T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANABİLİM DALI
BİLGİSAYAR AĞLARI VE İNTERNET TEKNOLOJİLERİ BİLİM DALI

SİNÜS GORDON DENKLEMİNİN GENELLEŞTİRİLMİŞ FONKSİYONLAR SINIFINDA ÇÖZÜMÜ İÇİN SAYISAL ALGORİTMA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Turgay ÇORUHLU

İSTANBUL, 2007

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANABİLİM DALI
BİLGİSAYAR AĞLARI VE İNTERNET TEKNOLOJİLERİ BİLİM DALI

SİNÜS GORDON DENKLEMİNİN GENELLEŞTİRİLMİŞ FONKSİYONLAR SINIFINDA ÇÖZÜMÜ İÇİN SAYISAL ALGORİTMA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hazırlayan:
Turgay ÇORUHLU
050861014

Tez Danışmanı:
Prof. Dr. **Mahir RESULOV**

İSTANBUL, 2007

ÖNSÖZ

Tezimde bana her konuda yol gösteren ve yardımcı olan tez danışmanım Prof. Dr. Mahir RESULOV'a, yapıcı görüş ve eleştirilerinden dolayı Yrd. Doç. Dr. Bahaddin SİNSOYSAL'a, tezin yazılmasında bana yardımcı olan Öğr. Gör. Ayşen POYRAZOĞLU'na ve her işe başlamamın biricik kaynağı sevgili annem Fahriye (KURT) ÇORUHLU'ya teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

YEMİN METNİ

Sunduğum Yüksek Lisans Tezimi, Akademik Etik Kurallarına bağlı kalarak, hiç kimseden akademik ilkelere aykırı bir yardım almaksızın bizzat kendimin hazırladığına and içerim.

24/09/2007

Turgay ÇORUHLU

ÖZET

Üç bölümden oluşan tezde sinüs Gordon denkleminin genelleştirilmiş fonksiyonlar sınıfında sayısal çözümü için sade ve efektif bir sayısal algoritma önerilmiştir.

Bilindiği gibi bir diferansiyel denklemi sonlu farklara ayrıklaştırdığımızda, çözümün yüksek basamaktan türevlerinin varolması gerekmektedir. Fakat, nonlineer denklemler için çoğu zaman çözümün diferansiyellenebilme derecesi, denklemin derecesinden düşük olmaktadır. Bu ise böyle denklemler için sonlu farklar yöntemini direk uygulamaya imkân vermez.

Bu nedenle, tezin birinci bölümünde genelleştirilmiş fonksiyonların temel teorisi, genelleştirilmiş fonksiyon, genelleştirilmiş türev ve zayıf çözüm kavramları verilerek gerekli altyapı oluşturulmuştur.

İkinci bölümde sinüs Gordon denkleminin durağan çözümlerinin ele alınması için birkaç yöntem (Değişkenlerin Ayrılması, Bäcklund Dönüşümü, Ters Saçılma Metodu vs) irdelenmiştir. Bu yöntemler Schwartz fonksiyonlar sınıfında çalışmaktadır.

Son bölümde ise sinüs Gordon denkleminin çözümü için nümerik bir algoritma sunulmuştur. Bunun için esas probleme denk olan ve özel olarak oluşturulmuş yardımcı bir problem ortaya konmuştur. Bu yardımcı problemin diferansiyellenebilme özelliği esas problemin diferansiyellenebilme özelliğinden bir fazladır.

Anahtar Kelimeler: Genelleştirilmiş Fonksiyonlar, Zayıf Çözüm, Solitonlar, Sinüs Gordon Denklemi, Sonlu Farklar Yöntemi

ABSTRACT

In this three-part thesis, a simple and effective numerical algorithm is proposed to solve sine Gordon equation in a class of generalized functions.

As it is known, to discretize any differential equation into finite differences, the solution must have higher order derivatives. However, for a nonlinear equation, the order of the differentiability of the solution is generally less than that of the equation itself. This makes it impossible to use the method of finite differences.

Consequently, in the first part of the thesis, we construct the necessary infrastructure. Indeed, the general theory of the generalized functions and the concepts of the generalized function, generalized derivative and weak solution are given.

Secondly, in order to discuss the solution of sine Gordon equation, some methods such as seperation of variables, Bäcklund transformation and inverse scattering are used. These methods work in the Schwartz class of functions.

Finally, a numerical algorithm for solving sine Gordon equation are presented. To do so, a specially constructed auxiliary problem, which is equivalent to the main problem, is suggested. The differentiable property of the auxiliary problem is one degree higher than that of the main problem.

Key Words: Generalized Functions, Weak Solution, Solitons, Sine Gordon Equation, Finite Differences Method

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa No

1. GİRİŞ

1.1. Sinüs Gordon Denkleminin Çıkarılışı

Son dönemde fizik ve matematiğin birçok alanında yeni tip dalgalar sık sık ortaya çıkmıştır. Bu dalgalar parçacık özelliğine sahip soliton dalgaları olmaktadır. Soliton dalgası ilk kez 1834 yılında İskoç bilim adamı ve mühendisi Scott Russell tarafından gözlenmiştir. Lakin Russell bu gözlemlerini matematiksel olarak yorumlayamamıştır. Russell'ın gözleminden 60 yıl sonra iki Hollandalı matematikçi Korteweg ve de Vries soliton dalgalarını ifade eden denklemi ortaya koydular.

Eğer l su kanalının ortalama derinliği, $l+\eta$ (η küçük bir parametre olmak üzere) suyun üst yüzeyi olur ise bilinmeyen η parametresini ele almak için

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2}{3}\alpha\eta+\frac{1}{2}\eta^{2}+\frac{1}{3}\sigma\frac{\partial^{2}\eta}{\partial x^{2}}\right) \tag{1.1}$$

denklemini elde ettiler [1]. Burada $\sigma=\frac{l^{3}}{3}-\frac{Tl}{\rho g}$, α keyfi bir sabiti, T yüzeyin gerginliğini, g yerçekimi ivmesini ve ρ suyun yoğunluğunu gösterir.

Korteweg ve de Vries (KdV) denkleminin çözümü için ilk önemli adım Zabusky ve Kruskal tarafından 1965 yılında atıldı.

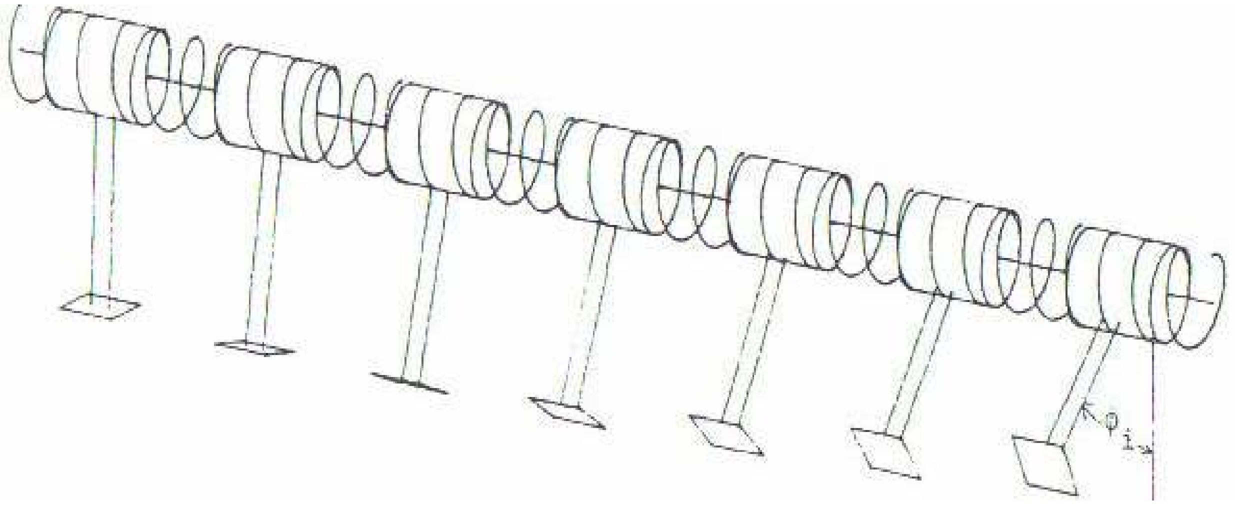
Literatürde soliton tipi çözümlere sahip pek çok denklem mevcuttur. Bu denklemlerin ortak özellikleri enerjisini ve biçimini koruyan çözümlere sahip olmasıdır. Sözkonusu denklemlerden bir tanesi Sinüs Gordon (SG) denklemidir. SG denklemi mekanik salınımların hareketini de modellerken karşımıza çıkmaktadır.

Varsayalım ki esnek bir bantın ağırlığı onun uçlarından birinde odaklanmıştır. Bu durumda, kitlenin sürekli dağılımını birim kitlelerin diskret dağılımına dönüştürebiliriz. Esnek bantın bir eksen boyunca bükülebilmesi bu tür sistemlerin önemli bir özelliğidir ve problemi modellerken bu özelliği de dikkate almamız gerekmektedir. Böylelikle, esnek yaylarla birleştirilmiş N tane salınımdan oluşan bir sistem alırız ki bu sistemin dönme momenti yayın dönme açısıyla doğru orantılıdır (Şekil 1).

Bükülmenin (burulmanın) dönme momenti

$$\Gamma = \kappa\theta$$

olmaktadır. Burada θ dönme momentini oluşturan açı κ ise yayın dönme katsayısıdır.



Şekil 1: Yaylarla Birleştirilmiş Salınımlar

Eğer, φ_i i. salınım ile aşağıya dik olarak yönelmiş doğru arasındaki açı olursa, çizgisel ω_i hızı φ_i ile ifade edilebilir. Birbirine benzer ve aynı J eylemsizlik momentine sahip salınımlar için Newton kanunu aşağıdaki gibi (1.2) ifade edilir.

$$J\dot{\omega}_i = \Gamma_i^{(1)} + \Gamma_i^{(2)} \tag{1.2}$$

Burada $\Gamma_i^{(1)}$ yayın dönmesinden oluşan moment, $\Gamma_i^{(2)}$ ise ağırlık kuvvetinden oluşan moment olmaktadır.

Eğer salınımların hepsinin kitlesi M ise ağırlık kuvvetinden oluşan dönme momenti

$$\Gamma_i^{(2)} = -Mdg\sin\varphi_i \tag{1.3}$$

olur. Burada d yayın merkez ekseninden salınımın merkezine kadar olan mesafeyi gösterir.

i. salınımın dönme momenti yalnızca sözkonusu salınımın sağ ve sol komşularındaki salınımlara bağlıdır. Salınımın önünde ve arkasındaki yaydan oluşan moment sırasıyla $\kappa(\varphi_{i-1} - \varphi_i)$ ve $\kappa(\varphi_{i+1} - \varphi_i)$ olmaktadır. Toplam moment

$$\Gamma_i^{(1)} = \kappa(\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}) \tag{1.4}$$

olur. (1.3) ve (1.4) denklemleri dikkate alınarak

$$J\ddot{\varphi}_i = \kappa(\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}) - K_G \sin\varphi_i \tag{1.5}$$

yazılır. Burada $K_G = Mdg$ olmaktadır.

Eğer yukarıda incelediğimiz diskret modeli sürekli modele dönüştürürsek (1.5) denkleminin yerine aşağıdaki kısmi türevli diferansiyel denklemi (KTDD) elde ederiz.

$$J\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \kappa\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - K_G \sin\varphi \tag{1.6}$$

Eğer

$$T = \left(\frac{K_G}{J}\right)^{1/2} t \ , \quad \mathrm{X} = \left(\frac{K_G}{\kappa}\right)^{1/2} x \tag{1.7}$$

değişken dönüşümünü yaparsak (1.6) denklemi

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial T^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial \mathrm{X}^2} + \sin\varphi = 0 \tag{1.8}$$

olur ki, bu da SG denklemidir.

(1.8) denklemi için aşağıdaki sınır koşulları yazılabilir.

$$\varphi(t,0) = \varphi(t,L) = 0 \quad \mathrm{mod}(2\pi) \tag{1.9}$$

veya

$$\frac{\partial\varphi(t,0)}{\partial x} = \frac{\partial\varphi(t,L)}{\partial x} = 0 \quad \mathrm{mod}(2\pi). \tag{1.10}$$

Tezin amacı SG denkleminin klasik çözümlerini incelemek ve genelleştirilmiş fonksiyonlar sınıfında sayısal çözüm için algoritma oluşturmaktır.

Bu nedenle sonraki işlerimizde gereken bazı temel kavramları vereceğiz.

1.2 Genelleştirilmiş Fonksiyonların Temel Teorisi

Tanım 1. $-\infty < x < \infty$ aralığında tanımlı, reel değerli ve herhangi $a \le x \le b$ sonlu aralığında Lebesque anlamında integrallenebilen fonksiyonlara adi fonksiyon denir [2].

Tanımdan görüldüğü gibi, her bir $a \le x \le b$ sonlu aralığında sürekli (ölçülebilir) fonksiyonlar adi fonksiyonlar olmaktadır.

$f_1(x)$ ve $f_2(x)$ adi fonksiyonları hemen hemen her yerde $f_1(x) = f_2(x)$ ise, bunlara eşit fonksiyonlardır denir. Adi fonksiyonlar kümesini *E* ile gösterilecektir. Adi fonksiyonların toplamı ve keyfi reel sabitle çarpımı da adi fonksiyon olur; yani, *E* lineer uzay oluşturmaktadır. *E* lineer uzayında kavramı da verilebilir.

Eğer $f_1(x)$, $f_2(x)$,..., $f_\nu(x)$,... adi fonksiyonlar dizisi hemen hemen her yerde $f(x)$ fonksiyonuna yakınsak ve ayrıca $|f_\nu(x)| \le f_0(x)$ ise (burada $f_0(x)$ - önceden bilinen adi fonksiyondur), bu taktirde Lebesque teoremine göre $f(x)$ limit fonksiyonu da adi fonksiyon olur. Diğer taraftan, bilinen ve çok gerekli olan diferansiyelleme işlemlerini *E* de her fonksiyon için tanımlamak mümkün değildir.

Uygulama bakımından genel amaç, tüm adi fonksiyonları içeren en azından diferansiyelleme işlemlerinin yürüyeceği bir sınıf oluşturmaktır. İlk bakışta, türev alma işlemleri tanımlanılacak sınıf dar gibi gözükse de, aslında bu sınıf dar değil, tersine daha da genişletilmiş olacaktır.

Bu bölümde E uzayı, üzerinde tanımlanan diferansiyel işlemi limit işlemine göre sürekli olacak şekilde yeni bir sınıfa genişletilecektir. Bundan dolayı bu bölümde, sonraki işlerimizde gereken bazı tanım ve kavramlar verilecektir. Önce, sonlu taşıyıcıya sahip (finit) fonksiyon tanımını içerelim.

Bir *f* fonksiyonunun sıfırdan farklı değerler aldığı noktalar kümesine *f* fonksiyonunun taşıyıcısı denir ve

$$Supp\ f(x) = \{\, x \mid f(x) \neq 0 \,\}$$

ile gösterilir. Başka bir deyimle, keyfi [a,b] aralığında tanımlı ve $a \le x \le b$ nin dışında sıfıra eşit olan $\varphi(x)$ fonksiyonuna sonlu fonksiyon denir.

Reel değerlere sahip $-\infty < x < \infty$ aralığında tanımlı ve her mertebeden sürekli diferansiyellenebilen sonlu taşıyıcıya sahip fonksiyonlar sınıfına temel (test) fonksiyonlar sınıfı ve bu sınıfın keyfi elemanına ise temel (test) fonksiyon denir.

Örnek 1. (Sobolev şapkası)

$$\varphi(x;a) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}, & |x| < a \\ 0, & |x| \ge a \end{cases}$$

fonksiyonu bir temel (test) fonksiyondur.

Temel fonksiyonların toplamı ve keyfi reel sayıyla çarpımı yine temel fonksiyon olur, yani temel fonksiyonlar sınıfı lineer uzay oluşturmaktadır. Söz konusu uzayı $\mathbf{D}$ ile gösterelim ($\mathbf{D}$ uzayı literatürde bazen **K** ile de gösterilir).

$\mathbf{D}$ uzayında keyfi $\varphi(x)$ temel fonksiyonu ile sonsuz diferansiyellenebilen ve $|x|$ in yeteri kadar büyük değerlerinde keyfi artma hızına sahip olan g(x) fonksiyonunun (toplamaya göre distribütiflik özelliğine sahip olan) çarpma işlemi de tanımlanmaktadır.

$\mathbf{D}$ uzayında limit alma işlemini tanımlayalım. Eğer $\{\varphi_\nu(x)\}$, $(\nu = 1,2,...,n,...)$ temel fonksiyonlar dizisinin tüm elemanları ve onların keyfi mertebeden türevleri herhangi bir $[a,b]$ aralığı dışında sıfıra eşitseler ve $\{\varphi_\nu^{(n)}(x)\}$, $(n = 0,1,2,...)$ dizileri sıfıra düzgün yakınsak olursa, bu taktirde, $\{\varphi_\nu(x)\}$, $(n = 0,1,2,...)$ dizisine sıfıra yakınsak dizi denir.

Şimdi $\varphi_\nu(x) = \frac{1}{\nu}\varphi(x;a)$, $(\nu = 1,2,...)$ dizisini göz önüne alalım, $\{\varphi_\nu(x)\}$, $(\nu = 1,2,...)$ $\mathbf{D}$ de sıfıra yakınsaktır. $\varphi_\nu(x) = \frac{1}{\nu}\varphi(\frac{x}{\nu};a)$ dizisi tüm türevleri ile birlikte sıfıra yakınsaktır; fakat $\mathbf{D}$ de sıfıra yakınsak değildir. Çünkü, bu dizi için malum bir $[a,b]$ yoktur ki, onun dışında $\{\varphi_\nu^{(n)}(x)\}$, $(\nu = 1,2,...)$ sıfır olsun.

$\mathfrak{D}$ de $\{\varphi_\nu(x)\}$ dizisinin $\varphi(x)$ fonksiyonuna yakınsaklığı $\{\varphi_\nu(x)-\varphi(x)\}$ dizisinin sıfıra yakınsaklığı anlamına gelmektedir.

Toplama, keyfi reel sayıyla çarpma, sonsuz diferansiyellenebilen bir fonksiyonla çarpma işlemleri yakınsaklık işlemine göre sürekli işlemlerdir. Yani hem $\varphi_\nu \to \varphi$ hem de $\psi_\nu \to \psi$ $\mathfrak{D}$ de yakınsak olduğunda $\alpha\varphi_\nu + \beta\psi_\nu \to \alpha\varphi + \beta\psi$ ve $g(x)\varphi_\nu(x) \to g(x)\varphi(x)$ nin her ikisi de $\mathfrak{D}$ de yakınsak olmaktadır.

Not. $\mathfrak{D}$ metrik uzay değildir, çünkü burada φ ve ψ elemanları arasında bilinen metrik özelliklerini sağlayan $\rho(\varphi,\psi)$ metriği tanımlanamaz. Çünkü, burada $\varphi_\nu \to \varphi$ yakınsaklığı $\rho(\varphi,\varphi_\nu) \to 0$ anlamında verilmektedir.

Gerçekten de, metrik uzayda

$$\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}, \ldots, \varphi_\nu^{(1)}, \ldots \to \varphi^{(1)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_1^{(m)}, \varphi_2^{(m)}, \ldots, \varphi_\nu^{(m)}, \ldots \to \varphi^{(m)}$$

yakınsak dizileri verilmiş olsun. Ayrıca da limit elemanlar için $\varphi^{(m)} \to \varphi$ sağlansın. O halde, her satırdan bir eleman seçmekle

$$\varphi_{\nu_1}^{(1)}, \varphi_{\nu_2}^{(2)}, \ldots, \varphi_{\nu_m}^{(m)}, \ldots$$

alt dizisi oluşturulur ki, bu dizi için de $\left\{\varphi_{\nu_m}^{(m)}\right\} \to \varphi$ dır. Ancak $\mathfrak{D}$ de böyle bir sonuca varılamaz. Örneğin,

$$\varphi_\nu^{(m)} = \frac{1}{\nu}\varphi(x;m), \ (\nu = 1,2,..; m = 1,2,...)$$

burada $\varphi(x;m)$ örnek 1 deki fonksiyon olmaktadır. Belli bir m değerinde $\left\{\varphi_\nu^{(m_0)}\right\}$ dizisi sıfıra yakınsak olur. Ama $\left\{\varphi_{\nu_m}^{(m)}\right\}$ dizisi sıfıra yakınsak değildir; çünkü, öyle bir $[a,b]$ yoktur ki, onun dışında $\varphi_{\nu_m}^{(m)}$ -lerin hepsi sıfıra eşit olsunlar.

Klasik analizden bilindiği gibi, herhangi bir sürekli fonksiyon diferansiyellenmeyebilir de. Örneğin, analizden bilinen Weierstrass fonksiyonu her yerde sürekli ama hiçbir yerde diferansiyellenemeyen fonksiyondur. Yani diferansiyelleme işlemi sürekli fonksiyonlar sınıfında tam tamına çalışmamaktadır. Bundan dolayı klasik fonksiyonlar sınıfını öyle bir şekilde genişletmek gerekecek ki, artık bu genişletilmiş sınıfta diferansiyelleme işlemi geçerli olsun. Kaba olarak genelleştirilmiş fonksiyonlar klasik fonksiyon kavramının öyle genelleştirilmesidir ki, burada keyfi sürekli fonksiyon diferansiyellenebilir ve onun türevi de genelleştirilmiş fonksiyondur. Yani, keyfi genelleştirilmiş fonksiyonun türevi vardır ve söz konusu türev de genelleştirilmiş fonksiyon olmaktadır.

Genelleştirilmiş fonksiyon kavramı çeşitli yollarla verilebilir. Genelleştirilmiş fonksiyon kavramı ilk kez 1936 yılında Sobolev tarafından verilmiştir. Sonra, 1950-51 yıllarında Schwartz genelleştirilmiş fonksiyon kavramını sistemleştirerek onu lineer topolojik uzayların esaslandırılması problemlerine uygulamıştır. Bu yöntem günümüzde çok ilerlemiş ve bu konuda bir çok ciddi sonuçlar alınmıştır.

Genelleştirilmiş fonksiyonlar teorisinde ikinci yöntem “dizisel yaklaşım” yöntemi olmaktadır. Bu yöntemde genelleştirilmiş fonksiyon adi fonksiyonlar dizisinin limiti gibi anlaşılmaktadır. Bu yöntem kolay olmasının yanısıra, fizikçiler için de bir o kadar doğal olmaktadır. Genelleştirilmiş fonksiyon teorisinin belirtilerini veren P. Dirac bile, $\delta(x)$ fonksiyonuna yakınsak olabilecek fonksiyonlar dizisinin olduğuna inanıyordu. Sözünü ettiğimiz iki yöntemin dışında da genelleştirilmiş fonksiyon tanımı mevcut olmaktadır.

1.3 Genelleştirilmiş Fonksiyonlar

$\mathbf{D}$ uzayı üzerinde herhangi bir $f(x)$ adi fonksiyonuna karşılık gelen

$$(f,\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx \quad , \ \varphi\in \mathbf{D} \tag{1.11}$$

lineer fonksiyoneli göz önüne alalım [2]. Burada doğal olarak, integralleme aralığı $supp\,\varphi$ üzerinde yoğunlaşmaktadır.

Bu kavram fonksiyon tanımının genişletilmesine olanak sağlamaktadır. Önceleri, bir fonksiyonun tanım aralığının keyfi noktasında (veya hemen hemen her yerde) tanımlı ve tek değerli olması isteniliyordu, ama şimdi göz önüne alınan adi fonksiyonun herhangi bir temel fonksiyonla çarpımının integralinin sonucu bizi ilgilendirmektedir. Eğer bu integral mevcutsa, biz onu genelleştirilmiş fonksiyon olarak isimlendireceğiz.

Bu kavram gösterir ki, temel fonksiyonlar iyi seçildiği durumda keyfi genelleştirilmiş fonksiyonun türevi vardır ve o da genelleştirilmiş fonksiyon olmaktadır.

Bu arada, fonksiyonun ayrı ayrı noktalarda değeri belli olmazsa, genel ve temel fonksiyonların çarpımının integralinin nasıl tanımlanılacağı sorusu akla gelebilir. Bu sorunun cevabı çok sadedir. Bu durumda biz integrali yapısal değil aksiyomatik olarak tanımlayacağız.

Açıktır ki, temel fonksiyonları farklı seçmekle farklı genelleştirilmiş fonksiyonlara ulaşılır. Buradan şu sonuca varılır: Keyfi genelleştirilmiş fonksiyonun (adi) türevi olması için her bir temel fonksiyonun türevi de temel fonksiyon olmalıdır. Buradan da temel fonksiyonları sonsuz türevlenebilen olarak ele almak söz konusu olmaktadır. Diğer bir deyişle, eğer $|x|\to\infty$ olduğu durumda keyfi hızla yükselen $f(x)$ adi fonksiyonu için genelleştirilmiş fonksiyonlar sınıfına düşsün, yani $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$ in keyfi adi fonksiyon için mevcut olması için $\varphi(x)$ in sonlu olmasını da talep etmek gerekmektedir.

(1.11) cinsinden tanımlanan fonksiyonel lineerdir, yani $\forall\ \varphi_{1,}\ \varphi_2 \in \mathbf{D}$ ve $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in R$ için

$$(f, \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1(f, \varphi_1) + \alpha_2(f, \varphi_2)$$

dır. Ayrıca (1.11) fonksiyoneli süreklidir. Yani, $\mathbf{D}$ de $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ... \to 0$ ise, o zaman $\lim\limits_{\nu\to\infty}(f, \varphi_\nu) = 0$ (integralin özelliğinden) olmaktadır. Böylelikle, (1.11) $\mathbf{D}$ de sürekli lineer bir fonksiyonel oluşturmaktadır.

$\mathbf{D}$ de (1.11) cinsinden ifade edilemeyen diğer fonksiyoneller de vardır. Örneğin,

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

gibi tanımlanan Dirac fonksiyonunun oluşturduğu fonksiyonel $(\delta, \varphi(x)) = \varphi(0)$ dır. (1.11) cinsinden olan fonksiyonel D uzayında tanımlanan çok özel lineer ve sürekli fonksiyonellerden biri olmaktadır. Diğer türden olan fonksiyoneller de oluşturmak mümkündür. Örneğin, keyfi $\varphi(x)$ fonksiyonu için aşağıdaki gibi tanımlanan

$$\int_R f(x)\varphi(x)dx = \varphi(0) \tag{1.12}$$

lineer ve sürekli fonksiyoneldir. Kolayca gösterilebilir ki, keyfi lokal integrallenebilen fonksiyonel (1.11) cinsinden ifade edilemez. Gerçekten de varsayalım ki, herhangi lokal integrallenebilen $f(x)$ ve keyfi $\varphi(x)$ test fonksiyonları için (1.12) eşitliği doğrudur.

Özel durumda $\varphi(x, a)$ olarak örnek 1 deki fonksiyonu ele alırsak

$$\int_R f(x)\varphi(x)dx = \varphi(0, a) = e^{-1}$$

olur. Ama $a \to 0$ olduğunda (1.12) nin sol tarafı sıfıra yaklaşır; bu da (1.12) gösterimi ile çelişir.

Tanım 2. $\mathbf{D}$ de tanımlı lineer, sürekli fonksiyonele, yani

(i) $(f, \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1(f, \varphi_1) + \alpha_2(f, \varphi_2)$,

(ii) $\mathbf{D}$ de $\varphi_\nu \to 0$ ise $(f, \varphi_\nu) \to 0$

koşullarını sağlayan f fonksiyoneline genelleştirilmiş fonksiyon denir.

(1.11) cinsinden ifade edilebilen fonksiyonele regüler, edilemeyene singüler (tekil) fonksiyonel denir. Bu durumda, $(\delta,\varphi)=\varphi(0)$ singüler fonksiyon olmaktadır.

Keyfi adi fonksiyona (1.11) cinsinden olan genelleştirilmiş fonksiyon karşı geliyor.

Örnek2. $f(x)\equiv c$ olsun

Tanım 2 'ye göre $(f,\varphi)\equiv(c,\varphi)=c\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx$ biçimindeki genelleştirilmiş fonksiyon sabit olarak isimlendirilecektir. Özel olarak genelleştirilmiş 1 fonksiyonu, $(1,\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx$ anlamındadır.

f_1 ve f_2 genelleştirilmiş fonksiyonlarının aynı temel fonksiyonlar üzerinde oluşturduğu fonksiyoneller eşit olursa, yani $(f_1,\varphi)\equiv(f_2,\varphi)$ ise böyle genelleştirilmiş fonksiyonlara eşittir denir.

Eğer en az bir φ_0 temel fonksiyonu için $(f_1,\varphi_0)\neq(f_2,\varphi_0)$ olursa böyle genelleştirilmiş fonksiyonlara farklı genelleştirilmiş fonksiyonlar denir. Şimdi gösterelim ki, iki adi $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ fonksiyonları için farklı genelleştirilmiş fonksiyonlar karşı gelir. Farz edelim ki, iki $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ adi fonksiyonu (1.11) cinsinden olan iki genelleştirilmiş fonksiyon oluşturur ve bunlar için

$$\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x)\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}f_2(x)\varphi(x)dx\,,\quad \varphi\in \mathbf{D}$$

$f_1(x)-f_2(x)=f$ olsun, f adi fonksiyondur ve $\forall\varphi\in\mathbf{D}$ için $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\varphi(x)dx=0$ olur.

Eğer $f(x)$ mutlak sürekli fonksiyon ise, o $f'(x)$ adi türevine de sahiptir. Bu taktirde $f'(x)$ için

$$(f',\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}f'(x)\varphi(x)dx$$

sayısını karşılık getirebiliriz.

Şimdi $\varphi(x)$ de mutlak sürekli ve sınırlı $\varphi'(x)$ türevine sahip olan fonksiyon olsun. O halde son integralden

$$(f',\varphi) = f(x)\varphi(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx$$

elde edilir, yani

$$(f',\varphi) = -(f,\varphi') \tag{1.13}$$

dır. Eğer f' fonksiyonu klasik anlamda mevcut olmazsa bile $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx$ ifadesi keyfi $\varphi(x)$ test fonksiyonları için mutlaka mevcut olmaktadır. Böylelikle elimizde $f'(x)$ olmasa da ve illaki bize $f'(x)$ in sınırlı türeve sahip, sınırlı bir fonksiyonla çarpımının integrali gerekmekte ise bu sonuca, $f'(x)$ in mevcut olduğu var sayılır gibi kabul ederek, (1.11) ifadesinin önüne eksi işaret yazmakla ulaşabiliriz.

Yukarıda gördük ki, eğer $f(x)$ ve $f'(x)$ fonksiyonları sürekli ise, bu taktirde f' fonksiyoneli $f'(x)$ türevini verir. Parça-parça sürekli $f(x)$ için $f'(x)$ in mevcut olduğu kolayca gösterilebilir.

Örnek 3. (Hevisayd fonksiyonu)

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Bu fonksiyona karşı gelen fonksiyoneli de $\theta(x)$ ile gösterelim. (1.13) formülüne göre

$$(\theta'(x), \varphi(x)) = (\theta(x), -\varphi'(x)) = -\int_{0}^{\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0)$$

dır. Böylelikle, $\delta(x)$ fonksiyonunun tanımına göre $\theta'(x) = \delta(x)$ olduğu elde edilir. Genel olarak $\theta'(x - x_0) = \delta(x - x_0)$ olur.

Örnek 4. $f(x)$, $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ noktalarında $h_1, h_2, ..., h_n, ...$ sıçrayışlarına sahip fonksiyon olsun. Bu durumda $f'(x)$ fonksiyonu sonlu $x_1, ..., x_n$ noktaları dışında her yerde tanımlı fonksiyon olmaktadır.

Aşağıdaki fonksiyonu göz önüne alalım

$$f_1(x) = f(x) - \sum_k h_k \theta(x - x_k) .$$

Bu fonksiyonunun genelleştirilmiş fonksiyonlar sınıfında türevi

$$f_1'(x) = f'(x) - \sum_k h_k \delta(x - x_k)$$

olup

$$f'(x) = f_1'(x) - \sum_k h_k \delta(x - x_k)$$

dır.

1.4 Genelleştirilmiş Fonksiyonların Türevleri

Şimdi çok değişkene bağlı genelleştirilmiş fonksiyonun kısmi türevi kavramına geçelim. Varsayalım ki, f $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ değişkenlerine bağlı fonksiyon olduğunda $f(x)$ fonksiyonunun x_i, $(i=1,2,...,n)$ değişkenine göre kısmi türevleri aşağıdaki formül yardımı ile tanımlanır [2].

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i},\varphi\right)=\left(f,-\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right),\quad (i=1,2,...,n).$$

Bilindiği gibi genelleştirilmiş fonksiyonun türevi de genelleştirilmiş fonksiyon olduğundan f fonksiyonunun yüksek mertebeden

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},\ \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k},.....$$

türevlerini de aynı yolla tanımlayabiliriz. Böylelikle tüm genelleştirilmiş fonksiyonlar sonsuz diferansiyellenebilirdirler.

İkinci mertebeden genelleştirilmiş türevi olan, fakat birinci mertebeden genelleştirilmiş türevi olmayan fonksiyon gösterilebilir. $f(x)$ genelleştirilmiş türevi olmayan fonksiyon olmak üzere aşağıdaki fonksiyonu göz önüne alalım

$$F(x,y)=f(x)+f(y).$$

Bu taktirde $F(x,y)$ fonksiyonunun birinci mertebeden türevi yoktur (Lusternik, Sobolev). Fakat $F(x,y)$ nin ikinci mertebeden genelleştirilmiş türevi vardır. Gerçekten de, gereken koşulları sağlayan $\psi(x,y)$ fonksiyonu için

$$\iint_G F(x,y)\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}dxdy=\iint_G f(x)\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}dxdy+\iint_G f(y)\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}dxdy.$$

Diğer taraftan

$$\iint_G f(x)\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}dxdy=\int_a^b f(x)\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}dxdy=\int_a^b f(x)\frac{\partial \psi}{\partial x}\Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}dx=0$$

$$\psi'_x(x,\varphi_1(x)) = \psi'_x(x,\varphi_2(x)) = 0$$

burada $\varphi_1(x)$ ve $\varphi_2(x)$ G nin $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$ sınırlarını göstermektedir. Aynı yolla

$$\iint_G f(y)\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}dxdy = 0$$

elde ederiz. Buradan

$$\iint_G F(x,y)\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}dxdy = 0 = \iint_G 0.\psi(x,y)dxdy$$

yani $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}$ mevcuttur ve özdeş olarak sıfıra eşittir.

Hemen hemen her yerde türevin olmasından genelleştirilmiş türevin olması çıkarılamaz.

1.5 Zayıf Çözüm

Doğadaki bir çok pratik problemlerin matematiksel modelleri, kısmi türevli diferansiyel denklem veya denklem sistemi için yazılmış başlangıç ve sınır değer problemin çözümünün bulunmasına indirgenilir[2]. Çoğu zaman problemin söz konusu verileri süreksiz fonksiyonlar olabilir. Bazı durumlarda ise matematiksel problemin çözümünde, diğer deyişle fiziksel olayın dinamiğinde süreksizlik ortaya çıkmaktadır [3].

Genel olarak nonlineer problemin çözümünde bazı özellikler ortaya çıkmaktadır. Nonlineer problemlerde ortaya çıkan yeni karakteristik özellikler (örneğin, tedirgin edilmiş cephenin sonlu hızla dağılımı, darbe dalgası, kontakt sıçrayışları vs. gibi fiziksel özellikler) zayıf çözüm kavramı yardımıyla ifade edilebilirler.

Söz konusu zayıf çözümü tanımlamak için göz önüne alınan diferansiyel denkleme karşılık gelen integral gösterim yazmak gerekmektedir. Genelde, kısmi türevli diferansiyel denklem için zayıf çözüm kavramı farklı yollarla yazılabilir.

Kısmi türevli diferansiyel denklemler için zayıf çözüm kavramını 1930'lu yıllarda Sobolev' in verdiğine önceden değinilmişti. Sobolev anlamındaki zayıf çözüm, integral eşitlik yardımı ile tanımlanmaktadır. Bu tanımı açıklamak için, $Q_T \subset R^{n+1}$ ($Q_T = D \times [0,T)$, $\vec{x} \in D$ ve $t \in [0,T)$) Öklit uzayında konveks bir bölge, $u = u(x_1, x_2, ... x_n, t)$ ve $f(x_1, x_2, ... x_n, t)$ Q_T de ölçülebilir fonksiyonlar olmak üzere operatör biçimde verilmiş

$$Lu=f \tag{1.14}$$

lineer kısmi türevli diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Burada L sürekli diferansiyellenebilen katsayılara sahip self-adjoint (öz eşlenik) diferansiyel ifadeyi göstermektedir.

Tanım 3. Test fonksiyonlar sınıfından keyfi $\varphi(x_1, x_2, ... x_n, t)$ fonksiyonları için

$$\int_{Q_T} \{ uM\varphi - f\varphi \} dxdt = 0 \,, \quad x = (x_1, ..., x_n) \tag{1.15}$$

integral eşitliğini sağlayan u fonksiyonuna (1.14) denkleminin zayıf (veya genelleştirilmiş) çözümü denir. Burada $M = L^*$ dir; yani M, L operatörüne karşılık gelen adjoint operatör olmaktadır.

Tanım 3 den görüldüğü gibi (1.14) denkleminin herhangi bir klasik çözümü (1.15) eşitliğini korumak zorundadır. Ama (1.15) eşitliğini sağlayan $u(x_1, x_2, ... x_n, t)$ fonksiyonları daha geniş bir sınıf oluşturur. Çünkü (1.15) in içerdiği u fonksiyonlarının klasik anlamda türevlenebilir olması gerekmiyor.

Zayıf çözümler göz önüne alındığında, denklem için başlangıç ve sınır değer koşullarının hangi anlamda verileceğini özel olarak belirtmek gerekmektedir.

2. SİNÜS GORDON (SG) DENKLEMİNİN GERÇEK ÇÖZÜMLERİ

SG denkleminin gerçek çözümlerinin bulunması için kullanılan pek çok yöntem vardır. Bu yöntemler literatürde ortalama tekniği, benzerlik metodu, Whitham varyasyon prensibi, Bäcklund dönüşümü, değişkenlere ayırma metodu ve ters saçılma metodu olarak bilinmektedir [4]. Birkaçını inceleyeceğimiz sözkonusu yöntemlerin Schwartz fonksiyonlar sınıfında (özel) çözüm verdiğini hemen belirtelim [3].

Sinüs Gordon denkleminin standart formu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sin u \tag{2.1}$$

dur ve en önemli nonlineer evrim denklemlerinden biridir.

$$\xi = \frac{1}{2}(x + ct) \text{ ve } \tau = \frac{1}{2}(x - ct)$$

karakteristik koordinat dönüşümleri ile (2.1) denklemi

$$u_{\xi\tau} = \sin u \tag{2.2}$$

formuna dönüşür. (2.2) denklemi ($n = 0, \pm1, \pm2, ...$) olmak üzere $u \to u + 2n\pi$ altında değişmezdir ve $u \to u + (2n+1)\pi$ için ise $\sin u$ $-\sin u$ ya dönüşür.

2.1 Düzlem Dalga Çözümü

(2.1) denkleminin linerleştirilmiş formu

$$u_{xx} - c^{-2} u_{tt} = u \tag{2.3}$$

şeklinde verilir.

(2.3) denkleminin $u(x,t) = A\exp[i(kx - \omega t)]$ formundaki düzlem dalga çözümü vardır. Burada k ve ω arasındaki bağlantı $\omega^2 = c^2(1 + k^2)$ sapma ilişkisi ile sağlanır. Bu gösterir ki,

ω tüm gerçek k lar için gerçektir ve (2.1) denkleminin $u = 0$ denge çözümü dayanıklıdır. Fakat, eğer $u = \bar{u} + \pi$ ise küçük $\bar{u}$ lar için aşağıdaki

$$\bar{u}_{xx} - c^{-2}\bar{u}_{tt} = -\bar{u} \tag{2.4}$$

lineer denklemi elde ederiz.

(2.4) denkleminin de $\bar{u}(x,t) = A\exp[i(kx - wt)]$ formundaki düzlem dalga çözümü vardır ve burada $\omega^2 = c^2(k^2 - 1)$ sapma ilişkisi sağlanır. Böylece $0 \le k^2 < 1$ ise $\omega^2 < 0$ olur ve $\bar{u}(x,t)$ zamanla üstel olarak büyüyecektir. Yani, $u = \pi$ denge çözümü kesinlikle dayanıksızdır. Bu fiziksel olarak oldukça doğaldır çünkü u_{xx} terimi olmadığında sinüs Gordon denklemi (2.1) sonlu salınımları betimleyen basit sarkaç denklemine indirgenir. Bu yüzden dayanıklılık sorusu sinüs Gordon denkleminin denge çözümlerinin önemli bir özelliği olur.

2.2 Sinüs Gordon Denkleminin Durağan Çözümü

Şimdi (2.1) denkleminin tek-soliton çözümlerinden bahsedeceğiz. Çözümü $\xi = x - vt$ argümanına bağlı koşan dalga $u(x,t) = \phi(x - vt) = \phi(\xi)$ şeklinde arayalım. Burada ϕ şimdilik bilinmeyen fonksiyondur. Bu fonksiyonu (2.1) denkleminde yerine koyarsak $\phi(\xi)$ için

$$\frac{d^2\phi}{d\xi^2} - V^2\frac{d^2\phi}{d\xi^2} = \sin\phi \tag{2.5}$$

formunda adi bir diferansiyel denklem elde ederiz. Burada $V^2 = \dfrac{v^2}{c^2}$. (5) denkleminin her iki tarafını $\left(1 - V^2\right)$ ile bölüp, $\phi'(\xi)$ ile çarparsak

$$\frac{d}{d\xi}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{d\xi}\right)^2 + \frac{\cos\phi}{1 - V^2}\right] = 0 \tag{2.6}$$

denklemini elde ederiz. Köşeli parantezin içerisi bir sabit olmalıdır. Bu sabiti B olarak gösterelim. Buradan,

$$\frac{d\phi}{d\xi} = \left(2B - \frac{2\cos\phi}{1-V^2}\right)^{1/2} \tag{2.7}$$

olur ve değişkenleri ayırıp integrallersek

$$\int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\psi}{\sqrt{A - \cos\psi}} = \left(\frac{2}{1-V^2}\right)^{1/2} \int_{\xi_0}^{\xi} d\eta \tag{2.8}$$

denklemine ulaşırız. Burada $A = B\sqrt{1-V^2}$. Bu çözüm, solitonun hızı V ve B integral sabitine bağlıdır. Böylece kararlı çözümler v ve A ya bağlı olarak tek başına dalgalar, periyodik dalgalar veya ξ nin monoton artan fonksiyonunu temsil eder. $A = 1$ olduğunda herhangi bir hız için tek başına dalga vardır ($0 < |V| < 1$ ve $0 < |v| < c$). Bu durumda

$$1 - \cos\phi = 2\sin^2\left(\frac{1}{2}\phi\right) \text{ ve } \frac{d}{d\phi}\left[\log\tan\left(\frac{1}{4}\phi\right)\right] = \left(2\sin\frac{1}{2}\phi\right)^{-1}$$

trigonometrik eşitliklerini kullanarak

$$\left(\frac{2}{1-V^2}\right)^{\frac{1}{2}}(\xi - \xi_0) = \sqrt{2}\int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\psi}{2\sin\frac{1}{2}\psi} = \sqrt{2}\log\left[\frac{\tan\frac{1}{4}\phi}{\tan\frac{1}{4}\phi_0}\right] \tag{2.9}$$

elde ederiz ve buradan da $\phi(\xi)$ çözümünü

$$\phi(\xi) = 4\tan^{-1}\left\{\alpha \exp\left(\frac{\xi - \xi_0}{1-V^2}\right)\right\} \tag{2.10}$$

olarak buluruz. Burada $\alpha = \tan\frac{1}{4}\phi_0$ ve ξ_0 integral sabitidir. Özel olarak $\alpha = 1$ ve $\xi_0 = 0$ seçersek, $u(x,t)$ için

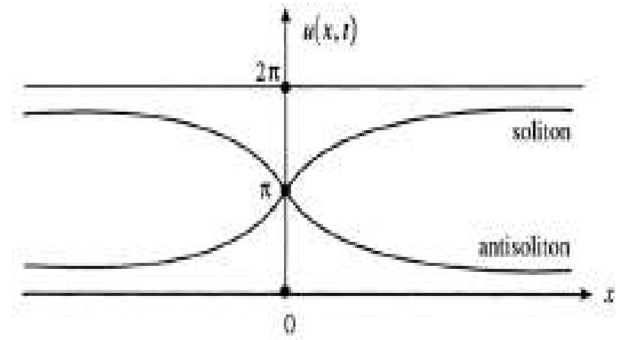
$$u(x,t) = 4\tan^{-1}\left\{\exp\left(\frac{x - Vt}{1-V^2}\right)\right\} \tag{2.11}$$

formunda basit bir tek başına dalga çözümü elde ederiz. Bu SG denkleminin "soliton (kink)" çözümü olarak adlandırılır ve $x \to -\infty$ iken $u \to 0$ ve $x \to \infty$ iken $u \to 2\pi$ şeklinde sürekli bir profil gösterir. Soliton x yönünde V hızıyla hareket etmektedir.

“Antisoliton (antikink)” olarak adlandırılan başka bir çözüm

$$u(x,t) = 4\tan^{-1}\left\{\exp\left(-\frac{x-Vt}{1-V^2}\right)\right\} = 4\cot^{-1}\left\{\exp\left(\frac{x-Vt}{1-V^2}\right)\right\} \tag{2.12}$$

formunda elde edilebilir Bu çözümde profil $-x$ yönünde V hızıyla hareket eder ve $x \to \infty$ iken $u \to 0$ ve $x \to -\infty$ iken $u \to 2\pi$ şeklinde süreklilik gösterir.



Şekil 2: Soliton ve Antisoliton çözümleri

$u(x,t)$ nin türevleri de

$$u_x(x,t) = \phi'(x-vt) \text{ ve } u_t(x,t) = -v\phi'(x-vt)$$

şeklinde verilen tek başına dalgalar temsil eder. Burada $\phi'(\xi)$ (2.10) denkleminden

$$\phi'(\xi) = \frac{4\tan\frac{1}{4}\phi}{\sqrt{1-V^2}\left\{1+\tan^2\left(\frac{1}{4}\phi\right)\right\}} = \frac{2\sec h\left\{\frac{(x-Vt)}{\sqrt{1-V^2}}\right\}}{\sqrt{1-V^2}} \tag{2.13}$$

olarak elde edilir.

$A \neq 1$ olduğunda SG denkleminin başka çeşit çözümleri elde edilebilir. Örneğin, $V > 1$ ve $|A| < 1$ olduğunda, $\phi_0 = 0$ ve $\xi_0 = 0$ için (2.8) deki integral

$$\xi = \left(\frac{1-V^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\phi} \frac{d\psi}{\sqrt{(1-\cos\psi)-(1-A)}} = \left(\frac{1-V^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\phi} \frac{d\psi}{\sqrt{2}\sqrt{\sin^2\frac{\psi}{2}-m^2}} \quad , \quad m^2 = \frac{1}{2}(1-A)$$

olarak yazılabilir. $s = \frac{1}{m}\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)$ dönüşümüyle

$$\xi = \left(V^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}\sqrt{1-s^2 m^2}} \tag{2.14}$$

elde ederiz. Bu ise Jacobi eliptik fonksiyonu

$$s = \frac{1}{m}\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) = sn\left(\frac{\xi}{\sqrt{V^2-1}}, m\right) \tag{2.15}$$

cinsinden ifade edilebilir (Dubna ve Debnath, 1965). Burada m Jacobi eliptik fonksiyonunun $sn(z,m)$ modülüdür. Böylece nihai çözüm

$$u(x,t) = \phi(\xi) = 2\sin^{-1}\left[m.sn\left(\frac{\xi}{\sqrt{V^2-1}}, m\right)\right]. \tag{2.16}$$

2.3 Değişkenlerin Ayrılması Metodu

Çözümün (2.12) formundaki ifadesi bize aşağıdaki

$$v(x,t) = \tan\left(\frac{1}{4}u\right) \tag{2.17}$$

değişken dönüşümü yapılmasını dikte eder ve bu değişken dönüşümü sin Gordon denklemini

$$u_{xx} - u_{tt} = \sin u \tag{2.18}$$

$\sin u = 4v\left(1-v^2\right)/\left(1+v^2\right)^2$ trigonometrik özdeşliği kullanılarak

$$\left(1+v^2\right)\left(v_{xx} - v_{tt} - v\right) - 2v\left(v_x^2 - v_t^2 - v\right) = 0 \tag{2.19}$$

formuna dönüştürülebilir. (2.17) çözümünü

$$v(x,t) = \tan\left(\frac{1}{4}u\right) = \frac{\phi(x)}{\psi(t)} \tag{2.20}$$

şeklinde arayalım. Burada $\phi(x)$ ve $\psi(t)$ bilinmeyen fonksiyonlardır. (2.20) denklemi (2.19) denkleminde yerine yazılır ve $\sin 4\theta = 4\tan\theta\left(1-\tan^2\theta\right)/\left(1+\tan^2\theta\right)$, $\theta = \frac{1}{4}u$, eşitliği kullanılarak

$$\left(\phi^2+\psi^2\right)\left(\frac{\phi_{xx}}{\phi}+\frac{\psi_{tt}}{\psi}\right)-2\left(\phi_x^2+\psi_t^2\right)=\phi^2-\psi^2 \tag{2.21}$$

elde edilir. Bu denklemin x ve t ye göre türevinin alınması

$$\frac{1}{\phi\phi_x}\left(\frac{\phi_{xx}}{\phi}\right)_x=-\frac{1}{\psi\psi_t}\left(\frac{\psi_{tt}}{\psi}\right)_t=-4\kappa^2 \tag{2.22}$$

olacak şekilde değişkenleri ayırmamızı sağlar ki, burada $-4\kappa^2$ ayırma sabitidir. Her iki adi diferansiyel denklem iki defa integrallenirse

$$\phi^2=-\kappa^2\phi^4+a\phi^2+b \text{ ve } \psi^2=\kappa^2\psi^4+c\psi^2+d \tag{2.23}$$

bulunur. Bunları (2.21) denkleminde yerine koyarsak $a-c=1$ ve $b+d=0$ olması gerektiğini görürüz. m ve n integral sabitleri olmak üzere $a=m^2$ ve $b=n^2$ alırsak

$$\phi_x^{\ 2}=-\kappa^2\phi^4+m^2\phi^2+n^2 \text{ ve } \psi_t^{\ 2}=\kappa^2\psi^4+\left(m^2-1\right)\psi^2-n^2 \tag{2.24}$$

elde ederiz. Genel olarak (2.24) denklemlerinin eliptik fonksiyonlar cinsinden çözümleri vardır ancak, biz bazı özel çözümlerini inceleyeceğiz.

$\kappa=n=0$ ve $m>1$ durumunda (2.24) denklemleri

$$\phi_x=\pm m\phi \text{ ve } \psi_t=\pm\sqrt{m^2-1}\,\psi \tag{2.25}$$

haline dönüşür ve buradan da $\phi(x)$ ve $\psi(t)$ çözümleri, a_1 ve a_2 integral sabitleri olmak üzere,

$$\phi(x)=a_1\exp\left(\pm mx\right) \text{ ve } \psi(t)=a_2\exp\left(\sqrt{m^2-1}t\right) \tag{2.26}$$

olur. Böylece (2.20) çözümü $\alpha=\dfrac{a}{a_2}$ ve $U=\dfrac{\sqrt{m^2-1}}{m}$ sabitler olmak üzere

$$u(x,t)=4\tan^{-1}\left[\alpha\exp\left(\pm\frac{x\pm Ut}{\sqrt{1-U^2}}\right)\right] \tag{2.27}$$

olarak bulunur. Açıkça görüldüğü gibi $\alpha=1$ için özdeş (2.11) çözümünü (soliton veya kink çözümü) elde ederiz. Aynı şekilde (2.12) antisoliton (antikink) çözümü de elde edilebilir.

$\kappa = 0$, $m^2 > 1$ ve $n \neq 0$ durumunda ise (2.24) denkleminin çözümleri integralle hiperbolik fonksiyonlar cinsinden, a_1 ve a_2 integral sabitleri olmak üzere,

$$\phi(x) = \pm \left(\frac{n}{m}\right) \operatorname{sech}(mx + a_1), \quad \psi(t) = \frac{n}{\sqrt{m^2-1}} \cosh\left(\sqrt{m^2-1}\, t + a_2\right) \tag{2.28}$$

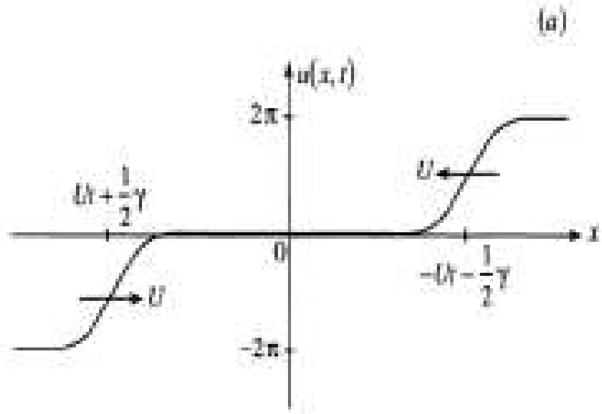
şeklinde elde edilebilir. Böylece, (2.20) çözümü

$$u(x,t) = \pm \tan^{-1}\left[\frac{U \sinh(mx + a_1)}{\cosh\left(\sqrt{m^2-1}\,t + a_2\right)}\right] \tag{2.29}$$

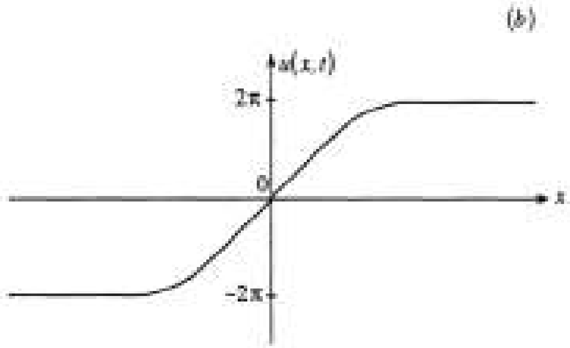
olarak bulunur. Bu sonuç ϕ/ψ oranından elde edildiği için n ye bağımlı değildir. Özel olarak $a_1 = a_2 = 0$ seçilirse (2.29) çözümü

$$u(x,t) = \pm \tan^{-1}\left[\frac{U \sinh(mx)}{\cosh(mUt)}\right], \; 0 < U^2 < 1 \tag{2.30}$$

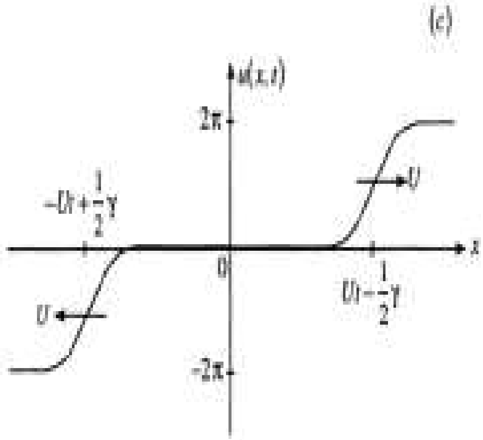
formunda ifade edilebilir. Bu çözüm ilk olarak Perring ve Skyrme (1962) tarafından etkileşen iki soliton hesaplamalarında keşfedildi.



(a)



(b)



(c)

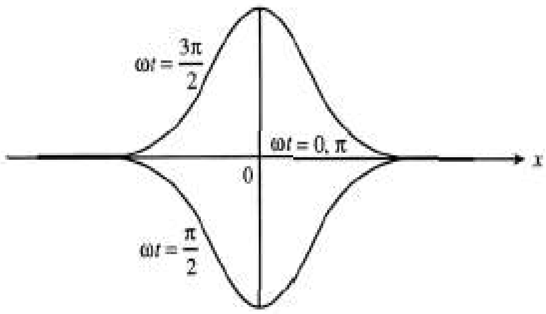
Şekil 3: (2.30) Denklemi İçin İki Özdeş Solitonun Etkileşimi

U > 0, (a) $t \to -\infty$, (b) $t = 0$, and (c) $t \to +\infty$.(Drazin (1983))

$\kappa \neq 0$, $n = 0$, and $m^2 < 1$ durumunda $w = \sqrt{1-m^2} = mU$ olmak üzere

$$u(x,t) \approx 4\tan^{-1}\left[\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}.\frac{\sin(wt+a_2)}{\cosh(mx+a_1)}\right] \tag{31}$$

Breather çözümü elde edilir ve bir solitonun atma tipindeki yapısını temsil eder.



Şekil 4: Breather Çözümü

SG denkleminin sınırlarla uzayın sonlu bir bölgesine sınırlandırılmış durumdaki çözümleri de ilgi çekicidir. Böylesi bir solitonun pozisyonunun salınımı dış potansiyelle kısıtlanmış parçacığın hareketine çok benzemektedir. Bu da solitonların elastik parçacıklar gibi davrandığını doğrular (Newell ve Kaup (1978),De Leonardis ve Trullinger, 1980).

2.4 Bäcklund Dönüşümü

Sin Gordon denkleminin karakteristik formunu

$$u_{xt} = \sin u \tag{2.31}$$

gözönüne alalım. 1880 yılında Bäcklund

$$\frac{1}{2}(u-v)_x = a\sin\frac{1}{2}(u+v), \qquad \frac{1}{2}(u+v)_t = \frac{1}{a}\sin\frac{1}{2}(u-v) \tag{2.32ab}$$

denklemler çifti şeklinde bir dönüşüm keşfetti. Burada a sıfırdan farklı gerçek bir sabittir. Bu denklem çifti (2.31) denkleminin Bäcklund dönüşümü olarak adlandırılır. (2.32) eşitliklerinin çapraz türevleri alınırsa

$$\frac{1}{2}(u-v)_{tx} = \frac{a}{2}(u+v)_t \cos\frac{1}{2}(u+v) = \sin\frac{1}{2}(u-v)\cos\frac{1}{2}(u+v) \tag{2.33}$$

$$\frac{1}{2}(u+v)_{xt} = \frac{1}{2a}(u-v)_x \cos\frac{1}{2}(u-v) = \sin\frac{1}{2}(u+v)\cos\frac{1}{2}(u-v) \tag{2.34}$$

buluruz. (2.33) ve (2.34) toplanır ve çıkarılırsa sırasıyla

$$u_{xt} = \sin u \quad \text{ve} \quad v_{xt} = \sin v \tag{2.35}$$

elde edilir. Açıkca görüldüğü üzere, Bäcklund dönüşümü (2.31) denklemini sağlayan iki çözümü, u ve v, ilişkilendirmektedir. u ve v aynı SG denklemini sağladığı için (2.32) çifti (2.31) denklemi için oto- Bäcklund dönüşümüne karşılık gelir. Bu ise verilen bir çözümden başlayarak SG denkleminin çözümlerinin bir serisini üretmek için kullanılabilir.

Şimdi (2.32) denklem çiftini SG denklemini (2.31) çözmek için kullanacağız. Tüm x ve t değerleri için $u(x,t) = 0$ çözümünün önemsiz olduğu aşikardır. Biz bu çözümü anlamlı bir çözüm elde etmek için kullanacağız. $v = 0$ alırsak (2.32) çifti

$$u_x = 2a\sin\frac{1}{2}(u), \quad u_t = \frac{2}{a}\sin\frac{1}{2}(u) \tag{2.36}$$

olur. Bu denklemlerin integrallerin alınması

$$2ax = \int^{u} \cos ec\left(\frac{1}{2}u\right)du = 2\log\left|\tan\frac{1}{4}u\right| + A(t) \tag{2.37}$$

$$\frac{2t}{a} = \int^{u} \cos ec\left(\frac{1}{2}u\right)du = 2\log\left|\tan\frac{1}{4}u\right| + B(x) \tag{2.38}$$

denklemlerini verir. $A(t)$ ve $B(x)$ integral sonucu oluşan keyfi fonksiyonlardır. (2.37) ve (2.38) den

$$\tan\left(\frac{u}{4}\right) = \alpha\exp\left(ax + \frac{t}{a}\right) \tag{2.39}$$

elde edilir. Burada α bir sabittir. Buradan eşdeğer olarak

$$u(x,t) = 4\tan^{-1}\left[\alpha\exp\left(ax + \frac{t}{a}\right)\right] \tag{2.40}$$

elde ederiz. (2.40), (2.31) denkleminin yeni bir çözümüdür ve bir soliton (kink) çözümü tanımlar. Benzer şekilde (2.1) denklemine dönersek , $\xi = \frac{1}{2}(x + ct)$ ve $\tau = \frac{1}{2}(x - ct)$ olduğunu hatırlayınız,

$$u(x,t) = 4\tan^{-1}\left[\alpha\exp\left\{\frac{a}{2}(x+ct) + \frac{1}{2a}(x-ct)\right\}\right] = 4\tan^{-1}\left[\alpha\exp\{\pm m(x-Ut)\}\right] \tag{2.41}$$

elde ederiz. Burada $\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)=m=\left(1-U^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ ve $\frac{c}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)=Um$ ve $a=\pm\left(\frac{1-U}{1+U}\right)^{\frac{1}{2}}$,

$|U|<1$ ve $U=c\left(\frac{a^2-1}{a^2+1}\right)$ olur. Böylece (2.41) denklemi artı ve eksi işarete bağlı olarak soliton (kink) ve antisoliton (antikink) temsil eder. Bu çözümler m genişliğine sahip olup sabit U hızıyla salınım yapmaktadırlar.

Şimdi ise tamamen cebirsel bir yöntem aracılığıyla bilinen bir çözümden, u_0, etkileşen iki solitonu temsil eden yeni bir soliton çözümü ortaya koyacağız. İlk olarak (2.32) denklemindeki u ve v leri sırayla u_1 ve u_2 ile yerdeğiştirelim ve $a_1 \neq a_2$ olmak üzere iki keyfi sabite $a=a_1$ ve $a=a_2$ karşılık gelen iki çözüm elde edelim. Bu çözümleri kullanarak sırasıyla $a=a_2$ ile u_2 ve $a=a_3$ ile u_1 parametrelerine karşılık gelen iki tane daha çözüm u_3 ve u_4 arıyoruz. Yukarıdaki prosedüre göre (2.32a)'dan dört tane ilişki elde ederiz:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}=\frac{\partial x_0}{\partial x}+2a_1\sin\frac{1}{2}\left(u_1+u_0\right), \tag{2.42}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}=\frac{\partial x_0}{\partial x}+2a_2\sin\frac{1}{2}\left(u_2+u_0\right), \tag{2.43}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x}=\frac{\partial x_1}{\partial x}+2a_2\sin\frac{1}{2}\left(u_3+u_1\right), \tag{2.44}$$

$$\frac{\partial u_4}{\partial x}=\frac{\partial x_2}{\partial x}+2a_1\sin\frac{1}{2}\left(u_4+u_2\right). \tag{2.45}$$

$u_3=u_4=v_2$ alıp ve integral sabitleri için uygun değerler alalım. Oluşan sonuçlardan (2.45)'i (2.41)'den ve (2.44)'ü (2.43)'ten çıkarırsak

$$a_1\left[\sin\frac{1}{2}\left(v_2+u_2\right)-\sin\frac{1}{2}\left(u_1+u_0\right)\right]=a_2\left[\sin\frac{1}{2}\left(v_2+u_1\right)-\sin\frac{1}{2}\left(u_2+u_1\right)\right]$$

elde ederiz. İki sinüs fonksiyonun farkı formülünü kullanarak bu sonucu daha basit formda

$$a_1\sin\left[\frac{1}{4}\left\{\left(v_2-u_0\right)-\left(u_1-u_2\right)\right\}\right]=a_2\sin\left[\frac{1}{4}\left\{\left(v_2-u_0\right)+\left(u_1-u_2\right)\right\}\right]$$

şeklinde elde ederiz.

Bu sonucu biraz daha basitleştirirsek

$$\tan\left\{\frac{1}{4}(v_2 - u_0)\right\} = \left(\frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2}\right)\tan\left\{\frac{1}{4}(u_1 - u_2)\right\} \tag{2.46}$$

sonucuna ulaşırız. Buradan v_2'yi çekersek

$$v_2 = 4\tan^{-1}\left[\left(\frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2}\right)\tan\left\{\frac{1}{4}(u_1 - u_2)\right\}\right] + u_0 \tag{2.47}$$

buluruz. Bu u_0, u_1 ve u_2 cinsinden yeni bir çözümdür ve SG denklemi için nonlineer süperpozisyon prensibi sayılabilir. Burada belirtilmesi gereken nokta (2.47) denklemi (2.32b) denkleminden de türetilebilir. Bu yordama devam etmek mümkündür ve nihayetinde $(n-1)$ soliton çözümden, v_{n-1} , n tane etkileşen soliton çözüm v_n elde edilir. Özel olarak, etkileşen iki soliton için çözüm

$$\tan\left(\frac{1}{4}v_2\right) = \left(\frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2}\right)\frac{\sinh\left[\frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2)\right]}{\cosh\left[\frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2)\right]} \tag{2.48}$$

olarak elde edilir. Burada (2.41) ve (2.46) denklemlerini kullandık ve

$$\xi_r = \pm\left(1 - U_r^2\right)^{-\frac{1}{2}}(x - Ut), \quad a_r = \pm\left[(1 - U_r)/(1 + U_r)\right]^{\frac{1}{2}}, \quad r = 1,2 .$$

Eğer $U_1 = -U_2 = U$ seçersek (2. 48)

$$\tan\left(\frac{1}{4}v_2\right) = \frac{U\sinh(mx)}{\cosh(mUt)} \tag{2.49}$$

formuna indirgenir. Bu sonuç Perring ve Skyrme tarafından bulunan (2.30) ile aynıdır.

2.5 Ters Saçılma Metodu

Lamb'ı (1980) takip ederek ters saçılım yaklaşımıyla (2.31) denkleminin çözüm metodunu tasvir edeceğiz [5]. Bu yaklaşımın özü (2.31) denklemini v_1 ve v_2 için lineer saçılım denklemlerinin bir çifti (2.50) ile alakalandırmaktır.

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x} + i\zeta v_1 &= -\frac{1}{2}u_x v_2 \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - i\zeta v_2 &= \frac{1}{2}u_x v_1 \end{aligned} \qquad (2.50ab)$$

Bu denklemler, $x \to \pm\infty$ iken v_1 ve v_2'nin sınırlı olması koşullarıyla birlikte, (2.31) denkleminin $u(x,t)$ çözümüyle ilgili potansiyel diye adlandırılan verilmiş bir fonksiyon $q = -\frac{1}{2}u_x$ için özdeğeri ζ bulmak için bir problem olarak düşünülebilir.

Dikkat ediniz ki eğer v_1 ve v_2 sınırlı ve $x \to \pm\infty$ iken $q \to 0$ yeterince hızlıysa; $x \to \pm\infty$ iken $v_1 \approx a_1 \exp(-i\zeta x)$ ve $v_2 \approx a_2 \exp(-i\zeta x)$. Bundan ötürü, ancak ve ancak ζ reel olduğunda sınırlı olmayan bir durum olur. Eğer ζ sabit gerçek bir sayı olarak alınırsa, $\zeta_t = 0.$ (2.50) denkleminin t'ye göre türevini, x'e göre integralini alır; sonra da (2.31) denklemiyle birleştirirsek (v_1, v_2) vektör özdeğerleri için

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial t} &= \frac{i}{4\zeta}(v_1 \cos u - v_2 \sin u) \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} &= \frac{i}{4\zeta}(v_1 \sin u + v_2 \cos u) \end{aligned} \qquad (2.51ab)$$

evrim denklemlerini elde ederiz. Çözüm u, $q = -\frac{1}{2}u_x$ eşitliğiyle q ile ilgilidir ki

$$u(x,t) = -2\int_{-\infty}^{x} q(\xi,t)\,d\xi. \qquad (2.52)$$

$x \to -\infty$ iken u sıfıra yaklaşır. Bu yüzden, (2.51ab) denklemleri $x \to -\infty$ iken

$$v_{1t} \approx \frac{i}{4\zeta}v_1, \qquad v_{2t} \approx -\frac{i}{4\zeta}v_2, \qquad (2.53ab)$$

verir. $x \to \infty$ iken (2.51ab) denkleminin formu, $x \to \infty$ iken $u(x,t)$ 'nin değerine bağlıdır. Çözümün sorunsuz şekilde elde edildiği tek durum(lar) $x \to \infty$ iken $u(x,t) = 2n\pi$ olmaktadır. (2.53a) denkleminden görürüz ki $x \to -\infty$ iken v_1 ya sıfırdır ya da $\exp\left(-\frac{it}{4\zeta}\right)$'e eğilim gösterir. Benzer şekilde, (2.53b) denklemi gösterir ki $x \to -\infty$ iken v_2 ya sıfırdır ya da $\exp\left(-\frac{it}{4\zeta}\right)$'e eğilimlidir. Sonra

$$\phi_1(x,k) = \exp(-ikx) + \int_{-\infty}^{x} A_1(x,\xi)\exp(-ik\xi)d\xi \tag{2.54}$$

ve

$$\phi_2(x,k) = \int_{-\infty}^{x} A_2(x,\xi)\exp(-ik\xi)d\xi \tag{2.55}$$

şeklinde verilen temel çözümlerle orantılı çözümü göz önüne alalım. Burada A_1 ve A_2 saçılan ve yansıyan parçacıkları temsil eder. Dolayısıyla, $x \to -\infty$ iken

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \approx \exp\left(\frac{it}{4\zeta}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\exp(-i\zeta x). \tag{2.56}$$

Çözümün formu lineer olarak bağımsız iki çözümün lineer bir kombinasyonu olarak gösterilebilir, yani $x \to \infty$ iken

$$v \approx \exp\left(\frac{it}{4\zeta}\right)\left[c_{11}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\exp(i\zeta x) + c_{12}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\exp(-i\zeta x)\right]. \tag{2.57}$$

Sonuç olarak, $x \to \infty$ limitinde

$$\begin{aligned} v_1 &\approx c_{11}(\zeta,t)\exp\left[i\left(\frac{t}{4\zeta} - \zeta x\right)\right] \\ v_2 &\approx c_{12}(\zeta,t)\exp\left[i\left(\frac{t}{4\zeta} + \zeta x\right)\right] \end{aligned} \tag{2.58ab}$$

olur ki burada c_{11} ve c_{12} ‘nin zaman bağımlılığı (2.51ab) denkleminden $x \to \infty$ limitinde bulunur.

Lamb (1980) çok solitonlu çözümleri

$$u(x,t) = -4\tan^{-1}\left[\frac{\operatorname{Im}|I - iM|}{\operatorname{Re}|I - iM|}\right] \tag{2.59}$$

şeklinde vermiştir. Burada I, N dereceli bir birim matris, N üst yarı düzlemdeki $c_{12}(\zeta,0)$'ın sıfırları ve M zamana bağımlı elemanların

$$M_{Lj}(k_l,t) = m_{Lj}(k_j,0)\exp\left(\frac{it}{2k_j}\right) \tag{2.60}$$

NxN boyutundaki matrisidir. Burada, $k_1 = \frac{1}{2}ia_1$ de sanal eksen üzerindeki tek bir kutupla alakalı en basit durumu göz önünde bulunduruyoruz. Öyle ki,

$$m_{L1}(k_1,t) = m_{L1}(k_1,0)\exp\left(\frac{t}{a_1}\right) \tag{2.61}$$

ve

$$M_{L1} = \frac{1}{a}m_{L1}(k_1,0)\exp\left(a_1x + \frac{t}{a_1}\right). \tag{2.62}$$

Sonuçta, tek soliton çözümü (2.59) denkleminden

$$u(x,t) = 4\tan^{-1}\left[\exp\left(a_1x + \frac{t}{a_1} + \gamma\right)\right] \tag{2.63}$$

olarak türetilebilir. Burada $\gamma = \log\left[\frac{1}{a}.m_{Ll}(k_l,0)\right]$. Bu çözüm farklı gibi görünse de daha önce bulunan (2.27) denklemine özdeştir.

Son olarak, iki solitonun etkileşimini temsil eden SG denkleminin çözümü sanal eksen üzerindeki iki kutuptan elde edilebilir. Burada, $k_r = \frac{1}{2}ia_r$, $r = 1,2$ alırsak, $|I - iM_L|$ ifadesi

$$\operatorname{Re}|I - iM_l| = 1 - \frac{m_{L1}m_{L2}}{a_1a_2}\left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}\right)^2 \exp\{(a_1 + a_2)x\} \tag{2.64}$$

$$\operatorname{Im}|I - iM_L| = -\left[\frac{m_{L1}}{a_1}\exp(a_1x) + \frac{m_{L2}}{a_2}\exp(a_2x)\right] \tag{2.65}$$

formunu alır. Nihayetinde, iki-soliton(lu) çözüm $a_1 > a_2$ olmak üzere

$$u(x,t) = -4\tan^{-1}\left[\left(\frac{a_1+a_2}{a_1-a_2}\right)\frac{\cosh\frac{1}{2}(u_1-u_2)}{\sinh\frac{1}{2}(u_1+u_2)}\right] \tag{2.66}$$

formunu alır. Burada

$$u_r = \left(a_r x + \frac{t}{a_r} + \gamma_r\right), \quad \exp(\gamma_r) = \left(\frac{a_1-a_2}{a_1+a_2}\right)\left[\frac{m_{Lr}(k,0)}{a_r}\right]. \tag{2.67}$$

Yukarıdaki çözümler salt çok-solitonlu çözümlere evrimleşen özel çözümlerdir.

Ters saçılımla ilgili buraya kadar verdiğimiz bilgiler karmaşık görünebilir. Ters metod Gardner, Grene, Kruskal ve Miura tarafından geliştirilmiştir ve soliton teorisine yapılan en önemli katkılarından biridir [5]. Yöntemleri KdV denkleminin başlangıç değer problemini lineer hesaplamalar serisi ile çözülebilmesini sağlıyordu. Bu metod kısa zaman sonra Lax tarafından genelleştirildi. Analitik ayrıntılara girmeden Lax'ın formülasyonunun özetleyelim.

Soyut olarak

$$\phi_t = K(\phi) \tag{2.68}$$

şeklinde temsil edilen genel nonlineer dalga denklemi ile ilgileniyoruz. Burada K uygun fonksiyonlar uzayında bir nonlineer operatörü simgelemektedir. Varsayalım ki (2.68) kısmi türevli diferansiyel denkleminin çözümü ϕ 'ya bağımlı ve

$$iL_t = BL - LB \tag{2.69}$$

operatör denklemini sağlayan L ve B lineer operatörleri bulabiliriz. B özeşlenik olduğunda (2.69) denklemi otomatik olarak

$$L\psi = E\psi \tag{2.70}$$

eşitliğinde ortaya çıkan L'nin özdeğerleri E'nin zamandan bağımsız olduğunu gösterir. Bu L'nin zamana ϕ ile bağımlı olduğunda da doğrudur. (Bu sabit özfonksiyonlar ve veriden evrilen solitonların sabit hızları arasında bir karşılıklık vardır.)

Dahası, ψ özfonksiyonlarının

$$i\psi_t = B\psi \qquad (2.71)$$

denklemine göre zamanla evrimleştiği gösterilebilir.

Zaman zaman lineer operatör L ‘li saçılım problemi ile karşılaşmak mümkündür. Bu durumda, $\phi(x,0)$ verisi verildiğinde aşağıdaki prosedürü izleyerek $\phi(x,t)$ ’yi bulabiliriz.

1) **Direkt(Doğrudan) Problem:** $\phi(x,0)$ bilgisinden $|x| = \infty$ ve $t = 0$ da ψ için saçılım parametrelerini (örneğin L ’nin yansıma ve iletim katsayılarını) hesaplarız.

2) **Saçılım Verisinin Zaman Evrimi:** (2.71) denklemini kullanarak $|x| = \infty$ da B ’nin asimptotik formuyla birlikte saçılım verisinin zaman evrimini hesaplarız.

3) **Ters Problem:** L ’nin saçılım verisi bilgisinden zamanın bir fonksiyonu olarak $\phi(x,t)$ ’yi oluştururuz.

Ters metodun ana fikri (2.68) nonlineer denklemini direkt çözmek yerine, lineer hesaplamalarla çözmektir.

Elbette ki bu yaklaşımla alakalı pek çok potansiyel zorluklar vardır. (2.79) denklemini sağlayan L ve B operatörleri bulamayabiliriz. Operatör L için ters problemi çözemeyebiliriz. L ve B bazı noktalarda önemsiz olabilir. (Örneğin, varsayalım ki $L = -\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \phi$ ve $B = iu\dfrac{\partial}{\partial x}$ ’dir. Bu durumda (2.69) $\phi_t = u\phi_x$ olur ve ϕ hızı u olan herhangi yürüyen dalga olabilir.)

Bu zorluklarına karşın ters metod çok çeşitli evrim denklemlerini çözmektedir.

2.6. Literatür Taraması

Bäcklund dönüşümüne sahip bazı özel nonlineer kısmi türevli diferansiyel denklemlerin (KTDD) varlığı 19. yüzyıl sonlarında biliniyordu. Bunlardan bir tanesi eğriliği sıfırdan farklı yüzeylerin geometrisi araştırmalarında ortaya çıkan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \tau} = \sin u \tag{2.72}$$

şeklindeki KTDD dir (Steuerwald,1936).

1939 yılında Frenkel ve Kontorova katı hal fiziğindeki yerdeğiştirme dinamiği ve bir kristalin deformasyonu arasındaki ilişki problemini modellemeye çalışırken (2.72) denklemiyle alakasız gibi görünen ve yerdeğiştirme hareketini betimleyen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sin u \tag{2.73}$$

denklemine ulaştılar. Burada $u(x,t)$ x yönündeki atomik yerdeğiştirmedir ve sinüs fonksiyonu kristal kafesin periyodikliğini temsil eder. (2.73) denkleminin yerdeğiştirmenin salınımına karşılık gelen yürüyen bir dalga çözümü v hızının $(-1,+1)$ aralığında değiştiği

$$u(x,t) = 4\arctan\left[\exp\left(\frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}\right)\right] \tag{2.74}$$

dir. $\xi = (x-t)/2$ ve $\tau = (x+t)/2$ bağımsız değişken dönüşümüyle (2.73) denkleminin (2.72) denklemiyle özdeş olduğu görülür. Dolayısıyla (2.74) denklemindeki gibi yerdeğiştirme bileşenlerinin rastgele sayısını içeren (2.73) denkleminin gerçek çözümü bir Bäcklund dönüşüm serisiyle elde edilebilir. Fakat Frenkel ve Kontorova bunu bilmiyordu. Steuerwald ve Frenkel-Kontorova çalışması arasındaki bağlantıyı 1953 yılında Seeger ve arkadaşları gösterdi.

Seeger ve Skyrme çarpışan ve (2.74) denklemindeki gibi iki çözümü içeren (2.73) denkleminin çözümlerini çalıştılar ve Zabusky ve Kruskal tarafından ortaya atılan soliton olgusunun gerçek analitik bir tanımını buldular (1962). Ayrıca (2.73) denklemi ile maddenin temel parçacıklarının nonlineer bir modeli olarak ilgilenmişlerdir [6].

60'lı yıllar boyunca (2.73) denklemi pekçok problemde ortaya çıkmıştır. Ferromagnetik domain duvarlar, nonlineer optikteki öz-saydamlık, uzun Josephson iletim hatlarındaki magnetik akı kuantalarının salınımı bunlardan bazılarıdır. Ama belki de en önemli katkı 1965 yılında yıkıcı olmayan soliton çarpışmaları ile Fermi-Pasta-Ulam (FPU) modeli arasındaki ilişkiyi tanımlayan makaleleriyle Zabusky ve Kruskal'dan geldi [5].

Belirtmek gerekir ki basitçe bağımsız değişkenlerin değişimiyle sinüs-Gordon denklemi kendiliğinden indüklenmiş saydamlık denklemlerinin çözümünde yararlı bir kılavuz olan

$$\phi_{xt} + \phi_{tt} = \sin\phi \tag{2.75}$$

formuna veya çok önceki yıllarda yarıküresel (sabit negatif eğik/bükümlü) yüzeylerin teorisi ile bağlantılı olarak incelenmiş olan

$$\phi_{xt} = \sin\phi \tag{2.76}$$

formuna dönüştürülebilir. Açıktır ki, (2.75), (2.75) denkleminin $-\phi_{tt}$ 'li formu ve (2.76) pek çok ortak özelliği paylaşmaktadır çünkü bağımsız değişken dönüşümü hariç eşdeğerdir.

ϕ 'de 2π kadarlık (x $+\infty$ dan $-\infty$' a giderken) rotasyona karşılık gelen sin-Gordon denkleminin tekbaşına dalga çözümleri; $+$ işaretin pozitif yönde rotasyon olarak ve atmanın bir soliton düşünüldüğüne ve - işaretin negatif yönde rotasyon olarak ve atmanın bir "antisoliton" olarak düşünüldüğüne karşılık geldiği

$$\phi = 4\tan^{-1}\left[\exp\pm\left(\frac{x-ut}{\sqrt{1-u^2}}\right)\right] \tag{2.77}$$

formuna sahiptir. Toplam rotasyon korunmak zorunda olduğu için solitonların sayısı ve antisolitonların sayısı arasında fark her çarpışmada korunmak zorundadır. Çiftler halinde yaratılır ve yokedilirler. Buna ilaveten, sinüs-Gordon denklemi Lorentz dönüşümü altında değişmezdir. Böylece SG denkleminin tek başına dalga çözümleri fiziğin temel parçacıklarının pek çok özelliğini gösterir. 1953 yılında Seeger, Donth ve Kochendörfer bu denklemi kristal yerdeğiştirme hareketini açıklamak için kullanarak "soliton-soliton" ve "soliton-antisoliton" çarpışmaları için analitik ifadeler türettiler. Aynı sonuçlar bağımsız olarak 1962'de Perring ve Skyrme tarafından elde edildi . "Soliton-soliton" çarpışması

$$\tan\frac{\phi}{4}=\frac{u\sinh\left(x/\sqrt{1-u^2}\right)}{\cosh\left(ut/\sqrt{1-u^2}\right)} \tag{2.78}$$

denklemi ile, "soliton-antisoliton" çarpışması

$$\tan\frac{\phi}{4}=\frac{\sinh\left(ut/\sqrt{1-u^2}\right)}{u\cosh\left(x/\sqrt{1-u^2}\right)} \tag{2.79}$$

denklemi ile verilir. Burada önemli ve ilginç bir nokta vardır ki, (2.79)'e göre her ne kadar birbirini yoketme toplam rotasyonun korunumunu ihlal etmesede, bir soliton ve bir antisoliton birbirini yoketmeden birbirinin içinden geçebilir.

Ablowitz, Kaup, Newell ve Segur ters saçılma metodunu kullanarak (2.76) denkleminin başlangıç değer problemini çözdüler. Bu formülleştirmeyle çok solitonlu çarpışmaların için çözüm elde edilebilir.

Böyle solitonların fiziksel kanıtı Josephson-tipi tünel düğümleri tarafından yönlendirilen süperiletken iletim hatları üzerindeki magnetik akı salınımı çalışmalarından elde edildi. Her bir soliton tek bir magnetik akımın kuantumunu temsil eder. Fulton, Dynes ve Anderson tarafından tanımlanan ve son dönemde Fulton ve Dunkleberger tarafından farkedilen kuantum "akı aracı" etkisi değişim kayıdı elde etmek için kullanıldı..

Lamb sinüs-Gordon denkleminin (2.76) N-soliton çözümünü elde etmek için Bäcklund dönüşümünü kullandı. Bu Bäcklund dönüşümü orijinal olarak bir denklemin çözüm yüzeyini başka bir denklemin çözüm yüzeyine dönüştürmek için, gaz dinamiği, akışkanlar ve nonlineer dalga salınımı alanlarında kullanıldı.

McLaughlin ve Scott

$$\phi_{xy}+\alpha\phi_x+\beta\phi_y=F(\phi),\ \ \alpha,\beta \text{ sabit} \tag{2.80}$$

denklemiyle tarif edilen etkileşen dalgaların çalış(ıl)masına bu dönüşümlerin uygulanmasında temel bir adım oluşturdular. (2.76) denklemi (2.80) için özel bir durumdur ve Lamb ve Scott tarafından etraflıca çalışıldı. Forsyth gösterdi ki (2.76) denklemi

$$\frac{1}{2}\left(\phi_{jx} - \phi_{j-1,x}\right) = a_j \sin\frac{1}{2}\left(\phi_j + \phi_{j-1}\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(\phi_{jy} + \phi_{j-1,y}\right) = -1\Big/a_j \sin\frac{1}{2}\left(\phi_j - \phi_{j-1}\right), \quad j = 1,2; \quad a_j \text{ sabit} \tag{2.81}$$

ilişkileri aracılığıyla kendine dönüştürülebilir ki ϕ_j ve ϕ_{j-1} sinüs-Gordon denkleminin (2.76) çözümleridir. Eğer ϕ_j bilinen bir çözüm kabul edilirse, birinci derece kısmi diferansiyel denklemlerinin eş çiftini çözerek ϕ_{j-1} çözümü elde edilir. Bu yüzden, vakum çözümü, yani $\phi_0 = 0$, ile başlayarak bahsi geçen Bäcklund dönüşümleri serisiyle $\phi_0, \phi_1, ..., \phi_k$ çözümleri elde edilebilir.

Gösterilebilir ki uygun başlangıç koşulları altında (2.76) denkleminin dört çözümü iki sabit a_k ve a_j cinsinden

$$\phi_{k,j+1} = B_{a_j}\phi_{k,j}$$

$$\phi_{k+1,j} = B_{a_k}\phi_{k,j}$$

$$\phi_{k+1,j+1} = B_{a_k}B_{a_k}\phi_{k,j} = B_{a_k}B_{a_k}\phi_{k,j}, \quad k, j = 1,2 \tag{2.82}$$

olacak şekilde ilişkilendirilebilir. Burada (Seeger, Donth ve Kochendörfer'in notasyonunu kullanarak) B_{a_j}, sabit a_j ile ilişkili Bäcklund dönüşüm operatörü olmaktadır. [Bäcklund dönüşümünün (2.82) yerdeğiştirme özelliği Lamb tarafından gösterilmiştir.]

Son zamanlarda Barnard SG denkleminin N-soliton çözümünü elde etmek için yukarıda bahsedilen Bäcklund dönüşümleri serisini kullandı. Bu çözümlerin analitik ifadeleri eğer $j > 0$ ise

$$\phi_{j\mp 1,j} = 0$$

$$\phi_{j,j} = 4\tan^{-1}\left[e^{-\kappa_j x + (1/\kappa_j)t + \gamma_{jj}}\right], \quad \gamma_{jj} \text{ sabit}, \quad (-1)^j/\kappa_j \le 0 \ . \tag{2.83}$$

Eğer $j > k$ ise

$$\phi_{k,j} = \phi_{k\mp 1,j-1} + 4\tan^{-1}\left[\frac{\dfrac{1}{\kappa_j}-\dfrac{1}{\kappa_k}}{\dfrac{1}{\kappa_j}+\dfrac{1}{\kappa_k}}\tan\left(\frac{\phi_{k,j-1}-\phi_{k+1,j}}{4}\right)\right]\left(-1\right)^k\frac{1}{\kappa_k} < \left(-1\right)^j\frac{1}{\kappa_j}.$$

Bir N-soliton çözüm için analitik ifadeyi elde etmek için N'den daha az derecede tüm soliton çözümleri için ifadeler elde etmek gereklidir. Fakat, Caudrey ve arkadaşları SG denklemi için bir N-soliton formülü elde ettiler ki çözümler doğrudan hesaplanabilir. Onlar

$$\phi(x,t) = \cos^{-1}\left[1 + 2\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\ln f(x,t)\right] \tag{2.84}$$

dönüşümünü kullandılar ve iddia ettiler ki eğer

$$f(x,t) = \det\left|M\right|$$

ise ϕ sinüs-Gordon denklemi için bir çözümdür. Burada $N \times N$ matrisi M

$$M_{kj} = \frac{\left(a_k a_j\right)^{1/2}}{a_k + a_j}\left[e^{\kappa_k x - \beta_k t + \gamma_k} + \left(-1\right)^{k+j} e^{-\kappa_j x + \beta_j t - \gamma_j}\right], \quad \gamma_j \text{ sabit}$$

$$\kappa_j = a_j + 1/a_j, \quad a_j \text{ sabit}$$

$$\beta_j = 1/a_j - a_j \tag{2.85}$$

elemanlarına sahiptir. Kendi ters saçılım metodunu kullanarak Ablowitz ve arkadaşları SG denklemi için ikinci bir N-soliton formülü geliştirdiler. Bu, $N \times N$ matrisi B'nin

$$B_{jk} = \frac{\sqrt{c_j c_k}}{\kappa_j - \kappa_k^*} e^{i\left(\kappa_j - \kappa_k^*\right)x}$$

$$c_j(t) = e^{-\left(i/2\kappa_j\right)t + \gamma_j}, \qquad \gamma_j \text{ sabit}$$

elemanlarına sahip olduğu

$$\frac{1}{4}\left(\phi_x\right)^2 = \left(\log\det\left|BB^* + I\right|\right) \tag{2.86}$$

formülüdür.

Hirota SG denklemi için bir N-soliton çözümünün başka bir formunu buldu.

$$\phi = 4\tan^{-1}[g/f] \tag{2.87}$$

dönüşümünü kullanarak iddia eder ki eğer f ve g (A.A.6) denklemi ile bu denklem için

$$\beta_i^{\,2} = \kappa_i^{\,2} - 1$$

ve

$$e^{\beta_{ij}} = \frac{(\kappa_i - \kappa_j)^2 - (\beta_i - \beta_j)^2}{(\kappa_i + \kappa_j)^2 - (\beta_i + \beta_j)^2}$$

eşitliklerini sağlıyor ise ϕ, SG denklemi için bir çözümdür.

Sin Gordon denkleminin

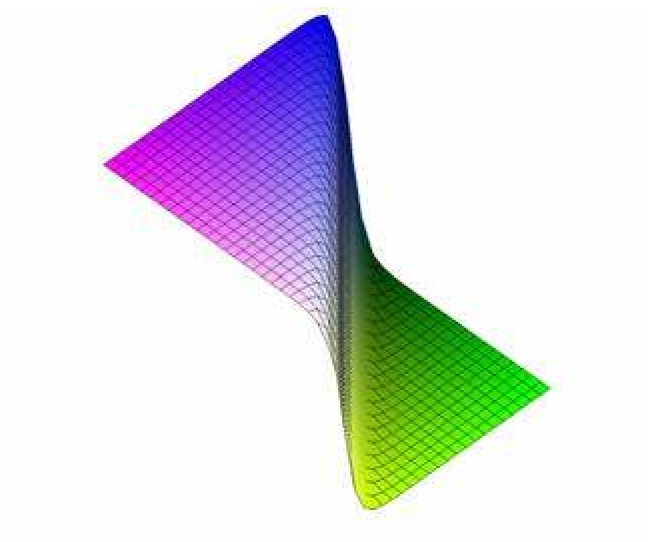
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = m^2 \sin u^2 \tag{2.88}$$

formu ferromanyetik kristaller ve süperiletkenlik teorisi alanlarında önemli rol oynar ve

$$u(x,t) = 4\arctan\left[\exp\left(m\sqrt{1-v^2}\,(x - vt) + d\right)\right] \tag{2.89}$$

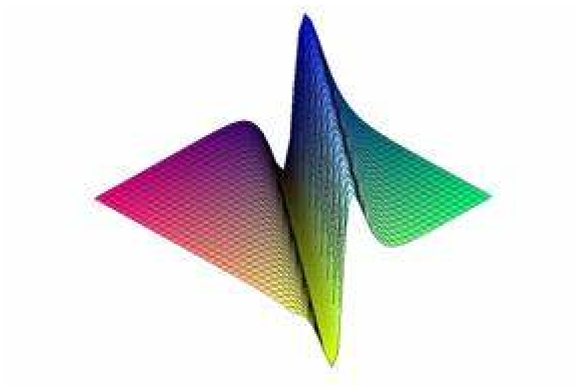
çözümüne (Kink denklemi) sahiptir [7].

SG denkleminin eğri yüzeylerle ilgisinden daha önce bahsetmiştik. Şekil (5) (2.89) çözümü ile ilgili yüzeyi göstermektedir.



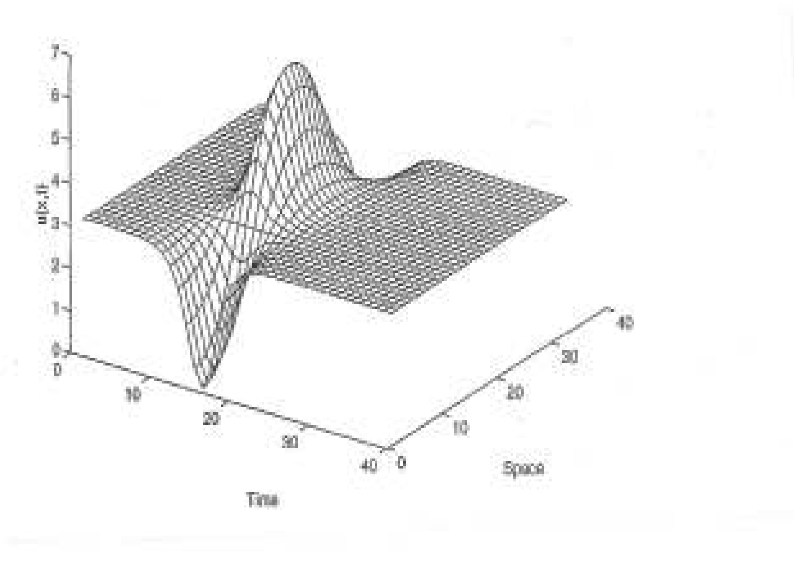
Şekil 5: (2.89) Denkleminin Çözüm Yüzeyi

(Şekil 6) çarpışan iki soliton çözümüne karşılık gelen yüzeyi göstermektedir.

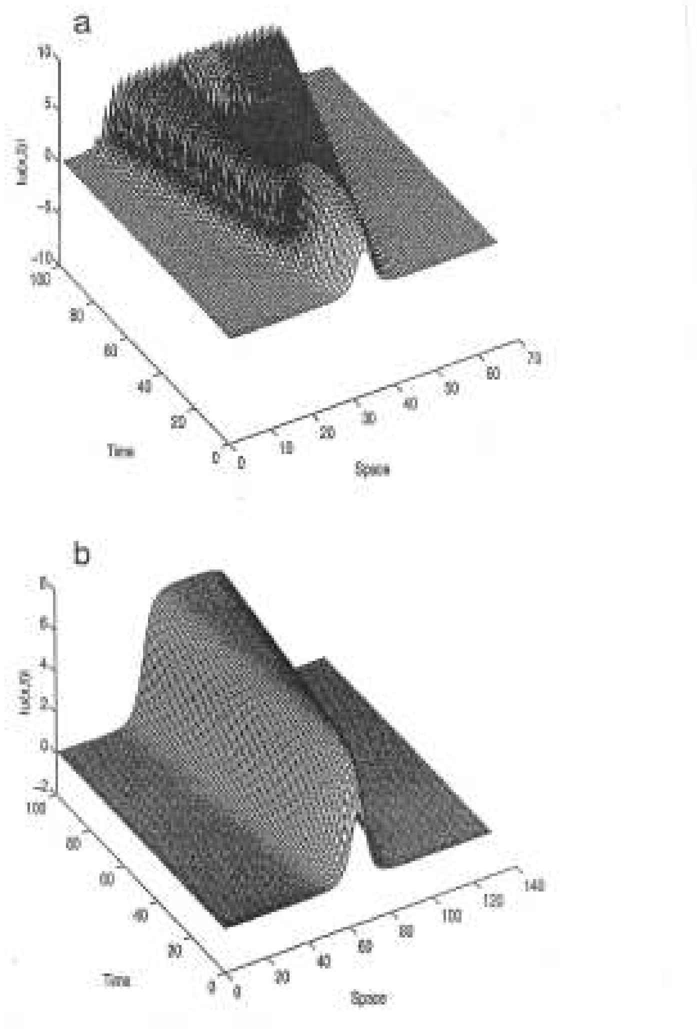


Şekil 6: Çarpışan iki soliton

Yakın dönemde SG dönemi pek çok farklı yöntemle çalışılmıştır. Ablowitz [8] tamamen integrallenebilen ayrıklaştırma yaklaşımını (Şekil 7-8), Kaya [9] Adomian ayrışma metodunu, Wang [10] varyasyonel metod ve sonlu eleman yaklaştırımını, Wazwaz [11] tanh metodunu, Batiha, Noorani ve Hashim [12] varyasyonel iterasyon metodunu kullanarak nümerik çözümler elde etmişlerdir.



Şekil 7: Homoklinik Yörünge (Ablowitz vd)



Şekil 8: a) N=128 b) N=64 Solitonlu Çözümler (Ablowitz vd)

3. SİN GORDON DENKLEMİNİN GENELLEŞTİRİLMİŞ FONKSİYONLAR SINIFINDA SAYISAL ÇÖZÜMÜ

3.1 Yardımcı Problem ve Yapısı

Nonlineer denklemler için (1.5) cinsinden olan tanımların verilmesi her zaman mümkün olmamaktadır. Çünkü nonlineer denklem için adjoint denklemi yazmak her zaman mümkün olmuyor.

Bazı sınıf nonlineer denklemlerde zayıf çözümün bulunması için yeni bir yöntem önereceğiz [2], [13].

Söz konusu yöntemin temel yapısını açıklamak için, aşağıdaki nonlineer kısmi türevli denklemi göz önüne alalım.

$$Lu = f \; . \tag{3.1}$$

Burada L diferansiyel operatörü u ya uygulanmakta olan, aşikar olarak x ve t ye bağlı olmayan bir diferansiyel ifade olmaktadır.

L operatörünü M ve N operatörlerinin bileşkesi gibi

$$L = MN$$

şeklinde gösterelim. Burada M ve N, L operatörünü faktörize eden operatörler olup, aşağıdaki özelliklere sahiptirler:

(i) M operatörünün tersi M^{-1} vardır

(ii) $N(Mv) \in C^1(D)$.

Aşağıdaki tür tanımlanmış denkleme

$$N(Mv) = M^{-1} f$$

yardımcı denklem ismini verelim. Kolayca gösterebiliriz ki, yardımcı denklemin çözümü ile esas denklemin çözümü arasındaki ilişki

$$v = M^{-1} u \tag{3.2}$$

eşitliği ile ifade edilmektedir. (3.2) denkleminden göründüğü gibi içerdiğimiz yardımcı problem tek olarak tanımlanmamaktadır. Altını çizmek gerekir ki, herhangi bir pratik problemi incelerken yardımcı problemin çözümlerinden fiziksel yararlı olan tek bir çözümü özel olarak belirtmek şarttır. Ayrıca da (3.2) formülünün özel olarak ispatlanması gerekmektedir.

Örnek 5. (3.1) denkleminde L operatörü olarak $L\cdot = \dfrac{\partial^2 \cdot}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 \cdot}{\partial x^2}$ göz önüne alalım. O zaman (3.1) denklemi telin küçük titreşimlerini ifade eden ikinci mertebeden lineer dalga denklemi olur, yani

$$\Box \cdot = \frac{\partial^2 \cdot}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \cdot}{\partial x^2} = 0$$

dır. Dolayısı ile aşağıdaki denklemi göz önüne alalım

$$\Box u = 0 \,. \tag{3.3}$$

(3.3) denkleminin genel çözümünü yukarıda önerilen yardımcı problem yardımı ile ele alalım. Bundan dolayı $\Box = AB$ cinsinden yazalım, burada

$$A = \frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x} \tag{3.4}$$

olmaktadırlar. Kolayca ispatlayabiliriz ki A^{-1} mevcuttur ve $AB = BA$ olmaktadır; yani A ve B komütatif (yerdeğiştiren) operatörlerdir (genelde $AB \neq BA$ dır).

Eğer (3.4) dikkate alınmakla (3.3) denkleminin her iki tarafına A^{-1} operatörünü uygularsak

$$Bu = A^{-1}(0)$$

olduğunu alırız. Kolayca ispatlanabilir ki,

$$Ker\ A = \left\{ u = f(x+at) : f \in C^1(Q_T) \right\}$$

olmaktadır. Burada $Q_T = (-\infty, \infty) \times [0, T)$ dır.

Gerçekten de $Af = 0,$ buradan $f \in Ker\ A$ dır.

Şimdi aşağıdaki denklemin genel çözümünü bulalım.

$$Bu \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x} \right) u = f(x + at) \tag{3.5}$$

burada f, $C^1(Q_T)$ den keyfi fonksiyondur. (3.5) denkleminde

$$\xi = x + at, \quad \eta = x - at$$

değişken dönüşümü yapılırsa, (3.5) denkleminin çözümü olarak

$$u(\xi, \eta) = g(\xi) + f(\eta)$$

ifadesi ele alınır. Sonuncu ifadeyi (x,t) değişkenlerinde yazarsak telin titreşim denkleminin literatürden bilinen

$$u(x,t) = f(x - at) + g(x + at)$$

genel çözümünü elde etmiş oluruz.

3.2 Sin Gordon Denkleminin Zayıf Çözümü

Sin Gordon denklemi için aşağıdaki

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sin u \tag{3.6}$$

$$u(x,0) = f(x) \tag{3.7}$$

Cauchy problemini göz önüne alalım. Burada $f(x)$ bilinen fonksiyondur. (3.6) ve (3.7) probleminde

$$\xi = \frac{1}{2}(x + ct) \text{ ve } \tau = \frac{1}{2}(x - ct)$$

değişken dönüşümü yapalım. Bu yeni notasyonda

$$u_{\xi\tau} = \sin u \tag{3.8a}$$

olur. (3.8) denklemi için başlangıç koşulu

$$u(\xi,0) = u_0(\xi) \tag{3.8b}$$

olsun. Bölüm 3.1 de verdiğimiz genel yapıya göre (3.8a) denkleminde L operatörü $(\cdot)_{\xi\tau}$ olmaktadır. Yani $L\cdot = (\cdot)_{\xi\tau}$. Bu operatörü aşağıdaki gibi faktörize edelim.

$$L = AB \tag{3.9}$$

Burada $A\cdot = \dfrac{\partial \cdot}{\partial \xi}$ ve $B\cdot = \dfrac{\partial \cdot}{\partial \tau}$ olarak alırız. Burada A operatörünün tersi (A^{-1}) olduğunu varsayarak (3.8a) denklemine A^{-1} ile etkiyelim. Dolayısıyla,

$$A^{-1}(AB)u = A^{-1}\sin u$$

Buradan

$$Bu = A^{-1}\sin u$$

elde ederiz.

Sonuncu ifadeyi açık şekilde yazarsak

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \int_0^{\xi} \sin u(\eta, \tau) d\eta \tag{3.10}$$

elde ederiz. (3.10) denklemine yardımcı problem denir. (3.10) denklemi için başlangıç koşulu

$$v(\xi, 0) = v_0(\xi) \tag{3.11}$$

olmaktadır.

Önce (3.6) denkleminin zayıf çözümünü tanımlayalım.

Tanım 4. (3.8b) başlangıç koşulunu ve test fonksiyonlar sınıfında olan $\psi(\xi,\tau) = 0$ koşulunu koruyan keyfi $\psi(\xi,\tau)$ lar için aşağıdaki

$$\int_D \left[\frac{\partial \psi(\xi,\tau)}{\partial \xi} \frac{\partial v(\xi,\tau)}{\partial \tau} + \psi(\xi,\tau) \sin u \right] d\xi d\tau = 0 \tag{3.12}$$

integral eşitliğini koruyan $u(\xi,\tau)$ fonksiyonuna (3.8a)-(3.8b) probleminin genelleştirilmiş çözümü denir. Burada $D = R \times [0, T)$ olmaktadır.

Teorem 1. Eğer $v(\xi,\tau)$, (3.10) ve (3.11) yardımcı probleminin çözümü ise

$$u(\xi,\tau) = \frac{\partial v(\xi,\tau)}{\partial \xi} \tag{3.13}$$

eşitliği ile verilen $u(\xi,\tau)$ fonksiyonu (3.6), (3.7) esas probleminin zayıf çözümü olmaktadır.

İspat. 3.10) denklemini

$$\frac{\partial v(\xi,\tau)}{\partial \tau} - \int_0^{\xi} \sin u(\eta,\tau) d\eta = 0$$

gibi yazalım. Sonuncu denklemi $\frac{\partial \psi(\xi,\tau)}{\partial \xi}$ ile çarpıp integralleyelim.

Sonuç olarak

$$\int_D \frac{\partial \psi}{\partial \xi}\left\{\frac{\partial v(\xi,\tau)}{\partial \tau} - \int_0^{\xi} \sin(\eta,\tau)d\eta\right\}d\xi d\tau = 0$$

veya

$$\int_{(0,\tau)} d\tau\left\{\int_R \frac{\partial \psi}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial v(\xi,\tau)}{\partial \tau}d\xi - \int_R \frac{\partial \psi}{\partial \xi}.\int_0^{\xi} \sin(\eta,\tau)d\eta d\xi\right\}d\tau = 0$$

elde ederiz. Sonuncu integralde ξ ye göre kısmi integrasyon yöntemini uygularsak

$$\iint_D \psi(\xi,\tau)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \tau} - \sin u\right]d\xi d\tau = 0$$

elde ederiz.

(3.10) denklemini koruyan fonksiyonlar sınıfı, (3.8a) denklemini koruyan fonksiyonlar sınıfından daha geniş olmaktadır. Bu özellik ise (3.8a) denkleminin sayısal çözümünü elde etmek için sade ve ekonomik sayısal algoritmalar yazmaya imkan verir.

3.3 Sonlu Fark Yöntemi

(3.10) denklemini sonlu farklara ayrıklaştırmak için D tanım bölgesini

$$\omega_{h\Delta} = \{\xi_i = ih, \quad \tau_k = k\Delta \; ; \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n, \ldots ; \; k = 0,1,2,\ldots\}$$

ağı ile örtelim.

(3.10) dahil olan integrali dikdörtgenler yöntemini kullanarak aşağıdaki gibi sonlu farklara ayrıklaştırırsak

$$\frac{U_{i,k+1} - U_{i,k}}{\tau} - h\sum_{j=1}^{i} \sin U_{j,k+1} = 0$$

veya

$$\left(U_{i,k+1} - \tau h \sin U_{i,k+1}\right) = U_{i,k} + \tau h \sum_{j=1}^{i-1} \sin U_{j,k+1} \tag{3.14}$$

nonlineer cebirsel denklem sistemini elde ederiz. Sözkonusu denklemler sisteminde $U_{i,k+1}$ ları ele almak için Newton yöntemini kullanmak yeterlidir.

4. SONUÇLAR

Üç bölümden oluşan tezde esasen pratikte sıklıkla rastlanan nonlineer SG denklemi incelenmiştir. Bilindiği üzere bu tür denklemlerin özel çözümleri bazı özelliklere sahip olmaktadır ve her bir nonlineer denklemde olduğu gibi burada çözümün özelliklerini detaylı şekilde incelemek gerekmektedir. Bu yüzden, özel çözümlerin ele alınması önem taşımaktadır.

Tezde alınan sonuçları aşağıdaki gibi sıralamak mümkündür.

1) SG denkleminin durağan çözümü ele alınmış; çözümde oluşan soliton, kink, antikink, türlü dalgaların dağılım dinamikleri incelenmiştir.

2) SG denkleminin nümerik çözümünü ele almak için özel yapıya sahip ve bilinen anlamda esas probleme denk olan yardımcı bir problem önerilmiştir. Hangi ki, yardımcı problemin çözümünün diferansiyellenebilme özelliği esas problemin diferansiyellenebilme özelliğinden bir fazladır. Bu ise bize avantaj sağlar.

3) Yardımcı problemin özelliği kullanılarak Sin Gordon denkleminin genelleştirilmiş fonksiyonlar sınıfında sayısal çözümü için efektif ve sade bir algoritma verilmiştir.

5. KAYNAKLAR

[1] Dodd, R.K., Eilbeck, J.C., Gibbon, J.D. ve Morris, H.C., "Solitons and Nonlinear Wave Equations", Academic Press, New York,London, 1984.

[2] Sinsoysal, B. "Nonlineer Dalga Denklemleri İçin Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Sayısal Çözümler", Doktora Tezi, KTÜ, Trabzon, 2003.

[3] Resulov, M., "Lecture Notes", Beykent University, 2005-2007.

[4] Debnath, L. , "Nonlinear Partial Differential Equations", Birkhauser, Boston Basel, Berlin, 1997.

[5] Scott, A.C., Chu, F.Y.H., ve McLaughlin, D.W., "The Soliton: A New Concept in Applied Science" , IEEE vol.61 no:10, 1973.

[6] Scott, A.C., "A Brief History of Solitons", www.weizmann.ac.il/home/fnfal/**soliton**.pdf, (15.03.2007)

[7] Popov, V. ve Leleka, E. "A Closer Look at Solitary Waves", http://beta.mapleprimes.com (15.03.2007).

[8] Ablowitz, M.J, Herbst, B.M ve Schober, C., "On the Numerical Solution of the Sine-Gordon Equation", Journal of Computational Physics **126** (0139), 1996.

[9] Kaya D, "Adomian Decomposition Method for the Solution of sine Gordon Equation", Applied Mathematics and Computation (**143),** 2003.

[10] Wang, Q.F., "Numerical Solution for Series sine-Gordon equations using Variational method and Finite Element approximation", Applied Mathematics and Computation (168), 2005.

[11] Wazwaz, A.M., "tanh Method for Generalized sine-Gordon and sinh-Gordon Equation", Chaos Solitons Fractals (**28**), 2006.

[12] Batiha, B., Noorani, M.S.M., ve Hashim,I.,"Numerical Solution of the sine-Gordon Equation by Variational Iteration Method" , Physics Letters A, (2007).

[13] Rasulov, M. ve Çoşkun, E., "An Efficient Numerical Method for Solving Korteweg-de Vries Equation in a Class of Discontinuous Functions", Applied Mathematics and Computation v.85 n.1**,** 1997.

6. ÖZGEÇMİŞ

01. 01. 1978 tarihi, Trabzon ili Hayrat ilçesi doğumluyum. İlkokulu 1989 yılında Of Pınaraltı İlkokulu' nda, ortaokul ve liseyi 1995'te Rize İyidere Lisesi' nde tamamladım. 1999 yılında O.D.T.Ü Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümü' ne kaydoldum. Mezun olduktan sonra 2004 yılında Beykent Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik-Bilgisayar ana bilim dalında yüksek lisans programına başladım. 2005 yılı bahar döneminde Beykent Üniversitesi Bilgisayar Mühendisliği bölümüne araştırma görevlisi olarak atandım. 2006 yılından itibaren Beykent Üniversitesi Meslek Yüksek Okulu'n da öğretim görevlisi ve ikinci öğretim koordinatörü olarak çalışmaktayım.

İyi derece de İngilizce ve başlangıç seviyesinde Almanca biliyorum.