

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANA BİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

**SABİT BASINÇLI İZENTROPİK GAZLARIN HAREKETİNİ MODELLEYEN
DENKLEMLER SİSTEMİNİN SÜREKSİZ FONKSİYONLAR SINIFINDA
NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tunakan KÜÇÜKBAŞ

Tez Danışmanı:

Prof. Dr. Mahir RESULOV

İSTANBUL, 2007

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANA BİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

**SABİT BASINÇLI İZENTROPİK GAZLARIN HAREKETİNİ MODELLEYEN
DENKLEMLER SİSTEMİNİN SÜREKSİZ FONKSİYONLAR SINIFINDA
NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tunakan KÜÇÜKBAŞ

Tez Danışmanı:

Prof. Dr. Mahir RESULOV

İSTANBUL, 2007

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmamda bana her türlü desteği ve kolaylığı sağlayan, sonsuz sabır gösteren ve hiç bir fedakarlıktan kaçınmayan tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Mahir Resulov'a, kendisi ile daima irtibat halinde olduğum Sayın Yrd.Doç.Dr. Bahaddin Sinsoysal'a, her zaman yanımda olan eşime, maddi ve manevi olarak da bana yardımcı olan anneme, babama ve kardeşime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tunakan KÜÇÜKBAŞ

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	i
İÇİNDEKİLER	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
1. GİRİŞ	1
2. BİRİNCİ BASAMAKTAN KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN KARAKTERİSTİKLER YÖNTEMİ	6
2.1 Lineer Denklem	6
2.2 Kuazi Lineer Denklem	9
2.3 Hidrodinamiğin Model Denklemler Sistemi İçin Cauchy Problemi	10
3. BİRİNCİ BASAMAKTAN KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER SİSTEMİ	13
3.1 Soft (Yumuşak) Çözümler	13
3.2 Lineer Denklemlerin İncelenmesi	15
4. SÜREKLİ BAŞLANGIÇ KOŞULLU CAUCHY PROBLEMİ	19
5. SÜREKSİZ FONKSİYONLAR SINIFINDA SONLU FARK YÖNTEMİ	30
5.1 Cauchy Problemi	30
5.2 Başlangıç Sınır Değer Problemi	35
5.2.1 Açık Sonlu Farklar Yöntemi.....	35
5.2.2 Açık Olmayan Sonlu Farklar Yöntemi	38
6. SONUÇLAR	40
7. İRDELEME VE ÖNERİLER	41
8. KAYNAKLAR	42
ÖZGEÇMİŞ	43

ÖZET

Yedi bölümden oluşan tezin giriş kısmında gaz dinamiği denklemleri ele alınmış ve bunun için gereken kavramlar verilmiştir.

Birinci bölümde, birinci basamaktan kısmi türevli hiperbolik tür diferansiyel denklemlerin gerçek çözümünü elde etmek için karakteristikler yöntemi incelenmiştir. Karakteristikler yöntemini kullanarak sabit basınçlı, izotropik gazın hareketini ifade eden kısmi türevli diferansiyel denklem sisteminin gerçek çözümü ele alınmıştır. Bunun için özel yapıya sahip yardımcı problem önerilmiş ve söz konusu yardımcı problemin özellikleri kullanılarak esas problemin gerçek çözümü daha sade bir yolla elde edilmiştir.

Karakteristikler yöntemiyle bulunan çözümler genelde kapalı fonksiyon şeklinde elde edilir ve bu nedenle, söz konusu çözümler çoğu zaman pratik amaçlar için kullanılamaz.

Bunun için problemin sayısal çözümünün ele alınması problemi ortaya çıkar. Söz konusu denklemler sisteminin sayısal çözümünü ele alırken ise çözümün yüksek mertebeden diferansiyellenebilir olması gerekmektedir.

Lakin, literatürden bilindiği gibi, nonlinear hiperbolik tür denklemlerin çözümleri başlangıç profili sürekli olduğu halde bile, yeri önceden bilinmeyen süreksizlik noktalarına sahiptirler.

Süreksiz fonksiyonlarda diferansiyel denklemin klasik anlamda çözümü olmadığı için tezde gaz dinamiği denklemler sisteminin zayıf çözüm kavramı içerilmiş ve zayıf çözümün ele alınması için özel yapıya sahip yardımcı problem önerilmiştir.

Önerilen yardımcı problemin çözümünün diferansiyellenebilme özelliği esas problemin diferansiyellenebilme özelliğinden bir mertebe fazla olduğundan, yardımcı problem üzerinde sonlu farklar yöntemi kullanılarak, sade ve efektif algoritmalarla nümerik çözüm elde edilmiştir.

ABSTRACT

In this work, the method of characteristics for obtaining the exact solution of the first order partial equation of a hyperbolic type is investigated. Modifying the method of characteristics, the exact solution of system equations which describe unsteady one-dimensional isentropic flow is found too. For this aim a special auxiliary problem has been included, and using some advantages of the auxiliary problem, the exact solution of the problem of interest has been easily obtained.

It is known that the method of characteristics permits to express a solution in an implicit form. But often it is impossible to use this formula for practical purposes. Therefore, a necessity arises to develop a numerical method for solving the Cauchy or initial-boundary value problem for the first-order nonlinear partial differential equations. In order to approximate a first-order partial differential equation by finite difference, a higher smoothness than the solution is required. But, it is known that the solution of the Cauchy problem for the first-order nonlinear equation has the points of discontinuities even if the initial function is sufficiently smooth .

Since a discontinuous function does not satisfy a differential equation in a classical sense, it is necessary to introduce the concept of a weak solution. In order to find the weak solution, the special auxiliary problem is introduced, since it has some advantages over the main problem and permits to obtain the solution in a class of discontinuous functions. Using the advantages of the auxiliary problem some numerical algorithms are suggested.

1. GİRİŞ

Mekaniğin bir çok probleminde, özellikle de gaz dinamiğinde nonlinear hiperbolik tür denklemler sistemi ile ifade edilebilen korunma kanunlarının incelenmesi zorunluluğu ortaya çıkar. Nonlinear hiperbolik tür denklemlerin en ilginç yanı çözümlerinin önceden bilinmeyen sıçrayış noktalarına sahip olmasıdır.

Korunma kanunlarının en sadesi Hopf denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0 \quad (1.1)$$

olmaktadır.

Bu denkleme hidrodinamiğin model denklemi de denir ve söz konusu denklemlerle birçok problem, örneğin, otobandaki trafik akışı modellenmektedir. $u(x,t)$ ile birim uzunluktaki (bir mildeki araba sayısı) araba yoğunluğu, $q(x,t)$ ile birim zaman zarfında yolun her hangi bir x kesitinde geçmekte olan araba akışını gösterelim. Otobanın her hangi bir $[a,b]$ parçasını ve $\Delta t = t_2 - t_1 \leq 1$ olmak üzere t_1 ve t_2 zaman değerlerini göz önüne alırsak,

$$\int_a^b u(x,t_1) dx \text{ ve } \int_a^b u(x,t_2) dx$$

integralleri sırasıyla t_1 ve t_2 zamanlarındaki araba sayılarını ifade etmektedir ve aşağıdaki

$$\int_a^b u(x,t_2) dx - \int_a^b u(x,t_1) dx = \int_{t_1}^{t_2} q(a,s) ds - \int_{t_1}^{t_2} q(b,s) ds \quad (1.2)$$

denge denklemi mevcut olmaktadır. Burada,

$$\int_{t_1}^{t_2} q(a,s) ds \text{ ve } \int_{t_1}^{t_2} q(b,s) ds$$

Δt zaman zarfında, a noktasında trafikte dahil olan ve b noktasında trafikten çıkan arabaların sayısı olmaktadır.

(1.2) denkleminden ortalama değer teoremi yardımıyla

$$\int_a^b (u(x, t_2) - u(x, t_1)) dx = \int_a^b \frac{\partial u(x, \bar{t})}{\partial t} (t_2 - t_1) dx, \quad \bar{t} \in (t_2, t_1)$$

ve

$$\int_{t_1}^{t_2} q(a, s) ds - \int_{t_1}^{t_2} q(b, s) ds = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial q}{\partial x}(\bar{a}, s) (b - a) ds, \quad \bar{a} \in (a, b)$$

elde edilir. Böylelikle, (1.2)'yi aşağıdaki gibi yazarız

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_a^b \frac{\partial u(x, \bar{t})}{\partial t} (t_2 - t_1) dx = \frac{1}{(b - a)} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial q(\bar{a}, s) (b - a)}{\partial x} ds.$$

Şimdi $t_2 \rightarrow t_1$ ve $a, b \rightarrow x$ olmak koşuluyla limit alırsak

$$\frac{\partial u(x, t_1)}{\partial t} = - \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} \quad (1.3)$$

denklemini elde ederiz. (1.3) denklemindeki en önemli problem q 'nun lokal araba yoğunluğunun ifadesi olmasıdır. Pratikte bu bağıntı

$$f(u) = -(u - u_m)^2 + f_0$$

şeklinde ele alınmaktadır. Burada u_m ve f_0 sabitlerdir.

Genelde gaz dinamiğinin esas problemi, gazın tam hareketini ve onun diğer fiziksel cisimlere karşı olan etkisinin incelenmesidir. Bilindiği gibi, gaz ile doldurulmuş ω hacmi, sonlu sayıda hareket eden $\mu_i (i = 1, \bar{n})$ sonlu sayıda molekülünden oluşur. Her bir μ_i -molekülü m_i -kütlesine, u_i -hız vektörüne, $m_i u_i$ -impulsuna, $\frac{1}{2} m_i |u_i|^2$ -kinetik enerjisine ve ε_i -dahili enerjiye sahiptir.

Gazın hareketini direkt matematiksel olarak ifade etmek çok da optimal olmamaktadır. Çünkü 1 cm^3 havada $2,7 \cdot 10^{19}$ sayıda molekül olmaktadır. Bundan dolayı, gaz dinamiğinde gazın hareketi ve karşılıklı ilişkisi ortalama parametrelerle ifade edilmektedir. Bu nedenle gaz dinamiğini ifade eden iki türlü metot kullanılmaktadır. Bunlar gozokinetik ve fenomenolojik ifade tarzlarıdır.

Fenomonolojik ifade tarzında keyfi ω elementar hacmine maddi nokta gibi bakılmakta ve bu nedenle de her bir fiziksel parametrenin ω hacmi üzerinden ortalama değer alınmaktadır.

Eğer gaz, R^3 de, yani üç boyutlu uzayda hareket ederse gazın her bir $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ noktadaki durumu t zamanına bağlı olmaktadır. Bundan dolayı hareketi $R^4(\vec{x}, t)$ uzayında inceleyeceğiz.

Gaz dinamiğinde esas büyüklükler aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir;

- hız vektörü $\vec{u} = \vec{u}(x, t)$
- yoğunluk $\rho = \rho(x, t)$
- basınç $p = p(x, t)$
- dahili enerji $\varepsilon = \varepsilon(x, t)$

Gazın konumu $x = x(t)$ zamana bağlı olduğundan $\frac{dx}{dt} = \vec{u}(x, t)$ denklemi gazın hareketini ifade eder. Son denklemi koordinatlarda

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u(x, y, z, t) \\ \frac{dy}{dt} = v(x, y, z, t) \\ \frac{dz}{dt} = w(x, y, z, t) \end{cases} \quad (1.4)$$

olarak yazabiliriz. Burada, $\vec{u}(x, y, z, t) = (u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t))$ olmaktadır.

Eğer, herhangi bir D bölgesinde \vec{u} vektör alanı verilirse, D bölgesinin her bir noktası (1.4) denklemler sisteminin integral eğrileri ile örtülür ve bu eğrilere gaz parçacıklarının hareket yörüngeleri denir.

Eğer (1.4) denklemler sistemine uygun başlangıç koşulları $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$ eklenirse (1.4) sisteminin tek bir çözümü elde edilmiş olur ve $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ koordinatları Lagrange koordinatları olarak belirlenir.

Hareket edebilen hacim, her bir t zaman için aynı moleküllerden oluşan bölgeye, hareket eden bölge veya maddi bölge denir. Bu bölgeyi $\omega(t) \subset R^3$ olarak gösterelim. Bilindiği gibi her bir maddi bölgeye bir sert ortam gibi de bakmak mümkündür. Ayrıca da bu ortamda aşağıdaki büyüklükler ele alınabilir.

$$\begin{aligned} \text{kütle} & \quad \iiint_{w(t)} \rho \, dw, \\ \text{impuls} & \quad \iiint_{w(t)} \rho \vec{u} \, dw, \end{aligned}$$

burada $\rho = |\vec{u}|$ hız vektörünün modülü olmaktadır. Bu büyüklükler yardımı ile fiziksel korunma kanunlarını ifade etmek mümkündür. Örneğin, kütle korunma kanunu

$$\frac{d}{dt} \iiint_{w(t)} \rho \, dw = 0, \quad (1.5)$$

impulsun korunma kanunu

$$\frac{d}{dt} \iiint_{w(t)} \rho \vec{u} \, dw = F, \quad (1.6)$$

enerjinin korunma kanunu ise

$$\frac{d}{dt} \iiint_{w(t)} \rho \left(\frac{1}{2} q^2 + \varepsilon \right) dw = W + Q$$

şeklinde ifade edilmektedir.

Şimdi gazın hareketini ifade edebilen diferansiyel denklemleri ele alalım.

Tanım 1. Eğer \vec{u} , ρ , p ve ε fonksiyonları sürekli fonksiyonlar ise, gazın hareketine sürekli hareket denir.

Eğer gazı etkileyen F kuvveti yalnız dış kuvvet, yani basınç olursa, $F = - \iint_{\gamma(t)} p \vec{n} \, d\gamma$

gibi ifade edilir ve (1.6) korunma kanunu

$$\frac{d}{dt} \iiint_{w(t)} \rho \vec{u} \, dw = - \iint_{\gamma(t)} p \vec{n} \, d\gamma \quad (1.7)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\gamma(t)$ $w(t)$ 'nin yüzeyini, \vec{n} ise $\gamma(t)$ yüzeyinin dış normalini göstermektedir.

Şimdi, oldukça önemli bir lemmayı ifade edelim.

Lemma 1. Hareket edebilen bölge üzerinden alan integralinin zamana göre türevi

$$\frac{d}{dt} \iiint_{w(t)} f \, dw = \iiint_{w(t)} (Df + f \operatorname{div} \vec{u}) \, dw \quad (1.8)$$

olmaktadır. Burada

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.9)$$

dır. (1.9) ifadesini dikkate alarak (1.7)'e Gauss formülünü uygularsak

$$\iiint_{\omega(t)} [\rho_t + \text{div}(\rho \vec{u})] dw = 0 \quad (1.10)$$

olarak elde ederiz. $\omega(t)$ bölgesi keyfi olduğundan (1.10) dan

$$\rho_t + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0 \quad (1.11)$$

diferansiyel denklemini elde ederiz ve bu denkleme süreklilik denklemi de denir.

Aynı yolla impuls denklemini ve enerji denklemini de aşağıdaki şekilde

$$\left(\rho \left(\frac{1}{2} q^2 + \varepsilon \right) \right)_t + \text{div} \left(\rho \left(\frac{1}{2} q^2 + \varepsilon \right) \vec{u} + \rho \vec{u} \right) = 0 \quad ,$$

veya

$$\varepsilon_t + \vec{u} \cdot \nabla \varepsilon + \frac{p}{\rho} \text{div} \vec{u} = 0 \quad (1.12)$$

şekilde elde ederiz.

Özel durumda da hareketi bir boyutlu olarak kabul edersek, aşağıdaki denklemler sistemini

$$U_t + F_x(U) = 0 \quad (1.13)$$

vektör şeklinde de

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{bmatrix} \quad , \quad F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(e + p) \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

yazabiliriz.

2. BİRİNCİ BASAMAKTAN KISMİ TÜREVLİ LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN KARAKTERİSTİKLER YÖNTEMİ

Diferansiyel denklem teorisinden bilindiği gibi, $u(x,y)$ fonksiyonuna göre birinci basamaktan kısmi türevli diferansiyel denklemin genel yazılım formu

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \quad (2.1)$$

şeklindedir.

2.1 Lineer Durum

Eğer, F u , u_x ve u_y değişkenlerine göre lineer fonksiyon ise (2.1) denklemi

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y) \quad (2.2)$$

şeklinde yazılabilir ve buna 1.basamaktan lineer diferansiyel denklemin genel yazılım formu denir. Burada, a , b , c ve f fonksiyonları x ve y ' ye bağlı bilinen fonksiyonlardır.

Eğer F , yalnız u_x ve u_y ye göre lineer olursa (2.1) denklemi

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u) \quad (2.3)$$

şeklinde yazılır ve bu tür denklemlere kuazi lineer denklem denir. Bu bölümde biz (2.2) ve (2.3) denklemlerinin genel çözümlerini elde etmek için karakteristikler yöntemini inceleyeceğiz. Önce

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = 0 \quad (2.4)$$

denklemini göz önüne alalım. Parametrik denklemleri $x = x(t)$ ve $y = y(t)$ ile tanımlanan bir l eğrisi ele alalım. Bilindiği üzere $u(x,y)$ fonksiyonunun t ye göre tam türevi

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad (2.5)$$

dir. (2.5) ifadesi ile (2.4) denklemi karşılaştırıldığında, $\frac{dx}{dt} = a(x, y)$ ve $\frac{dy}{dt} = b(x, y)$ olursa

(2.4) denklemini de, $\frac{du}{dt} = 0$ olarak yazabiliriz. Böylece (2.4) kısmi türevli diferansiyel denklem

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = b(x, y) \\ \frac{du}{dt} = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

adi diferansiyel denklemler sistemine indirgenmiş olur. (2.6) denklem sistemini aşağıdaki gibi simetrik

$$\frac{dx}{a(x, y)} = \frac{dy}{b(x, y)} = \frac{du}{0} \quad (2.7)$$

şekilde de yazabiliriz. (2.7) denklem sisteminin iki tane 1. aralık integrali vardır. Bunları

$$\varphi(x, y, u) = c_1, \quad (2.8)$$

$$\psi(x, y, u) = c_2 \quad (2.9)$$

olarak gösterelim.

Teorem 1. Eğer $c_1 = \varphi(x, y, u)$ $c_2 = \psi(x, y, u)$ karakteristik denklemler sisteminin birinci aralık integralleri ise,

$$F(c_1, c_2) = 0 \quad (2.10)$$

kapalı fonksiyonu (2.4) denkleminin genel çözümüdür.

Bu metoda karakteristikler metodu denir. Burada F kendi argümanına göre keyfi ve diferansiyellenebilen bir fonksiyondur.

Örnek 1. $2u_x + 3u_y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulalım.

Çözüm. Birinci adımda karakteristik denklemini yazalım

$$\frac{dx}{2} = \frac{dy}{3} = \frac{du}{0}$$

Birinci aralık integralleri sırasıyla

$$\frac{dx}{2} = \frac{dy}{3} \quad \text{ve} \quad du=0$$

denklemlerinden elde edilir. Birinci denklemden $c_1 = 3x - 2y$, ikinci denklemden ise $u = c_2$ olarak bulunur. Teorem1'e göre $F(c_1, c_2) = 0$ veya $F(3x - 2y, u) = 0$ denkleminin genel çözümü olmaktadır ve $u = f(3x - 2y)$ şeklinde elde edilir. Burada F keyfi ve diferansiyellenebilen bir fonksiyon olmaktadır.

Örnek 2. $u_x + y u_y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulalım.

Çözüm. Denkleme karşılık gelen karakteristik denklemler sistemini yazalım ve birinci aralık integralleri

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{0}$$

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{y}, \quad du = 0$$

denklemlerinden $c_1 = x - \ln y$ ve $c_2 = u$ olarak bulunur. Genel çözüm $F(x - \ln y, u) = 0$, veya $u = f(x - \ln y)$ şeklinde yazabiliriz. Burada F kendi argumanına göre diferansiyellenebilen keyfi bir fonksiyon olmaktadır.

Örnek 3. $(1 + x^2)u_x + u_y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulalım.

Çözüm. Karakteristikler denklem sistemi

$$\frac{dx}{1+x^2} = \frac{dy}{1} = \frac{du}{0}$$

dir ve birinci aralık integralleri $c_1 = \arctan x - y$ ve $c_2 = u$ olmaktadır. Genel çözümü

$$u = f(\arctan x - y) \text{ dir.}$$

Burada f diferansiyellenebilen keyfi bir fonksiyondur.

Örnek 4. $2xy u_x + (x^2 + y^2)u_y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulalım.

Çözüm. Karakteristikler denklem sistemi

$$\frac{dx}{2xy} = \frac{dy}{x^2 + y^2} = \frac{du}{0}$$

dır. Bu sistemin birinci aralık integralleri

$$\frac{d(x+y)}{(x+y)^2} = \frac{d(x-y)}{(x-y)^2} \Rightarrow -\frac{1}{x+y} = -\frac{1}{x-y} + c_1, \text{ ve } u = c_2$$

dir ve genel çözümü

$$u = f\left(-\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y}\right)$$

olarak elde edilir.

2.2 Kuazi Lineer Denklem

Kuazi lineer denklem için de yukarıda ifade ettiğimiz Teorem 1 geçerlidir.

Örnek 5. $(y+u)u_x + yu_y = x-y$ denkleminin genel çözümünü bulalım.

Çözüm. Önce karakteristikler denklem sistemini

$$\frac{dx}{y+u} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{x-y}$$

yazalım. Birinci aralık integralleri sırasıyla

$$\frac{d(x-y)}{u} = \frac{du}{x-y} \Rightarrow (x-y)d(x-y) = u du$$

$$\frac{(x-y)^2}{2} = \frac{u^2}{2} + c_1 \Rightarrow c_1 = (x-y)^2 - u^2$$

$$\frac{d(y+u)}{x} = \frac{dx}{y+u} \Rightarrow c_2 = u^2 - (x-y)^2, c_2 = x^2 - (y+u)^2$$

olarak elde edilir. Genel teoriye göre çözüm

$$F(c_1, c_2) = F(u^2 - (x-y)^2, x^2 - (y+u)^2) = 0$$

olarak yazılır.

2.3 Hidrodinamiğin Model Denklemler Sistemi İçin Cauchy Probleminin Çözümü

Aşağıda nonlinear denklem sistemi için yazılmış başlangıç değer problemini

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0, \quad (2.12)$$

$$u(x,0) = f(x), \quad (2.13)$$

$$\rho(x,0) = g(x) \quad (2.14)$$

göz önüne alalım. Burada, $f(x)$ ve $g(x)$ diferansiyellenebilen bilinen fonksiyonlardır.

(2.11) ve (2.12) sisteminin birinci denklemini ρ bilinmeyeninden bağımsız olduğundan, bu sistemin çözümünü elde etmek için karakteristikler yöntemini uygulamak mümkündür. (2.11), (2.13) probleminin karakteristikler yöntemi ile çözümünü elde etmek için

$$\frac{dx}{dt} = u \quad (2.15)$$

eşitliği ile tanımlanan $x = x(t)$ eğrisini ele alalım. Söz konusu eğri üzerinde

$$\frac{du}{dt} = 0 \quad (2.16)$$

olmaktadır. (2.15), (2.16) adi diferansiyel denklem sistemi için aşağıdaki başlangıç koşullarını yazalım

$$x|_{t=0} = a, \quad u(a,0) = f(a) \quad (2.17)$$

(2.16)'dan $u = \text{sabit}$ olduğundan (2.15) den

$$x = ut + a$$

veya

$$a = x - ut \quad (2.18)$$

olarak elde ederiz. (2.18) ifadesini dikkate alarak (2.11), (2.13) probleminin çözümü için

$$u(x,t) = f(a) = f(x-ut) \quad (2.19)$$

bir ifade elde ederiz.

Şimdi (2.12) denkleminin çözümünü bulmak için (x,t) koordinat sisteminden Jakobiyeni sıfırdan farklı olan ve aşağıdaki gibi tanımlanabilen değişken dönüşümünü yapalım

$$\begin{cases} a = a(x,t) = x-ut \\ \tau = t \end{cases} \quad (2.20)$$

Bu dönüşümü şu şekilde

$$\begin{aligned} J &= \frac{D(a,\tau)}{D(x,t)} = \left[\frac{D(x,t)}{D(a,\tau)} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} t \frac{\partial u}{\partial a} + 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial a} t \right) = (1 + f'_a t) \end{aligned} \quad (2.21)$$

yazabiliriz.

(2.20) koordinatlarında u_x türevinin ifadesini bulalım. Bundan dolayı

$$u = u(x,t) \Rightarrow u(x,(a,\tau),\tau) = \bar{u}(a,\tau)$$

olsun. Buradan

$$u_x = \bar{u}_a \cdot a_x = \bar{u}_a (1 - u_x t)$$

ve

$$u_x = \frac{\bar{u}_a}{1 + t \bar{u}_a} = \frac{f'_a(a)}{1 + t f'_a(a)} \quad (2.22)$$

olarak elde ederiz. (2.21) ifadesi (2.22)'de dikkate alınırsa u_x 'i aşağıdaki şekilde

$$u_x = \frac{\frac{dJ}{dt}}{J} = \frac{1}{J} \frac{dJ}{dt} \quad (2.23)$$

yazabiliriz. Şimdi (2.12) denklemini $\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho u_x$ şeklinde yazıp, sonra (2.22)

ifadesini dikkate alırsak, (2.12) denklemini

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \frac{1}{J} \frac{dJ}{dt} \quad (2.24)$$

gibi yazabiliriz. (2.24) denkleminde

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{1}{J} dJ$$

elde ederiz ve buradan

$$\rho(x,t) J(x,t) = \rho(a,0) J(a,0)$$

$J(a,0)=1$ olduğunu varsayarsak (2.24) denkleminin çözümünü

$$\rho(x,t) = \frac{\rho(a,0)}{J(a,t)} = \frac{g(x-ut)}{1+t f'(x,t)} \quad (2.25)$$

olarak elde ederiz.

(2.25) ifadesinden kolaylıkla göstermek mümkündür ki, $t = -\frac{1}{f'(u)}$ olduğunda

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \infty \quad \text{ve} \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = \infty$$

olmaktadır. Dolayısıyla (2.11)-(2.14) probleminin klasik çözümü mevcut değildir.

3. BİRİNCİ BASAMAKTAN KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKEMLER SİSTEMİ

3.1 Soft (Yumuşak) Çözümler

Bu bölümde (2.11) ve (2.12) denklemler sisteminin çözümünü kullanarak sıkışabilir sıvıların sabit basınçlı, zamana bağlı bir boyutlu hareketini modelleyen nonlinear denklemler sisteminin gerçek çözümünü ele alacağız ve çözümün bazı özelliklerini inceleyeceğiz. Eğer u -sıvının hızı, ρ - sıvının yoğunluğu ve e -birim hacimdeki iç enerjiyi ifade ederse, hidrodinamiğin temel denklemler sistemini aşağıdaki gibi

$$u_t + uu_x = 0, \quad (3.1)$$

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad (3.2)$$

$$e_t + (eu)_x + \rho u_x = 0 \quad (3.3)$$

yazabiliriz. $\varepsilon = e + p$ değişken dönüşümünün sonucu (3.3)'ü

$$\varepsilon_t + (\varepsilon u)_x = 0, \quad (3.3')$$

şeklinde de yazabiliriz. (3.1)-(3.3) denklemler sistemini

$$u(x,0) = f(x), \quad (3.4)$$

$$\rho(x,0) = g(x), \quad (3.5)$$

$$\varepsilon(x,0) = h(x) \quad (3.6)$$

başlangıç koşulları çerçevesinde inceleyelim. Burada f , g ve h , bilinen fonksiyonlardır. Bu konu hakkında daha fazla bilgiye yer verilecektir. (3.2) ve (3.3') denklemleri birbirine bağılırlar, (3.1) denklemini ise bağımsız olarak çözebiliriz. Bu problemin gerçek çözümlerini ele alalım.

Teorem 2. $f(x)$ 'in türevlenebilir olduğunu varsayarsak, birinci mertebeden kısmi türevlere sahip olan aşağıdaki fonsiyonel

$$u(x,t) = f(x - tu(x,t)) \quad (3.7)$$

bağıntı ile tanımlanan $u(x,t)$ fonksiyonu (3.1), (3.4) probleminin çözümüdür.

İspat. (3.7) denkleminde $t=0$ olarak yazıldığında, $u(x,0)=f(x)$ başlangıç koşulunu sağladığını görürüz. (3.7) ifadesinin t ve x 'e göre türevlerini bulup (3.1)'de yerine yazdığımızda denklemin korunduğunu görürüz.

Teorem 3. $g(x)$ ve $h(x)$ bir kez, $f(x)$ ise iki kez diferansiyellenebilen fonksiyonlar ise,

$$\rho(x,t) = \frac{g(x-tu)}{1+tf'(x-tu)}, \quad (3.8)$$

$$\varepsilon(x,t) = \frac{h(x-tu)}{1+tf'(x-tu)} \quad (3.9)$$

fonksiyonları (3.2) ve (3.3') denklemlerinin çözümleri olmaktadır.

İspat. (3.8) formülünün doğru olduğunu gösterelim. (3.9) benzer şekilde ispatlanır. Kolaylık için $\omega = x-tu(x,t)$, notasyonunu ele alalım. Bu ifadeden t 'ye göre türev alırsak,

$$\rho_t = -[1+tf'(\omega)]^{-2} \{ [1+tf'(\omega)](u+tu_t)g'(\omega) + g(\omega)f'(\omega) - tg(\omega)f''(\omega)(u+tu_t) \}$$

olarak elde ederiz.

$$u + tu_t = f - \frac{tf f'}{1+tf'} = \frac{f}{1+tf'}$$

ifadesini göz önünde bulundurarak

$$\rho_t = -[1+tf'(\omega)]^{-3} \{ (fg)'(1+tf') - tgff'' \}$$

elde ederiz. (3.8) denklemini u ile çarpıp ve x 'e göre türevlersek

$$(pv)_x = [1+tf'(\omega)]^{-2} \{ [1+tf'(\omega)]gu_x + ug'(\omega)(1-tu_x) - ug(\omega)[(1+tu_x)tf''(\omega)] \}$$

elde ederiz. $1-tu_x = 1 - \frac{tf'(\omega)}{1+tf'(\omega)} = \frac{1}{1+tf'(\omega)}$ göz önünde bulundurarak,

$$(pu)_x = [1+tf'(\omega)]^{-3} \{ (fg)'(1+tf') - tgff'' \}$$

olmaktadır. Bu durumda $\rho_t = -(\rho_u)_x$ olur. Açıkça görülüyor ki, $u, \rho, \varepsilon, f, g$ ve h fonksiyonları (3.7), (3.8) ve (3.9) denklemlerini koruduğu halde bile, halen bunların (3.1), (3.2) ve (3.3') denklemlerinin çözümü olduğu söylenemez. Bu durum aşağıdaki kavramları ele alma zorunluluğunu ortaya koyar.

Tanım 2. (3.4) başlangıç koşulunu ve

$$u(x, t) = f[x - tu(x, t)],$$

fonksiyonel eşitliği koruyan $u(x, t)$ fonksiyonuna (3.1) denkleminin yumuşak (soft) çözümü denir.

Tanım 3. (3.5), (3.6) başlangıç koşullarını ve

$$\rho(x, t) = \frac{g(x - tu)}{1 + tf'(x - tu)},$$

$$\varepsilon(x, t) = \frac{h(x - tu)}{1 + tf'(x - tu)},$$

fonksiyonel eşitliklerini koruyan $\rho(x, t)$ ve $\varepsilon(x, t)$ fonksiyonlarına (3.2) ve (3.3) denklemlerinin yumuşak çözümleri denir.

3.2 Lineer Denklemlerin İncelenmesi

Nonlineer denklemler sisteminin çözümlerini incelemeden önce uygun lineer denklem için yazılmış Cauchy problemini inceleyelim. Kolaylık olması açısından aşağıdaki problemi göz önüne alalım

$$u_t + cu_x = 0, \quad (3.10)$$

$$u(x, 0) = f(x). \quad (3.11)$$

Burada c - bilinen bir sabit, $f(x)$ ise bilinen ve türevlenebilen bir fonksiyondur. Literatürden bilindiği üzere (3.10), (3.11) denkleminin karakteristikler yöntemi ile çözümü

$$u(x, t) = f(x - ct) \quad (3.12)$$

şeklinde olmaktadır. Bu tür çözümlere (3.10), (3.11) probleminin yumuşak çözümü denir.

Tanım 4. (3.11) koşulunu koruyan ve temel (test) fonksiyonlar sınıfından olan, $f(x, T)=0$ özelliğine sahip keyfi $f(x, t)$ için aşağıdaki

$$\iint_D u(v_t + cv_x) dx dt + \int_{-\infty}^{\infty} v(x, 0) f(x) dx = 0$$

integral eşitliğini koruyan $u(x, t)$ fonksiyonuna (3.10), (3.11) probleminin zayıf çözümü denir.

Teorem 4. $u(x, t) = f(x - ct)$, integrallenebilen fonksiyon olsun. Bu takdirde $u(x, t)$ fonksiyonu (3.10), (3.11) probleminin zayıf çözümüdür.

Diğer bir ifade ile integrallenebilir yumuşak çözüm aynı zamanda da zayıf çözüm olmaktadır.

İspat. $v(x, t)$ yeteri kadar pürüzsüz ve $|x| + t$ 'nin büyük değerlerinde sıfıra eşit olan bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki ifadeyi

$$\iint_D f(x - ct) (v_t + cv_x) dx dt + \int_{-\infty}^{\infty} v(x, 0) f(x) dx = 0$$

göz önüne alalım. $\xi = x - ct$, $\eta = t$ değişken dönüşümünü yapalım. Bu notasyonlarda son ifade

$$\iint_D f(\xi) v_\eta(\xi, \eta) d\xi d\eta + \int_{-\infty}^{\infty} v(x, 0) f(x) dx = 0$$

biçimini alır. Burada v fonksiyonu, bölgenin sınırında sıfıra eşit olduğundan η 'a göre olan integral gerçekleştirilebilir.

Teorem 5. Eğer, $u(x, t)$, (3.10) ve (3.11) probleminin sürekli çözümü ise $u = f(x - ct)$ fonksiyonu aynı zamanda yumuşak çözüm de olmaktadır.

İspat. Zayıf çözümün tanımından

$$\iint_D f(x - ct) (v_t + cv_x) dx dt + \int_{-\infty}^{\infty} v(x, 0) f(x) dx = 0$$

eşitliği sürekli diferansiyellenebilen ve $|x| + t$ 'nin büyük değerlerinde sıfır olan keyfi $f(x, t)$ fonksiyonları için sağlamaktadır. Aşağıdaki değişken

$$\xi = x - ct, \quad \eta = t$$

dönüşümünü uygulayalım. Bu notasyonlarda

$$\iint_D f(\xi, \eta) v_\eta(\xi, \eta) d\xi d\eta + \int_{-\infty}^{\infty} v(\xi, 0) f(\xi) d\xi = 0,$$

veya

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} f(\xi, \eta) v_\eta d\eta + v(\xi, 0) u(\xi, 0) \right\} d\xi = 0$$

elde ederiz. $F(\xi) = \int_0^{\infty} u(\xi, \eta) v_\eta d\eta$ fonksiyonu ele alındığında eşitlik aşağıdaki

$$\int_{-\infty}^{\infty} [F(\xi) + v(\xi, 0) u(\xi, 0)] d\xi = 0$$

şeklini alır ve buradan $F(\xi) + v(\xi, 0) u(\xi, 0) = 0$ olarak elde ederiz.

$[\xi_1, \xi_2]$ ($\xi_1 < \xi_2$ olmak üzere) aralığında v ile çakışan diğer yerlerde sıfıra eşit olan $\bar{v}(\xi, \eta)$ fonksiyonu tanımlayalım ve bu notasyonda

$$\int_{-\infty}^{\infty} [F(\xi) + \bar{v}(\xi, 0) u(\xi, 0)] d\xi = 0,$$

son olarak,

$$\int_0^{\infty} u(\xi, \eta) v_\eta(\xi, \eta) d\eta + v(\xi, 0) u(\xi, 0) = 0$$

olmaktadır. Şu şekilde tekrar yazarsak

$$\int_0^{\infty} [u(\xi, \eta) - u(\xi, 0)] v_\eta(\xi, \eta) d\eta \equiv 0.$$

$u(x, t)$ fonksiyonu sürekli olduğundan

$$u(\xi, \eta) = u(\xi, 0) = f(\xi) = f(x - ct).$$

elde ederiz.

Yukarıda ispatladığımız teoremlerde, zayıf ve yumuşak çözümlerin aslında aynı kavramın parçaları olduğunu görmekteyiz. Ancak, zayıf çözüm süreksizlik doğrusu üzerinde “sıçrayış” koşulunu korumak zorundadır, yumuşak çözümlerde ise bu gibi koşullar yer almaz.

Sürekli ve çok değerli çözümlerden sıçrayış koşulunu kullanarak bir değerli çözüm elde etmek mümkündür. Sıçrayış üzerindeki Rankine-Hugoniot koşulu hidrodinamik problemlerde oldukça önemlidir. Zayıf çözüm bunu otomatik olarak sağlarken, sıçrayış yumuşak çözümlerde ilave bir koşul olarak elde edilir.

Yumuşak çözümlerin fonksiyonel yapısı, sayısal çözümlerin de ele alınması için doğal algoritmalar oluşturmaya imkân verir. Yumuşak çözümlerin ele alınmasının önemli bir avantajı da zaten bu özelliğe sahip olmasıdır.

4. SÜREKLİ BAŞLANGIÇ KOŞULLU CAUCHY PROBLEMİ

Aşağıdaki problemi göz önüne alalım

$$u_t + uu_x = 0, \quad (4.1)$$

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad (4.2)$$

$$u(x,0) = f(x), \quad (4.3)$$

$$\rho(x,0) = g(x). \quad (4.4)$$

Burada, $g(x)$ bir kez, $f(x)$ iki kez türevlenebilir fonksiyonlardır. Ayrıca fiziksel bakış açısından bu fonksiyonların kompakt taşıyıcıya sahip olduğunu varsayalım.

Bölüm 2.3'de ispatladığımız gibi (4.1)-(4.4) probleminin çözümünü türevleri $t = -\frac{1}{f'(\xi)}$ değerinde sonsuzluğa yaklaştığından (4.1)-(4.4) probleminin klasik çözümü mevcut olmamaktadır. Zayıf çözümlerin tanımını verelim.

Tanım 5. (4.3), (4.4) başlangıç koşullarını ve test fonksiyonlar sınıfından $\varphi(x,T) = 0$ koşuluna sahip olan keyfi test fonksiyonları için aşağıdaki

$$\iint_D \left\{ \varphi_t(x,t)u(x,t) + \varphi_x(x,t)\frac{u^2}{2} \right\} dxdt + \int_{-\infty}^{\infty} u(x,0)\varphi(x,0)dx = 0, \quad (4.5)$$

$$\iint_D \left\{ \varphi_t(x,t)u(x,t) + \varphi_x(x,t)u(x,t)\rho(x,t) \right\} dxdt + \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x,0)\varphi(x,0)dx = 0 \quad (4.6)$$

integral eşitliklerini koruyan $u(x,t)$ ve $\rho(x,t)$ fonksiyonlarına (4.1)-(4.4) probleminin zayıf çözümü denir.

Tanım 5'den görüldüğü üzere, (4.5),(4.6) denklemlerinde $u(x,t)$ ve $\rho(x,t)$ fonksiyonları süreksiz olabilir.

Zayıf çözüm kavramı ele alındığında ortaya yeni problemler çıkar. Bu problemler, çözümdeki süreksizlik noktalarının yeri ve onların zamana göre değişiminin incelenmesinden ibarettir. (4.1)-(4.4) probleminin zayıf çözümlerini elde etmek için aşağıdaki yardımcı problemi

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right)^2 = 0, \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial \omega(x,t)}{\partial t} + u(x,t) \frac{\partial \omega(x,t)}{\partial x} = 0, \quad (4.8)$$

$$v(x,0) = v_0(x), \quad (4.9)$$

$$\omega_0(x,0) = \omega_0(x) \quad (4.10)$$

ele alalım. Burada $v_0(x)$ ve $\omega_0(x)$ sırası ile

$$\frac{dv_0(x)}{dx} = f(x), \quad (4.11)$$

$$\frac{d\omega_0(x)}{dx} = g(x) \quad (4.12)$$

denklemlerinin herhangi bir sürekli çözümü olmaktadır. (4.7)-(4.10) problemine yardımcı problem denir. Yardımcı denklemin tek olmadığı açıkça görülmektedir.

Teorem 6. Eğer $v(x,t)$ ve $\omega(x,t)$ (4.7)-(4.10) probleminin çözümleri ise,

$$v(x,t) = \int u(x,t) dx + c_1(t), \quad (4.13)$$

$$\omega(x,t) = \int \rho(x,t) dx + c_2(t), \quad (4.14)$$

ile tanımlanan $u(x,t)$ ve $\rho(x,t)$ fonksiyonları esas problemin zayıf çözümleri olmaktadır. (4.13), (4.14)'den

$$u(x,t) = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x}, \quad (4.15)$$

$$\rho(x,t) = \frac{\partial \omega(x,t)}{\partial x} \quad (4.16)$$

olduğu görülmektedir.

(4.7) denkleminin çözümünü elde etmek için

$$\frac{\partial v}{\partial t} = p, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = q$$

notasyonlarını ele alalım. Bu notasyonlarda (4.7) denklemini aşağıdaki şekilde

$$F(p, q) = p + \frac{1}{2} q^2 = 0$$

yazabiliriz. (4.7) nonlinear denklemi için Charpit denklemler sistemini şu şekilde yazılabiliriz

$$\frac{dt}{d\tau} = 1, \quad \frac{dx}{d\tau} = q, \quad \frac{dp}{d\tau} = 0, \quad \frac{dq}{d\tau} = 0, \quad \frac{dv}{d\tau} = p + q^2. \quad (4.17)$$

(4.17) denklemler sisteminin tek bir çözümünü elde etmek için

$$\begin{aligned} t|_{\tau=0} &= 0, \quad x|_{\tau=0} = \xi, \quad v|_{\tau=0} = v_0(\xi), \\ p|_{\tau=0} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial \xi} \right)^2, \quad q|_{\tau=0} = \frac{dv_0}{d\xi} \end{aligned} \quad (4.18)$$

başlangıç koşullarını yazalım. (4.17),(4.18) probleminin çözümünü

$$v(x,t) = \frac{1}{2} u_0^2 t + v_0(\xi), \quad \xi = x - ut$$

olarak elde ederiz. Sade hesaplamalar yolu ile

$$u(x,t) = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x}$$

olduğu açıkça görülmektedir.

Şimdi karakteristik yöntemini kullanarak (4.8),(4.10) problemini çözelim. Görülüyor ki, söz konusu problemin çözümü

$$\omega(x,t) = \omega_0(\xi),$$

şeklinde olmaktadır. Yukarıdaki teoreme göre

$$\rho(x,t) = \frac{\partial \omega(x,t)}{\partial x}$$

yazabiliriz.

$$\rho(x,t) = \frac{\partial \omega}{\partial x} = \omega'_\xi \left(1 - t \frac{\partial u}{\partial x} \right) = g(\xi) \left(1 - \frac{tf'(\xi)}{1+tf'(\xi)} \right) = \frac{g(\xi)}{1+tf'(\xi)}.$$

olarak elde ederiz.

Böylelikle aşağıdaki teoremleri ispatlamış oluruz.

Teorem 7. Eğer $v(x,t)$ ve $\omega(x,t)$ fonksiyonları (4.7)-(4.10) yardımcı probleminin çözümleri ise (4.15) ve (4.16) ile tanımlanan $u(x,t)$ ve $\rho(x,t)$ fonksiyonları esas problemin zayıf çözümleri olmaktadır.

Yardımcı çözümlerin aşağıdaki gibi avantajları vardır:

1. $v(x,t)$ ve $\omega(x,t)$ fonksiyonlarının diferansiyelleme özelliği $u(x,t)$ ve $\rho(x,t)$ fonksiyonlarının diferansiyelleme özelliğinden bir merteye fazladır.

2. Esas problemin çözümlerini $\frac{\partial u}{\partial x}$ ve $\frac{\partial \rho}{\partial x}$ türevlerini kullanmadan da elde etmek mümkündür, zaten bu türevler sıçrayış noktalarında mevcut değildir.

3. $v(x,t)$ ve $\omega(x,t)$ fonksiyonları mutlak sürekli fonksiyonlardır $u(x,t)$ ve $\rho(x,t)$ fonksiyonlarındaki sıçrayış noktalarını belirlemek için aşağıdaki enerji integrallerini

$$E_1(t) = \int_R u(x,t) dx, \quad (4.19)$$

$$E_2(t) = \int_R \rho(x,t) dx \quad (4.20)$$

ele alalım. (4.19) ve (4.20) integralleri hem sürekli, hem de süreksiz fonksiyonlar için mevcut olmaktadır. Ayrıca $E_1(t)$ ve $E_2(t)$ nin zamandan bağımsız olduğunu kanıtlamak oldukça kolaydır.

Tanım 6. Aşağıdaki şekilde tanımlanan

$$E_1(0) = \int_R u(x,0) dx,$$

$$E_2(0) = \int_R \rho(x,0) dx,$$

$E_1(0)$ ve $E_2(0)$ sayılarına $v(x,t)$ ve $\omega(x,t)$ fonksiyonlarının kritik değerleri denir.

Şimdi $u(x,t)$ ve $\rho(x,t)$ fonksiyonlarının süreksizlik noktalarının yerlerini tespit etme problemini ve bu noktaların zamanla değişimini inceleyeceğiz. Daha önce sözü edildiği üzere yardımcı problemin çözümü tek değildir. Fiziksel bağlamda tutarlı bir tek çözüm elde etmek için bazı ilave koşullar gerekmektedir.

Tanım 7. Her t için $v(x,t)$ nin kritik değer aldığı noktaların geometrik yerine front (cephe) noktası diyelim ve $x_f^{(v)}(t)$ şeklinde gösterelim.

Tanım 8. Her t için $\rho(x,t)$ 'nin kritik değerler aldığı noktaların geometrik yerine $\rho(x,t)$ fonksiyonunun front (cephe) noktası diyelim ve $x_f^{(\rho)}(t)$ ile gösterelim.

Tanım 8'den

$$v(x_f^{(v)}(t)) = \int_{-\infty}^{x_f^{(v)}(t)} u(x,t) dx = E_1(0)$$

elde ederiz. Buradan, $x_f^{(v)}(t)$ için

$$\frac{dx_f^{(v)}(t)}{dt} = \frac{|u^2|}{|u|} \Big|_{x=x_f^{(v)}(t)} \quad (4.21)$$

denklemini ele alırız. Benzer şekilde, Tanım 8'den

$$\frac{dx_f^{(\rho)}(t)}{dt} = \frac{[u\rho]}{[\rho]} \Big|_{x=x_f^{(\rho)}(t)} \quad (4.22)$$

elde ederiz. Burada, $[\varphi]_{x=x_0}$ notasyonu ile $\varphi(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasındaki sıçrayışı gösterilmektedir; yani,

$$[\varphi]_{x_0} = \varphi(x_0 + 0) - \varphi(x_0 - 0)$$

dır. Eğer $f(x)$ ve $g(x)$ sürekli ise, (4.21) ve (4.22) den

$$\frac{dx_f^{(v)}(t)}{dt} = u(x_f^{(v)}(t), t) = \frac{dx_f^{(\rho)}(t)}{dt} \quad (4.23)$$

olduğunu elde ederiz. Böylece, u ve ρ fonksiyonlarının sıçrayış noktalarının denklemin karakteristikleri üzerinde olduğunu gördük.

Tanım 9. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan

$$v_{gen}(x,t) = \begin{cases} v(x,t), & v < E_1(0) \\ E_1(0), & v \geq E_1(0) \end{cases} \quad (4.24)$$

$$\omega_{gen}(x,t) = \begin{cases} \omega(x,t), & \omega < E_1(0), \\ E_2(0), & \omega \geq E_2(0), \end{cases} \quad (4.25)$$

fonksiyonlarına yardımcı problemin genişletilmiş çözümleri denir.

Teorem 6'ya dayanarak esas problemin zayıf çözümü için aşağıdaki ifadeleri

$$u_{gent}(x,t) = \frac{\partial v_{gen}(x,t)}{\partial x}, \quad (4.26)$$

$$\rho_{gen}(x,t) = \frac{\partial \omega_{gen}(x,t)}{\partial x} \quad (4.27)$$

buluruz. (4.26) ve (4.27)'den görüldüğü üzere, $\frac{\partial v_{gen}(x,t)}{\partial x}$ ve $\frac{\partial \omega_{gen}(x,t)}{\partial x}$ türevlerinin 0'a eşit olduğu noktalar $u(x,t)$ ve $\rho(x,t)$ fonksiyonlarının sıçrayış noktaları olmaktadır. (4.23)'ten şunu elde ediyoruz

$$t = \int_0^{x_f(t)} \frac{dx_f(t)}{u} < \infty.$$

Bu ifade $u(x,t)$ ve $\rho(x,t)$ fonksiyonlarında sıçrayışların oluşabilmesi için gerekli ve yeterli bir koşuldur.

Şimdi de esas ve yardımcı problemler arasındaki ilişkiyi açıklayan diğer bir bağlantıyı gösterelim. Bunu yapabilmemiz için gerekli Lagrange fonksiyonlarını

$$L^1(p, q) = q_x F(p, q) = q_x (p + 0.5q^2),$$

$$L^2(q, p_1, q_1) = (q_1)_x F_1(p_1, q_1) = (q_1)_x (p_1 + qq_1)$$

göz önüne alalım. Burada $p_1 = \frac{\partial \omega}{\partial t}$, $q_1 = \frac{\partial \omega}{\partial x}$ olmaktadır.

Teorem 8. (4.1)-(4.4) probleminin çözümleri, sırasıyla $L^1(p, q)$ ve $L^2(q, p_1, q_1)$ fonksiyonlarının ekstramumları olmaktadır.

İspat. $L^1(p, q)$ ve $L^2(p, q)$ için Euler-Lagrange denklemini yazarsak şunu elde ederiz,

$$\frac{\partial L^1_p}{\partial t} + \frac{\partial L^1_q}{\partial x} = 0,$$

$$L^1_p = q_x, \quad L^1_q = qq_x,$$

$$\frac{\partial q_x}{\partial t} + q_x \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right) + q_x \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Benzer şekilde,

$$L^2(q, p_1, q_1), \quad L^2_{p_1} = (q_1)_x, \quad L^2_{q_1} = q(q_1)_x.$$

$$\frac{\partial L^2_{p_1}}{\partial t} + \frac{\partial L^2_{q_1}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} + (q_x \frac{\partial q_1}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial x} + (q \frac{\partial q_1}{\partial x}) = \frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(up) = 0.$$

Böylelikle, Teorem 8'i ispatlamış oluruz.

Şimdi başlangıç $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının süreksiz olduklarını varsayalım, yani

$$u(x,0) = \begin{cases} u_1, & x > 0 \\ u_2, & x < 0, \end{cases} \quad (4.28)$$

$$\rho(x,0) = \begin{cases} \rho_1, & x > 0 \\ \rho_2, & x < 0 \end{cases} \quad (4.29)$$

olsun. Burada u_1, u_2, ρ_1 ve ρ_2 bilinen sabitler olmaktadır ve aşağıdaki durumlar olabilir:

- (i) $u_1 > u_2, \rho_1 < \rho_2$; (ii) $u_1 < u_2, \rho_1 > \rho_2$;
 (iii) $u_1 > u_2, \rho_1 > \rho_2$; (iv) $u_1 < u_2, \rho_1 < \rho_2$.

(4.1), (4.28) probleminin karakteristikler yöntemi ile ele alınan çözümü

$$u(x,t) = f(\xi) = \begin{cases} u_1, & \xi > 0 \\ u_2, & \xi < 0, \end{cases} \quad (4.30)$$

şeklindedir buradan da;

$$\xi = x - ut \quad (4.31)$$

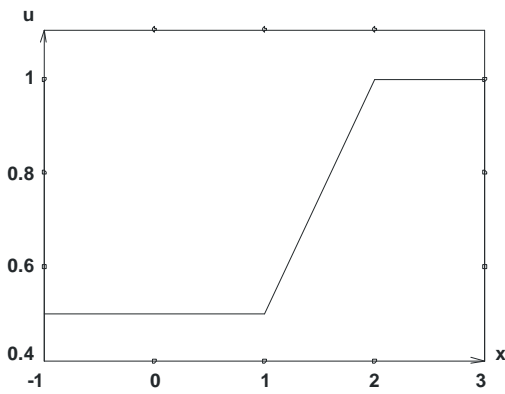
olmaktadır. (4.31)'den görüldüğü gibi (4.1) denkleminin karakteristikleri eğimi $u(x,t)$ olan doğrular ailesidir ve $u_1 \leq u \leq u_2$ olmaktadır. Eğer $u_1 \leq u \leq u_2$ ise (4.31) karakteristikler ailesi $x = u_2 t$ ve $x = u_1 t$ arasında bulunur ve bu karakteristiklerin yalnız bir ortak noktası var ise bu nokta $\xi = 0$ dır. Bu taktirde,

$x = ut$ ve $u = \frac{x}{t}$ dir ve bu yüzden $u_1 < \frac{x}{t} < u_2$ olur. Son olarak, (4.1), (4.28) probleminin

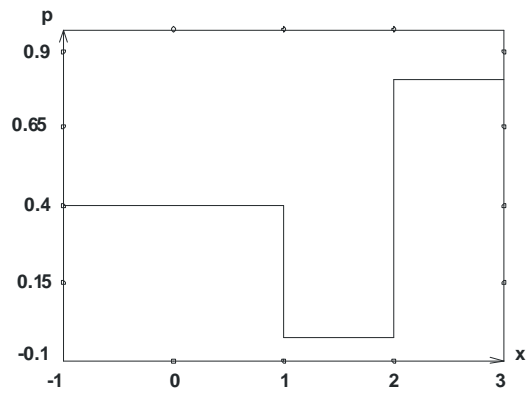
çözümünü

$$u(x,t) = \begin{cases} u_1, & \frac{x}{t} > u_1 \\ \frac{x}{t}, & u_2 < \frac{x}{t} < u_1 \\ u_2, & \frac{x}{t} < u_2 \end{cases} \quad (4.32)$$

olarak elde ederiz. (4.32) eşitliği ile tanımlanan çözüm sürekli ve fiziksel açıdan yararlıdır. $u(x,t)$ 'nin grafikleri aşağıdaki şekillerde gösterilmiştir.

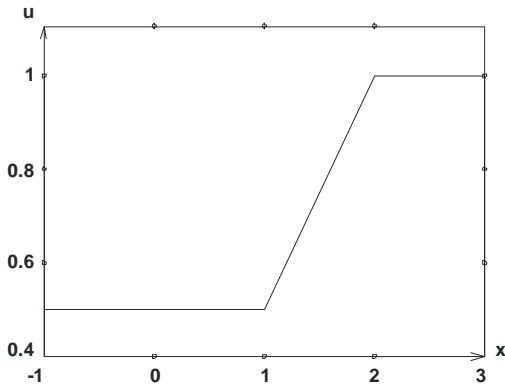


a)

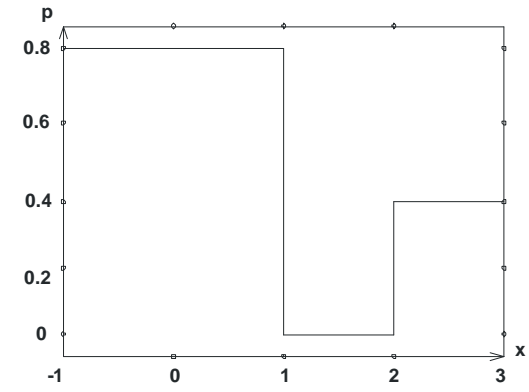


b)

Şekil 1. u ve ρ 'nin $t = 2$ için $u_1 > u_2$, $\rho_1 > \rho_2$ için zamana göre değişmesi

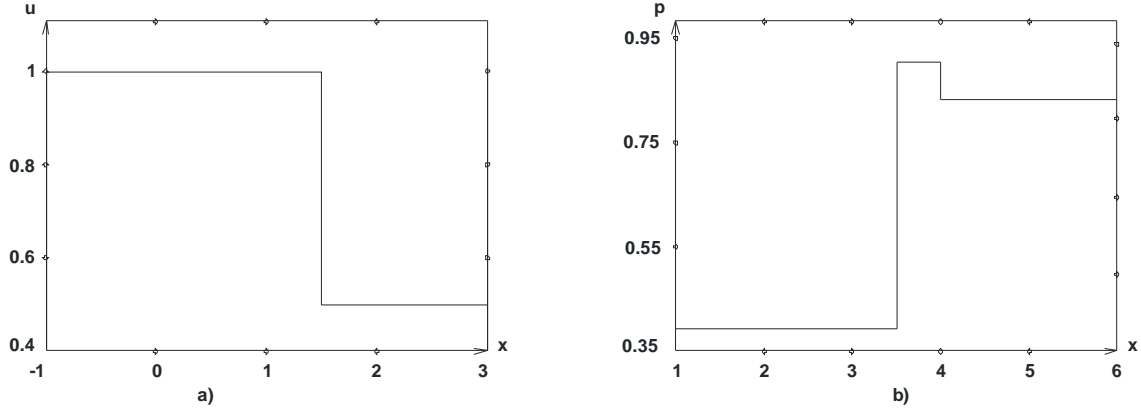


a)

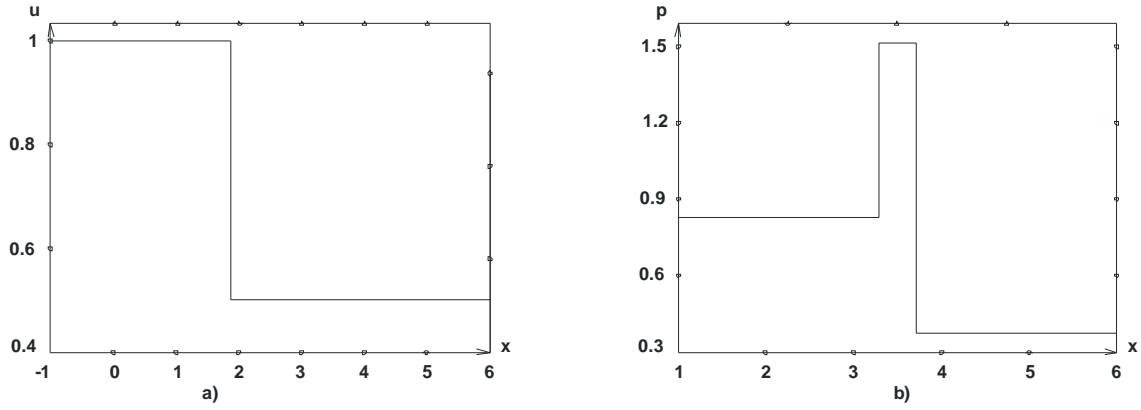


b)

Şekil 2. u ve ρ 'nin $t=2$ için $u_1 > u_2$, $\rho_1 > \rho_2$ için zamana göre değişmesi



Şekil 3. u ve ρ 'nin $t=2$ için $u_1 < u_2$, $\rho_1 > \rho_2$ için zamana göre değişmesi



Şekil 4. u ve ρ 'nin $t=2$ için $u_1 < u_2$, $\rho_1 < \rho_2$ için zamana göre değişmesi

(4.32)'yi dikkate alırsak $\rho(x,t)$ için de açık şekilde

$$\rho(x,t) = \frac{\rho(x-ut)}{1+tf'(x-ut)} \quad (4.33)$$

ifadesini gösteririz.

Şekil 1'de (4.32), (4.33) denklemleri ile tanımlanan $u(x,t)$ ve $\rho(x,t)$ fonksiyonlarının grafikleri $t=2$ noktasında gösterilmiştir. Şekil 1a'dan da anlaşılacağı gibi u fonksiyonunun başlangıçta bulunan sıçrayışı $t=0$ $u_2 < u_1$ olduğu durumlarda zamanın artan değerlerinde ortadan kalkmaktadır. Şekil 1b'de ise $\rho(x,t)$ fonksiyonlarının dağılımında iki sıçrayış mevcut olmaktadır. Şekil 4'den görüldüğü üzere $u_1 < u_2$ iken

$u(x,t)$ fonksiyonunun yapısındaki hem $u(x,t)$ fonksiyonunun hem de $\rho(x,t)$ fonksiyonlarının dağılımında sıçrayışlar mevcut oluyor ve söz konusu sıçrayışlar dayanıklı olarak hareketini sürdürüyor.

Süreksiz fonksiyonlarda çalışmak zorunda olan problemin çözümü, zayıf çözüm kavramını ele almaya teşvik ediyor.

Tanım 10. (4.28) ve (4.29) başlangıç koşullarını ve temel (test) fonksiyonlar sınıfından $f(x,T) = 0$ koşuluna sahip keyfi test fonksiyonları için

$$\iint_D \left\{ \varphi(x,t)u(x,t) + \varphi_x(x,t) \frac{u^2(x,t)}{2} \right\} dxdt + \int_{-\infty}^0 u_2 \varphi(x,0) dx + \int_0^{\infty} u_1 \varphi(x,0) dx = 0, \quad (4.33)$$

$$\iint_D \left\{ \varphi_t(x,t)u(x,t) + \varphi_x(x,t)u(x,t)\rho(x,t) \right\} dxdt + \int_{-\infty}^0 \rho_2 \varphi(x,t) dx + \int_0^{\infty} \rho_1 \varphi(x,0) dx = 0 \quad (4.34)$$

integral eşitliklerini koruyan $u(x,t)$ ve $\rho(x,t)$ fonksiyonlarına problemin zayıf çözümü denir.

Esas problemin zayıf çözümünü elde etmek için aşağıdaki yardımcı problemi göz önüne alalım

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right)^2 = 0, \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial \omega(x,t)}{\partial t} + u(x,t) \frac{\partial \omega(x,t)}{\partial x} = 0, \quad (4.36)$$

$$v(x,0) = \begin{cases} u_1 x, & x > 0 \\ u_2 x, & x < 0 \end{cases} \quad (4.37)$$

$$\omega(x,0) = \begin{cases} \rho_1 x, & x > 0 \\ \rho_2 x, & x < 0. \end{cases} \quad (4.38)$$

Yukarıda incelediğimiz karakteristikler yöntemi ile $u(x,t)$ için

$$u(x,t) = \begin{cases} u_1, & \frac{x}{t} > U \\ u_2, & \frac{x}{t} < U, \end{cases} \quad (4.39)$$

elde ederiz. Burada,

$$U = \frac{u_1 + u_2}{2} t$$

olmaktadır. (4.23)'ten

$$\frac{dx_f^{(\rho)}(t)}{dt} = u_2 + \rho_2 \left| \frac{u_1 - u_2}{\rho_1 - \rho_2} \right| \equiv U_\rho. \quad (4.40)$$

elde ederiz. (4.38)'i göz önüne alarak $\rho(x,t)$ için

$$\rho(x,t) = \begin{cases} \rho_1, & \frac{x}{t} > U_\rho \\ \rho_2, & \frac{x}{t} < U_\rho \end{cases} \quad (4.41)$$

elde ederiz. (4.39) ve (4.41) formülleri ile bulunan çözümlerin grafikleri Şekil 1-4'de gösterilmiştir.

5. SÜREKSİZ FONKSİYONLAR SINIFINDA SONLU FARK YÖNTEMİ

5.1 Cauchy Problemi

Şimdi (4.1)-(4.4) probleminin sayısal çözümlerini elde etmek için süreksiz fonksiyonlar sınıfında algoritmalar üretelim. Bunun için de önce (x, t) argümanlarının sürekli değiştiği bölgeyi

$$\omega_{h,\tau} = \left\{ (x_i, t_k) \mid x_i = ih, t_k = k\tau, i = 0, \pm 1, 2, \dots, k = 0, 1, 2, \dots, h > 0, \tau > 0 \right\}$$

ağı ile örtelim. Burada, h ve τ , $\omega_{h,\tau}$ ağının adımları olmaktadır.

(4.7) ve (4.8) denklemlerini $\omega_{h,\tau}$ ağının herhangi bir (i, k) noktasında aşağıdaki gibi sonlu farkla ayrıştıralım

$$V_{i,k+1} = V_{i,k} - \frac{\tau}{2} \left(\frac{V_{i,k} - V_{i-1,k}}{h} \right)^2, \quad (5.1)$$

$$W_{i,k+1} = W_{i,k} - \tau U_{i,k} \frac{W_{i,k} - W_{i-1,k}}{h}, \quad (5.2)$$

$$V_{i,0} = v_0(x_i), \quad (5.3)$$

$$W_{i,0} = \omega_0(x_i). \quad (5.4)$$

Burada, $V_{i,k}$ ve $W_{i,k}$ ağ fonksiyonları (i, k) noktasında $v(x, t)$ ve $\omega(x, t)$ fonksiyonlarının yaklaşık değerleri olmaktadır. Ayrıca $v_0(x_i)$ ve $\omega_0(x_i)$ fonksiyonları, aşağıdaki sonlu fark denklemlerinin

$$(v_0)_x = f(x_i),$$

$$(\omega_0)_x = g(x_i)$$

sürekli çözümleri olmaktadır. $\omega_{h,\tau}$ ağının her bir noktasında

$$V_{\bar{x}} = U, \quad (5.5)$$

$$W_{\bar{x}} = \wp \quad (5.6)$$

eşitliklerinin doğru olduğu kolaylıkla görülebilir. Buradan da $U = U_{i,k}$, $\wp = \wp_{i,k}$ olmaktadır.

(5.5)'i kanıtlamak için öncelikle (5.1) denklemini $(i-1, k)$ noktasında yazmak gerekir ve ardından (5.5)'den çıkarıp ve 2 ye bölersek

$$\frac{1}{\tau} \left[\frac{(V_i - V_{i-1})_{k+1}}{h} - \frac{(V_i - V_{i-1})_k}{h} \right] = \frac{1}{2h} \left\{ \left[\frac{(V_i - V_{i-1})_k}{h} \right]^2 - \left[\frac{(V_{i-1} - V_{i-2})}{h} \right]^2 \right\}$$

elde ederiz. (5.5)'i göz önünde bulundurarak $U_{i,k}$ 'nin aşağıdaki doğrusal olmayan cebirsel denklem sistemini

$$U_{i,k+1} = U_{i,k} - \frac{\tau}{2h} (U_{i,k}^2 - U_{i-1,k}^2) \quad (5.7)$$

koruduğunu görürüz. (5.6) için de benzer şekilde, yani $\wp_{i,k}$ 'nin da aşağıdaki doğrusal olmayan cebirsel denklemler

$$\wp_{i,k+1} = \wp_{i,k} - \tau U_{i,k} \wp_{i,k}, \quad (5.8)$$

sistemini koruduğunu göstermek mümkündür.

Teorem 9. Aşağıdaki gibi tanımlanan $E_1(t_k)$ ve $E_2(t_k)$ ağ fonksiyonları

$$E_1(t_k) = h \sum_i U_{i,k}, \quad (5.9)$$

$$E_2(t_k) = h \sum_i \wp_{i,k} \quad (5.10)$$

zamana bağlı değildirler.

İspat. Öncelikle $E_1(t_{k+1})$ 'i göz önüne alalım ve aşağıdaki sade işlemleri yapalım

$$\begin{aligned} E_1(t_{k+1}) &= h \sum_{i=-\infty}^{\infty} U_{i,k+1} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (V_{i,k+1} - V_{i-1,k+1}) \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left[(V_{i,k} - \frac{\tau}{2} U_{i,k}^2) - (V_{i-1,k} - \frac{\tau}{2} U_{i-1,k}^2) \right] \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} (V_{i,k} - V_{i-1,k}) - \frac{\tau}{2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} (U_{i,k}^2 - U_{i-1,k}^2) = h \sum_{i=-\infty}^{\infty} U_{i,k} = E_1(t_k). \end{aligned}$$

Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
E_2(t_{k+1}) &= h \sum_{i=-\infty}^{\infty} \wp_{i,k+1} = h \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{W_{i,k+1} - W_{i-1,k+1}}{h} \\
&= \sum_{i=-\infty}^{\infty} [(W_{i,k} - \tau U_{i,k} \wp_{i,k}) - (W_{i-1,k} - \tau U_{i-1,k} \wp_{i-1,k})] \\
&= h \sum_{i=-\infty}^{\infty} \wp_{i,k} = E_2(t_k).
\end{aligned}$$

Tanım 11. $\bar{E}_1(0)$ ve $\bar{E}_2(0)$ sayılarına sırasıyla $V_{i,k}$ ve $W_{i,k}$ ağ fonksiyonlarının kritik değerleri diyelim,

$$\bar{E}_1(0) = h \sum_i U_{i,0}, \quad (5.11)$$

$$\bar{E}_2(0) = h \sum_i \wp_{i,0}. \quad (5.12)$$

Tanım 12. Aşağıda tanımlanan ağ fonksiyonlarına (4.1), (4.4) probleminin

$$V_{i,k}^{ext} = \begin{cases} V_{i,k}, & V_{i,k} < \bar{E}_1(0) \\ \bar{E}_1(0), & V_{i,k} \geq \bar{E}_1(0) \end{cases}, \quad (5.13)$$

$$W_{i,k}^{ext} = \begin{cases} W_{i,k}, & W_{i,k} < \bar{E}_2(0) \\ \bar{E}_2(0), & W_{i,k} \geq \bar{E}_2(0) \end{cases}, \quad (5.14)$$

genişlendirilmiş sayısal çözümleri denir.

Teorem 6'ya dayanarak

$$U_{i,k}^{ext} = (V_{i,k}^{ext})_{\bar{x}}, \quad (5.15)$$

$$\wp_{i,k}^{ext} = (W_{i,k}^{ext})_{\bar{x}}, \quad (5.16)$$

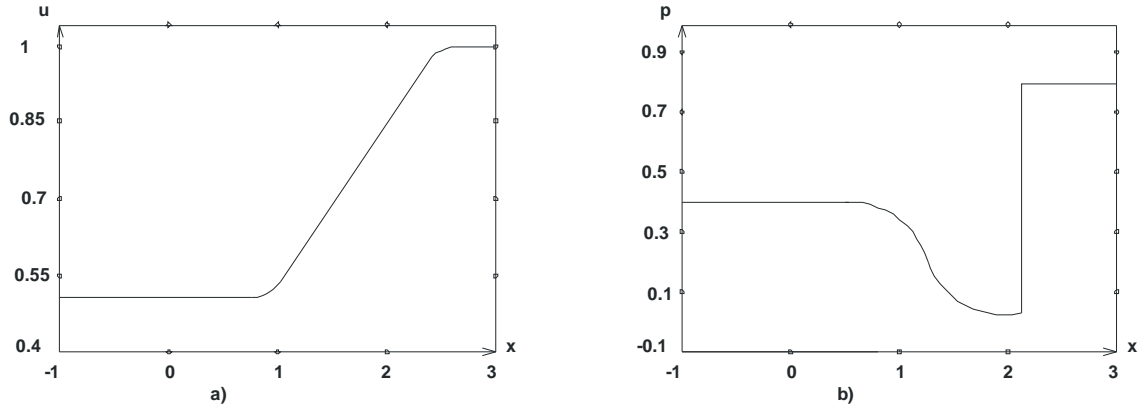
olur ve bu ifadeler esas problemin zayıf sayısal çözümüdür. Buna ek olarak da (4.4) ve (4.5)'i ele alırsak (4.7) ve (4.8)'i tekrar

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + \frac{1}{2} u^2(x,t) = 0, \quad (5.17)$$

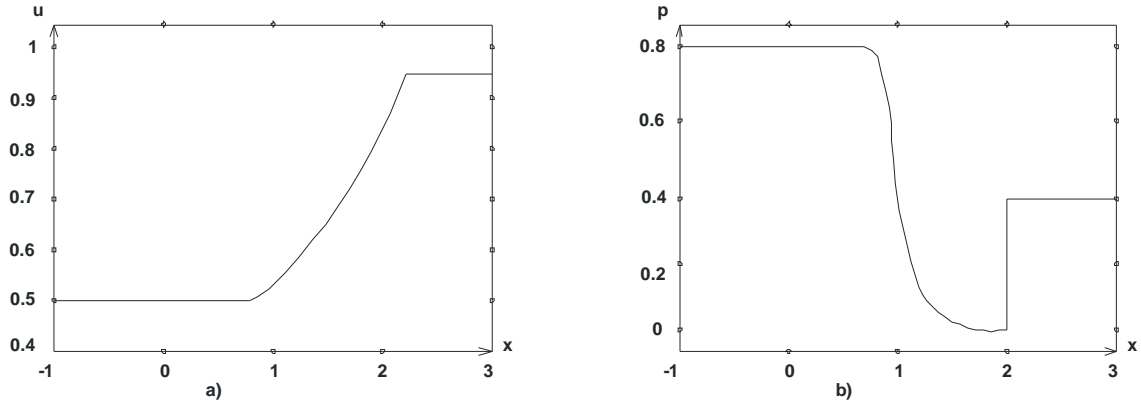
$$\frac{\partial \omega(x,t)}{\partial t} + u(x,t) \rho(x,t) = 0 \quad (5.18)$$

şeklinde yazabiliriz. Böylelikle (4.1), (4.4) denklemler sisteminin Euler yöntemi ile çözümünü elde etmiş olduk. Bilindiği gibi Euler sonlu fark karşılığı ağın adımları üzerinde koşul talep etmektedir. Eğer (5.17) ve (5.18) denklemler sistemini Runge-Kutta yöntemi ile çözersek, çözümü daha da net şekilde elde ederiz.

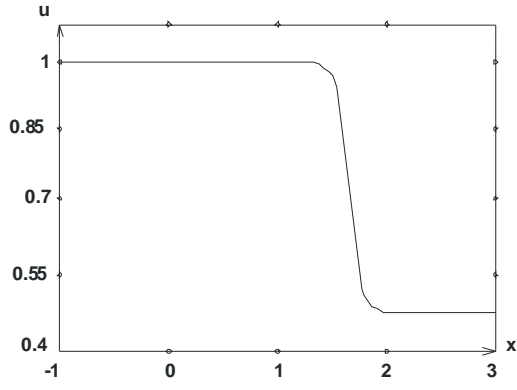
Şimdi yaklaşık çözümün gerçek çözüme yakınsaklığı problemi inceleyelim. Eğer $f(x)$, $f'(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları sınırlı ise $u(x,t)$ ve $\rho(x,t)$ çözümleri de sınırlı olacaktır.



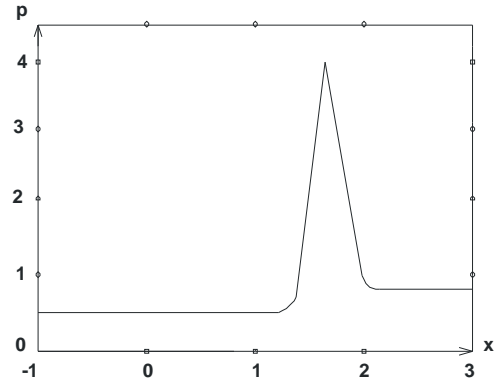
Şekil 5. $t=2$ 'de $u_1 > u_2$, $\rho_1 > \rho_2$ için sayısal çözüm



Şekil 6. $t=2$ 'de $u_1 > u_2$, $\rho_1 < \rho_2$ için sayısal çözüm

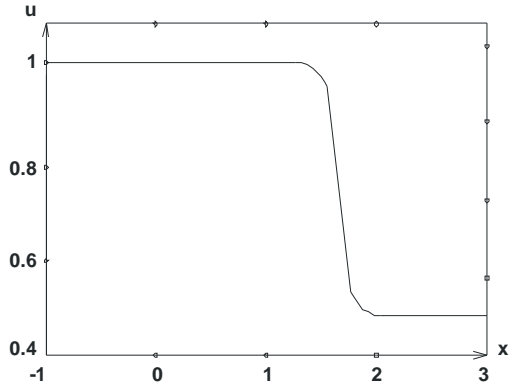


a)

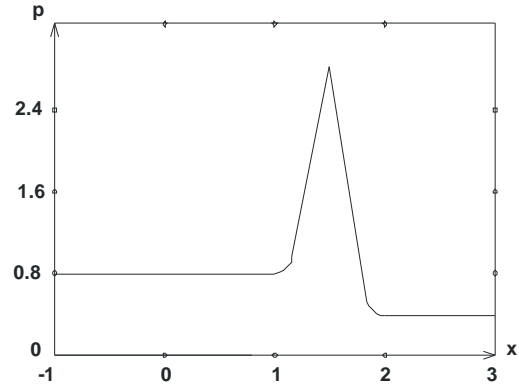


b)

Şekil 7. $t=2$ 'de $u_1 < u_2$, $\rho_1 > \rho_2$ için sayısal çözüm



a)



b)

Şekil 8. $t=2$ 'de $u_1 < u_2$, $\rho_1 < \rho_2$ için sayısal çözüm

Teorem 10. Herhangi bir τ ve h için

a) $\int_T |u(x_i, t_k) - U_{i,k}| dx \rightarrow 0$ dır;

b) Eğer, $|u(x_i, t_k) - U_{i,k}| \rightarrow 0$ ise $\int_R |\rho(x_i, t_k) - \wp_{i,k}| dx \rightarrow 0$ dır.

İspat. (5.17) ve (5.18) denklemlerini $\omega_{h,\tau}$ ağıının (i,k) noktalarında şu şekilde tekrar yazalım

$$v_t + \frac{1}{2}u_{i,k}^2 = \delta_{i,k}, \quad (5.19)$$

$$\omega_t + u_{i,k}\omega_{i,k} = \gamma_{i,k}. \quad (5.20)$$

Burada, $\delta_{i,k}$ ve $\gamma_{i,k}$ sırasıyla $\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}$, $\frac{\partial \omega(x,t)}{\partial t}$ türevlerini sonlu farklara ayrıştırılırken oluşan hatalardır. Eğer $v(x,t)$ ve $\omega(x,t)$ fonksiyonları sürekli iseler $\delta_{i,k}$ ve $\gamma_{i,k}$ hataları, τ ve h sifira yaklaştığında ortadan kaybolur. Yukarıdaki (5.1) ve (5.2) denklemlerinden (5.19) ve (5.20)'i çıkaralım

$$\bar{v}_t + M\bar{v}_x = \delta_{i,k}, \quad (5.21)$$

$$\bar{\omega}_t + M\bar{\omega}_x \leq \gamma_{i,k} + \rho|u - U|, \quad (5.22)$$

Burada, $\bar{v} = v - V$ ve $\bar{\omega} = \omega - W$ Teorem 10'da olduğu gibi τ ve h sifira yaklaştığı zaman

$$\bar{v} = v - V = \int_R \left| u(x_i, t_k) - U_{i,k} \right| dx = \int_0^t \delta d\tau \text{ ifadesi de sifira yaklaşmaktadır.}$$

Önerilen (5.1) ve (5.2) algoritmaları çerçevesinde $\Delta t = \frac{\Delta x}{u}$ olduğu durumlar için

sayısal deneyler yapılmıştır. Bu koşul $\frac{dx}{dt} = U$ eşitliğinin karşılığı olmaktadır. Elde edilen sayısal çözümlerin gerçek çözümlerle çakıştığı gözlenmiştir. Bu da önerilen yöntemin efektifliğini göstermektedir.

5.2 Başlangıç-Sınır Değer Problemi

5.2.1 Açık Sonlu Farklar Yöntemi

Yukarıdaki bölümde, sabit basınçlı sıkışabilen izentrik sıvıların hareketini ifade eden kısmi türevli diferansiyel denklem sistemi için yazılmış Cauchy probleminin gerçek çözümünü ele aldık ve çözümün bazı özelliklerini inceledik. Bu bölümde ise söz konusu denklemler sistemi için sınır değer probleminin sayısal çözümü için süreksiz fonksiyonlar sınıfından yeni bir yöntem önereceğiz. Bu amaçla aşağıdaki problemi göz önüne alalım

$$\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (5.23)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0, \quad (5.24)$$

$$u(x,0) = f_0(x), \quad (5.25)$$

$$\rho(x,0) = g_0(x), \quad (5.26)$$

$$u(0,t) = f_1(t), \quad (5.27)$$

$$\rho(0,t) = g_1(t). \quad (5.28)$$

Burada, f_i ve g_i ($i = 0,1$) bilinen fonksiyonlardır. (5.23)-(5.28) probleminin sayısal çözümünü elde etmek için aşağıdaki yardımcı problemi

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^x u(\xi, t) d\xi + \frac{u^2(x, t)}{2} - \frac{f_1^2(t)}{2} = 0, \quad (5.29)$$

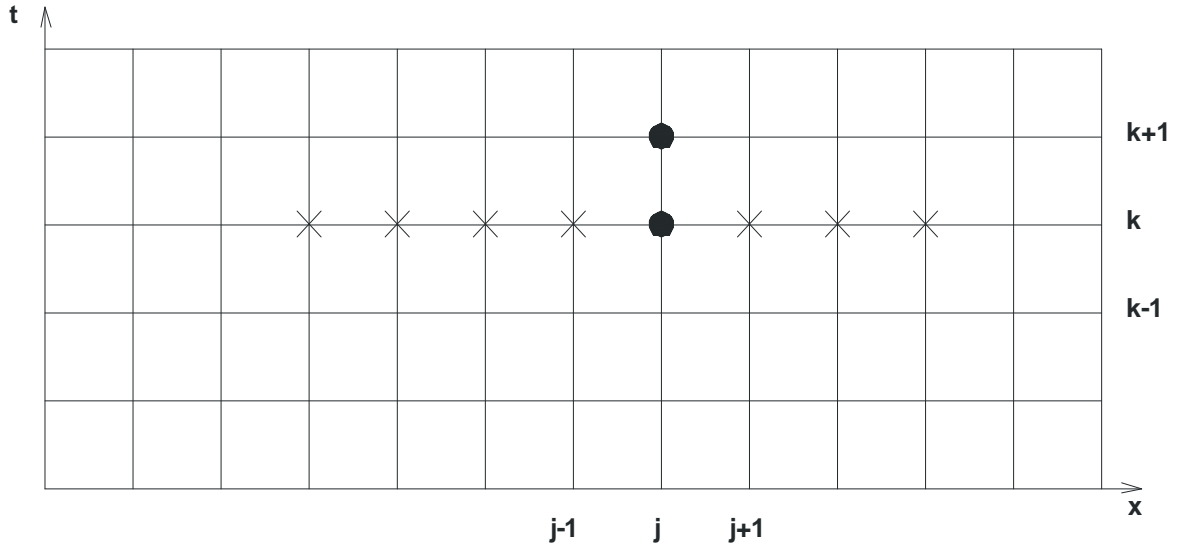
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^x \rho(\xi, t) d\xi + u(x, t) \rho(x, t) - f_1(t) g_1(t) = 0 \quad (5.30)$$

göz önüne alalım. (5.29) ve (5.30) denklemler sistemi için başlangıç koşulu olarak

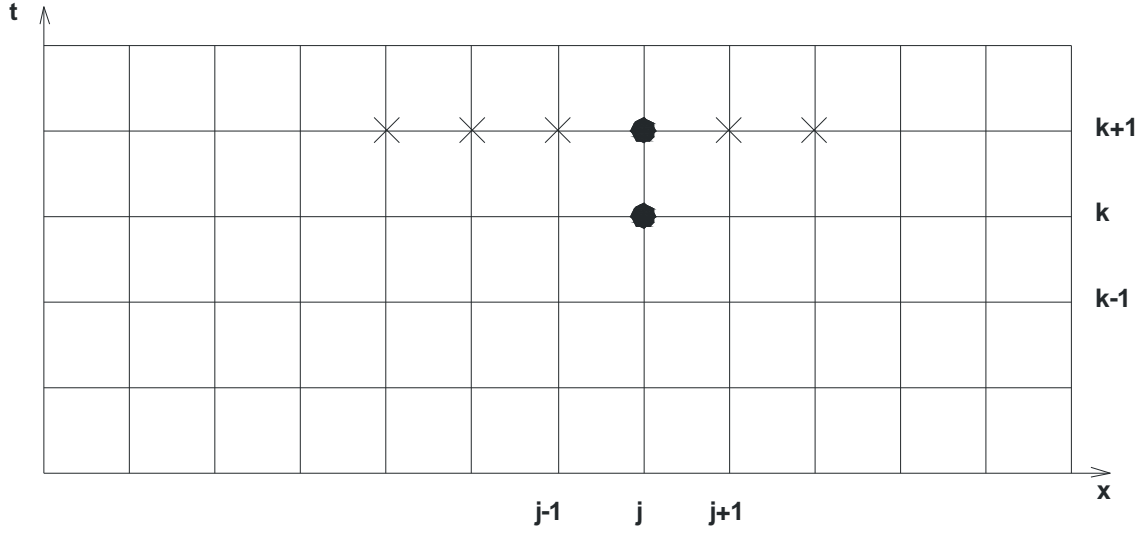
$$u(x,0) = f(x), \quad (5.31)$$

$$\rho(x,0) = g(x) \quad (5.32)$$

alalım.



Şekil 9.



Şekil 10.

(5.29),(5.30) denklemlerinin (5.31) ve (5.32) koşulları çerçevesindeki çözümlerin bulunmasına, ikinci tür yardımcı problem denir. Görüldüğü gibi (5.29),(5.30) denklemler sistemi integro diferansiyel denklemler sistemi olmaktadır. (5.29),(5.30) denklemlerinin sonlu fark karşılığını oluşturmak için (5.29) ve (5.30)'a dahil olan integrale dikdörtgenler yöntemi ile yaklaşalım, yani

$$\int_0^x \varphi(\xi, t) d\xi = h \sum_{j=1}^i \varphi(x_j, t) \quad (5.33)$$

olarak yazalım. (5.33)'ü dikkate alırsak, (5.29) ve (5.30)'un sonlu fark karşılığını aşağıdaki gibi

$$\frac{h \sum_{j=1}^i U_{j,k+1} - h \sum_{j=1}^i U_{j,k}}{\tau} + \frac{U_{i,k}^2}{2} = \frac{f_1^2(t_k)}{2}$$

$$\frac{h \sum_{j=1}^i \varphi_{j,k+1} - h \sum_{j=1}^i \varphi_{j,k}}{\tau} + U_{i,k} \varphi_{i,k} = f_1(t_k) f_1(t_k)$$

yazarız. Son ifadedeki sonlu fark denklemlerini

$$U_{i,k+1} - U_{i,k} + \sum_{j=1}^{i-1} (U_{j,k+1} - U_{i,k}) + \frac{\tau}{h} U_i^2(x, t) = \frac{\tau}{h} f_1^2(t_k),$$

$$U_{i,k+1} - \varphi_{i,k+1} - \varphi_{i,k} + \sum_{j=1}^{i-1} (\varphi_{j,k+1} - \varphi_{j,k}) + \frac{\tau}{h} U_{i,k} \varphi_{i,k} = \frac{\tau}{h} f_1(t_k) g_1(t_k),$$

veya

$$U_{i,k+1} = U_{i,k} + \frac{\tau}{h} f_1^2(t_k) - \frac{\tau}{h} U_{i,k}^2 - \sum_{j=1}^{i-1} (U_{j,k+1} - U_{j,k}) \quad (5.34)$$

$$\varphi_{i,k+1} = \varphi_{i,k} + \frac{\tau}{h} f_1(t_k) g_1(t_k) - \frac{\tau}{h} U_{i,k} \varphi_{i,k} - \sum_{j=1}^{i-1} (\varphi_{j,k+1} - \varphi_{j,k}) \quad (5.35)$$

şekilde yazabiliriz. (5.34), (5.35) için başlangıç koşulları

$$U_{i,0} = f(x_i), \quad (5.36)$$

$$\varphi_{i,0} = g(x_i) \quad (5.37)$$

olmaktadır. Görüldüğü gibi (5.34), (5.35) sonlu fark karşılığı ağırlık adımları üzerinde bir koşul talep etmektedir. Bu da fiziksel problemleri çözerken bazı zorluklara neden oluyor. Bu sınırlamayı ortadan kaldırmak için açık olmayan sonlu fark karşılığını önerelim.

5.2.2 Açık Olmayan Sonlu Farklar Yöntemi

Yukarıdaki bölümde (5.29), (5.30) denklemler sistemindeki türevsiz terimlerin k . kattaki değerlerini kullanarak sonlu fark karşılığını yazmıştık. Ele aldığımız cebirsel denklemler sisteminin her bir denkleminde bir tane bilinmeyen olmaktadır. Söz konusu denklemler sisteminin çözümünün elde edilmesinde hiçbir zorluk çıkmaz.

Şimdi ise (5.29), (5.30) denklemler sisteminin sağ tarafını $(k+1)$. zaman katında değerlerini kullanalım; yani (5.29), (5.30) diferansiyel denklem sistemini aşağıdaki gibi sonlu farklara ayırklaştıralım

$$\frac{\sum_{j=1}^i U_{j,k+1} - h \sum_{j=1}^i U_{j,k}}{\tau} + \frac{1}{2} U_{i,k+1}^2 = \frac{f_1^2(t_{k+1})}{\tau},$$

$$\frac{h \sum_{j=1}^i \varphi_{j,k+1} - h \sum_{j=1}^i \varphi_{j,k}}{\tau} + U_{i,k+1} \varphi_{i,k+1} = f_1(t_{k+1}) g_1(t_{k+1}),$$

veya

$$U_{i,k+1} + \frac{\tau}{2h} U_{i,k+1}^2 = \frac{\tau}{h} \frac{f_1^2(t_{k+1})}{2} - \sum_{j=1}^{i-1} (U_{j,k+1} - U_{i,k}) , \quad (5.38)$$

$$\varphi_{i,k+1} + \frac{\tau}{h} U_{i,k+1} \varphi_{i,k+1} = \frac{\tau}{h} f_1(t_{k+1}) g_1(t_{k+1}) - \sum_{j=1}^{i-1} (\varphi_{j,k+1} - \varphi_{j,k}) . \quad (5.39)$$

Görüldüğü gibi (5.38), (5.39) nonlinear cebirsel denklem sistemi oluşturmaktadır. Bu cebirsel denklemler sisteminin her bir denkleminde 2 tane bilinmeyen bulunmaktadır. Söz konusu denklemler sistemini, (5.36) ve (5.37) başlangıç koşullarını da dikkate alırsak, Newton iterasyon yöntemi ile çözmek mümkündür. (5.38) denklemini $\varphi_{i,k+1}$ ye bağlı olmadığından, önce (5.38) ' den $U_{i,k+1}$ bulup sonra

$$\varphi_{i,k+1} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\tau}{h} U_{i,k+1}\right)} \left\{ \frac{\tau}{h} f_1(t_{k+1}) g_1(t_{k+1}) - \sum_{j=1}^{i-1} (\varphi_{j,k+1} - \varphi_{j,k}) \right\} \quad (5.40)$$

denklemini çözmek gerekmektedir. Görüldüğü gibi (5.38) ve (5.39) sonlu fark denklemleri çok sade ve bilgisayar programı açısından da ekonomiktir. Ayrıca, (5.38) ve (5.39) denklemler sisteminden açıkça görülüyor ki, burada τ ve h üzerine hiç bir koşul koymaya gerek yoktur.

6. SONUÇLAR

Tezde birinci basamaktan nonlinear kısmi türevli diferansiyel denklemler sistemi için Cauchy ve başlangıç-sınır değer problemi incelenmiş ve ele alınan sonuçlar aşağıda belirtilmiştir.

- Hidrodinamiğin model denklemler sistemi için yazılmış Cauchy probleminin gerçek çözümü elde edilmiş ve çözümün bazı özellikleri incelenmiştir.
- Söz konusu denklem sistemi için yazılmış başlangıç-sınır değer probleminin çözümü için süreksiz fonksiyonlar sınıfında yeni bir sonlu farklar yöntemi önerilmiştir.

7. İRDELEME VE ÖNERİLER

Tezde bir boyutlu (yer değişkenine göre) birinci basamaktan lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler sistemi için sonlu farklar yöntemi önerilmiştir. Literatürden bilindiği gibi, söz konusu denklemlerin çözümleri yeri önceden belli olmayan sıçrayış noktalarına sahip olmaktadır. Süreksizlik noktalarının civarında denklemde bulunan türevleri direkt olarak sonlu farklara ayırklaştırmak yanlış sonuçlara yol açmaktadır. Bundan dolayı tezde esas probleme belli anlamda denk olan yardımcı problem önerilmiştir ki, söz konusu yardımcı denklemlerde bilinmeyen fonksiyonların x ve t değişkenine göre türevleri yer almamaktadır. Ayrıca da bilinmeyen fonksiyonlar sürekli de olabiliyorlar. Önerilen yardımcı probleme dayanarak iki tür sonlu farklar yöntemi ele alınmıştır.

- Açık sonlu farklar yönteminde, ağır adımları üzerinde koşul talep edilmektedir.
- Açık olmayan sonlu farklar yönteminde ise, adım üzerine koşul yazmaya gerek kalmamaktadır

Ayrıca, önerilen algoritmalar yeteri kadar kolay ve bilgisayar deneyleri için de çok ekonomik olmaktadır.

Önerilen sonlu farklar yönteminin diğer bir avantajı, ele aldığımız cebirsel lineer veya nonlineer denklem sisteminin her birinde, bir tek bilinmeyen olmasıdır. Böylelikle, tezde gaz dinamiğinin model denklemlerini oluşturan birinci basamaktan nonlineer kısmi türevli diferansiyel denklemler sistemi için yazılmış, başlangıç ve başlangıç-sınır değer problemlerinin nümerik çözümlerini ele almak için süreksiz fonksiyonlar sınıfında, ekonomik algoritmalar önerilmiş ve incelenmiştir.

9. KAYNAKÇA

1. Noh, W. F., Protter, M. N., Difference Methods and Equations of Hydrodynamics, Journal of Math and Mechanics, Vol.12, No.2, 1963.
2. Rasulov, M., Karagüler, T., Finite Difference Schemes of Solving System Equations of Gas Dynamic in a Class of Discontinuous Functions, App. Math. and Comp., Vol.143, pp.145-164, 2003.

8. ÖZGEÇMİŞ

1976 yılında Isparta'da doğdum. İlk ve orta öğrenimimi 1990 yılında İzmir'in Ödemiş ilçesindeki Atatürk İlköğretim Okulu'nda, liseyi 1993 yılında Antalya'nın Elmalı ilçesindeki Yusuf Öner Toy Çok Programlı Lisesi'nde tamamladım. 2000 yılında İstanbul Marmara Üniversitesi Makine Ana Bilim Dalı Talaşlı Üretim Öğretmenliği Bölümü'nden mezun oldum. 2005 yılında Beykent Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik-Bilgisayar Ana Bilim Dalı Uygulamalı Matematik Bilim Dalı'nda yüksek lisansa başladım. Antalya'da çeşitli dershanelerde matematik öğretmeni olarak görev yaptım. Halen Antalya Bil Dershanesinde matematik öğretmeni olarak görev yapmaktayım.