T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI ÖZEL KUATERNİYON SAYI DİZİLERİNİN VE POLİNOMLARININ CEBİRSEL ÖZELLİKLERİ

FARUK KAPLAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
DOÇ. DR. ARZU ÖZKOÇ ÖZTÜRK

DÜZCE, 2020

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI ÖZEL KUATERNİYON SAYI DİZİLERİNİN VE POLİNOMLARININ CEBİRSEL ÖZELLİKLERİ

FARUK KAPLAN tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

DOÇ. DR. ARZU ÖZKOÇ ÖZTÜRK
Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

DOÇ. DR. ARZU ÖZKOÇ ÖZTÜRK
Düzce Üniversitesi

Doç. Dr. Can KIZILATEŞ
Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Umut SAYIN
Düzce Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 28/09/2020

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

28/09/2020

FARUK KAPLAN

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın planlanmasında, araştırılmasında, y ürütülmesinde ve oluşumundaki her aşamada ilgi ve desteğini esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yönlendirme ve bilgilendirmeleriyle çalışmamı bilimsel temeller ışığında şekillendiren sayın hocam Doç. Dr. Arzu ÖZKOÇ ÖZTÜRK'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca benden hiçbir zaman desteğini esirgemeyen bu hayattaki en büyük şansım olan aileme sonsuz teşekkürler.

28/09/2020 **FARUK KAPLAN**

İÇİNDEKİLER

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa No

SİMGELER

$\mathbb{C}$	Karmaşık sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^{+}$	Pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}^{+}$	Pozitif doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{O}$	Oktonyonlar
Q	Altın matris
F_n	n. Fibonacci sayısı
L_n	n. Lucas sayısı
W_n	n. Horadam sayısı
q	Kuaterniyon
H	Kuaterniyon cebiri
Q_n	n. Fibonacci kuaterniyon
K_n	n. Lucas kuaterniyon
$F_{p,q,n}(x)$	$(p,q)-$Fibonacci polinomu
$L_{p,q,n}(x)$	$(p,q)-$Lucas polinomu
$F_n(x,y)$	İki değişkenli Fibonacci polinomu
$L_n(x,y)$	İki değişkenli Lucas polinomu
$Q_{w,n}$	n. Horadam kuaterniyonu
$QBF_n(x,y)$	İki değişkenli Fibonacci kuaterniyon polinomu
$QBL_n(x,y)$	İki değişkenli Lucas kuaterniyon polinomu

ÖZET

BAZI ÖZEL KUATERNİYON SAYI DİZİLERİNİN VE POLİNOMLARININ CEBİRSEL ÖZELLİKLERİ

FARUK KAPLAN
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: DOÇ. DR. ARZU ÖZKOÇ ÖZTÜRK
Eylül 2020, 62 sayfa

Bu çalışmada ilk olarak bazı özel sayı dizileri, polinomları ve kuaterniyonlarının günümüze dek tarihsel süreci incelendi. Daha sonra üreteç matrislerin temelini oluşturan Q-matrisi hatırlatıldı. İkinci bölümde, yine özel sayı dizileri, polinomlar ve kuaterniyonlar ile ilgili temel bilgiler verildi. Üçüncü bölümde ise, iki değişkenli Fibonacci kuaterniyon polinomları ve iki değişkenli Lucas kuaterniyon polinomları tanıtıldı ve temel özellikleri incelendi. Dahası bu kuaterniyon polinomların Binet formülleri, üreteç fonksiyonları, Catalan, Cassini, d'Ocagne gibi özel özdeşlikler ile çeşitli toplam formülleri ve matris gösterimleri ispatlarıyla verildi. Sonraki bölümde, kuaterniyon dizilerinin bir genellemesi olan Horadam kuaterniyonlarından hareketle çeşitli toplam ve binom formülleri, özdeşlikler ve matris gösterimleri elde edildi. Son bölümde ise sonuç ve öneriler sunuldu.

Anahtar sözcükler: Kuaterniyonlar, Binet formülü, Üreteç fonksiyon, Horadam kuaterniyonları, İki değişkenli Fibonacci kuaterniyon polinomları.

ABSTRACT

ALGEBRAIC PROPERTIES OF SOME SPECIAL QUATERNION SEQUENCES AND POLYNOMIALS

FARUK KAPLAN
Düzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics
Master Thesis
Supervisor: ASSOC. PROF. DR. ARZU ÖZKOÇ ÖZTÜRK
September 2020, 62 pages

In this study, firstly, historical process of some special number sequences, polynomials and quaternions are examined. Then, the Q-matrix that forms the basis of the generating matrices is reminded. In the second part, basic information about special number sequences, polynomials and quaternions are given. In the third part, bivariate Fibonacci quaternion polynomials and bivariate Lucas quaternion polynomials are introduced and their basic properties are studied. Moreover, Binet formulas, generating functions, special identities such as Catalan, Cassini, d'Ocagne and various sum formulas and matrix representations of these quaternion polynomials are given with the proofs. In the next part, motivating the Binet formula of Horadam quaternions which is a generalization of quaternion sequences, various sum and binomial formulas, identities and matrix representations are obtained. In the last part, results and suggestions are presented.

Keywords: Quaternions, Binet formula, Generating function, Horadam quaternions, Bivariate Fibonacci quaternion polynomials.

1. GİRİŞ

Sayı dizileri denilince hiç şüphesiz akla ilk gelenlerden biri Fibonacci sayı dizisidir. İtalya'nın Pisa şehrinde dünyaya gelen Leonardo Fibonacci (1170-1250), Liber Abaci (Hesaplama Kitabı) isimli eserinde bahsettiği "Bir çift tavşanın her ay yeni bir çift tavşan doğurması" sorusunun cevabını ararken elde ettiği 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,... sayıları ile bilim dünyasına farklı bir ilgi odağı kazandırmıştır. Şöyle ki doğada çam kozalağından ayçiçeğine canlılar aleminde salyangozun kabuk yapısından insan anatomisine kadar pek çok yerde Fibonacci sayılarına uygun dizilimler görülmektedir. İşte bu gizemi ile sadece matematik bilimi değil diğer bilim dallarının da ilgisini cezbetmiştir. İkinci teriminden sonra kendinden önceki iki teriminin toplamı şeklinde yazılan Fibonacci sayılarına benzeyen fakat farklı başlangıç değerleri ile tanımlanan birçok sayı dizisi vardır. Bunlardan bazıları Lucas sayıları, Pell sayıları, Pell-Lucas sayıları, Jacobsthal sayıları ve Jacobsthal-Lucas sayıları gibi sayı dizileri farklı başlangıç değerleriyle tanımlanmıştır [1]. Diğer taraftan modern cebirdeki en önemli gelişmelerden biri kuaterniyonların keşfi olmuştur. İrlandalı matematikçi olan William Rowan Hamilton'un 1843'te kuaterniyonları keşfi ile etkileri günümüzde kuantum fiziğinden bilgisayar bilimlerine pek çok alanda kendisini göstermiştir [2], [3]. Reel sayılar $\mathbb{R}$, kompleks sayılar $\mathbb{C}$, kuaterniyonlar $\mathbb{H}$ ve oktonyonlar $\mathbb{O}$ olmak üzere bunlardan oluşan ve son zamanlarda önemli bir konu olan normlu bölme cebiri ilk bakışta reel sayıları ve karmaşık sayıları kuaterniyonlar üzerine taşıyıp genişletilebilecekmiş gibi dursada, kuaterniyonların çarpma işlemine göre değişmeli olmayışından dolayı buna pek imkan vermez.

Tarihsel sürecinde birçok alanda kendisine yer bulan Fibonacci ve Fibonacci tipi sayı dizisi olan Lucas sayı dizileri polinomlarla ve kuaterniyonlarla da ilişkilendirilmiştir. Polinomlarla olan ilişkilendirmede karşımıza ilk olarak 1883 yılında Belçikalı matematikçi Charles Catalan ile Alman matematikçi Ernst Jacobsthal çıkmaktadır. Tek değişkenli olarak tanımlanmış olan Fibonacci ve Lucas polinomlarının günümüze değin çeşitli genelleştirmeleri yapılmıştır [4]-[6]. Bu çalışmalarda oluşturulan polinom dizilerinin rekürans bağıntılarından hareketle Binet formül ü, Cassini özdeşliği, Catalan özdeşliği, d'Ocagne özdeşliği gibi özel özdeşlikler ve çe şitli binom formülleri elde edilmiştir. Dolayısıyla bu bahsettiğimiz özdeşlikler ve benzerlerini matrisler ve matris özellikleri yardımıyla elde etme fikri çok doğaldır. Literatürde Fibonacci Q-matrisi (altın matris) olarak adlandırılan matris King tarafından

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde oluşturulmuş olup, ayrıca King bu matris ile klasik Fibonacci dizisi arasında $n \geq 1$ için

$$Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

gibi bir ilişki kurmuştur [7]. Q-matrisini Lucas sayıları için de uyarlamak mümkündür. Hoggatt ve Ruggles, Lucas sayıları için Q-matrisi rolünü üstlenen R-matrisini

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

şeklinde oluşturmuş olup ayrıca

$$RQ^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{pmatrix}$$

matrisini elde etmişlerdir [8]. Öte yandan bahse konu olan Fibonacci ve Lucas sayı dizileri kuaterniyonlarla da ilişkilendirilmiştir. Bunun ilk örneği [9] da, Horadam tarafından literatüre kazandırılan katsayıları Fibonacci sayı dizisinin terimleri ile oluşturulan kuaterniyonlardır. Yine aynı yazar, [10] da kuaterniyon rekürans bağıntılarını incelemiştir. Keza, [11], [12] çalışmalarında Fibonacci ve Lucas sayı dizilerini kuaterniyon ve polinomlarla ilişkilendirmiştir. Son yıllarda sayı dizilerinin genelleştirmeleri üzerine de birçok çalışma yapılmıştır. Öte yandan [13], [14] deki çalışmalarda Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin yanı sıra farklı sayı dizilerinden katsayılar alınmasıyla oluşturulmuş kuaterniyon dizileri mevcuttur. Iyer [15] de, Fibonacci kuaterniyonları ve genelleştirilmiş Fibonacci kuaterniyonları arasındaki ilişkiyi çalışmıştır. Yine aynı yazar [16] daki çalışmasında Fibonacci kuaterniyonları ve Lucas kuaterniyonları arasındaki ilişkiyle ilgili çalışmalar yapmıştır. Günümüze gelirsek [17] de Halıcı, Fibonacci kuaterniyonları ve Lucas kuaterniyonlarını ele almıştır. Çeşitli toplam formülleri türetmiştir. [18] de Polatlı, Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlarının yeni bir genelleştirmesi üzerine yoğunlaşmış ve elde ettiği bu yeni genelleştirilmiş kuaterniyonlar için toplam formülleri türetmiştir.

M. Catalani (2004) [5] "Generalized Bivariate Fibonacci Polynomials" isimli çalışmasında iki değişkenli Fibonacci polinomu ve iki değişkenli Lucas polinomlarını oluşturmuştur. Yine bu iki değişkenli polinomları matrislere taşımış ve incelemiştir.

A. Özkoç ve A. Porsuk'un [11] "A Note for the $(p,q)-$Fibonacci and Lucas Quaternion Polynomials" adlı çalışmalarında $(p,q)-$Fibonacci and Lucas kuaterniyon polinomları tanıtılmıştır. Binet formülü ve üreteç fonksiyonu oluşturulup buradan hareketle Catalan, Cassini, d'Ocagne özdeşliği gibi çeşitli özdeşlikler elde edilmiştir. Ayrıca çeşitli toplam formülleri ve binom toplamları türetilmiştir.

P. Haukkanen (2002) [19] "A Note on Horadam's Sequence" isimli çalışmasında Horadam dizilerinin lineer bileşimleri ve üreteç fonksiyonları hakkında bilgi vermiştir.

C. B. Çimen ve A. İpek (2016) [20] "On Pell Quaternions and Pell-Lucas Quaternions" isimli çalışmalarında yeni bir kuaterniyon dizisi olan Pell ve Pell-Lucas kuaterniyonlarını tanıtmışlardır.

C. Flaut ve V. Shpakivskyi (2013) [21] "On Generalized Fibonacci Quaternions and Fibonacci-Narayana Quaternions" isimli çalışmalarında genelleştirilmiş Fibonacci kuaterniyonları ve Fibonacci-Narayana kuaterniyonları üzerine çalışmışlardır.

E. Polatli ve S. Kesim (2015) [22] "On quaternions with Generalized Fibonacci and Lucas Number Components" isimli çalışmalarında Binet formüllerini kullanarak binom toplam formüllerini elde etmişlerdir.

S. Halici ve A. Karataş (2017) [23] "On a Generalization for Fibonacci Quaternions" isimli çalışmalarında daha önce tanımlanmış kuaterniyon dizilerinin bir genelleştirmesi olan Horadam kuaterniyonlarını tanıtmışlardır. Aynı çalışmada bu kuaterniyon dizisinin Binet formülü, Cassini özdeşliği, toplam formülleri ve norm değeriyle ilgilenmişlerdir.

S. Gopal Rayaguru, D. Savin ve G. Krishna Panda (2019) [24] “On Some Horadam Symbol Elements” isimli çalışmalarında Horadam sembol elemanlarını tanıtmışlardır. Bu yapının özelliklerini inceleyip Catalan, Cassini, d’Ocagne özdeşliği gibi çeşitli özdeşlikler elde etmişlerdir.

P. Catarino (2016) [12] “A note on $h(x)-$Fibonacci Quaternion Polynomials,” isimli çalışmasında $h(x)-$Fibonacci kuaterniyon polinomlarını tanıtıp Binet formülü, üreteç fonksiyonu ve bazı özdeşlikleri türetmiştir. Yine yazar $h(x)-$Fibonacci kuaterniyon polinomlarını, [25] “A note on certain matrices with $h(x)-$Fibonacci quaternion polynomials” isimli çalışmasında matrislere taşımış ve incelemiştir.

Bu çalışmada ise ilk iki bölümde literatür taraması ve gerekli ön bilgiler verilmiştir. Daha sonra iki değişkenli Fibonacci ve iki değişkenli Lucas kuaterniyon polinomlarının yeni bir genelleştirilmesi tanımlanarak bu kuaterniyon polinomlarının sağladığı özellikler üçüncü bölümde ele alınmıştır. Tezin dördüncü bölümünde ise daha önce tanımlanmış Horadam kuaterniyon dizisi hakkında bilgi sunulup bu kuaterniyon dizisinin Binet formülünden hareketle çeşitli toplam formülleri ve özdeşlikleri elde edilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tezin bu bölümünde, diğer bölümlerde kullanılacak bazı tanım ve kavramlara yer verilecektir.

2.1. TAMSAYI DİZİLERİ

Bu alt bölümde, çalışmanın temelini teşkil eden tamsayı dizileri ile ilgili bazı temel kavramlara ve teoremlere yer verilecektir.

Tanım 2.1. Klasik Fibonacci sayı dizisi $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$F_n = \begin{cases} 0 & n=0 \text{ ise} \\ 1 & n=1 \text{ ise} \\ F_{n-1}+F_{n-2} & n\geq 2 \text{ ise} \end{cases}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Burada F_n, n. Fibonacci sayısı olup bu dizinin bazı elemanları 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,... şeklindedir [1], [26].

Tanım 2.2. Lucas sayı dizisi $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, klasik Fibonacci sayı dizisinin başlangıç koşullarının değiştirilmesiyle

$$L_n = \begin{cases} 2 & n=0 \text{ ise} \\ 1 & n=1 \text{ ise} \\ L_{n-1}+L_{n-2} & n\geq 2 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Burada L_n, n. Lucas sayısı olup bu dizinin bazı elemanları 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76,... şeklindedir [1], [26]. Yine bu sayı dizilerine benzer fakat farklı başlangıç değerleriyle tanımlanmış Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal, Jacobsthal-Lucas gibi bir çok sayı dizisi literatüre girmiştir [1].

Klasik Fibonacci sayı dizisinin başlangıç koşullarının değiştirilmesiyle elde edilen Lucas sayı dizisi ile Fibonacci sayı dizisinin rekürans bağıntıları aynıdır. Bu rekürans bağıntısının karakteristik denklemi

$$h^2 - h - 1 = 0$$

şeklindedir. Karakteristik denklemin kökleri $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere $n \geq 0$ için Fibonacci ve Lucas dizilerinin Binet formülleri sırasıyla

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

ve

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

şeklindedir. Ayrıca kökleri arasında

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 1 \\ \alpha - \beta &= \sqrt{5} \\ \alpha\beta &= -1 \end{aligned}$$

eşitlikleri geçerlidir. Özdeşliklerin ve birçok formülün geçerli olduğunu göstermede yararlanılan Binet formülleri, ilk olarak Abraham De Moivre (1718) daha sonra da Jacques Philippe Marie Binet (1843) tarafından ispatlanmıştır [1],[26].

Diğer taraftan negatif indisli Fibonacci ve Lucas sayıları sırasıyla

$$..., F_{-4} = -3,\ F_{-3} = 2,\ F_{-2} = -1,\ F_{-1} = 1$$

ve

$$..., L_{-4} = 7,\ L_{-3} = -4,\ L_{-2} = 3,\ L_{-1} = -1$$

olup $n \geq 1$ için $F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$ ve $L_{-n} = (-1)^n L_n$ şeklinde tanımlanır. Bu eşitliklerin geçerli olduğunu görmek için Binet formüllerinden yararlanılırsa :

$$F_{-n} \;=\; \frac{\alpha^{-n} - \beta^{-n}}{\alpha - \beta}$$

$$= \frac{(-\beta)^n - (-\alpha)^n}{\alpha - \beta}$$

$\alpha\beta = -1$ olduğundan

$$\begin{aligned} F_{-n} &= \frac{(-1)^n(\beta^n - \alpha^n)}{\alpha - \beta} \\ &= (-1)^{n+1}F_n \end{aligned}$$

elde edildiği kolayca görülür. Hatta Lucas sayı dizisi için de benzer yol izlenildiği takdirde $L_{-n} = (-1)^n L_n$ eşitliğinin elde edildiği görülecektir. Ayrıca Fibonacci ve Lucas sayı dizileri için üreteç fonksiyonları sırasıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n t^n = \frac{t}{1-t-t^2}$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n t^n = \frac{2-t}{1-t-t^2}$$

dir [1].

Tanım 2.3. $a,b,p,q \in \mathbb{Z}$ ve başlangıç koşulları $W_0 = a$, $W_1 = b$ olmak üzere Horadam dizisi

$$W_n = W_n(a,b;p,q) = \; pW_{n-1} + qW_{n-2}, \; n \geq 2 \tag{2.1}$$

ile tanımlanır. Burada W_n, n. Horadam sayısıdır [27],[28].

Horadam sayıları için üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_n t^n = \frac{a + t(b - pa)}{1 - pt - qt^2}$$

şeklindedir. Ayrıca Eşitlik (2.1)'in karakteristik denklemi

$$h^2 - ph - q = 0$$

olup bu denklemin kökleri

$$\alpha = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2} \text{ ve } \beta = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$$

şeklindedir. Bu dizinin Binet formülü $A = b - a\beta$ ve $B = b - a\alpha$ olmak üzere

$$W_n = \frac{A\alpha^n - B\beta^n}{\alpha - \beta} \tag{2.2}$$

dir. Dikkat edilecek olursa Horadam dizisi Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin bir genelleştirmesidir. Çünkü Eşitlik (2.2) 'de

$a = 0, b = 1, p = 1$ ve $q = 1$ alınırsa; $W_n(0,1;\, 1,\, 1)_{n=0}^{\infty}$ yani Fibonacci sayı dizisinin,

$a = 2, b = 1, p = 1$ ve $q = 1$ alınırsa; $W_n(2,\, 1;\, 1,\, 1)_{n=0}^{\infty}$ Lucas sayı dizisinin,

$a = 0, b = 1, p = 2$ ve $q = 1$ alınırsa; $W_n(0,1;\, 2,\, 1)_{n=0}^{\infty}$ Pell sayı dizisinin,

$a = 0, b = 1, p = 1$ ve $q = 2$ alınırsa; $W_n(0,1;\, 1,\, 2)_{n=0}^{\infty}$ Jacobsthal sayı dizisinin,

$a = 2, b = 2, p = 2$ ve $q = 1$ alınırsa; $W_n(2,1;\, 2,\, 1)_{n=0}^{\infty}$ Pell-Lucas sayı dizisinin,

$a = 2, b = 1, p = 1$ ve $q = 2$ alınırsa; $W_n(2,1;\, 1,\, 2)_{n=0}^{\infty}$ Jacobsthal-Lucas sayı dizisinin elde edildiği görülecektir.

2.2. ÖNEMLİ CEBİRSEL ÖZDEŞLİKLER VE TOPLAM FORMÜLLERİ

Literatür tarandığında bahse konu olan Fibonacci ve Lucas sayı dizileri ile ilgili birçok özdeşlik görmek mümkündür. Bu özdeşliklerden bazıları bulan kişinin adıyla özdeşleşmiştir. Aşağıda Fibonacci ve Lucas sayı dizileriyle ilgili bazı özdeşliklere yer verilmiştir.

Teorem 2.4. İtalyan matematikçi Giovanni Domenico Cassini (1625-1712) tarafından verilen Cassini özdeşliği, Fibonacci ve Lucas sayı dizileri için sırasıyla $n \geq 1$ için

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

ve

$$L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = 5(-1)^{n-1}$$

dir [1].

İspat. İlgili Binet formülü kullanılır ise

$$F_{n-1}F_{n+1}-F_n^2=\left(\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}\right)-\left(\frac{\alpha^{n}-\beta^{n}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n}-\beta^{n}}{\alpha-\beta}\right)$$

olup $\alpha+\beta=1$, $\alpha-\beta=\sqrt{5}$, $\alpha\beta=-1$ ve $F_1=1$ eşitlikleri kullanılıp elementer işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
F_{n-1}F_{n+1}-F_n^2 &= \left(\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\sqrt{5}}\right)-\left(\frac{\alpha^{n}-\beta^{n}}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\alpha^{n}-\beta^{n}}{\sqrt{5}}\right)\\
&= \left(\frac{\alpha^{2n}-\alpha^{n-1}\beta^{n+1}-\beta^{n-1}\alpha^{n+1}+\beta^{2n}}{5}\right)-\left(\frac{\alpha^{2n}-2\alpha^n\beta^n+\beta^{2n}}{5}\right)\\
&= \left(\frac{-\alpha^{n-1}\beta^{n+1}-\beta^{n-1}\alpha^{n+1}+2\alpha^n\beta^n}{5}\right)\\
&= -(\alpha\beta)^{n-1}\left(\frac{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta}{5}\right)\\
&= -(\alpha\beta)^{n-1}\left(\frac{\alpha-\beta}{\sqrt{5}}\right)^2\\
&= -(\alpha\beta)^{n-1}F_1^2\\
&= (-1)^n
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu istenendir. Lucas sayı dizisi içinde Cassini özdeşliğinin benzer şekilde ispatı yapılabilir. □

Cassini özdeşliğinin genelleştirmesi aşağıdaki teoremde Eugene Catalan (1814-1894) tarafından verilmiştir.

Teorem 2.5. Eugene Catalan (1814-1894) tarafından verilen Catalan özdeşliği, Fibonacci ve Lucas sayı dizileri için sırasıyla $s\in\mathbb{Z}^+$ olmak üzere $n\geq s$ için

$$F_{n-s}F_{n+s}-F_n^2=(-1)^{n-s+1}F_s^2$$

ve

$$L_{n-s}L_{n+s}-L_n^2=5(-1)^{n-s}F_s^2$$

dir [1].

İspat. İlgili Binet formülünden hareketle

$$
\begin{aligned}
F_{n-s}F_{n+s}-F_n^2 &= \left(\frac{\alpha^{n-s}-\beta^{n-s}}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\alpha^{n+s}-\beta^{n+s}}{\sqrt{5}}\right)-\left(\frac{\alpha^{n}-\beta^{n}}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\alpha^{n}-\beta^{n}}{\sqrt{5}}\right)\\
&= \left(\frac{\alpha^{2n}-\alpha^{n-s}\beta^{n+s}-\beta^{n-s}\alpha^{n+s}+\beta^{2n}}{5}\right)-\left(\frac{\alpha^{2n}-2\alpha^n\beta^n+\beta^{2n}}{5}\right)\\
&= \left(\frac{-\alpha^{n-s}\beta^{n+s}-\beta^{n-s}\alpha^{n+s}+2\alpha^n\beta^n}{5}\right)\\
&= -(\alpha\beta)^{n-s}\left(\frac{\alpha^{2s}+\beta^{2s}-2\alpha^s\beta^s}{5}\right)\\
&= -(\alpha\beta)^{n-s}\left(\frac{\alpha^{s}-\beta^{s}}{\sqrt{5}}\right)^2
\end{aligned}
$$

bulunur ve burada $\alpha\beta=-1$ eşitliğinden yararlanarak

$$
\begin{aligned}
F_{n-s}F_{n+s}-F_n^2 &= -(-1)^{n-s}F_s^2\\
&= (-1)^{n-s+1}F_s^2
\end{aligned}
$$

elde edilir ki bu istenendir. Lucas sayı dizisi için de benzer şekilde ispatı yapılabilir. □

Teorem 2.6. Fransız matematikçi Philbert Maurice d'Ocagne (1862-1938) tarafından verilen d'Ocagne özdeşliği Fibonacci ve Lucas sayı dizileri için sırasıyla $n,s\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $n\geq s$ için

$$F_nF_{s+1}-F_{n+1}F_s=(-1)^sF_{n-s}$$

ve

$$L_nL_{s+1}-L_{n+1}L_s=5(-1)^{s+1}F_{n-s}$$

dir [1].

İspat. İlgili Binet formülü kullanılıp elementer işlemler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
F_nF_{s+1}-F_{n+1}F_s &= \left(\frac{\alpha^{n}-\beta^{n}}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\alpha^{s+1}-\beta^{s+1}}{\sqrt{5}}\right)-\left(\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\alpha^{s}-\beta^{s}}{\sqrt{5}}\right)\\
&= \left(\frac{\alpha^{n+s+1}-\alpha^n\beta^{s+1}-\beta^n\alpha^{s+1}+\beta^{n+s+1}}{5}\right)\\
&\quad -\left(\frac{\alpha^{n+1+s}-\alpha^{n+1}\beta^{s}-\beta^{n+1}\alpha^{s}+\beta^{n+1+s}}{5}\right)\\
&= \left(\frac{-\alpha^n\beta^{s+1}-\beta^n\alpha^{s+1}+\alpha^{n+1}\beta^s+\beta^{n+1}\alpha^s}{5}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{\alpha^n\beta^s(-\beta+\alpha)+\beta^n\alpha^s(-\alpha+\beta)}{5}\right) \\
&= \frac{(\alpha-\beta)(\alpha^n\beta^s-\beta^n\alpha^s)}{5}
\end{aligned}
$$

olur. Burada eşitliği $\frac{(\alpha\beta)^{-s}}{(\alpha\beta)^{-s}}$ ile çarpıp $\alpha-\beta=\sqrt{5}$ ve $\alpha\beta=-1$ kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
F_nF_{s+1}-F_{n+1}F_s &= \frac{(\alpha-\beta)(\alpha^n\beta^s-\beta^n\alpha^s)}{(\alpha-\beta)^2}\frac{(\alpha\beta)^{-s}}{(\alpha\beta)^{-s}} \\
&= (\alpha\beta)^s\left(\frac{\alpha^{n-s}-\beta^{n-s}}{\alpha-\beta}\right) \\
&= (-1)^sF_{n-s}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. Benzer şekilde Lucas sayı dizisi için de d'Ocagne özdeşliği gösterilebilir. □

Yukarıda verilen özdeşliklerden farklı olarak, gerek Fibonacci dizisi gerek Lucas dizisi ile ilgili birçok özdeşlik litaratürde mevcuttur. Hatta Fibonacci ve Lucas sayı dizileri arasındaki bağıntıları gösteren özdeşlikler de mevcuttur [1]. Bu bahse konu özdeşliklerden bazıları aşağıda verilmiştir.

$F_mF_n-F_{m+k}F_{n-k}=(-1)^{n-k}F_{m+k-n}F_k$

$L_n=L_mF_{n-m+1}+L_{m-1}F_{n-m}$

$L_{2m}L_{2n}=L_{m+n}^2+L_{m-n}^2-4(-1)^{m+n}$

$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}F_{i+1}=(-1)^{n-1}F_n$

$\sum_{i=1}^{2n}F_iF_{i+1}=F_{2n+1}^2-1$

$\sum_{i=1}^{n}F_{2i-1}^3=\left(F_{2n}^3+3F_{2n}\right)/4$

$\sum_{i=1}^{n}F_{2i}^3=\left(F_{2n+1}^2-3F_{2n-1}+2\right)/4$

$F_{m+k}F_{m-k}-F_{m+s}F_{m-s}=(-1)^{m-s}F_sF_{k+s}$

$F_{m+n}=F_{m+1}F_{n+1}-F_{m-1}F_{n-1}$

$$F_{2m+1}F_{2n+1} = F_{m+n+1}^2 + F_{m-n}^2$$

$$L_{2m+1}L_{2n+1} = L_{m+n+1}^2 - F_{m-n}^2 + 4(-1)^{m-n}$$

$$5F_n = L_{n-1}L_{n+1} + (-1)^n$$

$$L_nL_{n+1} = L_{2n+1} + (-1)^n$$

$$F_{n+1}^3 - F_n^3 - F_{n-1}^3 = 3F_{n+1}F_nF_{n-1}$$

$$L_{n+1}^3 - L_n^3 - L_{n-1}^3 = 3L_{n+1}L_nL_{n-1}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} F_i = F_{2n},\ n \geq 0$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} L_i = L_{2n},\ n \geq 0$$

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} F_{2i} = (-1)^n F_n$$

$$\sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \binom{2n}{i} 2^{i-1} L_i = 5^n$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k} F_{4mk} = L_{2m}^n F_{2mn}.$$

2.3. FIBONACCI VE LUCAS POLİNOMLARI

Polinom dizileri, sayı dizilerinde olduğu gibi rekürans ilişkileri yardımıyla tanımlanabilir. Özel sayı dizilerinden olan Fibonacci ve Lucas sayı dizileri gibi farklı dizilerin de rekürans bağıntılarının katsayıları alınarak oluşturulmuş özel polinomlar bulunmaktadır. İlgi odağı olan Fibonacci ve Lucas polinomlarının tarihsel sürecine bakıldığında ilk olarak 1883'te Belçikalı matematikçi Charles Catalan tarafından ve daha sonra Alman matematikçi Ernst Jacobsthal (1882-1965) tarafından ele alınmıştır. Ayrıca, 1970'lerde Lucas polinomları adı verilen diğer polinom ise Marjorie Bicknell tarafından oluşturulmuştur. Yine M.N.S Swamy tarafından da 1966'da geliştirilmiştir. Fibonacci polinomu olarak kabul edilen polinom, Catalan tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$F_0(x) = 1$ ve $F_1(x) = x$ olmak üzere $n \geq 2$ için

$$F_n(x) = xF_{n-1}(x) + F_{n-2}(x)$$

dir. Fibonacci polinom dizisinin ilk birkaç terimi

$$\begin{aligned} F_0(x) &= 1 \\ F_1(x) &= x \\ F_2(x) &= x^2 + 1 \\ F_3(x) &= x^3 + 2x \\ F_4(x) &= x^4 + 3x^2 + 1 \end{aligned}$$

şeklindedir. Lucas polinomları 1970 yılında Bicknell tarafından şu şekilde tanımlanmıştır: $L_0(x) = 2$ ve $L_1(x) = x$ olmak üzere $n \geq 2$ için

$$L_n(x) = xL_{n-1}(x) + L_{n-2}(x)$$

dir. Lucas polinom dizisinin ilk birkaç terimi

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 2 \\ L_1(x) &= x \\ L_2(x) &= x^2 + 2 \\ L_3(x) &= x^3 + 3x \\ L_4(x) &= x^4 + 4x^2 + 2 \end{aligned}$$

şeklindedir [1].

Tanım 2.7. $p(x)$ ve $q(x)$ reel katsayılı polinomlar olmak üzere $n \geq 1$ için

$$F_{p,q,n+1}(x) = p(x)F_{p,q,n}(x) + q(x)F_{p,q,n-1}(x)$$

rekürans bağıntısı ve $F_{p,q,0}(x) = 0$, $F_{p,q,1}(x) = 1$ başlangıç koşulları ile tanımlanan polinoma $(p,q)-$Fibonacci Polinomu denir [29]. Dizinin ilk birkaç terimi

$$\begin{aligned} F_0(x) &= 0 \\ F_1(x) &= 1 \\ F_2(x) &= p(x) \\ F_3(x) &= p^2(x)+q(x) \\ F_4(x) &= p^3(x)+2p(x)q(x) \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde; $p(x)$ ve $q(x)$ reel katsayılı polinomlar olmak üzere $n \geq 1$ için

$$L_{p,q,n+1}(x) = p(x)L_{p,q,n}(x)+q(x)L_{p,q,n-1}(x)$$

rekürans bağıntısı ve $L_{p,q,0}(x) = 2$, $L_{p,q,1}(x) = p(x)$ başlangıç koşulları ile tanımlanan polinoma $(p,q)-$Lucas Polinomu denir [29]. Dizinin ilk birkaç terimi :

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 2 \\ L_1(x) &= p(x) \\ L_2(x) &= p^2(x)+2q(x) \\ L_3(x) &= p^3(x)+3p(x)q(x) \\ L_4(x) &= p^4(x)+4p^2(x)q(x)+2q^2(x). \end{aligned}$$

dir.

Tanım 2.8. $n \geq 2$ için iki değişkenli Fibonacci polinomları başlangıç koşulları $F_0(x,y) = 0$ ve $F_1(x,y) = 1$ olmak üzere

$$F_n(x,y) = xF_{n-1}(x,y)+yF_{n-2}(x,y) \tag{2.3}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır [30].

Burada (2.3) rekürans bağıntısından hareketle iki değişkenli Fibonacci polinomunun bir kaç terimi

$$
\begin{aligned}
F_0(x,y) &= 0 \\
F_1(x,y) &= 1 \\
F_2(x,y) &= x \\
F_3(x,y) &= x^2+y \\
F_4(x,y) &= x^3+2xy
\end{aligned}
$$

şeklindedir. Diğer yandan $n \geq 2$ için iki değişkenli Lucas polinomları başlangıç koşulları $L_0(x,y)=2$ ve $L_1(x,y)=1$ olmak üzere

$$L_n(x,y) = xL_{n-1}(x,y) + yL_{n-2}(x,y) \tag{2.4}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır [30]. Benzer olarak bu polinomun da birkaç terimi

$$
\begin{aligned}
L_0(x,y) &= 2 \\
L_1(x,y) &= x \\
L_2(x,y) &= x^2+2y \\
L_3(x,y) &= x^3+3xy \\
L_4(x,y) &= x^4+4x^2y+2y^2
\end{aligned}
$$

şeklindedir.

(2.3) ve (2.4) ün karakteristik denklemi

$$h^2 - xh - y = 0$$

olup bu karakteristik denklemin kökleri

$$\alpha = \alpha(x,y) = \frac{x+\sqrt{x^2+4y}}{2} \text{ ve } \beta = \beta(x,y) = \frac{x-\sqrt{x^2+4y}}{2}$$

dir. Üreteç fonksiyonları sırasıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n(x,y)t^n = \frac{t}{1-xt-yt^2}$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x,y)t^n = \frac{2-xt}{1-xt-yt^2}$$

dir.

Ayrıca $n \geq 0$ için Binet formülleri sırasıyla

$$F_n(x,y) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \text{ ve } L_n(x,y) = \alpha^n + \beta^n \tag{2.5}$$

şeklindedir [30].

İki değişkenli Fibonacci ve Lucas polinom dizileri için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir [31].

$$x\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1-k}{k}(x^2+4y)^{n-k-1}(-y)^k = F_{2n}(x,y)$$

$$L^2(x,y) + (-1)^{n+1}4y^n = (x^2+4y)F_n^2(x,y)$$

$$L_n(x,y)L_{n+2}(x,y) - L_{n+1}^2(x,y) = (-1)^n y^n (x^2+4y)$$

$$L_n^2(x,y) + 2(-1)^{n+1}y^n = L_{2n}(x,y)$$

$$yF_{n-1}(x,y) + F_{n+1}(x,y) = L_n(x,y).$$

İki değişkenli Fibonacci ve Lucas polinom dizilerinin genelleştirilmesi üzerine de çalışmalar yapılmış ve çeşitli özdeşlikler elde edilmiştir [5], [32].

2.4. KUATERNİYON KAVRAMI

Tezin bu alt bölümünde kuaterniyonlar ile ilgili gerekli tanımlar ve ön bilgiler verildikten sonra Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları verilmiştir. Akabinde teze özgü Fibonacci ve Lucas kuaterniyon polinomlarının bir genelleştirmesi olan iki değişkenli Fibonacci ve Lucas kuaterniyon polinomları sunulmuştur.

Tanım 2.9. $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ ve $1, i, j, k$ kuaterniyon tabanı olmak üzere bir q kuaterniyonu

$$q = (a_0, a_1, a_2, a_3) = a_0 1 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \ (a_0 1 = a_0)$$

biçiminde yazılabilen bir hiperkompleks sayı olup $e_0 = 1, e_1 = i, e_2 = j, e_3 = k$ ifadeleri

$$\begin{aligned} e_0^2 &= 1,\ e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = e_1 e_2 e_3 = -1 \\ e_1 e_2 &= e_3,\ e_2 e_3 = e_1,\ e_3 e_1 = e_2 \\ e_2 e_1 &= -e_3,\ e_3 e_2 = -e_1,\ e_1 e_3 = -e_2 \end{aligned} \tag{2.6}$$

çarpım kurallarını sağlar. Dolayısıyla reel kuaterniyonlar kümesi

$$\mathbb{H}_{\mathbb{R}} = \{q = a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

şeklindedir [33]. Tez boyunca reel kuaterniyonlar için sadece kuaterniyon tabiri kullanılacaktır. Hemen belirtilsin ki $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ taban elemanları kendi aralarında çarpma işlemine göre değişmeli değildir. Fakat $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ kümesi birleşmelidir. Literatürde William Rowan Hamilton' a istinaden kuaterniyonlar kümesi için $\mathbb{H}$ sembolü benimsenmiştir. $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ kümesinin sağladığı bazı temel aritmetik işlemler aşağıda verilmiştir.

2.4.1. Kuaterniyonlar için Skaler ve Vektörel Kısım

$$q = \sum_{k=0}^{3} a_k e_k = a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$$

kuaterniyonu

$$q = S_q + V_q$$

şeklinde de yazılabilir. Burada q kuaterniyonunun skaler kısmı

$$S_q = a_0 e_0$$

ve vektörel kısmı

$$V_q = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$$

şeklinde ayrı ayrı yazılabilir. Dolayısıyla q kuaterniyonu

$$S_q + V_q = a_0e_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$$

şeklinde skaler ve vektörel kısmın toplamı olarak elde edilebilir.

2.4.2. Kuaterniyonların Eşitliği

$$q_0 = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$$

ve

$$q_1 = b_0 + b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$$

kuaterniyonları için,

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ a_3 = b_3$$

oluyorsa q_0 ve q_1 eşit kuaterniyonlardır.

2.4.3. Kuaterniyonlar için Temel Aritmetik İşlemler

$q_0 = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$, $q_1 = b_0 + b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$ ve $q_2 = c_0 + c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3$ üç reel kuaterniyon ve $\mu \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

(i) İki kuaterniyonun toplamı

$$q_0 + q_1 = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)e_1 + (a_2 + b_2)e_2 + (a_3 + b_3)e_3$$

(ii) İki kuaterniyonun farkı

$$q_0 - q_1 = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)e_1 + (a_2 - b_2)e_2 + (a_3 - b_3)e_3$$

(iii) Bir reel sayı ile kuaterniyonun çarpımı

$$\mu q_0 = \mu a_0 + (\mu a_1)e_1 + (\mu a_2)e_2 + (\mu a_3)e_3$$

(iv) İki kuaterniyon çarpımı

$$\begin{aligned}
q_0q_1 &= (a_0+a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3)(b_0+b_1e_1+b_2e_2+b_3e_3) \\
&= a_0b_0+a_0b_1e_1+a_0b_2e_2+a_0b_3e_3 \\
&\quad +a_1b_0e_1+a_1b_1e_1^2+a_1b_2e_1e_2+a_1b_3e_1e_3 \\
&\quad +a_2b_0e_2+a_2b_1e_2e_1+a_2b_2e_2^2+a_2b_3e_2e_3 \\
&\quad +a_3b_0e_3+a_3b_1e_3e_1+a_3b_2e_3e_2+a_3b_3e_3^2
\end{aligned}$$

olup burada eşitlik (2.6) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
q_0q_1 &= a_0b_0+a_0b_1e_1+a_0b_2e_2+a_0b_3e_3 \\
&\quad +a_1b_0e_1-a_1b_1+a_1b_2e_3-a_1b_3e_2 \\
&\quad +a_2b_0e_2-a_2b_1e_3-a_2b_2+a_2b_3e_1 \\
&\quad +a_3b_0e_3+a_3b_1e_2-a_3b_2e_1-a_3b_3
\end{aligned}$$

bulunur ve sonuç olarak

$$\begin{aligned}
q_0q_1 &= (a_0b_0-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3) \\
&\quad +(a_0b_1+a_1b_0+a_2b_3-a_3b_2)e_1 \\
&\quad +(a_0b_2-a_1b_3+a_2b_0+a_3b_1)e_2 \\
&\quad +(a_0b_3+a_1b_2-a_2b_1+a_3b_0)e_3
\end{aligned}$$

elde edilir.

(v) Toplama işleminin değişme özelliği vardır. Yani

$$q_0+q_1=q_1+q_0$$

dır.

(vi) Toplama işleminin birleşme özelliği vardır. Yani

$$q_0+(q_1+q_2)=(q_0+q_1)+q_2$$

dir.

(vii) Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine soldan ve sağdan dağılma özelliği vardır. Yani

$$q_0(q_1+q_2)=q_0q_1+q_0q_2$$

ve

$$(q_1+q_2)q_0=q_1q_0+q_2q_0$$

dir.

$(viii)$ Çarpma işleminin birleşme özelliği vardır. Yani

$$q_0(q_1q_2)=(q_0q_1)q_2$$

dir.

(ix) Çarpma işleminin değişme özelliği her zaman geçerli değildir. Yani

$$q_0q_1=q_1q_0$$

olması gerekmez.

2.5. FIBONACCI VE LUCAS KUATERNİYONLARI

Tam sayı dizilerinden katsayıların alınmasıyla oluşturulmuş Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları [9] da Horadam tarafından tanıtılmıştır. Yine aynı çalışmada yazar bu kuaterniyonların çeşitli özelliklerini çalışmış ve genelleştirilmiş Fibonacci kuaterniyonlarını türetmiştir. Süreç içerisinde Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlarıyla ilgili birçok çalışmalar yapılmış olsa da Halıcı tarafından [17] çalışması ile bu kuaterniyon dizilerine ilginin arttığı görülmektedir. Tezin bu kısmında Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlarıyla ilgili özet bilgi sunulmuştur. Ayrıca teoremler ispatsız verilmiştir.

Tanım 2.10. F_n, n. Fibonacci sayısı ve L_n, n. Lucas sayısı olmak üzere $n \geq 0$ için

n. Fibonacci kuaterniyonu

$$Q_n = F_n + F_{n+1}i + F_{n+2}j + F_{n+3}k \tag{2.7}$$

ve n. Lucas kuaterniyonu

$$K_n = L_n + L_{n+1}i + L_{n+2}j + L_{n+3}k \tag{2.8}$$

ile tanımlanır [9]. Burada $\{i, j, k\}$ taban elamanları için Eşitlik (2.6) daki çarpım özellikleri geçerlidir.

Ayrıca eşitlik (2.7) ve eşitlik (2.8) in rekürans bağıntıları sırasıyla

$$Q_{n+2} = Q_{n+1} + Q_n$$

ve

$$K_{n+2} = K_{n+1} + K_n$$

dir. Görüldüğü gibi karakteristik denklemleri aynıdır. Yani karakteristik denkelemi

$$h^2 - h - 1 = 0$$

olup karakteristik denklemin kökleri $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ şeklindedir.

Teorem 2.11. (**Binet formülleri**) n. Fibonacci kuaterniyonu Q_n ve n. Lucas kuaterniyonu K_n olmak üzere $n \geq 0$ için Binet formülleri sırasıyla

$$Q_n = \frac{\underline{\alpha}\alpha^n - \underline{\beta}\beta^n}{\sqrt{5}}$$

ve

$$K_n = \underline{\alpha}\alpha^n + \underline{\beta}\beta^n$$

biçimindedir. Burada $\underline{\alpha} = 1 + i\alpha + j\alpha^2 + k\alpha^3$ ve $\underline{\beta} = 1 + i\beta + j\beta^2 + k\beta^3$ dır [17],[34].

Teorem 2.12. (**Üreteç Fonksiyonu**) Q_n Fibonacci kuaterniyonu için üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n t^n = \frac{t+i+j(t+1)+k(t+2)}{1-t-t^2}$$

şeklindedir [17].

Teorem 2.13. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere Q_{m+n} Fibonacci kuaterniyonu için üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_{m+n} t^n = \frac{Q_m + Q_{m-1} t}{1-t-t^2}$$

şeklindedir [17].

Teorem 2.14. (**Cassini özdeşliği**) $n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere Fibonacci kuaterniyonları için Cassini özdeşliği

$$Q_{n-1} Q_{n+1} - Q_n^2 = (-1)^n (2Q_1 - 3k)$$

şeklindedir [17].

Teorem 2.15. Fibonacci kuaterniyonları ile ilgili aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

(i) İlk n+1 teriminin toplamı

$$\sum_{i=0}^{n} Q_i = Q_{n+2} - Q_1,$$

(ii) Çift terimlerinin toplamı

$$\sum_{i=0}^{n} Q_{2i} = Q_{2n+1} - (1,0,1,1),$$

(iii) Tek terimlerinin toplamı

$$\sum_{i=0}^{n-1} Q_{2i+1} = Q_{2n} - Q_0,$$

(iv) $n \geq 0$ için

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} Q_i = Q_{2n},$$

ve

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i Q_i = (-1)^n Q_{-n}$$

dir [17].

Ayrıca Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları arasında

$Q_n + K_n = 2Q_{n+1}$

$K_n - Q_n = 2Q_{n-1}$

$K_n Q_{n+1} - K_{n+1} Q_n = 2(-1)^n (2Q_1 - 3k)$

eşitlikleri de geçerlidir [16].

3. İKİ DEĞİŞKENLİ FIBONACCI VE LUCAS KUATERNİYON POLİNOMLARI

Bu bölümde, iki değişkenli Fibonacci kuaterniyon polinomları ve iki değişkenli Lucas kuaterniyon polinomları tanıtıldı. İki değişkenli Fibonacci ve Lucas kuaterniyon polinom dizileri için üreteç fonksiyonu, Binet formülü, binom formülleri, bazı temel özdeşlikler ve çeşitli toplam formülleri elde edildi. Dahası bu kuaterniyon polinomları için matris gösterimi oluşturuldu [35].

3.1. İKİ DEĞİŞKENLİ FIBONACCI VE LUCAS KUATERNİYON POLİNOMLARI ÜZERİNE

Şimdi tanıtılacak olan polinomlar yeni bir kavram olup iki değişkenli Fibonacci kuaterniyon polinomları için kısaca (QBF) ve Lucas kuaterniyon polinomları için (QBL) gösterimi kullanılacaktır.

Tanım 3.1. $F_{n+k}(x,y)$, $(n+k)-$ıncı iki değişkenli Fibonacci polinomu olmak üzere iki değişkenli Fibonacci kuaterniyon polinomları

$$QBF_n(x,y) = \sum_{k=0}^{3} F_{n+k}(x,y)e_k = F_n(x,y)e_0 + F_{n+1}(x,y)e_1 + F_{n+2}(x,y)e_2 + F_{n+3}(x,y)e_3 \tag{3.1}$$

dir.

$$\begin{aligned}
QBF_{n+1}(x,y) &= \sum_{k=0}^{3} F_{n+1+k}(x,y)e_k \\
&= \sum_{k=0}^{3} \left(xF_{n+k}(x,y) + yF_{n+k-1}(x,y)\right)e_k \\
&= x\sum_{k=0}^{3} F_{n+k}(x,y)e_k + y\sum_{k=0}^{3} F_{n+k-1}(x,y)e_k
\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned} QBF_0(x,y) &= e_1 + xe_2 + (x^2+y)e_3, \\ QBF_1(x,y) &= e_0 + xe_1 + (x^2+y)e_2 + (x^3+2xy)e_3 \end{aligned}$$

başlangıç polinomları ile

$$QBF_{n+1}(x,y) = xQBF_n(x,y) + yQBF_{n-1}(x,y),\ n \geq 1 \tag{3.2}$$

rekürans bağıntısı elde edilir.

Tanım 3.2. $L_{n+k}(x,y)$, $(n+k)-$ıncı iki değişkenli Lucas polinomu olmak üzere iki değişkenli Lucas kuaterniyon polinomları

$$QBL_n(x,y) = \sum_{k=0}^{3} L_{n+k}(x,y)e_k = L_n(x,y)e_0 + L_{n+1}(x,y)e_1 + L_{n+2}(x,y)e_2 + L_{n+3}(x,y)e_3 \tag{3.3}$$

dir.

$$\begin{aligned} QBL_{n+1}(x,y) &= \sum_{k=0}^{3} L_{n+1+k}(x,y)e_k \\ &= \sum_{k=0}^{3} \left(xL_{n+k}(x,y) + yL_{n+k-1}(x,y)\right) e_k \\ &= x\sum_{k=0}^{3} L_{n+k}(x,y)e_k + y\sum_{k=0}^{3} L_{n+k-1}(x,y)e_k \end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned} QBL_0(x,y) &= 2e_0 + xe_1 + (x^2+2y)e_2 + (x^3+3xy)e_3, \\ QBL_1(x,y) &= xe_0 + (x^2+2y)e_1 + (x^3+3xy)e_2 + (x^4+4x^2y+2y^2)e_3 \end{aligned}$$

başlangıç koşulları ile

$$QBL_{n+1}(x,y) = xQBL_n(x,y) + yQBL_{n-1}(x,y),\ n \geq 1 \tag{3.4}$$

rekürans bağıntısı elde edilir.

Eşitlik (3.2) ve Eşitlik (3.4)'deki rekürans bağıntılarından hareketle iki değişkenli Fibonacci kuaterniyon polinomu ve iki değişkenli Lucas kuaterniyon polinomlarının karakteristik denklemi

$$h^2 - xh - y = 0 \tag{3.5}$$

olup eşitlik (3.5) de ki karakteristik denklemin kökleri

$$\alpha(x,y) = \frac{x+\sqrt{x^2+4y}}{2} \text{ ve } \beta(x,y) = \frac{x-\sqrt{x^2+4y}}{2} \tag{3.6}$$

dir. Tezin bu bölümünde bundan böyle kolaylık açısından $\alpha(x,y) = \alpha$, $\beta(x,y) = \beta$ notasyonları kullanılacaktır.

Eşitlik (3.6)'daki köklerden

$$\begin{aligned} \alpha+\beta &= x \\ \alpha-\beta &= \sqrt{x^2+4y} \\ \alpha\beta &= -y \\ \frac{\alpha}{\beta} &= -\frac{\alpha^2}{y} \\ \frac{\beta}{\alpha} &= -\frac{\beta^2}{y} \end{aligned} \tag{3.7}$$

eşitlikleri elde edebilir.

3.2. İKİ DEĞİŞKENLİ FIBONACCI VE LUCAS KUATERNİYON POLİNOMLARI İÇİN TEOREMLER

Üreteç fonksiyonları sabit katsayılı lineer homojen rekürans bağıntıları çözmede çok kullanışlıdır. Aşağıdaki teoremde iki değişkenli Fibonacci ve Lucas kuaterniyon polinomları için üreteç fonksiyonları oluşturulmuştur. Lemmada ise oluşturulan bu üreteç fonksiyonlarının yeniden düzenlenmiş hali verilmiştir. Ayrıca ispatları verilirken iki değişkenli Fibonacci kuaterniyonunun ispatına benzediği için iki değişkenli Lucas kuaterniyonlarının ispatı yapılmamıştır.

Teorem 3.3. $n \geq 0$ olmak üzere QBF ve QBL polinomları için üreteç fonksiyonları sırasıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} QBF_n(x,y)t^n = \frac{QBF_0(x,y) + (QBF_1(x,y) - xQBF_0(x,y))\,t}{1 - xt - yt^2} \tag{3.8}$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} QBL_n(x,y)t^n = \frac{QBL_0(x,y) + (QBL_1(x,y) - xQBL_0(x,y))\,t}{1 - xt - yt^2} \tag{3.9}$$

dir.

İspat. QBF polinomunun üreteç fonksiyonunu oluşturmak için kuvvet serisinden yararlanılırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} QBF_n(x,y)t^n \\ = \; & QBF_0(x,y) + QBF_1(x,y)t + QBF_2(x,y)t^2 + \ldots + QBF_n(x,y)t^n + \ldots \end{aligned}$$

olup $\sum\limits_{n=0}^{\infty} QBF_n(x,y)t^n$, $(-xt)\sum\limits_{n=0}^{\infty} QBF_n(x,y)t^n$ ve $(-yt^2)\sum\limits_{n=0}^{\infty} QBF_n(x,y)t^n$ eşitlikleri yine kuvvet serisinden bulunarak taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} QBF_n(x,y)t^n + (-xt)\sum_{n=0}^{\infty} QBF_n(x,y)t^n + (-yt^2)\sum_{n=0}^{\infty} QBF_n(x,y)t^n \\ = \; & QBF_0(x,y) + (QBF_1(x,y) - xQBF_0(x,y))\,t \\ & + (QBF_2(x,y) - xQBF_1(x,y) - yQBF_0(x,y))t^2 \\ & + \ldots \\ & + (QBF_n(x,y) - xQBF_{n-1}(x,y) - yQBF_{n-2}(x,y))t^n \\ & + \ldots \end{aligned}$$

ve Eşitlik (3.2) gözönüne alınarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} QBF_n(x,y)t^n(1 - xt - yt^2) = QBF_0(x,y) + (QBF_1(x,y) - xQBF_0(x,y))t$$

bulunur ve buradan da

$$\sum_{n=0}^{\infty} QBF_n(x,y)t^n = \frac{QBF_0(x,y) + (QBF_1(x,y) - xQBF_0(x,y))t}{1 - xt - yt^2}$$

elde edilir.

Benzer şekilde işlemler yapılarak QBL polinomunun üreteç fonksiyonu da elde edilir. $\square$

Lemma 3.4. $n \geq 0$ olmak üzere QBF ve QBL polinomlarının Teorem 3.3'deki üreteç fonksiyonları yeniden düzenlendiğinde, sırasıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} QBF_n(x,y)t^n = \frac{\frac{QBF_1(x,y)-\beta QBF_0(x,y)}{1-\alpha t} - \frac{QBF_1(x,y)-\alpha QBF_0(x,y)}{1-\beta t}}{\alpha - \beta} \tag{3.10}$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} QBL_n(x,y)t^n = \frac{\frac{QBL_1(x,y)-\beta QBL_0(x,y)}{1-\alpha t} - \frac{QBL_1(x,y)-\alpha QBL_0(x,y)}{1-\beta t}}{\alpha - \beta} \tag{3.11}$$

elde edilir.

İspat. Eşitlik (3.2) ile Teorem 3.3 gözönüne alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} QBF_n(x,y)t^n = \frac{QBF_0(x,y) + (QBF_1(x,y) - xQBF_0(x,y))\,t}{1 - xt - yt^2}$$

olduğu biliniyor. Burada Eşitlik (3.7) uygulanırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} QBF_n(x,y)t^n = \frac{QBF_0(x,y) + (QBF_1(x,y) - (\alpha+\beta)QBF_0(x,y))\,t}{(1-\alpha t)(1-\beta t)}$$

olup, önce eşitliğin sağ tarafı $(\alpha - \beta)$ ile çarpılıp bölündükten sonra elementer işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} QBF_n(x,y)t^n \\
= &\left(\frac{QBF_0(x,y) + (QBF_1(x,y) - (\alpha+\beta)QBF_0(x,y))\,t}{(1-\alpha t)(1-\beta t)}\right) \mathrm{x} \left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta}\right) \\
= &\frac{\left\{\begin{array}{c} \alpha QBF_0(x,y) + \alpha QBF_1(x,y)t - \alpha^2 QBF_0(x,y)t - \alpha\beta QBF_0(x,y)t \\ -\beta QBF_0(x,y) - \beta QBF_1(x,y)t + \alpha\beta QBF_0(x,y)t + \beta^2 QBF_0(x,y)t \end{array}\right\}}{(1-\alpha t)(1-\beta t)(\alpha-\beta)}
\end{aligned}$$

olur ki şimdi de yine eşitliğin sağ tarafının pay kısmına $QBF_1(x,y)$ ekleyip çıkarılıp elementer işlemler yapıldıktan sonra

$$\sum_{n=0}^{\infty} QBF_n(x,y)t^n$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\left\{\begin{array}{c}\alpha QBF_0(x,y)+\alpha QBF_1(x,y)t-\alpha^2 QBF_0(x,y)t-\alpha\beta QBF_0(x,y)t-\beta QBF_0(x,y)\\ -\beta QBF_1(x,y)t+\alpha\beta QBF_0(x,y)t+\beta^2 QBF_0(x,y)t+QBF_1(x,y)-QBF_1(x,y)\end{array}\right\}}{(1-\alpha t)(1-\beta t)(\alpha-\beta)}\\
&= \frac{QBF_1(x,y)(1-\beta t)+\beta QBF_0(x,y)(-1+\beta t)+QBF_1(x,y)(-1+\alpha t)+\alpha QBF_0(x,y)(1-\alpha t)}{(1-\beta t)(1-\alpha t)(\alpha-\beta)}\\
&= \frac{(1-\beta t)(QBF_1(x,y)-\beta QBF_0(x,y)+(1-\alpha t)(\alpha QBF_0(x,y)-QBF_1(x,y))}{(1-\beta t)(1-\alpha t)(\alpha-\beta)}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Son kez düzenleme yapılırsa

$$
\sum_{n=0}^{\infty} QBF_n(x,y)t^n = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{QBF_1(x,y)-\beta QBF_0(x,y)}{1-\alpha t}-\frac{QBF_1(x,y)-\alpha QBF_0(x,y)}{1-\beta t}\right)
$$

ispat tamamlanmış olur.

Benzer yol izlenerek QBL polinomunun ispatı yapılabilir. □

Lemma 3.5. $F_n(x,y)$ ile $L_n(x,y)$ sırasıyla iki değişkenli Fibonacci ve Lucas polinomları olmak üzere $k \geq 0$ için

$$(i)\ F_{k+1}(x,y)-\alpha F_k(x,y)=\beta^k$$

$$(ii)\ F_{k+1}(x,y)-\beta F_k(x,y)=\alpha^k$$

$$(iii)\ \frac{\alpha L_k(x,y)-L_{k+1}(x,y)}{\alpha-\beta}=\beta^k$$

$$(iv)\ \frac{L_{k+1}(x,y)-\beta L_k(x,y)}{\alpha-\beta}=\alpha^k$$

dir.

İspat. Tümevarım yöntemi ile ispat yapılabilir. $k=1$ için $F_2(x,y)-\alpha F_1(x,y)=(\alpha+\beta)-\alpha=\beta$ dir. Kabul edelim ki $k=n-1$ için $F_n(x,y)-\alpha F_{n-1}(x,y)=\beta^{n-1}$ doğru olsun. O halde $k=n$ için de doğru olduğu gösterilmek istenirse

$$
\begin{aligned}
\beta^n &= \beta^{n-1}\beta\\
&= (F_n(x,y)-\alpha F_{n-1}(x,y))\beta\\
&= \beta F_n(x,y)-\alpha\beta F_{n-1}(x,y)
\end{aligned}
$$

dir. Eşitlik (3.2) gözönüne alınıp elementer işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\beta^n &= (\alpha+\beta-\alpha)F_{n-1}(x,y)-\alpha\beta F_n(x,y) \\
&= (\alpha+\beta)F_n(x,y)-\alpha F_n(x,y)-\alpha\beta F_{n-1}(x,y) \\
&= xF_n(x,y)+yF_{n-1}(x,y)-\alpha F_n(x,y) \\
&= F_{n+1}(x,y)-\alpha F_n(x,y)
\end{aligned}$$

olduğundan ispat tamamlanır.

Ayrıca (ii),(iii) ve (iv) de (i)'ye benzer şekilde yapılabilir. □

Aşağıdaki teoremde Lemma 3.4 ve Lemma 3.5 kullanılarak QBF ve QBL polinomlarının Binet formülleri elde edilmiştir.

Teorem 3.6. $\alpha^* = \sum\limits_{k=0}^{3} \alpha^k e_k$ ve $\beta^* = \sum\limits_{k=0}^{3} \beta^k e_k$ olmak üzere QBF ve QBL polinomlarının Binet formülleri sırasıyla

$$QBF_n(x,y) = \frac{\alpha^*\alpha^n - \beta^*\beta^n}{\alpha-\beta}$$

ve

$$QBL_n(x,y) = \alpha^*\alpha^n + \beta^*\beta^n$$

şeklindedir.

İspat. QBF polinomlarının üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} QBF_n(x,y)t^n = \frac{QBF_0(x,y)+(QBF_1(x,y)-xQBF_0(x,y))\,t}{1-xt-yt^2}$$

idi. Burada Lemma 3.4 kullanılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} QBF_n(x,y)t^n = \frac{\dfrac{QBF_1(x,y)-\beta QBF_0(x,y)}{1-\alpha t} - \dfrac{QBF_1(x,y)-\alpha QBF_0(x,y)}{1-\beta t}}{\alpha-\beta}$$

olur.

$$\frac{1}{1-\alpha t} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n t^n \text{ ve } \frac{1}{1-\beta t} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n t^n$$

eşitliklerinden

$$\sum_{n=0}^{\infty} QBF_n(x,y)t^n = \frac{(QBF_1(x,y) - \beta QBF_0(x,y)) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n t^n}{\alpha - \beta} - \frac{(QBF_1(x,y) - \alpha QBF_0(x,y)) \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n t^n}{\alpha - \beta}$$

olur. Tanım 3.1 de $QBF_n(x,y) = \sum_{k=0}^{3} F_{n+k}(x,y)e_k$ idi. Burada $n = 1$ için $QBF_1(x,y) = \sum_{k=0}^{3} F_{k+1}(x,y)e_k$ ve $n = 0$ için $QBF_0(x,y) = \sum_{k=0}^{3} F_k(x,y)e_k$ kullanılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} QBF_n(x,y)t^n = \frac{\sum_{k=0}^{3} (F_{k+1}(x,y) - \beta F_k(x,y))e_k \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n t^n}{\alpha - \beta} - \frac{\sum_{k=0}^{3} (F_{k+1}(x,y) - \alpha F_k(x,y))e_k \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n t^n}{\alpha - \beta}$$

olup burada da Lemma 3.5 kullanılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} QBF_n(x,y)t^n = \frac{\sum_{k=0}^{3} \alpha^k e_k \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n t^n - \sum_{k=0}^{3} \beta^k e_k \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n t^n}{\alpha - \beta}$$

bulunur. Ayrıca $\alpha^* = \sum_{k=0}^{3} \alpha^k e_k$ ve $\beta^* = \sum_{k=0}^{3} \beta^k e_k$ denilirse

$$\sum_{n=0}^{\infty} QBF(x,y)t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha^* \alpha^n - \beta^* \beta^n}{\alpha - \beta} \right) t^n$$

elde edilir. Yukarıdaki adımlar izlenerek QBL polinomu için de Binet formülünün ispatı yapılabilir. □

Teorem 3.7. Her $k \in \mathbb{N}$ ve $m, s \in \mathbb{Z}$ için

$$\sum_{k=0}^{\infty} QBF_{mk+s}(x,y)x^k = \frac{QBF_s(x,y) - (-y)^m QBF_{s-m}(x,y)x}{1 - L_m(x,y)x + (-y)^m x^2}$$

ve

$$\sum_{k=0}^{\infty} QBL_{mk+s}(x,y)x^k = \frac{QBL_s(x,y) - (-y)^m QBL_{s-m}(x,y)x}{1 - L_m(x,y)x + (-y)^m x^2}$$

dir.

İspat. *QBF* polinomlarının Binet formülünden

$$\sum_{k=0}^{\infty} QBF_{mk+s}(x,y)x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^*\alpha^{mk+s} - \beta^*\beta^{mk+s}}{\alpha-\beta} x^k$$

yazılabilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} QBF_{mk+s}(x,y)x^k &= \frac{\alpha^*\alpha^s}{\alpha-\beta}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^{mk}x^k - \frac{\beta^*\beta^s}{\alpha-\beta}\sum_{k=0}^{\infty}\beta^{mk}x^k \\
&= \frac{\alpha^*\alpha^s}{\alpha-\beta}\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha^m x)^k - \frac{\beta^*\beta^s}{\alpha-\beta}\sum_{k=0}^{\infty}(\beta^m x)^k
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada seri toplamından

$$\sum_{k=0}^{\infty} QBF_{mk+s}(x,y)x^k = \frac{\alpha^*\alpha^s}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{1-\alpha^m x}\right) - \frac{\beta^*\beta^s}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{1-\beta^m x}\right)$$

olup elementer işlemler yapılınca

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} QBF_{mk+s}(x,y)x^k &= \frac{1}{\alpha-\beta}\frac{\alpha^*\alpha^s(1-\beta^m x)}{(1-\alpha^m x)} - \frac{1}{\alpha-\beta}\frac{\beta^*\beta^s(1-\alpha^m x)}{(1-\beta^m x)} \\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}\frac{(\alpha^*\alpha^s-\beta^*\beta^s)-(\alpha^*\alpha^s\beta^m-\beta^*\beta^s\alpha^m)x}{1-(\alpha^m+\beta^m)x+(\alpha\beta)^m x^2} \\
&= \frac{\frac{\alpha^*\alpha^s-\beta^*\beta^s}{\alpha-\beta} - (\alpha\beta)^m\left(\frac{\alpha^*\alpha^{s-m}-\beta^*\beta^{s-m}}{\alpha-\beta}\right)x}{1-(\alpha^m+\beta^m)x+(\alpha\beta)^m x^2}
\end{aligned}$$

olur ki Eşitlik (3.7) ve Tanım 2.5'den

$$\sum_{k=0}^{\infty} QBF_{mk+s}(x,y)x^k = \frac{QBF_s(x,y)-(-y)^m QBF_{s-m}(x,y)x}{1-L_m(x,y)x+(-y)^m x^2}$$

elde edilir.

Ayrıca *QBL* için de aynı adımlar izlenerek

$$\sum_{k=0}^{\infty} QBL_{mk+s}(x,y)x^k = \frac{QBL_s(x,y)-(-y)^m QBL_{s-m}(x,y)x}{1-L_m(x,y)x+(-y)^m x^2}$$

elde edilir. □

Aşağıdaki iki teoremde *QBF* ve *QBL* polinom dizileri için toplam formülleri türetilmiştir.

Teorem 3.8. *QBF* ve *QBL* kuaterniyon dizilerinin ilk n terim toplamı sırasıyla

$$\sum_{k=0}^{n} QBF_k(x,y) = \frac{\left\{\begin{array}{c} QBF_0(x,y) - QBF_{n+1}(x,y) \\ -yQBF_n(x,y) - \frac{\alpha^*\beta-\beta^*\alpha}{\alpha-\beta} \end{array}\right\}}{(\alpha-1)(\beta-1)}$$

ve

$$\sum_{k=0}^{n} QBL_k(x,y) = \frac{\left\{\begin{array}{c} QBL_0(x,y) - QBL_{n+1}(x,y) \\ -yQBL_n(x,y) - (\alpha^*\beta+\beta^*\alpha) \end{array}\right\}}{(\alpha-1)(\beta-1)}$$

dır.

İspat. İlgili Binet formülü gereği

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} QBF_k(x,y) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^*\alpha^k - \beta^*\beta^k}{\alpha-\beta} \\ &= \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\alpha^*\sum_{k=0}^{n}\alpha^k - \beta^*\sum_{k=0}^{n}\beta^k\right) \end{aligned}$$

dır. Burada

$$\sum_{k=0}^{n}\alpha^k = \frac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha-1} \text{ ve } \sum_{k=0}^{n}\beta^k = \frac{\beta^{n+1}-1}{\beta-1}$$

seri toplamlarından

$$\sum_{k=0}^{n} QBF_k(x,y) = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\alpha^*\left(\frac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha-1}\right) - \beta^*\left(\frac{\beta^{n+1}-1}{\beta-1}\right)\right)$$

olup gerekli elementer işlemler yapılınca

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} QBF_k(x,y) &= \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{\alpha^*\alpha^{n+1}-\alpha^*}{\alpha-1} - \frac{\beta^*\beta^{n+1}-\beta^*}{\beta-1}\right) \\ &= \frac{1}{\alpha-\beta}\frac{\left\{\begin{array}{c} \alpha^*\alpha^{n+1}\beta - \alpha^*\beta - \alpha^*\alpha^{n+1} + \alpha^* \\ -\alpha\beta^*\beta^{n+1} + \alpha\beta^* + \beta^*\beta^{n+1} - \beta^* \end{array}\right\}}{(\alpha-1)(\beta-1)} \\ &= \frac{1}{(\alpha-1)(\beta-1)}\left\{\begin{array}{c} \alpha\beta\frac{\alpha^*\alpha^n-\beta^*\beta^n}{\alpha-\beta} - \frac{\alpha^*\alpha^{n+1}-\beta^*\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} \\ +\frac{\alpha^*-\beta^*}{\alpha-\beta} - \frac{\alpha^*\beta-\alpha\beta^*}{\alpha-\beta} \end{array}\right\} \end{aligned}$$

bulunur ki burada $\frac{\alpha^*-\beta^*}{\alpha-\beta} = QBF_0$ ve Eşitlik (3.7) uygulanırsa

$$\sum_{k=0}^{n} QBF_k(x,y) = \frac{\left\{\begin{array}{c} QBF_0(x,y) - QBF_{n+1}(x,y) \\ -yQBF_n(x,y) - \frac{\alpha^*\beta-\beta^*\alpha}{\alpha-\beta} \end{array}\right\}}{(\alpha-1)(\beta-1)}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

QBL polinomu için de ilgili Binet formülü kullanılarak benzer yöntemle ilk n terimin toplam formülü ispatı bulunabilir. □

Teorem 3.9. Her $m,s \in \mathbb{Z}$ için

$$\sum_{k=0}^{n} QBF_{mk+s}(x,y) = \frac{\left\{\begin{array}{c} (-y)^m \left(QBF_{mn+s}(x,y) - QBF_{s-m}(x,y)\right) \\ -QBF_{mn+m+s}(x,y) + QBF_s(x,y) \end{array}\right\}}{1+(-y)^m - L_m(x,y)}$$

ve

$$\sum_{k=0}^{n} QBL_{mk+s}(x,y) = \frac{\left\{\begin{array}{c} (-y)^m \left(QBL_{mn+s}(x,y) - QBL_{s-m}(x,y)\right) \\ -QBL_{mn+m+s}(x,y) + QBL_s(x,y) \end{array}\right\}}{1+(-y)^m - L_m(x,y)}$$

dir.

İspat. Binet formülü ve Eşitlik (3.7)'den

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} QBF_{mk+s}(x,y) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^*\alpha^{mk+s} - \beta^*\beta^{mk+s}}{\alpha-\beta} \\
&= \frac{\alpha^*\alpha^s}{\alpha-\beta}\sum_{k=0}^{n}(\alpha^m)^k - \frac{\beta^*\beta^s}{\alpha-\beta}\sum_{k=0}^{n}(\beta^m)^k \\
&= \frac{\alpha^*\alpha^s}{\alpha-\beta}\left(\frac{\alpha^{mn+m}-1}{\alpha^m-1}\right) - \frac{\beta^*\beta^s}{\alpha-\beta}\left(\frac{\beta^{mn+m}-1}{\beta^m-1}\right) \\
&= \frac{(\alpha^*\alpha^{mn+m+s}\alpha^s)(\beta^m-1)}{(\alpha-\beta)(\alpha^m\beta^m-\alpha^m-\beta^m+1)} - \frac{(\beta^*\beta^{mn+m+s}-1)(\alpha^m-1)}{(\alpha-\beta)(\alpha^m\beta^m-\alpha^m-\beta^m+1)} \\
&= \frac{(\alpha^*\alpha^{mn+m+s}\beta^m - \alpha^*\alpha^{mn+m+s} - \alpha^*\alpha^s\beta^m + \alpha^*\alpha^s)}{(\alpha-\beta)(1+\alpha^m\beta^m-\alpha^m-\beta^m)} \\
&\quad - \frac{(\beta^*\beta^{mn+m+s}\alpha^m - \beta^*\beta^{mn+m+s} - \beta^*\alpha^m\beta^s + \beta^*\beta^s)}{(\alpha-\beta)(1+\alpha^m\beta^m-\alpha^m-\beta^m)}
\end{aligned}$$

$$
= \frac{\left\{\begin{array}{c} (\alpha\beta)^m \frac{(\alpha^*\alpha^{mn+s}-\beta^*\alpha^{mn+s})}{\alpha-\beta} - \frac{(\alpha^*\alpha^{mn+m+s}-\beta^*\beta^{mn+m+s})}{\alpha-\beta} \\ (\alpha\beta)^m \frac{(\alpha^*\alpha^{s-m}-\beta^*\alpha^{s-m})}{\alpha-\beta} + \frac{(\alpha^*\alpha^{s}-\beta^*\alpha^{s})}{\alpha-\beta} \end{array}\right\}}{(1+\alpha^m\beta^m-(\alpha^m+\beta^m))}
$$

$$
= \frac{\left\{\begin{array}{c} (-y)^m\left(QBF_{mn+s}(x,y)-QBF_{s-m}(x,y)\right) \\ -QBF_{mn+m+s}(x,y)+QBF_s(x,y) \end{array}\right\}}{(1+\alpha^m\beta^m-(\alpha^m+\beta^m))}
$$

olup ispat tamamlanır. Diğer durum da benzer yolla ispatlanabilir. □

Aşağıdaki teoremde QBF ve QBL polinomlarını içeren bazı binom toplamları verilmiştir.

Teorem 3.10. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere tek ve çift terimlerine göre toplam formülleri

(i)

$$
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^{n-k} x^k QBF_k(x,y) = QBF_{2n}(x,y)
$$

(ii)

$$
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^{n-k} x^k QBF_{k+1}(x,y) = QBF_{2n+1}(x,y)
$$

(iii)

$$
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^{n-k} x^k QBL_k(x,y) = QBL_{2n}(x,y)
$$

(iv)

$$
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^{n-k} x^k QBL_{k+1}(x,y) = QBL_{2n+1}(x,y)
$$

şeklindedir.

İspat. $P = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^{n-k} x^k QBF_k(x,y)$ olsun. P nin sağ tarafına Binet formülü uygulanırsa:

$$
P = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^{n-k} x^k \left(\frac{\alpha^*\alpha^k - \beta^*\beta^k}{\alpha-\beta} \right)
$$

$$= \frac{\alpha^*}{\alpha-\beta}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^{n-k}(x\alpha)^k - \frac{\beta^*}{\alpha-\beta}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^{n-k}(x\beta)^k$$

olup elementer işlemler yapılınca

$$P = \frac{\alpha^*(y+x\alpha)^n - \beta^*(y+x\beta)^n}{\alpha-\beta}$$

bulunur. Eşitlik (3.7)'den

$$\begin{aligned} P &= \frac{\alpha^*\alpha^{2n} - \beta^*\beta^{2n}}{\alpha-\beta} \\ &= QBF_{2n}(x,y) \end{aligned}$$

elde edilir ki bu istenendir.

Ayrıca (ii),(iii) ve (iv) durumları (i) ye benzer şekilde ispatlanabilir. □

Şimdi ise bilinen bazı özel özdeşliklerin QBF ve QBL polinomları için sonuçları incelenecektir.

Teorem 3.11. (Catalan Özdeşliği) $n,k \in \mathbb{N}$ ve $k \leq n$ olmak üzere QBF ve QBL için Catalan özdeşlikleri sırasıyla

$$QBF_{n-k}(x,y)QBF_{n+k}(x,y) - QBF_n^2(x,y) = (-y)^{n-k}F_k(x,y)\left(\frac{\alpha^*\beta^*\beta^k - \beta^*\alpha^*\alpha^k}{\alpha-\beta}\right)$$

ve

$$QBL_{n-k}(x,y)QBL_{n+k}(x,y) - QBL_n^2(x,y) = -(-y)^{n-k}F_k(x,y)(\alpha^*\beta^*\beta^k - \beta^*\alpha^*\alpha^k)(\alpha-\beta)$$

şeklindedir.

İspat. İlgili Binet formülü ve Eşitlik (3.7) kullanılırsa

$$\begin{aligned} & QBF_{n-k}(x,y)QBF_{n+k}(x,y) - QBF_n^2(x,y) \\ =& \left(\frac{\alpha^*\alpha^{n-k} - \beta^*\beta^{n-k}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^*\alpha^{n+k} - \beta^*\beta^{n+k}}{\alpha-\beta}\right) - \left(\frac{\alpha^*\alpha^n - \beta^*\beta^n}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^*\alpha^n - \beta^*\beta^n}{\alpha-\beta}\right) \\ =& \frac{(\alpha^*\alpha^*\alpha^{2n} - \alpha^*\beta^*\ \alpha^{n-k}\beta^{n+k} - \beta^*\ \alpha^*\ \beta^{n-k}\ \alpha^{n+k} + \beta^*\beta^*\beta^{2n}}{(\alpha-\beta)^2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{\alpha^*\alpha^*\alpha^{2n}-\alpha^*\beta^*\ \alpha^n\beta^n-\beta^*\ \alpha^*\ \beta^n\alpha^n+\beta^*\beta^*\beta^{2n}}{(\alpha-\beta)^2} \\
= & \ \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\Big(-\ \alpha^*\beta^*\ \alpha^{n-k}\beta^{n+k}+\alpha^*\beta^*\ \alpha^n\beta^n-\beta^*\ \alpha^*\ \beta^{n-k}\ \alpha^{n+k}+\beta^*\ \alpha^*\ \beta^n\alpha^n\Big) \\
= & \ \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left(-\alpha^*\beta^*(\alpha\beta)^n\frac{\beta^k}{\alpha^k}\ +\alpha^*\beta^*(\alpha\beta)^n-\ \beta^*\alpha^*(\alpha\beta)^n\frac{\alpha^k}{\beta^k}+\ \beta^*\alpha^*(\alpha\beta)^n\right) \\
= & \ \frac{(\alpha\beta)^n}{(\alpha-\beta)^2}\left(\alpha^*\beta^*\left(\frac{\alpha^k-\beta^k}{\alpha^k}\right)+\beta^*\alpha^*\left(\frac{\beta^k-\alpha^k}{\beta^k}\right)\right) \\
= & \ \frac{(\alpha\beta)^n}{(\alpha-\beta)^2}\left(\frac{\alpha^*\beta^*(\alpha^k-\beta^k)\beta^k+\beta^*\alpha^*(\beta^k-\alpha^k)\alpha^k}{(\alpha\beta)^k}\right) \\
= & \ (\alpha\beta)^n(\alpha\beta)^{-k}\left(\frac{\alpha^k-\beta^k}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^*\beta^*\beta^k-\beta^*\alpha^*\alpha^k}{\alpha-\beta}\right) \\
= & \ (\alpha\beta)^{n-k}\left(\frac{\alpha^k-\beta^k}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^*\beta^*\beta^k-\beta^*\alpha^*\alpha^k}{\alpha-\beta}\right) \\
= & \ (-y)^{n-k}F_k(x,y)\left(\frac{\alpha^*\beta^*\beta^k-\beta^*\alpha^*\alpha^k}{\alpha-\beta}\right)
\end{aligned}
$$

olup ispat tamamlanır.

Benzer adımlar Lucas kuaterniyon polinomu için de uygulanırsa ispat yapılabilir. □

Teorem 3.12. (Cassini Özdeşliği) n keyfi bir doğal sayı olmak üzere QBF ve QBL için Cassini özdeşlikleri sırasıyla

$$QBF_{n-1}(x,y)QBF_{n+1}(x,y)-QBF_n^2(x,y)=(-y)^{n-1}\left(\frac{\alpha^*\beta^*\beta-\beta^*\alpha^*\alpha}{\alpha-\beta}\right)$$

ve

$$QBL_{n-1}(x,y)QBL_{n+1}(x,y)-QBL_n^2(x,y)=-(-y)^{n-1}(\alpha^*\beta^*\beta-\beta^*\alpha^*\alpha)(\alpha-\beta)$$

dir.

İspat. Hem QBF hem de QBL için Catalan Özdeşliğinde $k=1$ alınırsa Cassini özdeşliği elde edilir. □

Teorem 3.13. (d'Ocagne Özdeşliği) n, $k\in\mathbb{N}$ ve $k\geq n$ olmak üzere QBF ve QBL için d'Ocagne özdeşlikleri sırasıyla

$$QBF_k(x,y)QBF_{n+1}(x,y)-QBF_{k+1}(x,y)QBF_n(x,y)=(-y)^n\left(\frac{\alpha^*\beta^*\alpha^{k-n}-\beta^*\alpha^*\beta^{k-n}}{\alpha-\beta}\right)$$

ve

$$QBL_k(x,y)QBL_{n+1}(x,y)-QBL_{k+1}(x,y)QBL_n(x,y)=-(-y)^n\left(\alpha^*\beta^*\alpha^{k-n}-\beta^*\alpha^*\beta^{k-n}\right)(\alpha-\beta).$$

dır.

İspat. *QBF* polinomu için sol tarafa Binet formülü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& QBF_k(x,y)QBF_{n+1}(x,y)-QBF_{k+1}(x,y)QBF_n(x,y) \\
= & \left(\frac{\alpha^*\alpha^k-\beta^*\beta^k}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^*\alpha^{n+1}-\beta^*\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}\right)-\left(\frac{\alpha^*\alpha^{k+1}-\beta^*\beta^{k+1}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^*\alpha^n-\beta^*\beta^n}{\alpha-\beta}\right) \\
= & \frac{\alpha^*\alpha^*\alpha^{k+n+1}-\alpha^*\beta^*\alpha^k\beta^{n+1}-\beta^*\alpha^*\beta^k\alpha^{n+1}+\beta^*\beta^*\beta^{k+n+1}}{(\alpha-\beta)^2} \\
& -\frac{\alpha^*\alpha^*\alpha^{k+1+n}-\alpha^*\beta^*\alpha^{k+1}\beta^n-\beta^*\alpha^*\beta^{k+1}\alpha^n+\beta^*\beta^*\beta^{k+1+n}}{(\alpha-\beta)^2} \\
= & \frac{-\alpha^*\beta^*\alpha^k\beta^{n+1}+\alpha^*\beta^*\alpha^{k+1}\beta^n-\beta^*\alpha^*\beta^k\alpha^{n+1}+\beta^*\alpha^*\beta^{k+1}\alpha^n}{(\alpha-\beta)^2} \\
= & \frac{\alpha^*\beta^*\alpha^k\beta^n(\alpha-\beta)+\beta^*\alpha^*\beta^k\alpha^n(\beta-\alpha)}{(\alpha-\beta)^2}
\end{aligned}$$

ve eşitlik $\dfrac{(\alpha\beta)^{-n}}{(\alpha\beta)^{-n}}$ ile çarpılıp düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned}
& QBF_k(x,y)QBF_{n+1}(x,y)-QBF_{k+1}(x,y)QBF_n(x,y) \\
= & \frac{\alpha^*\beta^*\alpha^{k-n}-\beta^*\alpha^*\beta^{k-n}}{(\alpha-\beta)(\alpha\beta)^{-n}} \\
= & (-y)^n\left(\frac{\alpha^*\beta^*\alpha^{k-n}-\beta^*\alpha^*\beta^{k-n}}{\alpha-\beta}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

QBL polinomları için de aynı şekilde ispatı gösterilebilir. □

Aşağıdaki teoremde ise bu özel özdeşliklere benzer bir özdeşlik daha elde edilmiştir.

Teorem 3.14. $n \geq 0$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$yQBF_n^2(x,y)+QBF_{n+1}^2(x,y)=\frac{(\alpha^*)^2\alpha^{2n+1}-(\beta^*)^2\beta^{2n+1}}{\alpha-\beta}$$

ve

$$yQBL_n^2(x,y)+QBL_{n+1}^2(x,y)=(\alpha-\beta)\,((\alpha^*)^2\alpha^{2n+1}-(\beta^*)^2\beta^{2n+1}).$$

İspat. Binet formülü ve (3.7) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& yQBF_n^2(x,y)+QBF_{n+1}^2(x,y) \\
= \;& y\left(\frac{\alpha^*\alpha^n-\beta^*\beta^n}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^*\alpha^n-\beta^*\beta^n}{\alpha-\beta}\right)+\left(\frac{\alpha^*\alpha^{n+1}-\beta^*\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^*\alpha^{n+1}-\beta^*\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}\right) \\
= \;& \frac{y(\alpha^*)^2\alpha^{2n}-y\alpha^*\beta^*\alpha^n\beta^n-y\beta^*\alpha^*\beta^n\alpha^n+y\beta^*\beta^*\beta^{2n}}{(\alpha-\beta)^2} \\
& +\frac{\alpha^*\alpha^*\alpha^{2n+2}-\alpha^*\beta^*\alpha^{n+1}\beta^{n+1}-\beta^*\alpha^*\beta^{n+1}\alpha^{n+1}+\beta^*\beta^*\beta^{2n+2}}{(\alpha-\beta)^2} \\
= \;& \frac{y(\alpha^*)^2\alpha^{2n}+(\alpha^*)^2\alpha^{2n+2}+y(\beta^*)^2\beta^{2n}+(\beta^*)^2\beta^{2n+2}}{(\alpha-\beta)^2} \\
= \;& \frac{(\alpha^*)^2\alpha^{2n}(y+\alpha^2)+(\beta^*)^2\beta^{2n}(y+\beta^2)}{(\alpha-\beta)^2} \\
= \;& \frac{(\alpha^*)^2\alpha^{2n}\alpha(\alpha-\beta)-(\beta^*)^2\beta^{2n}\beta(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)^2} \\
= \;& \frac{(\alpha^*)^2\alpha^{2n+1}-(\beta^*)^2\beta^{2n+1}}{\alpha-\beta}
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer durum da benzer şekilde gösterilebilir. □

3.3. İKİ DEĞİŞKENLİ FIBONACCI VE LUCAS KUATERNİYON POLİNOMLARININ MATRİS GÖSTERİMİ

Matris metodu sadece farklı özdeşlikler bulmak için değil, rekürans bağıntısı ile ilgili çalışmalarda cebirsel gösterimler için de kullanılabilir. Aşağıda, literatürdeki çeşitli sayı dizileri, polinomlar ve kuaterniyonlarla ilgili King'in oluşturduğu matrislerin rolünü üstlenen matrislere yer verildi. Daha sonra bu üreteç matrisler gözönüne alınarak iki değişkenli Fibonacci kuaterniyon polinom dizisi matrisi M_{QBF} ve iki değişkenli Lucas kuaterniyon polinom dizisi matrisi M_{QBL} oluşturulmuştur.

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
Q^2 &= QQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_3 & F_2 \\ F_2 & F_1 \end{pmatrix} \\
Q^3 &= Q^2Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_4 & F_3 \\ F_3 & F_2 \end{pmatrix} \\
Q^4 &= Q^3Q = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_5 & F_4 \\ F_4 & F_3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Görüldüğü gibi 2x2 tipindeki Q-matrisinin kuvvetleri alındığında elde edilen yeni matrislerin elemanları yine Fibonacci sayı dizisinden oluşmaktadır. Buradan hareketle King tarafından tanımlanan Fibonacci sayı dizisi matrisi :

$$
Q(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

olmak üzere

$$
Q^n(x) = \begin{pmatrix} F_{n+1}(x) & F_n(x) \\ F_n(x) & F_{n-1}(x) \end{pmatrix}
$$

biçimindedir [7].

Lucas sayı dizisi matrisi :

$$
Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \text{ ve } R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}
$$

olmak üzere

$$
RQ^n = \begin{pmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{pmatrix}
$$

şeklindedir [8].

Pell sayı dizisi matrisi :

$$
M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

olmak üzere

$$M^n = \begin{pmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{pmatrix}$$

şeklindedir [36].

Fibonacci polinom dizisi matrisi :

$$Q = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1}(x) & F_n(x) \\ F_n(x) & F_{n-1}(x) \end{pmatrix}$$

şeklindedir [37].

Lucas polinom dizisi matrisi :

$$Q(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad C_x = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 2 & -x \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$C_x Q(x)^n = \begin{pmatrix} L_{n+1}(x) & L_n(x) \\ L_n(x) & L_{n-1}(x) \end{pmatrix}$$

şeklindedir [38].

Pell polinom dizisi matrisi :

$$P = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$P^n = \begin{pmatrix} P_{n+1}(x) & P_n(x) \\ P_n(x) & P_{n-1}(x) \end{pmatrix}$$

şeklindedir [39].

İki değişkenli Fibonacci polinom dizisi matrisi :

$$Q(x,y) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$Q^n(x,y) = \begin{pmatrix} F_{n+1}(x,y) & F_n(x,y) \\ yF_n(x,y) & yF_{n-1}(x,y) \end{pmatrix}$$

şeklindedir [5].

İki değişkenli Lucas polinom dizisi matrisi :

$$Q(x,y) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } P(x,y) = \begin{pmatrix} x^2+2y & x \\ xy & 2y \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$PQ^n(x,y) = \begin{pmatrix} L_{n+1}(x,y) & L_n(x,y) \\ yL_n(x,y) & yL_{n-1}(x,y) \end{pmatrix}$$

şeklindedir [5].

Fibonacci kuaterniyon matrisi :

Halici [17] de Fibonacci kuaterniyon matrisini

$$Q = \begin{pmatrix} Q_2 & Q_1 \\ Q_1 & Q_0 \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlamıştır. Bu üreteç matristen hareketle Patel ve Ray [40] da (p,q)-Fibonacci sayıları için üreteç matrisini

$$Q_F = \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$Q_F^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & qF_n \\ F_n & qF_{n-1} \end{pmatrix}$$

şeklinde verip elemanları (p,q)-Fibonacci kuaterniyon olan (p,q)-Fibonacci kuaterniyon matrisini

$$M_{Q_F^n} = \begin{pmatrix} QF_{n+1} & qQF_n \\ QF_n & qQF_{n-1} \end{pmatrix}$$

şeklinde elde etmişlerdir.

Lucas kuaterniyon matrisi :

[41] de Lucas kuaterniyon matrisi

$$M_{Q_L^n} = \begin{pmatrix} K_{n+1} & K_n \\ K_n & K_{n-1} \end{pmatrix}$$

şeklinde çalışılmıştır.

Pell kuaterniyon matrisi :

Szynal-Lianna ve Wloch [13] de Pell kuaterniyonlar için üreteç matrisini $n \geq 2$ için

$$R(n) = \begin{pmatrix} R_n & R_{n-1} \\ R_{n-1} & R_{n-2} \end{pmatrix}$$

şeklinde tanıtmışlardır. Yine aynı çalışmada yazarlar Pell-Lucas kuaterniyonlar için üreteç matrisini

$$S(n) = \begin{pmatrix} S_n & S_{n-1} \\ S_{n-1} & S_{n-2} \end{pmatrix}$$

şeklinde türetmişlerdir.

Yukarıda literatür taraması verilen üreteç matrisleri gözönüne alarak iki değişkenli Fibonacci ve Lucas kuaterniyon polinomları için matrisler tanımlansın.

Tanım 3.15. $n \geq 1$ için iki değişkenli Fibonacci ve Lucas kuaterniyon polinomları için matrisler sırasıyla

$$M_{QBF^n(x,y)} = \begin{pmatrix} QBF_{n+1}(x,y) & yQBF_n(x,y) \\ QBF_n(x,y) & yQBF_{n-1}(x,y) \end{pmatrix}$$

ve

$$M_{QBL^n(x,y)} = \begin{pmatrix} QBL_{n+1}(x,y) & yQBL_n(x,y) \\ QBL_n(x,y) & yQBL_{n-1}(x,y) \end{pmatrix}$$

dir.

Teorem 3.16. Keyfi bir $n \geq 1$ tam sayısı için

$$\begin{pmatrix} QBF_{n+1}(x,y) & yQBF_n(x,y) \\ QBF_n(x,y) & yQBF_{n-1}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} QBF_2(x,y) & yQBF_1(x,y) \\ QBF_1(x,y) & yQBF_0(x,y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1}$$

ve

$$\begin{pmatrix} QBL_{n+1}(x,y) & yQBL_n(x,y) \\ QBL_n(x,y) & yQBL_{n-1}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} QBL_2(x,y) & yQBL_1(x,y) \\ QBL_1(x,y) & yQBL_0(x,y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1}$$

dir.

İspat. Tümevarım yöntemi ile ispat yapılabilir. $n = 1$ için doğrudur. Varsayılsın ki $n = k-1$ için eşitlik geçerli olsun. $n = k$ için de doğru olduğu gösterilmelidir. Bunun için

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} QBF_2(x,y) & yQBF_1(x,y) \\ QBF_1(x,y) & yQBF_0(x,y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{k-1} \\ = & \begin{pmatrix} QBF_2(x,y) & yQBF_1(x,y) \\ QBF_1(x,y) & yQBF_0(x,y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{k-2} \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} QBF_k(x,y) & yQBF_{k-1}(x,y) \\ QBF_{k-1}(x,y) & yQBF_{k-2}(x,y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} QBF_{k+1}(x,y) & yQBF_k(x,y) \\ QBF_k(x,y) & yQBF_{k-1}(x,y) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır. Diğer durum da benzer şekilde yapılabilir. □

4. HORADAM KUATERNİYONLARI

Fibonacci ve Lucas kuaterniyon dizileri birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır. Ayrıca bu kuaterniyon dizilerinin genelleştirmeleri yapılıp, çeşitli özdeşlikler, toplam formülleri ve binom formülleri elde edilmiştir [18], [23], [42]-[47]. Bu genelleştirmelerden en dikkat çekenlerinden biri [23] de Halıcı ve Karataş tarafından verilen Horadam kuaterniyon dizisidir. Horadam kuaterniyon dizisi daha önce tanımlanan Fibonacci, Lucas, Pell ve Jacobsthal, Pell-Lucas ve Jacobsthal-Lucas gibi kuaterniyon dizilerinin bir genellemesi niteliğindedir.

Tezin bu bölümünde Horadam kuaterniyonları için binom toplamları, çeşitli özdeşlikler ve matris gösterimi elde edilmiştir [48].

4.1. HORADAM KUATERNİYONLARI ÜZERİNE

Bu alt başlıkta Horadam kuaterniyonlarının temel tanım ve teoremlerine yer verilmiştir.

Tanım 4.1. W_n, n. Horadam sayısı olmak üzere $n \in \mathbb{Z}$ ve $n \geq 0$ için Horadam kuaterniyonları

$$Q_{w,n+2} = W_{n+2}1 + W_{n+3}i + W_{n+4}j + W_{n+5}k$$

şeklindedir. Burada başlangıç koşulları

$$\begin{aligned} Q_{w,0} &= (a, b, pb+qa, p^2b+pqa+qp) = a+bi+(pb+qa)j+(p^2b+pqa+qp)k, \\ Q_{w,1} &= (b, pb+qa, p^2b+pqa+qb, p^3b+p^2qa+2pqb+q^2a) \\ &= b+(pb+qa)i+(p^2b+pqa+qb)j+(p^3b+p^2qa+2pqb+q^2a)k \end{aligned}$$

dır. Horadam kuaterniyon dizisi için rekürans bağıntısı

$$Q_{w,n+2} = pQ_{w,n+1} + qQ_{w,n} \tag{4.1}$$

şeklindedir. Eşitlik (4.1)'in karakteristik denklemi

$$t^2 - pt - q = 0$$

olup denklemin kökleri

$$\alpha = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2} \text{ ve } \beta = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2} \tag{4.2}$$

dir. Ayrıca $n \geq 0$ için Horadam kuaterniyonları için Binet formülü

$$Q_{w,n} = \frac{A\underline{\alpha}\alpha^n - B\underline{\beta}\beta^n}{\alpha - \beta}$$

olup burada $A = b - a\beta$, $B = b - a\alpha$, $\underline{\alpha} = 1 + i\alpha + j\alpha^2 + k\alpha^3$ ve $\underline{\beta} = 1 + i\beta + j\beta^2 + k\beta^3$ dir.

$Q_{w,0}$ ve $Q_{w,1}$ Horadam kuaterniyon dizilerinin başlangıç koşulları olmak üzere Horadam kuaterniyonları için üreteç fonksiyonu

$$g(t) = \frac{Q_{w,0} + (Q_{w,1} - pQ_{w,0})t}{1 - pt - qt^2}$$

dir [23].

Kullanım kolaylığı açısından bundan böyle $\Delta = p^2 + 4q$ gösterimi ve ayrıca aşağıdaki eşitlikler kullanılacaktır :

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= p \qquad (4.3) \\ \alpha - \beta &= \sqrt{\Delta} \\ \alpha\beta &= -q \\ \alpha^2 &= p\alpha + q \\ \beta^2 &= p\beta + q \\ \alpha^2 + q &= \alpha\sqrt{\Delta} \\ \beta^2 + q &= -\beta\sqrt{\Delta}. \end{aligned}$$

Horadam kuaterniyonları gözönünde bulundurularak aşağıdaki çizelge elde edilir.

Çizelge 4.1. Bazı Özel Kuaterniyon Dizileri ve Başlangıç Koşulları

Kuaterniyon dizisi	Başlangıç koşulları$(a,b;p,q)$
Fibonacci kuaterniyon	$a=0, b=1, p=1, q=1$
Lucas kuaterniyon	$a=2, b=1, p=1, q=1$
Pell kuaterniyon	$a=0, b=1, p=2, q=1$
Pell-Lucas kuaterniyon	$a=2, b=2, p=2, q=1$
Jacobsthal kuaterniyon	$a=0, b=1, p=1, q=2$
Jacobsthal-Lucas kuaterniyon	$a=2, b=1, p=1, q=2$

4.2. HORADAM KUATERNİYONLARI İLE İLGİLİ BAZI ÖZDEŞLİKLER

Bu bölümde, ilgili Binet formülü kullanılarak Horadam kuaterniyonlarının binom toplamları için bazı yeni formüller elde edilmiştir. Ayrıca, üstel üreteç fonksiyonu, d'Ocagne özdeşliği ve Horadam kuaterniyonlarını içeren bazı özdeşlikler sunulmuştur.

Teorem 4.2. $Q_{w,n}$, n.Horadam kuaterniyonunu göstersin. Horadam kuaterniyonları için üstel üreteç fonksiyonu

$$\sum_{k=0}^{\infty} Q_{w,k}\frac{t^k}{k!} = \frac{A\underline{\alpha}e^{\alpha t} - B\underline{\beta}e^{\beta t}}{\alpha-\beta}$$

dir.

İspat. Horadam kuaterniyonlar için Binet formülü hatırlanacak olursa

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} Q_{w,k}\frac{t^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{A\underline{\alpha}\alpha^k - B\underline{\beta}\beta^k}{\alpha-\beta}\right)\frac{t^k}{k!}\\ &= \frac{A\underline{\alpha}}{\alpha-\beta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha t)^k}{k!} - \frac{B\underline{\beta}}{\alpha-\beta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\beta t)^k}{k!}\end{aligned}$$

olur. Burada $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha t)^k}{k!} = 1+\alpha t+\frac{(\alpha t)^2}{2!}+\frac{(\alpha t)^3}{3!}+\ldots = e^{\alpha t}$ ve $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\beta t)^k}{k!} = 1+\beta t+\frac{(\beta t)^2}{2!}+\frac{(\beta t)^3}{3!}+\ldots = e^{\beta t}$ olduğundan

$$\sum_{k=0}^{\infty} Q_{w,k}\frac{t^k}{k!} = \frac{A\underline{\alpha}e^{\alpha t} - B\underline{\beta}e^{\beta t}}{\alpha-\beta}$$

elde edilir. □

Teorem 4.3. $Q_{w,n}$, n.Horadam kuaterniyon olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ ve $m,s \in \mathbb{Z}$ için

$$\sum_{k=0}^{n} Q_{w,mk+s} = \frac{(-q)^m (Q_{w,mn+s} - Q_{w,s-m}) - Q_{w,mn+m+s} + Q_{w,s}}{1 - (\alpha^m + \beta^m) + (-q)^m}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. İlgili Binet formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} Q_{w,mk+s} \\
= \; & \sum_{k=0}^{n} \frac{A\underline{\alpha}\alpha^{mk+s} - B\underline{\beta}\beta^{mk+s}}{\alpha - \beta} \\
= \; & \frac{A\underline{\alpha}\alpha^s}{\alpha - \beta} \sum_{k=0}^{n} \alpha^{mk} - \frac{B\underline{\beta}\beta^s}{\alpha - \beta} \sum_{k=0}^{n} \beta^{mk}
\end{aligned}$$

olup $\sum\limits_{k=0}^{n} (\alpha^m)^k = \frac{(\alpha^m)^{n+1} - 1}{\alpha^m - 1}$ ve $\sum\limits_{k=0}^{n} (\beta^m)^k = \frac{(\beta^m)^{n+1} - 1}{\beta^m - 1}$ geçerlidir.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} Q_{w,mk+s} &= \frac{A\underline{\alpha}\alpha^s}{\alpha - \beta}\left(\frac{\alpha^{mn+m} - 1}{\alpha^m - 1}\right) - \frac{B\underline{\beta}\beta^s}{\alpha - \beta}\left(\frac{\beta^{mn+m} - 1}{\beta^m - 1}\right) \\
&= \frac{A\underline{\alpha}(\alpha^{mn+m+s} - \alpha^s)(\beta^m - 1)}{(\alpha - \beta)(\alpha^m\beta^m - \alpha^m - \beta^m + 1)} - \frac{B\underline{\beta}(\beta^{mn+m+s} - 1)(\alpha^m - 1)}{(\alpha - \beta)(\alpha^m\beta^m - \alpha^m - \beta^m + 1)} \\
&= \frac{A\underline{\alpha}(\alpha^{mn+s}\alpha^m\beta^m - \alpha^s\beta^m - \alpha^{mn+m+s} + \alpha^s)}{(\alpha - \beta)(\alpha^m\beta^m - \alpha^m - \beta^m + 1)} \\
&\quad - \frac{B\underline{\beta}(\beta^{mn+s}\alpha^m\beta^m - \alpha^m\beta^s - \beta^{mn+m+s} + \beta^s)}{(\alpha - \beta)(\alpha^m\beta^m - \alpha^m - \beta^m + 1)} \\
&= \frac{\alpha^m\beta^m(A\underline{\alpha}\alpha^{mn+s} - B\underline{\beta}\beta^{mn+s}) - \alpha^m\beta^m(A\underline{\alpha}\alpha^{s-m} - B\underline{\beta}\beta^{s-m})}{(\alpha - \beta)(\alpha^m\beta^m - \alpha^m - \beta^m + 1)} \\
&\quad - \frac{(A\underline{\alpha}\alpha^{mn+m+s} - B\underline{\beta}\beta^{mn+m+s}) - (A\underline{\alpha}\alpha^s - B\underline{\beta}\beta^s)}{(\alpha - \beta)(\alpha^m\beta^m - \alpha^m - \beta^m + 1)} \\
&= \frac{\left\{\begin{array}{c} (\alpha\beta)^m \frac{A\underline{\alpha}\alpha^{mn+s} - B\underline{\beta}\beta^{mn+s}}{\alpha - \beta} - (\alpha\beta)^m \frac{A\underline{\alpha}\alpha^{s-m} - B\underline{\beta}\beta^{s-m}}{\alpha - \beta} \\ - \frac{A\underline{\alpha}\alpha^{mn+m+s} - B\underline{\beta}\beta^{mn+m+s}}{\alpha - \beta} + \frac{A\underline{\alpha}\alpha^s - B\underline{\beta}\beta^s}{\alpha - \beta} \end{array}\right\}}{(\alpha\beta)^m - (\alpha^m + \beta^m) + 1} \\
&= \frac{(-q)^m Q_{w,mn+s} - (-q)^m Q_{w,s-m} - Q_{w,mn+m+s} + Q_{w,s}}{(-q)^m - (\alpha^m + \beta^m) + 1} \\
&= \frac{(-q)^m (Q_{w,mn+s} - Q_{w,s-m}) - Q_{w,mn+m+s} + Q_{w,s}}{(-q)^m - (\alpha^m + \beta^m) + 1}
\end{aligned}$$

ispat tamamlanır. □

Teorem 4.4. $Q_{w,n}$, n. Horadam kuaterniyon olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^{n-k} p^k Q_{w,k} = Q_{w,2n}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. İlgili Binet formülünden,

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^{n-k} p^k Q_{w,k} \\
= & \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^{n-k} p^k \left(\frac{A\underline{\alpha}\alpha^k - B\underline{\beta}\beta^k}{\alpha - \beta} \right) \\
= & \frac{A\underline{\alpha}}{\alpha-\beta} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^{n-k} p^k \alpha^k - \frac{B\underline{\beta}}{\alpha-\beta} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^{n-k} p^k \beta^k \\
= & \frac{A\underline{\alpha}}{\alpha-\beta} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^{n-k} (p\alpha)^k - \frac{B\underline{\beta}}{\alpha-\beta} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^{n-k} (p\beta)^k
\end{aligned}$$

dir. Burada binom formülü ile $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^{n-k} (p\alpha)^k = (q+p\alpha)^n$ ve $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^{n-k} (p\beta)^k = (q+p\beta)^n$ eşitlikleri kullanılırsa

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^{n-k} p^k Q_{w,k} = \frac{A\underline{\alpha}}{\alpha-\beta}(q+p\alpha)^n - \frac{B\underline{\beta}}{\alpha-\beta}(q+p\beta)^n$$

elde edilir. Şimdi de Eşitlik (4.3) gereğince

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^{n-k} p^k Q_{w,k} &= \frac{A\underline{\alpha}(\alpha^2)^n}{\alpha-\beta} - \frac{B\underline{\beta}(\beta^2)^n}{\alpha-\beta} \\
&= \frac{A\underline{\alpha}\alpha^{2n} - B\underline{\beta}\beta^{2n}}{\alpha-\beta} \\
&= Q_{w,2n}
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. □

Teorem 4.5. $Q_{w,n}$, n.Horadam kuaterniyon olmak üzere her $k \in \mathbb{N}$ ve $m,s \in \mathbb{Z}$ için

$$\sum_{k=0}^{\infty} Q_{w,mk+s} x^k = \frac{Q_{w,s} - (-q)^m Q_{w,s-m} x}{1 - (\alpha^m + \beta^m)x + (-q)^m x^2}$$

dir.

İspat. Binet formülü kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} Q_{w,mk+s}x^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A\underline{\alpha}\alpha^{mk+s} - B\underline{\beta}\beta^{mk+s}}{\alpha-\beta}x^k \\
&= \frac{A\underline{\alpha}\alpha^s}{\alpha-\beta}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^{mk}x^k - \frac{B\underline{\beta}\beta^s}{\alpha-\beta}\sum_{k=0}^{\infty}\beta^{mk}x^k \\
&= \frac{A\underline{\alpha}\alpha^s}{\alpha-\beta}\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha^m x)^k - \frac{B\underline{\beta}\beta^s}{\alpha-\beta}\sum_{k=0}^{\infty}(\beta^m x)^k
\end{aligned}$$

halini alır. Bu durumda $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(\alpha^m x)^k = \left(\frac{1}{1-\alpha^m x}\right)$ ve $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(\beta^m x)^k = \left(\frac{1}{1-\beta^m x}\right)$ geometrik serileri yardımıyla

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} Q_{w,mk+s}x^k &= \frac{A\underline{\alpha}\alpha^s}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{1-\alpha^m x}\right) - \frac{B\underline{\beta}\beta^s}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{1-\beta^m x}\right) \\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}\frac{A\underline{\alpha}\alpha^s(1-\beta^m x) - B\underline{\beta}\beta^s(1-\alpha^m x)}{(1-\alpha^m x)(1-\beta^m x)} \\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}\frac{(A\underline{\alpha}\alpha^s - B\underline{\beta}\beta^s) - (A\underline{\alpha}\alpha^s\beta^m - B\underline{\beta}\beta^s\alpha^m)x}{1-(\alpha^m+\beta^m)x+(\alpha\beta)^m x^2}
\end{aligned}$$

olur ki gerekli düzenlemeler yapılması ve Eşitlik (4.3) ile

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} Q_{w,mk+s}x^k &= \frac{\left(\frac{A\underline{\alpha}\alpha^s - B\underline{\beta}\beta^s}{\alpha-\beta}\right) - (\alpha\beta)^m\left(\frac{A\underline{\alpha}\alpha^{s-m} - B\underline{\beta}\beta^{s-m}}{\alpha-\beta}\right)x}{1-(\alpha^m+\beta^m)x+(\alpha\beta)^m x^2} \\
&= \frac{Q_{w,s} - (-q)^m Q_{w,s-m}x}{1-(\alpha^m+\beta^m)x+(-q)^m x^2}
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 4.6. $Q_{w,n}$, n. Horadam kuaterniyon olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ ve $s \in \mathbb{Z}$ için

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}q^{n-k}p^k Q_{w,k+s} = Q_{w,2n+s}$$

dir.

İspat. Eşitliğin sağ tarafından hareketle ilgili Binet formülünden yararlanılırsa;

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} Q_{w,2n+s}\frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A\underline{\alpha}\alpha^{2n+s} - B\underline{\beta}\beta^{2n+s}}{\alpha-\beta}\frac{x^n}{n!} \\
&= \frac{A\underline{\alpha}\alpha^s}{\alpha-\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{2n}\frac{x^n}{n!} - \frac{B\underline{\beta}\beta^s}{\alpha-\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\beta^{2n}\frac{x^n}{n!}
\end{aligned}$$

$$= \frac{A\underline{\alpha}\alpha^s}{\alpha-\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha^2x)^n}{n!} - \frac{B\underline{\beta}\beta^s}{\alpha-\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\beta^2x)^n}{n!}$$

olur. Burada üstel üreteç fonksiyonu ve Eşitlik (4.3) kullanılıp elementer işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} Q_{w,2n+s}\frac{x^n}{n!} &= \frac{A\underline{\alpha}\alpha^s}{\alpha-\beta}e^{\alpha^2x} - \frac{B\underline{\beta}\beta^s}{\alpha-\beta}e^{\beta^2x} \\
&= \frac{A\underline{\alpha}\alpha^s e^{\alpha^2x} - B\underline{\beta}\beta^s e^{\beta^2x}}{\alpha-\beta} \\
&= \frac{A\underline{\alpha}\alpha^s e^{(p\alpha+q)x} - B\underline{\beta}\beta^s e^{(p\beta+q)x}}{\alpha-\beta} \\
&= e^{qx}\frac{A\underline{\alpha}\alpha^s e^{p\alpha x} - B\underline{\beta}\beta^s e^{p\beta x}}{\alpha-\beta} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\frac{x^n}{n!}\right)\left(\frac{A\underline{\alpha}\alpha^s}{\alpha-\beta}\sum_{n=0}^{\infty} p^n\alpha^n\frac{x^n}{n!} - \frac{B\underline{\beta}\beta^s}{\alpha-\beta}\sum_{n=0}^{\infty} p^n\beta^n\frac{x^n}{n!}\right) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} p^n\frac{A\underline{\alpha}\alpha^s - B\underline{\beta}\beta^s}{\alpha-\beta}\frac{x^n}{n!}\right) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} p^n Q_{w,n+s}\frac{x^n}{n!}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}q^{n-k}p^k Q_{w,k+s}\right)\frac{x^n}{n!}
\end{aligned}$$

bulunur ve dolayısıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_{w,2n+s}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}q^{n-k}p^k Q_{w,k+s}\right)\frac{x^n}{n!}$$

elde edilmiş olur. Daha sonra

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}q^{n-k}p^k Q_{w,k+s=}Q_{w,2n+s}$$

olduğu bilindiğinden ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 4.7. $Q_{w,n}$, n.Horadam kuaterniyon olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ ve $s \in \mathbb{Z}$ için

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-q)^{n-k}Q_{w,2k+s} = p^n Q_{w,n+s}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. Eşitliğin sol tarafından hareketle, ilgili binom formülü uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-q)^{n-k}Q_{w,2k+s}\right)\frac{x^n}{n!}\\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-q)^n\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}Q_{w,2n+s}\frac{x^n}{n!}\right)\\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-q)^n\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A\underline{\alpha}\alpha^{2n+s}-B\underline{\beta}\beta^{2n+s}}{\alpha-\beta}\frac{x^n}{n!}\right)\\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-q)^n\frac{x^n}{n!}\right)\left(\frac{A\underline{\alpha}\alpha^s}{\alpha-\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{2n}\frac{x^n}{n!}-\frac{B\underline{\beta}\beta^s}{\alpha-\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\beta^{2n}\frac{x^n}{n!}\right)\\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-qx)^n}{n!}\right)\left(\frac{A\underline{\alpha}\alpha^s}{\alpha-\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha^2x)^n}{n!}-\frac{B\underline{\beta}\beta^s}{\alpha-\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\beta^2x)^n}{n!}\right)
\end{aligned}$$

olur ve burada da üstel üreteç fonksiyonu gözönüne alındığında

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-q)^{n-k}Q_{w,2k+s}\right)\frac{x^n}{n!}\\
&= e^{-qx}\frac{A\underline{\alpha}\alpha^s e^{\alpha^2x}-B\underline{\beta}\beta^s e^{\beta^2x}}{\alpha-\beta}\\
&= \frac{A\underline{\alpha}\alpha^s e^{(\alpha^2-q)x}-B\underline{\beta}\beta^s e^{(\beta^2-q)x}}{\alpha-\beta}\\
&= \frac{A\underline{\alpha}\alpha^s e^{p\alpha x}-B\underline{\beta}\beta^s e^{p\beta x}}{\alpha-\beta}\\
&= \frac{A\underline{\alpha}\alpha^s}{\alpha-\beta}e^{p\alpha x}-\frac{B\underline{\beta}\beta^s}{\alpha-\beta}e^{p\beta x}\\
&= \frac{A\underline{\alpha}\alpha^s}{\alpha-\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(p\alpha x)^n}{n!}-\frac{B\underline{\beta}\beta^s}{\alpha-\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(p\beta x)^n}{n!}\\
&= \frac{A\underline{\alpha}\alpha^s}{\alpha-\beta}\sum_{n=0}^{\infty}p^n\alpha^n\frac{x^n}{n!}-\frac{B\underline{\beta}\beta^s}{\alpha-\beta}\sum_{n=0}^{\infty}p^n\beta^n\frac{x^n}{n!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}p^n\frac{A\underline{\alpha}\alpha^{n+s}-B\underline{\beta}\beta^{n+s}}{\alpha-\beta}\frac{x^n}{n!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}p^nQ_{w,n+s}\frac{x^n}{n!}
\end{aligned}$$

bulunur. Gelinen son adımda

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-q)^{n-k}Q_{w,2k+s}\right)\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}p^nQ_{w,n+s}\frac{x^n}{n!}$$

olur. Dolayısıyla

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-q)^{n-k}Q_{w,2k+s}=p^{n}Q_{w,n+s}$$

ispat biter. □

Teorem 4.8. (d'Ocagne Özdeşliği) $Q_{w,n}$, n.Horadam kuaterniyon olsun. k ile n birer doğal sayı ve $k \geq n$ olmak üzere Horadam kuaterniyonları için d'Ocagne Özdeşliği

$$Q_{w,k}Q_{w,n+1}-Q_{w,k+1}Q_{w,n}=\frac{(-q)^{n}AB}{\alpha-\beta}(\underline{\alpha}\underline{\beta}\alpha^{k-n}-\underline{\beta}\underline{\alpha}\beta^{k-n})$$

dir.

İspat. İlgili Binet formülünden

$$\begin{aligned}
& Q_{w,k}Q_{w,n+1}-Q_{w,k+1}Q_{w,n} \\
= & \left(\frac{A\underline{\alpha}\alpha^{k}-B\underline{\beta}\beta^{k}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{A\underline{\alpha}\alpha^{n+1}-B\underline{\beta}\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}\right) \\
& -\left(\frac{A\underline{\alpha}\alpha^{k+1}-B\underline{\beta}\beta^{k+1}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{A\underline{\alpha}\alpha^{n}-B\underline{\beta}\beta^{n}}{\alpha-\beta}\right) \\
& \frac{1}{(\alpha-\beta)^{2}}\begin{pmatrix} A^{2}\underline{\alpha}^{2}\alpha^{k+n+1}-AB\underline{\alpha}\underline{\beta}\alpha^{k}\beta^{n+1}-\ BA\underline{\beta}\underline{\alpha}\beta^{k}\alpha^{n+1}+B^{2}\underline{\beta}^{2}\beta^{k+n+1} \\ -A^{2}\underline{\alpha}^{2}\alpha^{k+n+1}+AB\underline{\alpha}\underline{\beta}\alpha^{k+1}\beta^{n}+BA\underline{\beta}\underline{\alpha}\beta^{k+1}\alpha^{n}-B^{2}\underline{\beta}^{2}\beta^{k+n+1}\end{pmatrix} \\
= & \frac{1}{(\alpha-\beta)^{2}}\begin{pmatrix} -BA\underline{\beta}\underline{\alpha}\beta^{k}\alpha^{n+1}-AB\underline{\alpha}\underline{\beta}\alpha^{k}\beta^{n+1} \\ +BA\underline{\beta}\underline{\alpha}\beta^{k+1}\alpha^{n}+AB\underline{\alpha}\underline{\beta}\alpha^{k+1}\beta^{n}\end{pmatrix} \\
= & \frac{1}{(\alpha-\beta)^{2}}\left(-BA\underline{\beta}\underline{\alpha}\beta^{k}\alpha^{n}(\alpha-\beta)+AB\underline{\alpha}\underline{\beta}\alpha^{k}\beta^{n}(\alpha-\beta)\right) \\
= & \frac{1}{(\alpha-\beta)}\left(AB\underline{\alpha}\underline{\beta}\alpha^{k}\beta^{n}-BA\underline{\beta}\underline{\alpha}\beta^{k}\alpha^{n}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada eşitlik $\frac{(\alpha\beta)^{-n}}{(\alpha\beta)^{-n}}$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
Q_{w,k}Q_{w,n+1}-Q_{w,k+1}Q_{w,n} &= \frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha\beta)^{-n}}\left(AB\underline{\alpha}\underline{\beta}\alpha^{k-n}-BA\underline{\beta}\underline{\alpha}\beta^{k-n}\right) \\
&= \frac{(-1)^{n}(\alpha\beta)^{n}}{(\alpha-\beta)}(AB\underline{\alpha}\underline{\beta}\alpha^{k-n}-AB\underline{\beta}\underline{\alpha}\beta^{k-n})
\end{aligned}$$

olur ve böylece

$$Q_{w,k}Q_{w,n+1}-Q_{w,k+1}Q_{w,n}=\frac{(-q)^{n}AB}{\alpha-\beta}(\underline{\alpha}\underline{\beta}\alpha^{k-n}-\underline{\beta}\underline{\alpha}\beta^{k-n})$$

olup ispat tamamlanır. □

Teorem 4.9. $Q_{w,n}$, n. Horadam kuaterniyon olmak üzere $k,n \in \mathbb{N}$ için

$$Q_{w,k}Q_{w,n+1} + qQ_{w,k-1}Q_{w,n} = \frac{A^2\underline{\alpha}^2\alpha^{k+n} - B^2\underline{\beta}^2\beta^{k+n}}{\alpha - \beta}$$

dir.

İspat. İlgili Binet formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& Q_{w,k}Q_{w,n+1} + qQ_{w,k-1}Q_{w,n} \\
= & \left(\frac{A\underline{\alpha}\alpha^k - B\underline{\beta}\beta^k}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{A\underline{\alpha}\alpha^{n+1} - B\underline{\beta}\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}\right) \\
& +q\left(\frac{A\underline{\alpha}\alpha^{k-1} - B\underline{\beta}\beta^{k-1}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{A\underline{\alpha}\alpha^{n} - B\underline{\beta}\beta^{n}}{\alpha-\beta}\right) \\
= & \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left\{\begin{array}{c} A^2\underline{\alpha}^2\alpha^{n+k+1} - AB\underline{\alpha}\underline{\beta}\alpha^k\beta^{n+1} + B^2\underline{\beta}^2\beta^{n+k+1} - AB\underline{\beta}\underline{\alpha}\beta^k\alpha^{n+1} \\ +qA^2\underline{\alpha}^2\alpha^{n+k-1} - qAB\underline{\alpha}\underline{\beta}\alpha^{k-1}\beta^n + qB^2\underline{\beta}^2\beta^{n+k-1} - qAB\underline{\beta}\underline{\alpha}\beta^{k-1}\alpha^n \end{array}\right\}
\end{aligned}$$

olur. Eşitlik (4.3) gözününde bulundurulursa elimizdeki eşitlik

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left\{\begin{array}{c} A^2\underline{\alpha}^2\alpha^{n+k}(\alpha + \frac{q}{\alpha}) - AB\underline{\alpha}\underline{\beta}\alpha^{k-1}\beta^n(\alpha\beta + q) \\ -B^2\underline{\beta}^2\beta^{n+k}(-\beta - \frac{q}{\beta}) - AB\underline{\beta}\underline{\alpha}\beta^{n-k}\alpha^n(\alpha\beta + q) \end{array}\right\} \\
= & \frac{A^2\underline{\alpha}^2\alpha^{k+n}(\alpha-\beta) - B^2\underline{\beta}^2\beta^{k+n}(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)^2} \\
= & \frac{A^2\underline{\alpha}^2\alpha^{k+n} - B^2\underline{\beta}^2\beta^{k+n}}{\alpha-\beta}
\end{aligned}$$

haline gelir ve böylece ispat tamamlanmıştır. □

Teorem 4.10. $Q_{w,n}$, n.Horadam kuaterniyon olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için

$$qQ_{w,n}^2 + Q_{w,n+1}^2 = \frac{A^2\underline{\alpha}^2\alpha^{2n+1} - B^2\underline{\beta}^2\beta^{2n+1}}{\alpha-\beta}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. Aşağıdaki denklem Binet formülü ile yazılabilir :

$$qQ_{w,n}^2 + Q_{w,n+1}^2$$

$$
\begin{aligned}
&= q\left(\frac{A\underline{\alpha}\alpha^n - B\underline{\beta}\beta^n}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{A\underline{\alpha}\alpha^n - B\underline{\beta}\beta^n}{\alpha-\beta}\right) + \left(\frac{A\underline{\alpha}\alpha^{n+1} - B\underline{\beta}\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{A\underline{\alpha}\alpha^{n+1} - B\underline{\beta}\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}\right) \\
&= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left(\begin{array}{c} qA^2\underline{\alpha}^2\alpha^{2n} - qAB\underline{\alpha}\underline{\beta}(\alpha\beta)^n - qAB\underline{\beta}\underline{\alpha}(\alpha\beta)^n + qB^2\underline{\beta}^2\beta^{2n} \\ + A^2\underline{\alpha}^2\alpha^{2n+2} - AB\underline{\alpha}\underline{\beta}(\alpha\beta)^{n+1} - AB\underline{\beta}\underline{\alpha}(\alpha\beta)^{n+1} + B^2\underline{\beta}^2\beta^{2n+2} \end{array}\right) \\
&= \frac{qA^2\underline{\alpha}^2\alpha^{2n} + A^2\underline{\alpha}^2\alpha^{2n+2} + qB^2\underline{\beta}^2\beta^{2n} + B^2\underline{\beta}^2\beta^{2n+2}}{(\alpha-\beta)^2} \\
&= \frac{A^2\underline{\alpha}^2\alpha^{2n}(q+\alpha^2) + B^2\underline{\beta}^2\beta^{2n}(q+\beta^2)}{(\alpha-\beta)^2}
\end{aligned}
$$

Eşitlik (4.3) uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
qQ_{w,n}^2 + Q_{w,n+1}^2 &= \frac{A^2\underline{\alpha}^2\alpha^{2n}(-\alpha\beta+\alpha^2) + B^2\underline{\beta}^2\beta^{2n}(-\alpha\beta+\beta^2}{(\alpha-\beta)^2} \\
&= \frac{A^2\underline{\alpha}^2\alpha^{2n} + B^2\underline{\beta}^2\beta^{2n}(-\beta)}{\alpha-\beta} \\
&= \frac{A^2\underline{\alpha}^2\alpha^{2n+1} - B^2\underline{\beta}^2\beta^{2n+1}}{\alpha-\beta}
\end{aligned}
$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 4.11. $Q_{w,n}$, n.Horadam kuaterniyon olmak üzere her $n \geq 0$ için

(i)

$$
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}Q_{w,2k+s}q^{n-k} = \begin{cases} Q_{w,n+s}\Delta^{\frac{n}{2}} & n \text{ çift ise} \\ (A\underline{\alpha}\alpha^{n+s} + B\underline{\beta}\beta^{n+s})\Delta^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ tek ise} \end{cases}
$$

(ii)

$$
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k Q_{w,2k+s}q^{n-k} = \begin{cases} p^n Q_{w,n+s} & n \text{ çift ise} \\ -p^n Q_{w,n+s} & n \text{ tek ise} \end{cases}
$$

(iii)

$$
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}Q_{w,k}Q_{w,k+s}q^{n-k} = \begin{cases} (A^2\underline{\alpha}^2\alpha^{n+s} + B^2\underline{\beta}^2\beta^{n+s})\Delta^{\frac{n-2}{2}} & n \text{ çift ise} \\ (A^2\underline{\alpha}^2\alpha^{n+s} - B\underline{\beta}^2\beta^{n+s})\Delta^{\frac{n-2}{2}} & n \text{ tek ise} \end{cases}
$$

(iv)

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}Q_{w,k}^{2}q^{n-k}=\begin{cases}(A^2\underline{\alpha}^2\alpha^k-B^2\underline{\beta}^2\beta^k)\Delta^{\frac{n-2}{2}} & n \text{ çift ise}\\ (A^2\underline{\alpha}^2\alpha^k-B\underline{\beta}^2\beta^k)\Delta^{\frac{n-2}{2}} & n \text{ tek ise}\end{cases}$$

(v)

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}Q_{w,k}=Q_{w,2n}.$$

dir.

İspat. (i) İlgili Binet formülünden

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}Q_{w,2k+s}q^{n-k}\\ =\ &\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{A\underline{\alpha}\alpha^{2k+s}-B\underline{\beta}\beta^{2k+s}}{\alpha-\beta}\right)q^{n-k}\\ =\ &\frac{A\underline{\alpha}\alpha^{s}}{\alpha-\beta}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\alpha^2)^kq^{n-k}-\frac{B\underline{\beta}\beta^{s}}{\alpha-\beta}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\beta^2)^kq^{n-k}\end{aligned}$$

ve binom formülünden

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}Q_{w,2k+s}q^{n-k}=\frac{A\underline{\alpha}\alpha^{s}(\alpha^2+q)^n-B\underline{\beta}\beta^{s}(\beta^2+q)^n}{\alpha-\beta}$$

dir. Şimdi de Eşitlik (4.3) gereği

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}Q_{w,2k+s}q^{n-k}=\frac{A\underline{\alpha}\alpha^{s}(\alpha\sqrt{\Delta})^n-B\underline{\beta}\beta^{s}(-\beta\sqrt{\Delta})^n}{\alpha-\beta}$$

olup burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}Q_{w,2k+s}q^{n-k}&=\frac{A\underline{\alpha}\alpha^{n}\alpha^{s}\Delta^{\frac{n}{2}}+(-1)^{n+1}B\underline{\beta}\beta^{s}\beta^{n}\Delta^{\frac{n}{2}}}{\alpha-\beta}\\ &=\left(\frac{A\underline{\alpha}\alpha^{n+s}+(-1)^{n+1}B\underline{\beta}\beta^{n+s}}{\alpha-\beta}\right)\Delta^{\frac{n}{2}}\end{aligned}$$

elde edilir ki bu istenendir. Ayrıca (ii), (iii),(iv) ve (v) de benzer yolla gösterilebilir. □

4.3. HORADAM KUATERNİYONLARININ MATRİS GÖSTERİMİ

Matris yöntemi, rekürans bağıntısı çalışmasında cebirsel gösterim veya özdeşlik elde etmek için çok kullanışlıdır. Bu amaçla, kuaterniyon dizileri için matrisler daha önce birçok araştırmacı tarafından ilgi odağı olmuştur. Örneğin [40] da yazarlar giriş elemanları $(p,q)-$Fibonacci kuaterniyon olan

$$M_{Q_w^n} = \begin{pmatrix} QF_{n+1} & qQF_n \\ QF_n & qQF_{n-1} \end{pmatrix}$$

matrisini tanımlamıştır. Yine aynı çalışmada Fibonacci kuaterniyon matrisini kullanarak Cassini özdeşliğini elde etmişlerdir. Aşağıda Horadam kuaterniyonlar için Bölüm 3 te litratür taraması verilen Q-matris (altın matris) rolünü üstlenen matris gösterimi verilmiştir.

Tanım 4.12. Giriş elemanları Horadam kuaterniyonlar olmak üzere, $n \geq 1$ ve $n \in \mathbb{Z}$ için

$$M_{Q_w^n} = \begin{pmatrix} Q_{w,n+1} & qQ_{w,n} \\ Q_{w,n} & qQ_{w,n-1} \end{pmatrix}$$

ile tanımlanan matrise Horadam kuaterniyon matrisi denir.

Teorem 4.13. $Q_{w,n}$, n.Horadam kuaterniyon olmak üzere, $n \geq 1$ için

$$\begin{pmatrix} Q_{w,n+1} & qQ_{w,n} \\ Q_{w,n} & qQ_{w,n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{w,2} & qQ_{w,1} \\ Q_{w,1} & qQ_{w,0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1}$$

dir.

İspat. Tümevarım yöntemini kullanarak ispat kolayca gösterilebilir. $n = 1$ için ilk adım açıktır. Kabul edelim ki $n = k-1$ için eşitlik geçerli olsun. Yani

$$\begin{pmatrix} Q_{w,k} & qQ_{w,k-1} \\ Q_{w,k-1} & qQ_{w,k-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{w,2} & qQ_{w,1} \\ Q_{w,1} & qQ_{w,0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{k-2}$$

olsun. $n=k$ için de doğru olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. Öyleyse

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} Q_{w,2} & qQ_{w,1} \\ Q_{w,1} & qQ_{w,0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{k-1} \\
&= \begin{pmatrix} Q_{w,2} & qQ_{w,1} \\ Q_{w,1} & qQ_{w,0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{k-2} \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} Q_{w,k} & qQ_{w,k-1} \\ Q_{w,k-1} & qQ_{w,k-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

buradan

$$\begin{pmatrix} Q_{w,2} & qQ_{w,1} \\ Q_{w,1} & qQ_{w,0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{k-1} = \begin{pmatrix} Q_{w,k+1} & qQ_{w,k} \\ Q_{w,k} & qQ_{w,k-1} \end{pmatrix}$$

elde edilir ki bu istenendir. □

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada önce iki değişkenli Fibonacci kuaterniyon (QBF) polinomları ile iki değişkenli Lucas kuaterniyon (QBL) polinomlarının yeni bir genelleştirmesi tanıtıldı. Akabinde üreteç fonksiyonu ve Binet formülleri oluşturuldu. Binet formülü vasıtasıyla çeşitli toplam formülleri, binom toplamları, Catalan özdeşliği, Cassini özdeşliği, d'Ocagne özdeşliği ve çeşitli özdeşlikler verildi. Ayrıca QBF ve QBL polinomları için matris formları sunuldu. Diğer yandan son bölümde daha önce tanıtılmış olan Horadam kuaterniyon dizisi için bazı özdeşlikler, binom toplamları ve çeşitli toplam formülleri ile matris gösterimi verildi.

Kuaterniyonlar ve oktoniyonlar, kuantum fiziğinde, uygulamalı matematikte, grafik teorisinde ve diferansiyel denklemlerde kullanılması dolayısıyla büyük önem teşkil etmektedirler. Bu nedenle, gelecekteki çalışmalarımızda iki değişkenli Fibonacci ve Lucas oktoniyon polinomlarının ve bunların temel özelliklerinin incelenmesi planlanmaktadır. Ayrıca giriş elemanları Horadam kuaterniyonları olan circulant matrislerin incelenmesi ve iki değişkenli Fibonacci ve Lucas kuaterniyon dizileri ile Horadam kuaterniyon dizileri için binom dönüşümleri oluşturulması planlanmaktadır.

6. KAYNAKLAR

[1] T. Koshy, *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*. New York, USA: A Wiley Interscience, 2001.

[2] J. P. Ward, *Quaternions and Cayley Numbers*. London, England: Kluwer Academic Publishers, 1997.

[3] K. Gürlebeck and W. Sprossig, *Quaternionic and Clifford Calculus for Physicists and Engineers*. West Sussex, England: John Wiley, Sons, 1997.

[4] M. N. S. Swamy, "Generalized fibonacci and lucas polynomials, and their associated diagonal polynomials," *Fibonacci Quarterly*, vol. 37, no. 3, pp. 213–222, 1999.

[5] M. Catalani. (2004, Jun.) Generalized bivariate fibonacci polynomials. [Online]. Available: http://front.math.ucdavis.edu/math.CO/0211366

[6] A. Nalli and P. Haukkanen, "On generalized fibonacci and lucas polynomials," *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 42, no. 5, pp. 3179–3186, 2009.

[7] H. W. Gould, "A history of the fibonacci q-matrix and a higher dimensional problem," *The Fibonacci Quarterly*, vol. 19, no. 3, pp. 250–257, 1981.

[8] V. E. Hoggatt and I. Ruggles, "A primer on the fibonacci sequence part iv," *The Fibonacci Quarterly*, vol. 1, no. 4, pp. 65–71, 1963.

[9] A. F. Horadam, "Complex fibonacci numbers and fibonacci quaternions," *The American Mathematical Monthly*, vol. 70, no. 3, pp. 289–291, 1963.

[10] . A. F. Horadam, "Quaternion recurrence relations," *Ulam Quaterly*, vol. 2, no. 2, pp. 23–33, 1993.

[11] A. Özkoç and A. Porsuk, "A note for the (p,q)-fibonacci and lucas quaternion polynomials," *Konuralp Journal of Mathematics*, vol. 5, no. 2, pp. 36–46, 2017.

[12] P. Catarino, "A note on $h(x)$-fibonacci quaternion polynomials," *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 77, pp. 1–5, 2015.

[13] A. Szynal-Lianna and I. Wloch, "The pell quaternions and the pell octonions," *Advances in Applied Clifford Algebras*, vol. 26, no. 1, pp. 435–440, 2016.

[14] . A. Szynal-Lianna and I. Wloch, "A note on jacobsthal quaternions," *Advances in Applied Clifford Algebras*, vol. 26, no. 1, pp. 441–447, 2016.

[15] M. R. Iyer, "A note on fibonacci quaternions," *Fibonacci Quarterly*, vol. 7, no. 3, pp. 225–229, 1969.

[16] . M. R. Iyer, “Some results on fibonacci quaternions,” *Fibonacci Quarterly*, vol. 7, no. 2, pp. 201–210, 1969.

[17] S. Halici, “On fibonacci quaternions,” *Advances in Applied Clifford Algebras*, vol. 22, no. 2, pp. 321–327, 2012.

[18] E. Polatlı, “A generalization of fibonacci and lucas quaternions,” *Advances in Applied Clifford Algebras*, vol. 26, no. 2, pp. 719–730, 2016.

[19] P. Haukkanen, “A note on horadam’s sequence,” *Fibonacci Quarterl*, vol. 40, no. 4, pp. 358–361, 2002.

[20] C. B. Çimen and A. İpek, “On pell quaternions and pell-lucas quaternions,” *Advances in Applied Clifford Algebras*, vol. 26, no. 1, pp. 39–51, 2016.

[21] C. Flaut and V. Shpakivskyi, “On generalized fibonacci quaternions and fibonacci-narayana quaternions,” *Advances in Applied Clifford Algebras*, vol. 23, no. 3, pp. 673–688, 2017.

[22] E. Polatli and S. Kesim, “On quaternions with generalized fibonacci and lucas number components,” *Advances in Difference Equations*, vol. 2015, pp. 1–8, 2015.

[23] S. Halici and A. Karataş, “On a generalization for fibonacci quaternions,” *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 98, pp. 178–182, 2017.

[24] S. G. Rayaguru, D. Savin, and G. K. Panda, “On some horadam symbol elements,” *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, vol. 25, no. 25, pp. 91–112, 2019.

[25] P. Catarino, “A note on certain matrices with $h(x)$-fibonacci quaternion polynomials,” *Journal of Difference Equations and Applications*, vol. 22, no. 2, pp. 343–351, 2016.

[26] S. Vajda, *Fibonacci and Lucas Numbers and the Golden Section*. Chichester, England: Ellis Horwood, 1989.

[27] A. F. Horadam, “Generating functions for powers of a certain generalized sequence of numbers,” *Duke Mathematical Journal*, vol. 32, no. 2, pp. 437–446, 1965.

[28] . A. F. Horadam, “Basic properties of a certain generalized sequence of numbers,” *Fibonacci Quarterly*, vol. 3, no. 3, pp. 161–176, 1965.

[29] G. Y. Lee and M. Aşcı, “Some properties of the (p,q)-fibonacci and (p,q)-lucas polynomials,” *Journal of Applied Mathematics*, vol. 2012, pp. 1–18, 2012.

[30] M. Catalani. (2004, Jun.) Identities for fibonacci and lucas polynomials derived from a book of gould. [Online]. Available: http://front.math.ucdavis.edu/math.CO/0407105

[31] . M. Catalani. (2004, Jun.) Some formulae for bivariate fibonacci and lucas polynomials. [Online]. Available: http://front.math.ucdavis.edu/math.CO/0406323

[32] E. G. Koçer and Ş. Tuncez, “Bivariate fibonacci and lucas like polynomials,” *Gazi University Journal of Science*, vol. 29, no. 1, pp. 109–113, 2016.

[33] W. R. Hamilton, *Elements of Quaternions*. London, Longmans: Green, Company, 1866.

[34] A. L. Iakin, "Extended binet forms for generalized quaternions of higher order," *Fibonacci Quarterly*, vol. 19, no. 5, pp. 410–413, 1981.

[35] A. Özkoç Öztürk and F. Kaplan, "Some properties of bivariate fibonacci and lucas quaternion polynomials," *Facta Universitatis Series: Mathematics and Informatics*, vol. 35, no. 1, pp. 73–87, 2020.

[36] C. E. Serkland, "The pell sequence and some generalizations," Master's thesis, San Jose State University, San Jose, California, 1972.

[37] V. E. Hoggat and M. Bicknell, "Generalized fibonacci polynomials," *Fibonacci Quarterly*, vol. 11, no. 5, pp. 457–465, 1973.

[38] F. Birol, "Fibonacci, lucas, pell, pell-lucas, genelleştirilmiş pell sayı dizileri ve polinomlarının lineer gruplarla ilişkileri," Master's thesis, Balıkesir Üniversitesi, Balıkesir, Türkiye, 2018.

[39] A. F. Horadam and J. M. Mahon, "Pell and pell-lucas polynomials," *Fibonacci Quarterly*, vol. 23, no. 1, pp. 7–20, 1985.

[40] B. K. Patel and P. K. Ray, "On the properties of (p,q)-fibonacci and (p,q)-lucas quaternions," *Mathematical Reports*, vol. 21, no. 1, pp. 15–25, 2019.

[41] B. D. Bitim, "Some identities of fibonacci and lucas quaternions by quaternion matrices," *Düzce Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi*, vol. 7, no. 1, pp. 606–615, 2019.

[42] A. İpek, "On (p,q)-fibonacci quaternions and their binet formulas, generating function and certain binomial sums," *Advances in Applied Clifford Algebras*, vol. 27, no. 2, pp. 1343–1351, 2017.

[43] A. L. Iakin, "Generalized quaternions of higher order," *Fibonacci Quarterly*, vol. 15, no. 4, pp. 343–346, 1977.

[44] . A. L. Iakin, "Generalized quaternions with quaternion components," *Fibonacci Quarterly*, vol. 15, no. 4, pp. 350–352, 1977.

[45] C. Flaut and D. Savin, "Quaternion algebras and generalized fibonacci lucas quaternions," *Advances in Applied Clifford Algebras*, vol. 25, no. 4, pp. 853–862, 2015.

[46] M. N. S. Swamy, "On generalized fibonacci quaternions," *Fibonacci Quarterly*, vol. 11, no. 5, pp. 547–549, 1973.

[47] J. L. Ramirez, "Some combinatorial properties of the $k-$fibonacci and the $k-$lucas quaternions," *Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta*, vol. 23, no. 2, pp. 201–212, 2015.

[48] A. Özkoç Öztürk and F. Kaplan, "On the horadam quaternions," Palestine Journal of Mathematics, November 2019, to be published.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	: Faruk KAPLAN
Doğum Tarihi ve Yeri	: 1992 Bursa
Yabancı Dili	: İngilizce
Eposta	: farkaplan@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Y. Lisans	Matematik Bölümü	Düzce Üniversitesi	
Lisans	Matematik Bölümü	Afyon Kocatepe Üniversitesi	2017
Lise		Gürsu Yıldız Tekstil Lisesi	2010

A. Uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler :

A1. A.Özkoç Öztürk, F. Kaplan, "Some Properties of Bivariate Fibonacci and Lucas Quaternion Polynomials," *Facta Universitatis, Series:Mathematics and Informatics,* vol. 34, no. 1, pp. 73-87, 2020.

A2. A1. A.Özkoç Öztürk, F. Kaplan, "1. New Identities for the Horadam Quaternions, Palestine Journal of Mathematics," kabul edildi basımda.

B. Uluslararası sempozyum faaliyetleri :

B1. F. Kaplan, A. Özkoç Öztürk, "On Bivariate Fibonacci and Lucas Quaternion Polynomials," *Minisymposium on Approximation Theory and Minisymposium on Math Education,* 3-6 July, 2018, Istanbul, Turkey.

B2. F. Kaplan, A. Özkoç Öztürk, "Binomial Transform of the Horadam Quaternion Sequences and Its Properties," *9th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA),* 25-28 August, 2020, Skopje, North Macedonia.