan, M.and Zhou, "Hermite–hadamard-type inequalities for riemann–liouville fractional integrals via two kinds of convexity," *Applicable Analysis*, vol. 92, no. 11, pp. 2241–2253, 2013.

[23] Y. Zhang and J. Wang, "On some new hermite-hadamard inequalities involving riemann-liouville fractional integrals," *Journal of Inequalities and Applications*, vol. 2013, no. 1, p. 220, 2013.

[24] B. Pachpatte, "On some inequalities for convex functions," *Research Group in Mathematical Inequalities and Applications*, vol. 6, no. 1, pp. 1–9, 2003.

[25] U. S. Kirmaci, M. K. Bakula, and J. Özdemir, M. E.and Pecaric, "Hadamard-type inequalities for s-convex functions," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 193, no. 1, pp. 26–35, 2007.

[26] F. Chen, "A note on hermite-hadamard inequalities for products of convex functions." *Journal of Applied Mathematics*, 2013.

[27] N. N. Hue and D. Q. Huy, "Some inequalities of the hermite hadamard type for product of two functions," *Journal of New Theory*, no. 13, pp. 26–37, 2016.

[28] M. Iscan, I.and Kunt, "Hermite-hadamard type inequalities for product of ga-convex functions via hadamard fractional integrals," *Studia Universitatis Babes-Bolyai, Mathematica*, vol. 62, no. 4, pp. 451–459, 2017.

[29] M. Kunt, I. Iscan, and N. Yazici, "Hermite-hadamard type inequalities for product of harmonically convex functions via riemann-liouville fractional integrals," *Journal of Mathematical Analysis*, vol. 7, no. 4, pp. 74–82, 2016.

[30] E. Set, J. Choi, and B. Çelik, "New hermite-hadamard type inequalities for product of different convex functions involving certain fractional integral operators," *Journal of Mathematics and Computer Science*, vol. 18, pp. 29–36, 2018.

[31] H. P. Yin and F. Qi, "Hermite–hadamard type inequalities for the product of (α, m)-convex functions," *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, vol. 8, pp. 231–236, 2015.

[32] F. Chen, "A note on hermite-hadamard inequalities for products of convex functions via riemann-liouville fractional integrals," *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 33, pp. 299–306, 2014.

[33] M. Latif and M. Alomari, "Hadamard-type inequalities for product two convex functions on the co-ordinates," vol. 4, no. 47, pp. 2327–2338, 2009.

[34] M. E. Özdemir, M. A. Latif, and A. O. Akdemir, "On some hadamard-type inequalities for product of two s-convex functions on the co-ordinates," *Journal of Inequalities and Applications*, vol. 2012, no. 1, p. 21, 2012.

[35] M. E. Özdemir, M. Latif, and A. O. Akdemir, "On some hadamard-type inequalities for product of two h-convex functions on the co-ordinates," *Turkish Journal of Science*, vol. 1, pp. 41–58, 2016.

[36] H. Budak and M. Z. Sarıkaya, "Hermite-hadamard type inequalities for products of two co-ordinated convex mappings via fractional integrals," *International Journal of Applied Mathematics and Statistics*, vol. 58, no. 4, pp. 11–30, 2019.

[37] J. E. Pecaric and Y. L. Tong, *Convex functions, partial orderings, and statistical applications*. Academic Press.

[38] H. Hudzik and L. Maligranda, "Some remarks on *s*-convex functions," *Aequationes Mathematicae*, vol. 48, no. 1, pp. 100–111, 1994.

[39] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations*. Elsevier Science Limited, 2006, vol. 204.

[40] R. Gorenflo and F. Mainardi, *Fractional calculus*. New York, USA: Springer, 1997.

[41] S. Miller and B. Ross, *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. New York, USA: Wiley-Interscience, 1993.

[42] I. Podlubni, *Fractional Differential Equations*. Academic Press, 1999.

[43] S. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev, *Fractional integrals and derivatives: theory and applications*. Gordon and Breach Science Publishers, 1993.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Yonca BAKIŞ

Doğum Tarihi ve Yeri : 08/11/1993, Kars

Yabancı Dili : İngilizce

Eposta : yonca.bakis93@hotmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik Bölümü	Düzce Üniversitesi	2020
Lisans	Matematik Bölümü	Yıldız Teknik Üniversitesi	2016
Lise		Akçakoca Lisesi	2011

A. Uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler :

A1. H. Budak and Yonca Bakış, "On Fejer type inequalities for products convex and s-convex functions," *Studia Universitatis Babes-Bolyai, Mathematica,* in press.

A2. H. Budak and Yonca Bakış, "On Fejer type inequalities for products two convex functions," *Note di Matematica,* in press.