T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANA BİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

PARABOLİK DENKLEM İÇİN KLASİK OLMAYAN BAŞLANGIÇ-SINIR DEĞER PROBLEMİNİN GERÇEK ÇÖZÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Erhan BALCI

İSTANBUL, 2008

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANA BİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

PARABOLİK DENKLEM İÇİN KLASİK OLMAYAN BAŞLANGIÇ-SINIR DEĞER PROBLEMİNİN GERÇEK ÇÖZÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Erhan BALCI

Öğrenci No: 050860013

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mahir RESULOV

İSTANBUL, 2008

ÖNSÖZ

Öncelikle, bugüne kadar olan eğitim hayatımda bana gösterdikleri desteklerden dolayı aileme çok teşekkür etmek istiyorum. Ayrıca bugünlere gelmemde çok büyük emeği olan anneannem Nuriye NACAK' a sonsuz saygılarımı sunarım.

Bu tez konusunu bana öneren ve tezimin her aşmasında yardımlarını esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübelerini öğrencileriyle paylaşan değerli hocam Sayın Prof. Dr. Mahir RESULOV' a en içten saygılllarımı sunar, sonsuz teşekkür ederim. Ayrıca bizlere her türlü desteği sunan Enstitü müdürümüz ve hocam Sayın Prof. Dr. Mehmet ERDOĞAN' a ve tezimin değişik aşamalarında bana sağlamış olduğu değerli katkılarından dolayı Sayın Yrd. Doç. Dr. Bahaddin SİNSOYSAL' a teşekkürü bir borç bilirim.

İSTANBUL, 2008 **Erhan BALCI**

YEMİN METNİ

Sunduğum Yüksek Lisans Tezimi, Akademik Etik İlkelerine bağlı kalarak, hiç kimseden akademik ilkelere aykırı bir yardım almaksızın bizzat kendim hazırladığıma and içerim. 15/02/2008

Aday: Erhan BALCI

ÖZET

Parabolik Denklem İçin Lokal Olmayan Başlangıç-Sınır Değer Probleminin Gerçek Çözümü

Tezde genel olarak ısı denklemi için yazılmış başlangıç-sınır değer probleminin gerçek çözümü elde edilmiştir. Önce lokal sınır koşullu problem incelenmiş ve çözümün özelikleri irdelenmiştir. İkinci bölümde ise lokal olmayan sınır koşullu problemin çözümü araştırılmıştır. Bu amaçla önce ayrılış formülü ispatlanmış ve söz konusu ayrılış formülü kullanılarak esas problemin çözümü için hızlı yakınsak seri şeklinde çözüm elde edilmiştir. Son bölümde ise iki boyutlu ısı denkleminin lokal olmayan sınır koşulları çerçevesinde gerçek çözümü elde edilmiştir.

ABSTRACT

The Exact Solution of an Initial – Value Problem for a Parabolic Equation with Nonlocal Boundary Condition

In this thesis the exact solution of an initial – boundary value problem for a linear parabolic equation with nonlocal boundary condition is founded. In the first part, the solution with local boundary condition is obtained and the properties of this solution are investigated. In the second part the interesting problem with nonlocal boundary condition is studied. For this goal, at first the formula of expansion is proved and using this expansion formula the solution of the investigated problem in the rapid decrease in the series form is obtained.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ

YEMİN METNİ

JÜRİ SAYFASI

ÖZET

ABSTRACT

1. GİRİŞ……………………………………………………………………………1

1.1 Temel Kavramlar…………………………………………………………………..1

1.2 İkinci Basamaktan Denklemlerin Sınıflandırılması…………………………………….5

1.3 Parabolik Tür Denklem İçin Birinci Başlangıç Sınır Değer Problemi…………….......18

1.4 Isı Denklemi İçin Lokal Sınır Koşullu Problemin Fourier Metodu İle Çözümü………21

2. BİR BOYUTLU ISI DENKLEMİ İÇİN LOKAL OLMAYAN BAŞLANGIÇ-SINIR DEĞER PROBLEMİNİN REZİDÜ YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ……………............28

2.1 Spektral Problem ve Ayrılış Formülü…………………………………………....28

2.2 Başlangıç-Sınır Değer Probleminin Çözümü ……………………………...….36

3. İKİ BOYUTLU ISI DENKLEMİ İÇİN LOKAL OLMAYAN SINIR KOŞULLU BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMİNİN GERÇEK ÇÖZÜMÜ İÇİN REZİDÜ GÖSTERİMİ……………………………………………………………………......39

4. SONUÇLAR…………………………………………………………………46

5. KAYNAKLAR………………………………………………………...........47

ÖZGEÇMİŞ……………………………………………………………………48

1. GİRİŞ

Üç bölümden oluşan bu tezde genel ısı denklemi için yazılmış lokal olmayan sınır koşullu problemin çözümü incelenmiştir.

Bu amaçla önce bir boyutlu ısı denklemi için lokal sınırlı problemin çözümü Fourier yöntemi yardımıyla incelenmiştir. Bilindiği gibi Fourier serisi yöntemi problemi oluşturan diferansiyel operatörün self adjoint olduğu durumlarda çalışmaktadır. Çünkü self adjoint operatörlerin öz değerleri sade ve bunlara karşılık gelen öz fonksiyonlar tam ve ortogonal sistem oluştururlar. Bu ise bize keyfi fonksiyonun söz konusu öz fonksiyonlar üzerine seriye açmaya imkan sağlamaktadır.

Fakat problemi oluşturan diferansiyel operatör self adjoint olmazsa uygun spektral problemin öz fonksiyonları tam sistem oluşturamaz ve keyfi fonksiyonun bu öz fonksiyonlar üzerine seriye açılması da mümkün olmaz.

Bu nedenle tezin ikinci bölümünde, bir boyutlu ısı denklemi için lokal olmayan sınır koşullu problemin çözümü için rezidü metodu incelenmiştir. Spektral problemin çözümü için uygun ifade elde edilmiş, öz değerler ve öz fonksiyonlar ele alınmıştır. İspatlanmıştır ki, bu problemin öz değerleri iki katlı olup öz fonksiyonları ise tam sistem oluşturmazlar. Bunu dikkate alarak spektral problemin çözümünün tüm rezidüleri üzerine uygun ayrılış formülü kullanılmıştır.

Söz konusu ayrılış formülünü kullanarak esas problemin çözümü için hızlı yakınsak seri şeklinde çözümü elde edilmiştir.

Sonuncu bölümde iki boyutlu ısı denklemi için lokal olmayan sınır-değer probleminin çözümü incelenmiştir.

1.1 Temel Kavramlar

Bilim ve tekniğin birçok problemleri Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümüne indirgenmektedir. Bu bilim dalı modern matematiğin tüm alanlarında, özellikle fizik, geometri ve analizde önemli rol oynamaktadır. Fiziksel önem taşıyan birçok olaylar kısmi türevli diferansiyel denklemler ve onlar için yazılmış uygun başlangıç ve başlangıç-sınır değer problemlerinin çözümünün bulunmasına indirgenmektedir. Matematiksel modeller çerçevesinde fiziksel olayların dinamiği incelenebilir.

Bu kısımda, kısmi türevli diferansiyel denklemlerin temel kavramları ve bazı çözüm yöntemlerini inceleyeceğiz.

Bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerini içeren denklemlere diferansiyel denklemler denir.

Örnek 1.

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad y'' - y = 0, \\ &\text{b)} \quad x^2 y'' - 2xy' + y = e^t, \\ &\text{c)} \quad u_x - u_y = 0, \\ &\text{d)} \quad u_t + u u_x = x \end{aligned} \tag{1}$$

birer diferansiyel denklemler olmaktadırlar.

Bilinmeyen fonksiyonun argümanlarının sayısına bağlı olarak denklemler iki türe ayrılmaktadırlar. Eğer diferansiyel denklemin içerdiği bilinmeyen fonksiyon yalnız bir argümana bağlıysa, böyle denklemlere adi diferansiyel denklemler (ADD) denir. Argümanlarının sayısı birden fazla olan denklemlere ise kısmi türevli diferansiyel denklemler (KTDD) denir. Bu tanıma göre, a) ve b) denklemleri adi, c) ve d) denklemleri ise kısmi türevli diferansiyel denklemler olmaktadırlar.

R^m ile $(x_1, x_2, ..., x_m)$ noktalarının Euclid uzayını gösterelim. $Q \subseteq R^m$ bir bölge ve $u(x_1, x_2, ..., x_m)$ ise Q'da tanımlı ve n. basamaktan sürekli türevlere sahip fonksiyon olsun. n. basamaktan KTDD lerin genel yazılım formu,

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_m, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^{\,2}}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}, ..., \frac{\partial^n u}{\partial x_m^n}\right) = 0 \tag{2}$$

biçimindedir. Burada, $x_1, x_2, ..., x_m$ bağımsız değişkenler, F tüm argümanlarına göre tanımlı, bilinen fonksiyon $u(x_1, x_2, ..., x_m)$ ise bilinmeyen fonksiyon olmaktadır.

Diferansiyel denklemin içerdiği bilinmeyen fonksiyonun türevlerinin en yüksek mertebesine denklemin mertebesi (veya basamağı) denir.

Eğer $n = 1$ olursa (2) denklemi birinci basamaktan KTDD'e dönüşür ve genel yazılım formu,

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_m, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}\right) = 0 \tag{3}$$

şeklinde olur.

Genelde ikinci basamaktan olan KTDD'i inceleyeceğiz. Kolaylık için $m = 2$ olsun. Yer eksenlerinin sayısının 2 olduğu durumda ikinci basamaktan olan KTDD genel yazılım formu,

$$F\left(x_1, x_2, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) = 0 \tag{4}$$

biçimindedir.

Kolaylık için bazı durumlarda x_1, x_2, x_3 değişkenlerini (x, y, z) gibi de göstereceğiz. Fizikte zamana bağlı değişen büyüklükleri ifade etmek için zaman değişkenini özel olarak t harfi ile göstereceğiz.

Eğer, F bilinmeyen fonksiyon ve onun tüm türevlerine göre lineer fonksiyon olursa, böyle denklemlere lineer KTDD denir. Diferansiyel denklemlerin lineerlik özelliğini denklemin operatör yazılım formunu kullanarak ifade edelim. Bundan dolayı, aşağıdaki şekilde yazılmış

$$\ell(u) = f(x) \tag{5}$$

denklemini göz önüne alalım. Burada, $\ell(u) = \ell\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ değişkenlerine bağlı bir fonksiyon olmaktadır.

Tanım 1. Aşağıdaki iki koşulu

1. $\ell(u+\upsilon) = \ell(u) + \ell(\upsilon)$,
2. $\ell(cu) = c\ell(u)$

sağlayan ℓ operatörüne lineer operatör denir.

Burada u ve υ, D'de tanımlı fonksiyonlar, c ise keyfi sabit olmaktadırlar.

Örnek 2.

1) $u_x + u_y = 0,$
2) $xu_x + y^2 u_y = \sin x,$
3) $u_t - u_x = u,$
4) $u_t + cu_x = \mu u_{xx},$
5) $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0,$
6) $u_t + cu_x = \mu u_{xxx},$
7) $u_{tt} - c^2 u_{xxxx} = 0.$

Yukarıdaki 1), 2), 3) denklemleri birinci basamaktan; 4), 5) denklemleri ikinci basamaktan; 6) ve 7) denklemleri sırasıyla üçüncü ve dördüncü basamaktan olan lineer kısmi türevli diferansiyel denklemler olmaktadırlar.

Birinci ve ikinci basamaktan olan lineer KTDD lerin genel yazılım formu,

$$a(x_1,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}+b(x_1,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2}+c(x_1,x_2)u=d(x_1,x_2)\,, \tag{6}$$

$$A(x_1,x_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+B(x_1,x_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_2}+C(x_1,x_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+D(x_1,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}+$$

$$+E(x_1,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2}+F(x_1,x_2)u=G(x_1,x_2) \tag{7}$$

(6) ve (7) biçimindedir. Burada, $a(x_1,x_2),\, b(x_1,x_2),\, c(x_1,x_2)$ bilinen fonksiyonlar olup denklemin katsayıları, $d(x_1,x_2)$ ise denklemin sağ tarafı olmaktadır.

Eğer F, bilinmeyen fonksiyon ve onun en yüksek basamaktan olan türevlerine göre nonlineer fonksiyon olursa, böyle denklemlere nonlineer KTDD denir.

Örnek 3.

1) $u_x^2+u_y^2=1,$

2) $\upsilon_t+\frac{1}{2}(\upsilon_x)^2=0,$

3) $(u_x)^2+yu_y-u=0,$

4) $u_x^2u_y=1$

denklemleri lineer olmayan denklemlerdir.

Eğer, F bilinmeyen u fonksiyonunun, yalnız yüksek basamaktan olan türevlerine göre lineer fonksiyon ise, böyle denklemlere kuazi lineer KTDD denir

Örnek 4.

1) $\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+u^2=0,$

2) $u_t+uu_x=u,$

3) $\frac{\partial u}{\partial t}+6u\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$

denklemleri kuazi lineer denklemlerdir.

Birinci ve ikinci basamaktan kuazi lineer denklemlerin genel yazılım formu sırasıyla,

$$a(x_1,x_2,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+b(x_1,x_2,u)\frac{\partial u}{\partial x_2}=d(x_1,x_2,u), \tag{8}$$

$$A\left(x_1,x_2,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1}+B\left(x_1,x_2,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_2}+$$

$$+C\left(x_1,x_2,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=D\left(x_1,x_2,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) \tag{9}$$

(8) ve (9) ifadeleri biçimindedir.

$$a(x_1,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}+b(x_1,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2}+c(x_1,x_2,u)=0 \tag{10}$$

şeklinde olan denklemlere semi (veya yarı) lineer denklemlerdir.

Örnek 5.

1) $u_t-u_{xx}=u^2,$

2) $u_t-u_{xx}=u(1-u)$

denklemleri yarı lineer denklemlerdir.

Eğer, tüm değişkenlere göre n kez sürekli diferansiyellere sahip $u=\varphi(x_1,x_2,...,x_m)$ fonksiyonu (1)'de yerine konduğunda denklemi özdeşliğe dönüştürürse, böyle fonksiyonlara diferansiyel denklemin çözümü (veya klasik çözümü) denilir.

1.2 İkinci Basamaktan Denklemlerin Sınıflandırılması

İkinci basamaktan olan KTDD sınıflandırılması için baş kısmı lineer olan,

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+F(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})=0 \tag{11}$$

denklemini göz önüne alalım. Burada x,y serbest değişkenler a,b,c ve F kendi argümanlarına göre bilinen fonksiyonlar olmaktadırlar.

(11) denklemini kanonik biçime indirgenecek şekilde a, b, c katsayıları için koşullar araştıralım. Farz edelim ki a, b ve c katsayıları aynı anda sıfıra eşit değildir ve $u(x, y)$ fonksiyonu her iki değişkene göre ikinci basamaktan sürekli türevlere sahiptir.

Amacımıza ulaşmak için aşağıdaki değişken dönüşümünü

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases} \tag{12}$$

yapalım.

Farz edelim ki ξ ve η fonksiyonları x ve y'ye göre iki kez diferansiyellenebilirdir ve ayrıca aşağıdaki Jakobian tanım bölgesinde,

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$$

dır. Bu durumda (12) sistemi x ve y değişkenlerine göre çözülebilirdir ve

$$\begin{cases} x = x(\xi,\eta) \\ y = y(\xi,\eta) \end{cases}$$

fonksiyonları da sürekli olmaktadır.

(11) denklemini ξ ve η değişkenlerinde yazalım. Bunun için,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}, \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) +$$

$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}, \tag{14'}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}. \tag{15}$$

(13), (14), (14’) ve (15) ifadeleri (11)’de yerine konursa,

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+C\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+F\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=0 \tag{16}$$

sonucunu elde ederiz. Burada,

$$A=a(x,y)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+2b(x,y)\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}+c(x,y)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2,$$

$$B=a(x,y)\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+b(x,y)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+c(x,y)\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y},$$

$$C=a(x,y)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2+2b(x,y)\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+c(x,y)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2$$

olmaktadır. $\xi(x,y)$ ve $\eta(x,y)$ fonksiyonlarını öyle seçelim ki, (16) denkleminin katsayıları aşağıdaki durumlardan birisi olsun:

1) $A=C=0$;
2) $A=B=0$;
3) $A=C,\ B=0.$

Bu amaçla $B^2-AC>0$; $B^2-AC<0$; $B^2-AC=0$ olan durumları ayrı ayrı inceleyelim. $D=B^2-AC$ ifadesine (16) denkleminin diskriminantı denir.

Önce $B^2-AC>0$ olan durumu göz önüne alalım. Bu durumda (16) denklemi hiperbolik türe mensuptur. Bunun için (12) değişken dönüşümünü öyle seçelim ki, (16) denkleminde $A=B=0$ olsun. Yani,

$$a(x,y)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+2b(x,y)\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}+c(x,y)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2=0, \tag{17}$$

$$a(x,y)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2+2b(x,y)\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+c(x,y)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2=0. \tag{18}$$

Burada bilinmeyen $\xi(x,y)$ ve $\eta(x,y)$ fonksiyonlarıdır ve bu fonksiyonlar için birinci basamaktan olan nonlineer diferansiyel denklemler ele alınmaktadır. Göründüğü gibi (17) ile (18) aynı diferansiyel denklemler olmaktadırlar. Onlar yalnız bilinmeyen fonksiyonlar ile farklıdırlar. Bundan dolayı eğer (17) denkleminin iki tane lineer bağımlı olmayan çözümü bulunursa, onların birini $\xi(x,y)$, birisini ise $\eta(x,y)$ ile göstersek, (17), (18) denklemlerinin korunması söz konusu olmaktadır.

Eğer,

$$z = \frac{\frac{\partial \xi}{\partial x}}{\frac{\partial \xi}{\partial y}}$$

şeklinde göstersek, (17) denklemini

$$a(x,y)z^2 + 2b(x,y)z + c(x,y) = 0 \quad \text{veya} \quad a(z - z_1)(z - z_2) = 0$$

olarak yazabiliriz. Burada $z_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$ olmaktadır.

Böylelikle (17), iki denkleme ayrılır; yani,

$$a(x,y)\frac{\partial \xi}{\partial x} + (-b + \sqrt{b^2 - ac})\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0, \tag{19}$$

$$a(x,y)\frac{\partial \xi}{\partial x} + (-b - \sqrt{b^2 - ac})\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0 \tag{20}$$

şeklinde parçalanmış olur.

ADD konusunda bilindiği üzere (19), (20) iki değişkene bağlı birinci basamaktan kısmi türevli homojen diferansiyel denklemler olmaktadırlar. Açıktır ki, (19), (20) denklemleri için Cauchy probleminin çözümü ADD sisteminin çözümünün bulunmasına indirgenebilir.

Sonraki işlemlerimizde kolaylık sağlamak için aşağıdaki denklemi,

$$f_1(x,y)\frac{\partial z}{\partial x} + f_2(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \tag{21}$$

göz önüne alalım.

Görüldüğü gibi (21), $z(x,y)$ fonksiyonuna göre lineer KTDD'dir. (21)'e karşılık gelen karakteristik denklem,

$$\frac{dx}{f_1(x,y)} = -\frac{dy}{f_2(x,y)}, \tag{22}$$

veya

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_2(x,y)}{f_1(x,y)} \tag{22'}$$

olmaktadır.

Şimdi (22') denklemi için Cauchy problemini göz önüne alalım, yani söz konusu denkleme

$$y(x_0) = y_0 \tag{23}$$

başlangıç koşulunu ekleyelim. (22'), (23) problemi için varlık ve teklik teoreminin koşullarının hepsi sağlanmaktadır. Buna ilave olarak farz edelim ki, (x_0, y_0) noktasının komşuluğunda $f_1(x,y)$ ve $f_2(x,y)$ fonksiyonlarının y değişkenine göre sürekli kısmi türevleri mevcut ve $f_1(x,y) \neq 0$'dır.

Eğer ξ ve η fonksiyonların (x_0, y_0) noktasından geçen ve (19), (20) denklemlerinin karakteristiklerine dokunmayan l_i (i= 1,2) eğrileri boyunca değerini versek, (19), (20) denklemlerinin $\varphi_i = \varphi_i(x,y)$ (i = 1,2) çözümlerini elde ederiz. Ayrıca, eğer l_i (i= 1,2) eğrilerini ve bunlar üzerine verilmiş fonksiyonların gereken kadar sürekli olduğunu var sayarsak, bu durumda x ve y değişkenine göre birinci ve ikinci basamaktan sürekli kısmi türevleri olan $\varphi_i = \varphi_i(x,y)$ (i = 1,2) çözümlerini elde ederiz. (22), (23) probleminin çözümünü,

$$y = \varphi(x_0, y_0, x) \tag{24}$$

ile gösterelim. Şarta göre x_0 değeri verildiğinde y_0 da sabit kabul etmek olur, yani $y_0 = c$ olabilir. (24) kapalı fonksiyonunu y_0'a göre çözelim ve bulunun çözümü,

$$y_0 = \psi(x_0, x, y) \tag{25}$$

ile gösterelim.

Varlık ve teklik teoremine göre başlangıç (x_0, y_0) noktasının verilmesi belli bölgede çözümün l_i (i= l,2) eğrileri üzerinde değişken (x, y) noktasını tek değerli olarak tanımlaya bilir. Bu (24) ifadesine denk gelir. Eğer (x, y) ve (x_0, y_0) noktalarının rollerini değişsek, yani (x, y)'yi başlangıç noktası kabul etsek, varlık ve teklik teoremine göre (x_0, y_0) noktası da bir değerli tanımlanabilir. Bu ise (25)'e denk olur. $y_0 = c$ olduğunu göz önüne alırsak,

$$y = \varphi(x, c), \tag{24'}$$

$$c = \psi(x, y) \tag{25'}$$

buluruz.

Açıktır ki, (24') belli bir bölgede (22) denkleminin genel çözümü olmaktadır Burada $\psi(x, y)$ öyle fonksiyondur ki, genelde sabit olmayıp (22) denkleminin her bir integral eğrileri üzerinde sabit değer olmaktadır. (25') ifadesine (22) denkleminin birinci aralık integrali denir.

Görüldüğü gibi, aramakta bulunduğumuz ξ ve η fonksiyonları (19) ve (20) denklemlerinin çözümleri ile bağımlıdırlar.

Lemma1. Eğer (25) ifadesi (22) denkleminin integral eğrisi ise, bu durumda $z = \psi(x, y)$ fonksiyonu (21) denkleminin çözümüdür ve tersine, eğer $z = \psi(x, y)$ fonksiyonu (21) denkleminin çözümü ise, (25) ifadesi (22) denkleminin genel integrali olmaktadır.

İspat. (25)'de (22) denkleminin keyfi $y = y(x)$ çözümü yerine konursa $c = \psi(x, y)$ ifadesini (25')'dan buluruz.

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

(22) göz önüne alınırsa,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{f_2\left(x, y(x)\right)}{f_1\left(x, y(x)\right)} = 0,$$

veya

$$f_1\left(x, y(x)\right)\frac{\partial \psi}{\partial x} + f_2\left(x, y(x)\right)\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \tag{26}$$

olur. (26) denklemi integral eğrileri boyunca sağlandığından (26)'dan, henüz sonucu söylemek daha erkendir. (21) denklemi ise, zaten keyfi x, y için sağlanmaktadır. Varlık ve teklik teoremine göre tanım bölgesinin keyfi x, y noktasından tek bir integral eğrisi geçtiğinden dolayı, az önce söylediklerimizin bölgenin tüm noktaları için de geçerli olduğunu varsayabiliriz. Böyle durumda $z = \psi(x, y)$, (21) denklemini sağlamaktadır. Lemmanın birinci tarafı ispatlandı.

İkinci tarafı ispatlamak için farz edelim ki, $z = \psi(x, y)$ fonksiyonu (21) denkleminin sabitten özdeş olarak farklı olan çözümüdür. Yani,

$$f_1(x, y)\frac{\partial \psi}{\partial x} + f_2(x, y)\frac{\partial \psi}{\partial y} \equiv 0$$

dır. Özel durumda, (22)'de keyfi $y = y(x)$ çözümü yerine konursa özdeş eşitlik elde ederiz ve sonuç $\frac{d}{dx}\left[\psi\left(x, y(x)\right)\right] = 0$ veya $\psi\left(x, y(x)\right) = c$ şeklinde yazılabilir.

Böylelikle, $\psi(x, y)$ fonksiyonu genelde sabit olmayıp (22)'nin tanım bölgesinin keyfi integral eğrisi boyunca sabit değer olmaktadır. Bu ise $\psi\left(x, y(x)\right) = c$ ifadesinin (22) denkleminin birinci integrali olduğu anlamına gelmektedir. Şimdi bu söylediklerimizi (19), (20) denklemleri için uygulayalım. Onlara karşılık gelen karakteristik denklemleri yazalım.

$$\frac{dx}{a(x, y)} = \frac{dy}{-b - \sqrt{b^2 - ac}},$$

$$\frac{dx}{a(x, y)} = \frac{dy}{-b + \sqrt{b^2 - ac}},$$

veya

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}, \tag{19'}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - ac}}{a}. \tag{20'}$$

(19’) ve (20’) denklemlerinin birinci integrallerini sırasıyla,

$$\varphi(x,y)=c_1, \tag{27}$$

$$\psi(x,y)=c_2 \tag{28}$$

ile gösterelim.

(27) ve (28) ifadelerine (11) denkleminin karakteristikleri denilir. Görüldüğü gibi $B^2-AC>0$ olduğu durumda (11) denkleminin iki tane çeşitli karakterler ailesi vardır. Tanım bölgesinin keyfi noktasından her ailenin bir karakteristik eğrisi geçmiş olur. (19’) ve (20’) denklemlerine karakteristiklerin diferansiyel denklemi denir.

$$a(x,y)(dy)^2-2b(x,y)dxdy+c(x,y)(dx)^2=0 \tag{29}$$

$a(x,y)\neq 0$ olduğundan (19), (20)’den göründüğü gibi eğer, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}\neq 0,\ \frac{\partial\psi}{\partial y}\neq 0$ olursa (x_0,y_0) noktasının komşuluğunda,

$$a(x,y)\frac{\partial\varphi}{\partial x}+(b+\sqrt{b^2-ac})\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0,$$

$$a(x,y)\frac{\partial\psi}{\partial x}+(b-\sqrt{b^2-ac})\frac{\partial\psi}{\partial y}=0$$

alırız. Buradan ise,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}:\frac{\partial\psi}{\partial x}\equiv\frac{b+\sqrt{b^2-ac}}{b-\sqrt{b^2-ac}}\frac{\partial\varphi}{\partial y}:\frac{\partial\psi}{\partial y} \tag{30}$$

buluruz. $B^2-AC>0$ olduğundan $J=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y}\\ \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y}\end{vmatrix}\neq 0$ olur. Yani,

$$\xi=\varphi(x,y),\qquad \eta=\varphi(x,y) \tag{31}$$

olarak elde edilebilir.

Bu dönüşümden sonra (16) denkleminde $A=0,\ C=0$ olmaktadır ve (16) denklemi,

$$2B\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+F\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0 \tag{32}$$

şeklini alır. Buradan,

$$B^2-AC=(b^2-ac)J^2. \tag{33}$$

Yani, (31) dönüşümünden sonra (11) denklemi invaryant kalmaktadır. $b\neq 0$ olduğunu buluruz. Bu durumda (32)'den,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+F_1\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0 \tag{34}$$

alırız. (34) denklemine (11) denkleminin KTDD ikinci kanonik şekli denir.

Şimdi, (34) denkleminde aşağıdaki gibi,

$$\alpha=\xi+\eta,\quad \beta=\xi-\eta \tag{35}$$

değişken dönüşümü uygulayalım ve (34)'ün içerdiği türevleri, yeni α ve β değişkenlerinde ifade edelim:

$$\frac{\partial u}{\partial\xi}=\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial\xi}=\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{\partial u}{\partial\beta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}\frac{\partial\alpha}{\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\beta\partial\alpha}+\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}\frac{\partial\beta}{\partial\eta}=\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}.$$

Son ifadeyi (34)'de göz önüne alırsak,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}+F_2\left(\alpha,\beta,u,\frac{\partial u}{\partial\alpha},\frac{\partial u}{\partial\beta}\right)=0 \tag{36}$$

ifadesinin bulmuş oluruz. (36) denklemine (11) denkleminin birinci kanonik şekli denir.

Şimdi farz edelim ki, diskriminant

$$B^2-AC=0 \tag{37}$$

olsun. Yukarıda (11) denkleminin $a(x,y)$, $b(x,y)$ ve $c(x,y)$ katsayılarının aynı anda sıfır olmadığını kabul etmiştik. Varsayalım ki a ve c katsayılarından birisi sıfırdan farklıdır. O halde $a \neq 0$ olsun. Bu durumda (19) ve (20) denklemleri aynı olmaktadır. Yani,

$$a\frac{\partial \xi}{\partial x} + b\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0 \tag{38}$$

olur. Açıktır ki, (38) denkleminin her bir çözümü (37) koşulu çerçevesinde,

$$c\frac{\partial \xi}{\partial x} + d\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0 \tag{39}$$

denkleminin de çözümü olmaktadır. Eğer (12) değişken dönüşümünde $\xi = \varphi(x,y)$ olursa $a = 0$ olur, ama $\eta = \psi(x,y)$ dönüşümü hakkında hiçbir bilgi yoktur.
(38) denklemine denk olan karakteristik denklemi yazalım.

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} \quad \text{veya} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)}. \tag{38'}$$

Açıktır ki, (38') denkleminin birinci integrali $\varphi(x,y) = c$ cinsindendir ve $\xi = \varphi(x,y)$ fonksiyonu (38)'i sağlamaktadır. $\eta = \psi(x,y)$ fonksiyonu için,

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial x} & \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$$

koşulunu sağlayan sürekli diferansiyellenebilen keyfi bir fonksiyon ele alabiliriz.

Örneğin, $\psi(x,y) = x$ kabul edebiliriz. (16) denkleminde $A = 0$ olduğu açıktır. B katsayısını bulalım.

$$B = a(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + b(x,y)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + c(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} =$$

$$\left(a\frac{\partial \varphi}{\partial x} + b\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(b\frac{\partial \varphi}{\partial x} + c\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

(38) ve (39) ifadeleri göz önüne alınırsa $B=0$ olur. Böylelikle $\psi(x,y)$ fonksiyonunun nasıl aşağıdan bağımsız olarak (16)'da $B=0$ olur. Şimdi $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ ifadesinin katsayısını hesaplayalım.

$$C=a\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+2b\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}+c\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2=\frac{1}{a}\left(a\frac{\partial\psi}{\partial x}+b\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\neq 0$$

Burada bu ifade sıfır olmaz, çünkü $J=0$ olamaz. Böyle durumda (16) denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$C\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+F\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=0, \tag{40}$$

veya

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+F_3\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=0. \tag{41}$$

(41) denklemine parabolik tür denklemin kanonik şekli denir. Eğer, F_3 fonksiyonu kendi argümanlarına göre lineer olursa,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=A_1\frac{\partial u}{\partial \xi}+B_1\frac{\partial u}{\partial \eta}+C_1 u+D \tag{42}$$

alırız. (42) denklemini daha basit biçimde yazmak için $u(\xi,\eta)=z(\xi,\eta)\upsilon(\xi,\eta)$ değişken dönüşümü yapalım. $\upsilon(\xi,\eta)$ fonksiyonunu aşağıda belirteceğiz. Bundan dolayı (42) denklemini şöyle yazacağız:

$$\upsilon\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}+2\frac{\partial \upsilon}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \eta}=A_1\upsilon\frac{\partial z}{\partial \xi}+B_1\frac{\partial z}{\partial \eta}+C_2 z+D_1. \tag{43}$$

(43) denkleminde biz yalnız $z,\frac{\partial z}{\partial \xi},\frac{\partial z}{\partial \eta}$ ile bağlı olan ifadeleri tuttuk, geride kalan ifadeleri ise C_2 ile gösterdik. Şimdi $\upsilon(\xi,\eta)$ fonksiyonunu öyle seçelim ki, (43) denkleminde $\frac{\partial z}{\partial \eta}$ nin katsayısı sıfır olsun. Yani,

$$2\frac{\partial \upsilon}{\partial \eta}-B_1\upsilon=0. \tag{44}$$

Bu durumda (43) denklemi yazılabilir.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = A_1 \frac{\partial z}{\partial \xi} + C_3 z + D_2 \tag{45}$$

Burada,

$$C_2 = \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial \eta^2} + A_1 \frac{\partial \upsilon}{\partial \xi} + B_1 \frac{\partial \upsilon}{\partial \eta} + C_1 \upsilon, \quad C_3 = \frac{C_2}{\upsilon}, \quad D_2 = \frac{D_1}{\upsilon}.$$

(44) denkleminden $\upsilon(\xi,\eta)$ fonksiyonunu,

$$\upsilon(\xi,\eta) = \exp\left(\frac{1}{2}\int b_1(\xi,\eta)d\eta\right)$$

olarak buluruz.

Son olarak $B^2 - AC < 0$ olan durumunu inceleyelim. Fakat bu durumda farz edelim ki a, b ve c katsayıları analitik fonksiyonlardır. O halde (19) ve (20) denklemlerinin katsayıları analitik fonksiyonlardır. Farz edelim ki , $\varphi(x,y) = \varphi^*(x,y) + i\,\varphi^{**}(x,y)$ (19) denkleminin analitik çözümüdür ve $\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right| \neq 0$ 'dır. (12) değişken dönüşümünde

$$\xi = \varphi^*(x,y), \quad \eta = \varphi^{**}(x,y) \tag{46}$$

kabul edelim. (46) denklemni x ve y değişkenlerine göre çözülebilir, çünkü

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} \tag{47}$$

Jakobiyeni tanım bölgesinde sıfırdan farklıdır. Eğer (19), (20) denklemlerini reel ve sanal kısımlarına ayırırsak,

$$\begin{aligned} a\frac{\partial \xi}{\partial x} &= -b\frac{\partial \xi}{\partial x} + \sqrt{ac-b^2}\,\frac{\partial \eta}{\partial y}, \\ a\frac{\partial \xi}{\partial x} &= -b\frac{\partial \xi}{\partial x} - \sqrt{ac-b^2}\,\frac{\partial \eta}{\partial y} \end{aligned} \tag{48}$$

elde ederiz. (48) denklemlerindeki $\frac{\partial\xi}{\partial x}, \frac{\partial\eta}{\partial x}$ ifadeleri (47)'de yerine konursa,

$$J = \frac{\sqrt{ac-b^2}}{a}\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\right]$$

ifadesini elde ederiz.

Buradan görülür ki, determinantın sıfıra eşit olması için $\frac{\partial\xi}{\partial y} = \frac{\partial\eta}{\partial y} = 0$ sağlanmalıdır. $\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{\partial\eta}{\partial x} = 0$ olduğunu da (48)'den alırız. Böyle noktalar zaten tanım bölgesinde yoktur. Aksi halde $\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{\partial\eta}{\partial x} = 0$ olurdu. $a\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + c\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = 0$ ifadesini reel ve sanal kısımlarına ayırırsak,

$$a\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} + c\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 = a\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + c\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2, \qquad (49)$$

$$a\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + b\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) + c\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y} = 0,$$

$$a\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} + b\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) + c\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y} = 0 \qquad (50)$$

buluruz. Açıktır ki, $a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2$ kuadratik formun ($B^2 - AC < 0$) tanımlı olduğundan dolayı (48) ifadesinin sağ ve sol taraflarının sıfıra eşit olması için,

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{\partial\xi}{\partial y} = \frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{\partial\eta}{\partial y} = 0 \qquad (51)$$

eşitlikleri sağlanmalıdır. Zaten $\varphi(x,y)$ fonksiyonu (51) tanım bölgesinin hiçbir noktasında sıfıra eşit olmayacak şekilde seçilmiştir. O halde (16) denkleminde $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ve $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ifadelerinin katsayıları eşit ve sıfırdan farklı olurlar; c katsayısı sıfıra eşit olur. Bu durumda (16) aşağıdaki

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=F_4\left(\xi,\eta,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \tag{52}$$

gibi yazılabilir. (52) denklemine eliptik tür denklem denir.

Örnek 6. $(1+x)u_{xx}+2xyu_{xy}-y^2u_{yy}=0$ denkleminin l'ye bağımlı olarak hiperbolik, parabolik ve eliptik tür olan bölgelerini bulunuz.

Çözüm. $a(x,y)=1+x,\quad b(x,y)=xy,\quad c=-y^2.$ Diskriminantı bulalım.

$$b^2-ac=x^2y^2+y^2(1+x)=y^2(x^2+x+1) \tag{53}$$

(53)'ü $b^2-ac=y^2(x-x_1)(x-x_2)$ şeklinde yazalım. Burada,

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{1-4l}}{2}\quad,\quad x_2=\frac{-1-\sqrt{1-4l}}{2}.$$

a) Eğer $l=\frac{1}{4}$ olursa, eliptik bölgesi kaybolur ve $x_1=x_2=-\frac{1}{2}$ olur. Bu durumda $x=-\frac{1}{2}$ noktasında denklem parabolik olur.

b) $l>\frac{1}{4}$ olursa denklem tanım bölgesinin keyfi noktasında hiperbolik türe ait olur.

c) $l<\frac{1}{4}$ olursa x_1 ve x_2 reel ve çeşitlidirler. $x_1<x_2$ ve $x_1>x_2$ olduğunda denklem hiperbolik, $x_1<x<x_2$ eliptiklik bölgesi, $x=x_1$ ve $x=x_2$ ise parabolik bölgesi olur.

1.3 Parabolik Tür Denklem İçin Birinci Başlangıç Sınır Değer Problemi

Bu bölümde bir boyutlu,

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+f(x,t)$$

ısı denklemini göz önüne alalım.

Şimdi bu denklem için başlangıç ve sınır değer şartlarını inceleyelim. Eğer uzunluğu ℓ olan çubuğun başlangıç ve bitim noktasına ısı verilirse, yani

$$u(t,x)\big|_{x=0} = u_1(t),\ u(t,x)\big|_{x=\ell} = u_2(t) \tag{54}$$

koşulları yazılabilirse, bu koşula birinci sınır koşulu denir. Burada $u_1(t)$ ve $u_2(t)$ bilinen fonksiyonlardır. Eğer, uç noktaların her ikisinde veya yahut birinde $\frac{\partial u}{\partial x}$ 'in değeri verilirse, bu tür koşullara ikinci tür sınır koşulları denir. Bu tür koşullara lokal sınır koşulları denir.

Fakat pratikte öyle problemler vardır ki, sınır koşullarından birisi veya her ikisi de $\int_0^\ell u(x,t)dx = \mu(t)$ cinsinden olan integral şeklinde verilebilir. Örneğin, parçacık difüzyonu olaylarında bir atom molekülünün diğer ortamlara difüze edilmesi için belli bir total sıcaklığın verilmesi gerekir ki, bu total sıcaklıkta yukarıda yazdığımız integral şeklinde ifade edilebiliyor.

Isı denklemi için aşağıdaki problemi,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \tag{55}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{56}$$

$$\int_0^\ell u(x,t)dx = \mu(t),\ t > 0, \tag{57}$$

$$\frac{\partial u(\ell,t)}{\partial x} = \upsilon(t) \tag{58}$$

göz önüne alalım.

Burada $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\mu(t)$ ve $\upsilon(t)$ bilinen fonksiyonlar, a^2- ise ortamın fiziksel özeliklerini ifade eden sabit ve ℓ çubuğun uzunluğunu göstermektedir. (55)-(58) problemini homojen sınır koşullu probleme indirgeyelim. Bunun için öyle $w(x,t)$ fonksiyonu içerelim ki, bu fonksiyon (57) ve (58) sınır koşullarını korusun. Bu amaçla $w(x,t)$ 'yi

$$w(x,t) = Ax + B$$

şeklinde arayalım. (57) ve (58) koşullarından A ve B 'yi bulalım. (57)'den $A = \upsilon(t)$ olur. (58)'den ise

$$\int_0^{\ell} \upsilon(t)x + B \;\; dx = \mu(t),$$

$$\upsilon(t)\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\ell} + Bx\Big|_0^{\ell} = \mu(t).$$

$$B = \frac{\mu(t) - \frac{\ell^2}{2}\upsilon(t)}{\ell} = \frac{1}{\ell}\mu(t) - \frac{\ell}{2}\upsilon(t)$$

olur ve

$$w(x,t) = \upsilon(t)x + \frac{1}{\ell}\mu(t) - \frac{\ell}{2}\upsilon(t)$$

olarak elde edilir. Şimdi,

$$\upsilon(x,t) = u(x,t) - w(x,t)$$

değişken dönüşümünü yapalım. Buradan,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \upsilon}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} =$$

$$= \frac{\partial \upsilon}{\partial t} + x\frac{\partial \upsilon}{\partial t} + \frac{1}{\ell}\frac{\partial \mu(t)}{\partial t} - \frac{\ell}{2}\frac{\partial \upsilon}{\partial t} =$$

$$= \frac{\partial \upsilon}{\partial t} + \left(x - \frac{\ell}{2}\right)\frac{\partial \upsilon}{\partial t} + \frac{1}{\ell}\frac{\partial \mu(t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \upsilon}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial \upsilon}{\partial x} + \upsilon(t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}$$

olur. Bunları (55) ve (58)'de dikkate alırsak söz konusu problem aşağıdaki probleme indirgenir:

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} + F(x,t), \tag{59}$$

$$\upsilon(x,0) = \upsilon_0(x), \tag{60}$$

$$\int_0^{\ell} \upsilon(x,t)dx = 0, \tag{61}$$

$$\frac{\partial \upsilon(\ell,t)}{\partial x}=0. \tag{62}$$

Burada,

$$F(x,t)=f(x,t)+\left(x-\frac{\ell}{2}\right)\frac{\partial \upsilon}{\partial t}+\frac{1}{\ell}\frac{\partial \mu(t)}{\partial t},$$

$$\upsilon_0(x)=\varphi(x)-w(x,0)$$

olmaktadır. Şimdi gösterelim ki, (61) koşulu

$$\frac{\partial \upsilon(\ell,t)}{\partial x}-\frac{\partial \upsilon(0,t)}{\partial x}=0$$

koşuluna denktir. Sadelik için $F\equiv 0$ olsun. Gerçekten de,

$$\int_0^\ell \frac{\partial \upsilon}{\partial t}dx=a^2\int_0^\ell \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}dx$$

veya

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\ell \upsilon(x,t)dx=a^2\left(\frac{\partial \upsilon(\ell,t)}{\partial x}-\frac{\partial \upsilon(0,t)}{\partial x}\right).$$

(61) koşulunu dikkate alırsak,

$$0=a^2\left(\frac{\partial u(\ell,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}\right)$$

veya

$$0=\frac{\partial u(\ell,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}$$

olmaktadır.

(61) cinsinden olan koşullara lokal olmayan koşullar denir.

1.4 Isı Denklemi İçin Lokal Sınır Koşullu Problemin Fourier Metodu İle Çözümü

Isı denklemi için yazılmış birinci sınır değer problemi,

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \tag{63}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{64}$$

$$u(0,t) = \varphi_1(t), \; u(\ell,t) = \varphi_2(t) \tag{65}$$

şeklinde olmaktadır. Burada a^2, ℓ, $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ sırasıyla bilinen sabitler ve fonksiyonlar olmaktadırlar.

Önce homojen denklemi göz önüne alalım. Yani, $f(x,t) = 0$ olsun ve (63)-(65) probleminin homojen sınır koşullu probleme indirgendiğini varsayalım. Yani, $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = 0$ olsun.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{66}$$

denkleminin çözümünü,

$$u(x,t) = y(x)T(t) \tag{67}$$

şeklinde arayarak, (66) denklemini iki yardımcı denkleme ayıralım. Gerçekten de (67)'yi (66)'da yerine yazarsak,

$$\frac{y''}{y} = \frac{T'}{a^2 T} = -\lambda^2$$

eşitliğini elde etmiş oluruz. Buradan,

$$y'' + \lambda^2 y = 0, \tag{68}$$

$$T' + \lambda^2 a^2 T = 0 \tag{69}$$

olarak ele alırız.

(68) denklemi için sınır koşullarını,

$$y(0) = 0, \quad y(\ell) = 0 \tag{70}$$

olarak elde ederiz.

(68) denkleminin (70) koşulu çerçevesinde çözümünün ele alınması problemine *spektral* problem denir.

Şimdi söz konusu spektral problemin çözümünü ele alalım. Açıktır ki, (68) denkleminin genel çözümü,

$$y(x,\lambda) = c_1 y_1(x,\lambda) + c_2 y_2(x,\lambda) \tag{71}$$

olmaktadır. Burada,

$$y_1(x,\lambda) = \sin \lambda x, \quad y_2(x,\lambda) = \cos \lambda x \tag{72}$$

(68) denkleminin fundamental çözümleri olmaktadır.

c_1 ve c_2 bilinmeyen sabitlerini elde etmek için (70)'deki koşullarını kullanalım. (70)'in birinci koşulundan $c_2 = 0$ olur. İkinci koşuldan ise $c_1 \sin \lambda \ell = 0$ olmaktadır. Problemin trivial olmayan çözümünün varlığı için,

$$\lambda_n \ell = \pi n \text{ veya } \lambda_n = \frac{\pi n}{\ell}, \; (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...) \tag{73}$$

olmak zorundadır.

λ_n'lere (68)-(70) probleminin öz değerleri denir.

λ_n'lerin değerlerini (71)'de yerine yazarsak ve genelliği bozmadan

$$y_n(x,\lambda) = c_1 \sin \lambda_n x = c_1 \sin \frac{\pi n x}{\ell} \tag{74}$$

öz fonksiyonlarını ele ederiz. (74) formülü ile bulunan öz fonksiyonları genelliği bozmadan $c_1 = 1$ olarak ele almak mümkündür.

(74) eşitliği ile tanımlanan fonksiyonlara (68)-(70) probleminin öz fonksiyonları denir.

λ_n'nin değerini (69)'da yerine yazarsak, (69)'un genel çözümü,

$$T_n(t,\lambda) = A_n e^{-(\frac{\lambda n a}{\ell})^2 t} \tag{75}$$

oluyor. Burada A_n'ler şimdilik bilinmeyen sabitlerdir. (74) ve (75) ifadelerini (67)'de yerine yazarak ve lineer denklemler için süperpozisyon prensibini uygularsak (66) denkleminin homojen sınır koşulunu koruyan çözümünü aşağıdaki

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(\frac{\lambda n a}{\ell})^2 t} \sin \lambda_n x \tag{76}$$

şekilde buluruz.

(76) ifadesindeki A_n katsayısını elde etmek için (64) başlangıç koşulunu kullanalım. Bundan dolayı varsayalım ki, $\varphi(x)$ fonksiyonu $[0,\ell]$ aralığında sinüs Fourier serisi şeklinde yazılabilir olsun. Yani,

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n \sin\lambda_n x \tag{77}$$

olsun. Burada, φ_n Fourier katsayısı,

$$\varphi_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(x)\sin\lambda_n x dx \tag{78}$$

formulü ile ele alınmaktadır.

(76) ve (77)'yi kullanarak $A_n=\varphi_n$ olduğunu görmek zor değildir. Böylelikle, (63)-(65) probleminin gerçek çözümü (76) şeklinde ifade edilmektedir.

Şimdi $f(x,t)\neq 0$ olduğu durumu göz önüne alalım. Bu durumda, (63)-(65) probleminin çözümünü,

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin\frac{\pi n x}{\ell} \tag{79}$$

şeklinde arayalım.

Burada, $u_n(t)$ belli olmayan Fourier katsayılarıdır. Farz edelim ki, $f(t,x)$ fonksiyonu sinüs Fourier serisine ayrılabilir. Yani,

$$f(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{\pi n x}{\ell}, \tag{80}$$

$$f_n(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(t,x)\sin\frac{\pi n x}{\ell}dx \tag{81}$$

olur. Şimdi (79) ve (80) ifadelerini formal olarak (63)'de yerine yazalım.

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n'\sin\frac{\pi n x}{\ell}=a^2\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2\sin\frac{\pi n x}{\ell}+\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{\pi n x}{\ell}$$

veya

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[u_n'(t)-a^2\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 u_n - f_n(t)\right]\sin\frac{\pi nx}{\ell}=0.$$

Buradan,

$$u_n'(t)-\left(a\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 u_n(t)= f_n(t) \tag{82}$$

elde ederiz. (82) denklemin aşağıdaki başlangıç koşulu çerçevesinde çözelim.

$$u_n(0)=\varphi_n. \tag{83}$$

(82)-(83) problemin çözümünü,

$$u_n(t)=c_n e^{-\left(\frac{\pi na}{\ell}\right)^2 t}+\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi na}{\ell}\right)^2 (t-\tau)} f_n(\tau)d\tau \tag{84}$$

şeklinde kolayca elde ederiz. Burada c_n ’ler keyfi sabitlerdir. c_n ’leri (83)’den $c_n=\varphi_n$ şeklinde buluruz. Nihayet (63)-(65) probleminin çözümünü,

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\varphi_n e^{-\left(\frac{\pi na}{\ell}\right)^2 t}+\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi na}{\ell}\right)^2 (t-\tau)} f_n(\tau)d\tau\right]\sin\frac{\pi nx}{\ell} \tag{85}$$

şeklinde ifade edebiliriz.

Varsayalım ki , $\varphi(x)$ fonksiyonu $\varphi(0)=\varphi(\ell)=0$ koşulunu sağlamaktadır ve birinci mertebeden parçalı sürekli türevlere sahiptir. Bu koşullar çerçevesinde gösterilebilir ki,

$$u_n(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n e^{-\left(\frac{a\pi n}{\ell}\right)^2 t}\sin\frac{\pi nx}{\ell} \tag{86}$$

fonksiyonu (63)’e karşılık gelen homojen denklemin (64), (65) şartlarını sağlayan çözümüdür. $t>0$ olduğu durumda (86)’nın homojen denklemi sağladığını ispatlamak için bu serinin t ’ye göre bir defa, x ’e göre iki defa diferansiyellenebilir olduğunu göstermek yeterlidir. Bu seri zaten t ’ye ve x ’e göre keyfi defa diferansiyellenebilirdir. Çünkü $e^{-\left(\frac{a\pi n}{\ell}\right)^2 t}$ çarpanı $n\to\infty$ olduğu durumlarda eksponansiyel olarak sıfıra yaklaşmaktadır. Seriyi diferansiyellerken ortaya çıkan n^k gibi çarpanlar, sonucun 0 ’a yakınsak olmasına mani olmazlar. Homojen parabolik türden denklemin çözümünün sonsuz defa diferansiyellenebilir olmasından Cauchy probleminin çözümünü ele ederken de bahsetmiştik. $t>0$ olduğu durumda, $x \to 0$ ve $x \to \ell$ için (86)'da limit alma işlemleri uygulanmaktadır ve (64) şartı da korunmaktadır. (65) koşulunun korunması için,

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n x}{\ell}$$

olmalıdır. Bu ise, $\varphi(x)$ 'in Fourier serisinin kendisine yakınsak olması demektir. $\varphi(x)$ fonksiyonuna göre kabul ettiğimiz şartla söz konusu yakınsaklık temin edilmektedir.

Eğer $f(t,x)$ fonksiyonu sürekli olursa $f(t,0) = f(t,\ell) = 0$ koşulları sağlanırsa ve ayrıca $f_x(t,x)$ türevleri parçalı sürekli ise gösterebilir ki,

$$u_2(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n a}{\ell}\right)^2 t} f_n(\tau) d\tau \right] \sin \frac{\pi n x}{\ell} \tag{87}$$

fonksiyonu (63) ve (64)'ü sağlamaktadır ve $t=0$ durumunda $u_2(0,x) = 0$ 'dır.

Böylelikle, yukarıdaki koşullar çerçevesinde (85) formülü ile bulunan çözüm, (63)-(65) probleminin çözümü olmaktadır.

Örnek 6. Yan yüzeylerinden ve uç noktalarından izole edilmiş sonlu çubuğun başlangıç sıcaklığı,

$$u|_{t=0} = \varphi(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < \dfrac{\ell}{2} \\ \ell - x, & \dfrac{\ell}{2} \le x \le \ell \end{cases}$$

olmaktadır. Çubuğun $t>0$ anında keyfi noktasındaki sıcaklığı bulalım.

Çözüm:

Uzunluğu ℓ ve $a^2 = 1$ olan çubuğun ısı iletim denklemini,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{88}$$

yazalım. Bu denklem için başlangıç ve sınır koşulları,

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \tag{89}$$

$$u(t,0) = 0,\;\; u(t,\ell) = 0 \tag{90}$$

dır. (86)'dan görüldüğü gibi,

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{\pi n x}{\ell} e^{-\left(\frac{\pi^2 n^2}{\ell^2}\right)t},$$

$$B_n = \varphi_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{\pi n x}{\ell}dx$$

$$= \frac{2}{\ell}\int_0^{\frac{\ell}{2}} x\sin\frac{\pi n x}{\ell}dx + \int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} (\ell - x)\sin\frac{\pi n x}{\ell}dx$$

$$= \frac{2}{\ell}\int_0^{\frac{\ell}{2}} x\sin\frac{\pi n x}{\ell}dx + 2\int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell}\sin\frac{\pi n x}{\ell}dx - \frac{2}{\ell}\int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} x\sin\frac{\pi n x}{\ell}dx;$$

$$\int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} x\sin\frac{\pi n x}{\ell}dx = -x\frac{\ell}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{\ell}\Big|_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} + \frac{\ell}{\pi n}\int \cos\frac{\pi n x}{\ell}dx$$

$$= -x\frac{\ell}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{\ell}\Big|_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} + \frac{\ell^2}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n x}{\ell}\Big|_{\frac{\ell}{2}}^{\ell}$$

olur. Ayrıca,

$$2\int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell}\sin\frac{\pi n x}{\ell}dx = -2\frac{\ell}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{\ell}\Big|_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} = -\frac{\ell}{\pi n}\cos\pi n$$

$$= -2\frac{\ell}{\pi n}(-1)^n = 2\frac{\ell}{\pi n}(-1)^{n+1}$$

olmaktadır. Birinci ve üçüncü integrali hesaplarsak,

$$\frac{2}{\ell}\left[-x\frac{\ell}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{\ell}+\frac{\ell^2}{\pi^2n^2}\sin\frac{\pi nx}{\ell}\right]\Bigg|_0^{\frac{\ell}{2}}-\frac{2}{\ell}\left[-x\frac{\ell}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{\ell}+\frac{\ell^2}{\pi^2n^2}\sin\frac{\pi nx}{\ell}\right]\Bigg|_{\frac{\ell}{2}}^{\ell}=$$

$$=\frac{2}{\ell}\left[-\frac{\frac{\ell}{2}}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{\ell}\right]-\frac{2}{\ell}\left[-\frac{\ell^2}{\pi n}\cos\pi n\right]-\frac{2}{\ell}\left[-\frac{\ell^2}{\pi^2n^2}\sin\frac{\pi n}{\ell}\right]$$

$$=\frac{2\ell}{\pi n}\cos n\pi$$

olur ve buradan $B_n=\frac{4\ell}{\pi^2n^2}\sin\frac{\pi n}{\ell}$ elde ederiz. B_n'nin bu değerini yerine yazarsak, çözümü

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4\ell}{\pi^2-n^2}\sin\frac{\pi n}{\ell}\right)e^{-\frac{\pi^2n^2}{\ell^2}t}\sin\frac{\pi nx}{\ell}=\frac{4\ell}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{\pi n}{\ell}e^{-\frac{\pi^2n^2}{\ell^2}t}\sin\frac{\pi nx}{\ell}$$

olarak elde ederiz.

2. BİR BOYUTLU ISI DENKLEMİ İÇİN LOKAL OLMAYAN BAŞLANGIÇ-SINIR DEĞER PROBLEMİNİN REZİDÜ YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

2.1 Spektral Problem ve Ayrılış Formülü

Önce aşağıdaki problemi,

$$y''-\lambda^2y=f(x), \tag{91}$$

$$\ell_1(y)\equiv y(0)=0,\quad \ell_2(y)\equiv y'(0)-y'(1)=0 \tag{92}$$

göz önüne alalım.

Diferansiyel denklem teorisinden bilindiği gibi (91)-(92) problemin çözümü,

$$y(x,\lambda;f)=\int_0^1\frac{\Delta(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}f(\xi)d\xi \tag{93}$$

şeklinde olmaktadır.

Bilindiği gibi $y'' - \lambda^2 y = 0$ denkleminin genel çözümü,

$$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x}$$

olmaktadır.

Şimdi homojen olmayan (91) denkleminin çözümünü araştıralım. Bunun için sabitin varyasyonu yöntemini uygulayalım. Homojen denklemin genel çözümündeki c_1 ve c_2 sabitlerini x 'e bağlı fonksiyonlar olarak göz önüne alırsak,

$$y' = c_1' e^{\lambda x} + c_1 \lambda e^{\lambda x} + c_2' e^{-\lambda x} - c_2 \lambda e^{-\lambda x}$$

elde ederiz. Bu ifadedeki c_1 ve c_2 'leri öyle seçelim ki,

$$c_1' e^{\lambda x} + c_2' e^{-\lambda x} = 0 \tag{94}$$

olsun. Bu taktirde,

$$y' = c_1 \lambda e^{\lambda x} - c_2 \lambda e^{-\lambda x} \tag{95}$$

elde edilir. Buradan bir kez daha türev alarak,

$$y'' = c_1' \lambda e^{\lambda x} + c_1 \lambda^2 e^{\lambda x} - c_2' \lambda e^{-\lambda x} + c_2 \lambda^2 e^{-\lambda x} \tag{96}$$

buluruz. y ve y'' 'nün bu ifadelerini (91)'de yerine yazarsak,

$$c_1' \lambda e^{\lambda x} + c_1 \lambda^2 e^{\lambda x} - c_2' \lambda e^{-\lambda x} + c_2 \lambda^2 e^{-\lambda x} - \lambda^2 (c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x}) = f(x)$$

veya

$$c_1' \lambda e^{\lambda x} - c_2' \lambda e^{-\lambda x} = f(x) \tag{97}$$

sonucu elde edilir. Böylelikle c_1' ve c_2' bilinmeyenlerini,

$$\begin{cases} c_1' e^{\lambda x} + c_2' e^{-\lambda x} = 0, \\ c_1' \lambda e^{\lambda x} - c_2' \lambda e^{-\lambda x} = f(x) \end{cases} \tag{98}$$

denklemler sisteminden elde edebiliriz. Sistemin katsayılar determinantı,

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{\lambda x} & e^{-\lambda x} \\ \lambda e^{\lambda x} & -\lambda e^{\lambda x} \end{vmatrix} = -\lambda - \lambda = -2\lambda \tag{99}$$

sıfırdan farklı olduğundan Cramer kuralına göre,

$$c_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-\lambda x} \\ f(x) & -\lambda e^{-\lambda x} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-f(x)e^{-\lambda x}}{-2\lambda} = \frac{f(x)e^{-\lambda x}}{2\lambda}, \tag{100}$$

$$c_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^{\lambda x} & 0 \\ \lambda e^{\lambda x} & f(x) \end{vmatrix}}{\Delta} = -\frac{e^{\lambda x} f(x)}{2\lambda} \tag{101}$$

olmaktadır. (104) ve (105) ifadelerini önce 0'dan x'e kadar integrallersek,

$$c_1(x) = \int_0^x \frac{f(\xi)e^{-\lambda\xi}}{2\lambda} d\xi + c_1(0), \tag{102}$$

$$c_2(x) = -\int_0^x \frac{f(\xi)e^{\lambda\xi}}{2\lambda} d\xi + c_2(0) \tag{103}$$

sonucunu elde ederiz. Bu ifadeler yerine konursa (91) denkleminin çözümü,

$$y = e^{\lambda x}\left(c_1(0) + \int_0^x \frac{f(\xi)e^{-\lambda\xi}}{2\lambda} d\xi \right) + e^{-\lambda x}\left(c_2(0) - \int_0^x \frac{f(\xi)e^{\lambda\xi}}{2\lambda} d\xi \right),$$

$$y = c_1(0)e^{\lambda x} + c_2(0)e^{-\lambda x} + \int_0^x \frac{sh\lambda(x-\xi)}{\lambda} f(\xi) d\xi \tag{104}$$

şeklinde elde edilir. Şimdi (100) ve (101) denklemlerini 1'den x'e kadar integralleyelim.

$$c_1(x) = \int_1^x \frac{f(\xi)e^{-\lambda\xi}}{2\lambda} d\xi + c_1(1), \tag{105}$$

$$c_2(x) = -\int_1^x \frac{f(\xi)e^{\lambda\xi}}{2\lambda} d\xi + c_2(1). \tag{106}$$

(105) ve (106) ifadelerini $y(x)$'de yerine yazarsak,

$$y = e^{\lambda x}\left[c_1(1) + \int_1^x \frac{f(\xi)e^{-\lambda\xi}}{2\lambda}d\xi\right] + e^{-\lambda x}\left[c_2(1) - \int_1^x \frac{f(\xi)e^{\lambda\xi}}{2\lambda}d\xi\right]$$

veya

$$y = c_1(1)e^{\lambda x} + c_2(1)e^{-\lambda x} + \int_0^x \frac{sh\lambda(x-\xi)}{\lambda} f(\xi)d\xi \tag{107}$$

sonucu elde edilir. (104) ve (107) ifadelerini toplayıp ikiye bölersek,

$$y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x} + \frac{1}{2}\left(\int_0^x \frac{sh\lambda(x-\xi)}{\lambda} f(\xi)d\xi + \int_1^x \frac{sh\lambda(x-\xi)}{\lambda} f(\xi)d\xi\right)$$

ifadesi elde edilir. Son ifadeyi,

$$y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x} + \int_0^1 g(x,\xi,\lambda) f(\xi)d\xi \tag{108}$$

olarak yazalım. Burada $c_1 = \dfrac{c_1(0)+c_1(1)}{2}$, $c_2 = \dfrac{c_2(0)+c_2(1)}{2}$ ve

$$g(x,\xi,\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\lambda} sh\lambda(x-\xi), & 0 \le \xi \le x \le 1 \\ -\dfrac{1}{2\lambda} sh\lambda(x-\xi), & 0 \le x \le \xi \le 1, \end{cases}$$

$g(x,\xi,\lambda)$ fonksiyonuna Green fonksiyonunun baş kısmı denir.

(108) ifadesindeki c_1 ve c_2 sabitleri (92) sınır koşullarından, yani

$$c_1 + c_2 + \int_0^1 g(0,\xi,\lambda) f(\xi)d\xi - c_1\lambda - c_2\lambda + \int_0^1 g_x(0,\xi,\lambda) f(\xi)d\xi -$$

$$-c_1\lambda e^{\lambda} - c_2\lambda e^{-\lambda} + \int_0^1 g_x(1,\xi,\lambda) f(\xi)d\xi = 0$$

denklemler sisteminden elde edilebilir.

c_1 ve c_2'yi bu sistemden bulup (112) ifadesinde yerine yazarak (91)-(92) probleminin çözümünü,

$$y(x,\lambda)=\int_0^1 G(x,\xi,\lambda)\,f(\xi)\,d\xi \tag{109}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada,

$$G(x,\xi,\lambda)=\frac{\Delta(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \tag{110}$$

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} \ell_1(e^{\lambda x}) & \ell_1(e^{-\lambda x}) \\ \ell_2(e^{\lambda x}) & \ell_2(e^{-\lambda x}) \end{vmatrix}, \tag{111}$$

$$\Delta(x,\xi,\lambda)=\begin{vmatrix} g(x,\xi,\lambda) & e^{\lambda x} & e^{-\lambda x} \\ \ell_1(g(x,\xi,\lambda)) & \ell_1(e^{\lambda x}) & \ell_1(e^{-\lambda x}) \\ \ell_2(g(x,\xi,\lambda)) & \ell_2(e^{\lambda x}) & \ell_2(e^{-\lambda x}) \end{vmatrix} \tag{112}$$

olmaktadır.

$G(x,\xi,\lambda)$ 'ya (91)-(92) probleminin Green fonksiyonu denir.

Ayrılış Formülü

Teorem. $f(x)$ ve $f'(x)$ fonksiyonları $0,1$ aralığında sürekli fonksiyonlar olsun. Bu taktirde,

$$f(x)=\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_\nu} y(x,\lambda;f)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum\oint_{c_\nu}\lambda\,d\lambda\int_0^1\frac{\Delta(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}f(\xi)\,d\xi \tag{113}$$

ayrılış formülü doğrudur. Burada c_ν, $\Delta(\lambda)=0$ denkleminin yalnız bir kökünü içerisine alan kapalı eğri olmaktadır ve toplama işlemi tüm kutup noktaları üzerine gerçekleşmektedir.

Şimdi (113) ifadesindeki rezidüleri hesaplayalım. Bunun için gereken ifadeleri elde edelim:

$$g'(x,\xi,\lambda)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}ch\lambda(x-\xi), & 0\le\xi\le x\le 1 \\ -\dfrac{1}{2}ch\lambda(x-\xi), & 0\le x\le\xi\le 1 \end{cases} \tag{114}$$

ve

$$\ell_1\ \ g(x,\xi,\lambda)\ \ =g(0,\xi,\lambda)=\frac{1}{2\lambda}sh\lambda\xi, \tag{115}$$

$$\ell_2 \;\; g(x,\xi,\lambda) \;\; = g'(0,\xi,\lambda) - g'(1,\xi,\lambda),$$

$$\ell_2 \;\; g(x,\xi,\lambda) \;\; = -\frac{1}{2} ch\lambda(-\xi) - \frac{1}{2} ch\lambda(1-\xi),$$

$$\ell_2 \;\; g(x,\xi,\lambda) \;\; = -\frac{1}{2} ch\lambda\xi - \frac{1}{2} ch\lambda(1-\xi) \tag{116}$$

olduğundan $\Delta(x,\xi,\lambda)$ için,

$$\Delta(x,\xi,\lambda) = \begin{vmatrix} g(x,\xi,\lambda) & e^{\lambda x} & e^{-\lambda x} \\ \frac{1}{2\lambda} sh\lambda\xi & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} ch\lambda\xi - \frac{1}{2} ch\lambda(1-\xi) & \lambda - \lambda e^{\lambda} & -\lambda + \lambda e^{-\lambda} \end{vmatrix} =$$

$$= -2ch(2\pi ni)sh(2\pi ni) \tag{117}$$

veya

$$\Delta(x,\xi,2\pi ni) = -2\left(\frac{e^{2\pi n\xi i} + e^{-2\pi n\xi i}}{2}\right)\left(\frac{e^{2\pi nxi} - e^{-2\pi nxi}}{2}\right) =$$

$$= -2i\cos 2\pi n\xi \sin 2\pi nx \tag{118}$$

sonucu elde edilir.

$$\Delta'_\lambda(x,\xi,\lambda) = -2x\left(\frac{e^{\lambda\xi} + e^{-\lambda\xi}}{2}\right)\left(\frac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2}\right) + 2(1-\xi)\left(\frac{e^{\lambda\xi} - e^{-\lambda\xi}}{2}\right)\left(\frac{e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}}{2}\right)$$

$$\Delta'_\lambda(x,\xi,\lambda) = -\frac{1}{2}x\left[e^{\lambda(\xi+x)} + e^{-\lambda(\xi+x)} + e^{\lambda(\xi-x)} + e^{-\lambda(\xi-x)}\right] +$$

$$+\frac{1}{2}(1-\xi)\left[e^{\lambda(\xi+x)} + e^{-\lambda(\xi+x)} - e^{\lambda(\xi-x)} - e^{-\lambda(\xi-x)}\right]$$

$$\Delta'_\lambda(x,\xi,2\pi\nu i) = -\frac{1}{2}x\left[e^{2\pi\nu i(\xi+x)} + e^{-2\pi\nu i(\xi+x)} + e^{2\pi\nu i(\xi-x)} + e^{-2\pi\nu i(\xi-x)}\right] +$$

$$+\frac{1}{2}(1-\xi)\left[e^{2\pi\nu i(\xi+x)} + e^{-2\pi\nu i(\xi+x)} - e^{2\pi\nu i(\xi-x)} - e^{-2\pi\nu i(\xi-x)}\right]$$

$$\Delta'_\lambda(x,\xi,2\pi\nu i) = -x\ \cos 2\pi\nu(\xi+x)+\cos 2\pi\nu(\xi-x)\ +$$

$$+(1-\xi)\ \cos 2\pi\nu(\xi+x)-\cos 2\pi\nu(\xi-x)$$

$$\Delta'_\lambda(x,\xi,2\pi\nu i) = -2x\ \cos 2\pi\nu\xi\cos 2\pi\nu x\ -2(1-\xi)\ \sin 2\pi\nu\xi\sin 2\pi\nu x\ ,$$

$$\Delta'_\lambda(x,\xi,2\pi\nu i) = -2\left[x\cos 2\pi\nu\xi\ \cos 2\pi\nu x + (1-\xi)\sin 2\pi\nu\xi\ \sin 2\pi\nu x\right] \qquad (119)$$

sonucu bulunur. Bilindiği gibi λ_ν'ler ikinci dereceden katlı kökler olduğundan,

$$\operatorname{Re}s\left(\frac{\lambda\Delta(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)},\lambda_\nu\right) = \lim_{\lambda\to\lambda_\nu}\frac{d}{d\lambda}\left[(\lambda-\lambda_\nu)^2\,\frac{\lambda\Delta(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\right]$$

$$= \lim_{\lambda\to\lambda_\nu}\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{\Delta(x,\xi,\lambda)}{\dfrac{\Delta(\lambda)}{\lambda(\lambda-\lambda_\nu)^2}}\right], \qquad \left(\psi(\lambda)=\frac{\Delta(\lambda)}{\lambda(\lambda-\lambda_\nu)^2}\right)$$

$$= \lim_{\lambda\to\lambda_\nu}\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{\Delta(x,\xi,\lambda)}{\psi(\lambda)}\right]$$

$$= \lim_{\lambda\to\lambda_\nu}\left[\frac{\psi(\lambda)\Delta'(x,\xi,\lambda)-\psi'(\lambda)\Delta(x,\xi,\lambda)}{\psi^2(\lambda)}\right]$$

formülü ile hesaplanır. Burada,

$$\psi(\lambda)=\frac{\Delta(\lambda)}{\lambda(\lambda-\lambda_\nu)^2}, \quad \psi(\lambda)=\frac{e^{-\lambda}(e^{\lambda}-1)^2}{(\lambda-\lambda_\nu)^2}$$

olmaktadır.

e^λ yı λ_ν noktasında Taylor Serisi açılımını yapalım. Genel teoriyi dikkate alırsak,

$$f(x) = f(x_0)+\frac{f(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots$$

$$f(x)=e^\lambda, \quad x_0=\lambda_\nu,$$

$$f'(x)=e^\lambda \Rightarrow f'(\lambda_\nu)=e^{\lambda_\nu}=1,$$

$$f''(\lambda)=e^{\lambda}\Rightarrow f''(\lambda_\nu)=e^{\lambda_\nu}=1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$e^{\lambda}=1+(\lambda-\lambda_\nu)+\frac{1}{2!}(\lambda-\lambda_\nu)^2+\frac{1}{3!}(\lambda-\lambda_\nu)^3+\ldots$$

elde ederiz.

$$\psi(\lambda)=\frac{e^{-\lambda}\left[(\lambda-\lambda_\nu)+\frac{1}{2}(\lambda-\lambda_\nu)^2+\frac{1}{6}(\lambda-\lambda_\nu)^3+\ldots\right]^2}{(\lambda-\lambda_\nu)^2},$$

$$\psi(\lambda)=\frac{e^{-\lambda}\left[(\lambda-\lambda_\nu)^2+(\lambda-\lambda_\nu)^3+\frac{7}{12}(\lambda-\lambda_\nu)^4+\ldots\right]}{(\lambda-\lambda_\nu)^2},$$

$$\psi(\lambda)=e^{-\lambda}\left[1+(\lambda-\lambda_\nu)+\frac{7}{12}(\lambda-\lambda_\nu)^2+\ldots\right],$$

$$\psi(\lambda_\nu)=1, \tag{120}$$

$$\psi'(\lambda)=-e^{-\lambda}\left[1+(\lambda-\lambda_\nu)+\frac{7}{12}(\lambda-\lambda_\nu)^2+\ldots\right]+e^{\lambda}\left[1+\frac{7}{6}(\lambda-\lambda_\nu)+\ldots\right],$$

$$\psi'(\lambda_\nu)=0, \tag{121}$$

$$\operatorname{Re}s\left(\frac{\lambda\Delta(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)},\lambda_\nu\right)=\lim_{\lambda\to\lambda_\nu}\frac{d}{d\lambda}\left[(\lambda-\lambda_\nu)^2\frac{\lambda\Delta(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\right]$$

$$=\lim_{\lambda\to\lambda_\nu}\left[\frac{\psi(\lambda)\Delta'(x,\xi,\lambda)-\psi'(\lambda)\Delta(x,\xi,\lambda)}{\psi^2(\lambda)}\right]$$

$$=\frac{\Delta'(x,\xi,\lambda_\nu)}{\psi(\lambda)}-\frac{\psi'(\lambda_\nu)\Delta(x,\xi,\lambda_\nu)}{\psi^2(\lambda_\nu)}. \tag{122}$$

(118), (119), (120) ve (121) ifadelerini (122) ifadesinde yerine yazarsak,

$$\operatorname{Re}s\left(\frac{\lambda\Delta(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)},\lambda_\nu\right)=-2\ x\cos 2\pi\nu\xi\cos 2\pi\nu x+(1-\xi)\sin 2\pi\nu\xi\sin 2\pi\nu x \tag{123}$$

sonucunu elde ederiz. (123) ifadesini (113) ifadesinde yerine yazalım.

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\int_{0}^{1} -2x\cos 2\pi\nu\xi\cos 2\pi\nu x-2(1-\xi)\sin 2\pi\nu\xi\sin 2\pi\nu x\ f(\xi)d\xi$$

veya

$$f(x)=-2\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{x\cos 2\pi\nu x\int_{0}^{1} f(\xi)\cos 2\pi\nu\xi d\xi+\sin 2\pi\nu x\int_{0}^{1}(1-\xi)f(\xi)\sin 2\pi\nu\xi d\xi\right\} \tag{124}$$

sonucu elde edilir.

2.2 Başlangıç-Sınır Değer Probleminin Çözümü

(59)-(62) probleminin çözümü için (91)-(92) spektral problemin yanında biz,

$$\begin{aligned} &T'+\lambda^2a^2T=0,\\ &T(x,0,\lambda)=g(x) \end{aligned} \tag{125}$$

Cauchy probleminin çözümünü de kullanacağız. Kolayca göstermek mümkündür ki, bu problemin çözümü,

$$T(x,t,\lambda)=g(x)e^{-\lambda^2 t}+\int_{0}^{t} e^{-\lambda^2(t-\tau)}F(x,\tau)d\tau \tag{126}$$

olmaktadır.

Aşağıdaki gibi operatör içerelim. $f(x)$, $[0,1]$ aralığında diferansiyellenebilir fonksiyon olmak üzere,

$$A_{\nu j}f\equiv f_{\nu}^{(j)}(x)=\frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{c_\nu}\lambda^{2j+1}y(x,\lambda;f)d\lambda \tag{127}$$

olsun.

Açıktır ki, (124) ve (127)'den

$$-\sum_{\nu} f_{\nu}^{0}(x)=f(x) \tag{128}$$

elde edilir. (127)'yi (59)'da kullanırsak,

$$\frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{c_\nu}\lambda^{2j+1}y\left(x,\lambda,\frac{\partial\upsilon}{\partial t}\right)d\lambda=\frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{c_\nu}\lambda^{2j+1}y\left(x,\lambda,\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x^2}\right)d\lambda+$$

$$+\frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{c_\nu}\lambda^{2j+1}y\ \ x,\lambda,F(x,t)\ d\lambda \tag{129}$$

sonucunu buluruz. (127)’yi dikkate alırsak,

$$\frac{\partial \upsilon_v^{(j)}}{\partial t} = \upsilon_v^{(j+1)} + F_v^j\,,\ \ (j = 0,1,2,...) \tag{130}$$

ifadesini elde ederiz. (130) denklemi için başlangıç koşulu,

$$\upsilon_v^{(j)}(x,0) = g_v^{(j)}(x) \tag{131}$$

ifadesi olmalıdır.

$$\tilde{\upsilon}_v^{(j)}(x,t) = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c_v} \lambda^{2j+1} y\ \ x,\lambda,T(x,t,\lambda)\ d\lambda \tag{132}$$

fonksiyonu (130)-(131) denkleminin çözümü olmaktadır. Burada $T(x,t,\lambda)$, yukarıda verdiğimiz Cauchy probleminin çözümüdür. Gerçekten,

$$\frac{\partial \tilde{\upsilon}_v^{(j)}}{\partial t} = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c_v} \lambda^{2j+1} y\left(x,\lambda,\frac{\partial T}{\partial t}\right) d\lambda =$$

$$\frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c_v} \lambda^{2j+1} y\ \ x,\lambda,-\lambda^2 T(x,\lambda,t)\ d\lambda +$$

$$+\frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c_v} \lambda^{2j+1} y\ \ x,\lambda,F(x,t)\ d\lambda = \tilde{u}_v^{(j+1)} + F_v^{(j)}$$

ve

$$\tilde{\upsilon}_v^{(j)}(x,t) = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c_v} \lambda^{2j+1} y\ \ x,\lambda,g(x)\ d\lambda = g_v^{(j)}(x)$$

olmaktadır. (59)-(62) probleminin çözümü tek olduğundan dolayı $\upsilon_v^{(j)}(x,t) = \tilde{\upsilon}_v^{(j)}(x,t)$, $\upsilon(x,t)$ çözümü [0,1] aralığında sürekli diferansiyellenebilir olduğundan (128) formülüne göre,

$$\upsilon(x,t) = \sum_v \upsilon_v^{(0)}(x,t) =$$

$$\frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c_v} \lambda d\lambda \int_0^1 G(x,\xi,\lambda) T(t,\lambda,\xi) d\xi \tag{133}$$

elde edilir.

Şimdi biz (133)'de verilen seriyi hesaplayalım. Yukarıda sözü edildiği gibi $2\pi v$ $(v=0,\pm1,\pm2,...)$ Green fonksiyonunun kutup noktaları ve bunun yanında Green fonksiyonun ikinci dereceden katlı sıfır yeri olmaktadır.

$$\ell_1(e^{\lambda x}) = e^{\lambda x}\Big|_{x=0} = 1, \quad \ell_1(e^{-\lambda x}) = e^{-\lambda x}\Big|_{x=0} = 1,$$

$$\ell_2(e^{\lambda x}) = \lambda e^{\lambda x}\Big|_{x=0} - \lambda e^{\lambda x}\Big|_{x=1} = \lambda - \lambda e^{\lambda},$$

$$\ell_2(e^{-\lambda x}) = -\lambda e^{-\lambda x}\Big|_{x=0} + \lambda e^{-\lambda x}\Big|_{x=1} = -\lambda + \lambda e^{-\lambda}$$

olduğundan,

$$\Delta(\lambda) = \lambda e^{-\lambda}(e^{\lambda} - 1)^2$$

gibi yazılabilir. Sonuncu ifadeden görüldüğü gibi,

$$\lambda_n = 2\pi n, \quad (n = 0, \pm1, \pm2, ...)$$

sayıları $\Delta(\lambda) = 0$ denkleminin iki katlı kökleri olmaktadır. Yani $\Delta(\lambda_v) = 0$, $\Delta'(\lambda_v) = 0$ ve $\Delta''(\lambda_v) \neq 0$ 'dır. Bununla birlikte $\lambda_o = 0$ Green fonksiyonun üç katlı sıfır yeridir.

$\lambda e^{-\lambda^2 t} \dfrac{\Delta(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$ fonksiyonunun rezidüsünü hesaplayalım. $\upsilon(x,t)$ ifadesinin çözümü için aşağıdaki sonuçları elde ederiz:

$$\upsilon(x,t) = 32\pi \sum_{v=1}^{\infty} v t e^{-(2\pi v)^2 t} \cos(2\pi v x) \int_0^1 \sin(2\pi v \xi) g(\xi) d\xi$$

$$-8\sum_{v=0}^{\infty} v t e^{-(2\pi v)^2 t} \left\{ (1-x)\sin(2\pi v x) \int_0^1 \sin(2\pi v \xi) g(\xi) d\xi \right\}$$

$$-8\sum_{v=0}^{\infty} v t e^{-(2\pi v)^2 t} \left\{ \cos(2\pi v x) \int_0^1 \xi \cos(2\pi v \xi) g(\xi) d\xi \right\}$$

$$+32\pi \sum_{v=0}^{\infty} v \cos(2\pi v x) \int_0^1 \sin(2\pi v \xi) \left\{ \int_0^t (t-\tau) e^{-(2\pi v)^2 (t-\tau)} f(\xi,\tau) d\tau \right\} d\xi$$

$$-8\sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-(2\pi\nu)^2(t-\tau)} \left\{ (1-x)\sin(2\pi\nu x)\int_0^1 \sin(2\pi\nu\xi)d\xi \right\} f(\xi,\tau)d\tau$$

$$-8\sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-(2\pi\nu)^2(t-\tau)} \left\{ \cos(2\pi\nu x)\int_0^1 \xi\cos(2\pi\nu\xi)d\xi \right\} f(\xi,\tau)d\tau$$

$$-4\int_0^1 \xi \left\{ \tau g(\tau) - \int_0^t \tau f(\xi,\tau)d\tau \right\} d\xi. \tag{134}$$

Elde ettiğimiz (134) çözümü, problemin çözümünün varlığını ispatlamaya da imkan sağlar. Diğer taraftan, bu çözümü kullanarak nümerik çözümleri de değerlendirebiliriz. Daha da ötesi (134) sonucu (55)-(57) probleminin yaklaşık çözümüdür.

3. İKİ BOYUTLU ISI DENKLEMİ İÇİN LOKAL OLMAYAN SINIR KOŞULLU BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMİNİN GERÇEK ÇÖZÜMÜ İÇİN REZİDÜ GÖSTERİMİ

Aşağıdaki problemi göz önüne alalım,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = L_1 u + L_2 u, \tag{135}$$

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y), \tag{136}$$

$$\ell_1^x(u) \equiv u(0,y,t) - u(\ell,y,t) = 0, \quad \ell_2^x(u) \equiv \frac{\partial u(\ell,y,t)}{\partial x} = 0, \tag{137}$$

$$\ell_1^y(u) \equiv u(x,0,t) - u(x,\ell,t) = 0, \quad \ell_2^y(u) \equiv \frac{\partial u(x,\ell,t)}{\partial y} = 0. \tag{138}$$

$$L_1 \cdot = \frac{\partial^2 \cdot}{\partial x^2}, \quad L_2 \cdot = \frac{\partial^2 .}{\partial y^2}$$

olsun.

Aşağıdaki koşulun korunduğunu varsayalım.

$\varphi(x,y)$ fonksiyonu $D_T = [0,T) \times D,\ D = (x,y):\ 0 < x, y < \ell$ bölgesinde x ve y değişkenlerine göre sürekli ve diferansiyellene bilen fonksiyon olsun.

(135)-(138) başlangıç sınır değer problemi için aşağıdaki *spektral* problemleri ele alalım.

I. $X''(x,\lambda,h_1)+\lambda^2 X(x,\lambda,h_1)=h_1(x),$ (139)

$X(0,\lambda,h_1)-X(\ell,\lambda,h_1)=0,$ (140)

$X'(\ell,\lambda,h_1)=0,$ (141)

II. $Y''(y,\mu,h_2)+\mu^2 Y(y,\mu,h_2)=h_2(y),$ (142)

$Y(0,\mu,h_2)-Y(\ell,\mu,h_2)=0,$ (143)

$Y'(\ell,\mu,h_2)=0.$ (144)

Buradaki $h_1(x)$ ve $h_2(y)$ fonksiyonları keyfi sürekli fonksiyonlardır.

(139)-(141) probleminin çözümü,

$$X(x,\lambda,h_1)=\int_0^\ell G_1(x,\xi,\lambda)h_1(\xi)d\xi \tag{145}$$

olmaktadır. Burada,

$$G_1(x,\xi,\lambda)=\frac{\Delta_1(x,\xi,\lambda)}{\Delta_1(\lambda)} \tag{146}$$

biçimindedir ve buradaki $\Delta_1(x,\xi,\lambda)$ ve $\Delta_1(\lambda)$,

$$\Delta_1(x,\xi,\lambda)=\begin{vmatrix} g_1(x,\xi,\lambda) & \sin\lambda x & \cos\lambda x \\ \ell_1^x(g_1) & \ell_1^x(\sin\lambda x) & \ell_1^x(\cos\lambda x) \\ \ell_2^x(g_1) & \ell_2^x(\sin\lambda x) & \ell_2^x(\cos\lambda x) \end{vmatrix}, \tag{147}$$

$$\Delta_1(\lambda)=\begin{vmatrix} \ell_1^x(\sin\lambda x) & \ell_1^x(\cos\lambda x) \\ \ell_2^x(\sin\lambda x) & \ell_2^x(\cos\lambda x) \end{vmatrix}, \tag{148}$$

$$g_1(x,\xi,\lambda)=\begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}\sin\lambda(x-\xi), & 0\le\xi\le x\le 1 \\ -\dfrac{1}{\lambda}\sin(x-\xi), & 0\le x\le\xi\le 1, \end{cases} \tag{149}$$

$$\ell_1^x(\sin\lambda x)=-\sin\lambda,\quad \ell_1^x(\cos\lambda x)=1-\cos\lambda,$$

$$\ell_2^x(\sin\lambda x)=\lambda\cos\lambda,\quad \ell_2^x(\cos\lambda x)=-\lambda\sin\lambda$$

olmaktadır. Benzer olarak (142)-(144) probleminin de çözümünü

$$Y(y,\mu,h_2)=\int_0^{\ell} G_2(y,\mu,h_2)h_2(\eta)d\eta \tag{150}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada,

$$G_2(y,\mu,h_2)=\frac{\Delta_2(y,\mu,h_2)}{\Delta_2(\mu)} \tag{151}$$

biçimindedir ve $\Delta_2(y,\mu,h_2)$ ile $\Delta_2(\mu)$,

$$\Delta_2(y,\mu,h_2)=\begin{vmatrix} g_2(y,\mu,h_2) & \sin\mu y & \cos\mu y \\ \ell_1^y(g_1) & \ell_1^y(\sin\mu y) & \ell_1^y(\cos\mu y) \\ \ell_2^y(g_1) & \ell_2^y(\sin\mu y) & \ell_2^y(\cos\mu y) \end{vmatrix}, \tag{152}$$

$$\Delta_2(\mu)=\begin{vmatrix} \ell_1^y(\sin\mu y) & \ell_1^y(\cos\mu y) \\ \ell_2^y(\sin\mu y) & \ell_2^y(\cos\mu y) \end{vmatrix}, \tag{153}$$

$$g_2(y,\eta,\mu)=\begin{cases} \dfrac{1}{\mu}\sin\mu(y-\eta), & 0\le\eta\le y\le 1 \\ -\dfrac{1}{\mu}\sin\mu(y-\eta), & 0\le y\le\eta\le 1, \end{cases} \tag{154}$$

$$\ell_1^y(\sin\mu y)=-\sin\mu,\quad \ell_1^y(\cos\mu y)=1-\cos\mu,$$

$$\ell_2^y(\sin\mu y)=\mu\cos\mu,\quad \ell_2^y(\cos\mu y)=-\mu\sin\mu$$

olmaktadır. Açıktır ki, $X(x,\lambda,h_1)$ ve $Y(y,\mu,h_2)$ fonksiyonları λ ve μ parametrelerine göre tam (meromorf) fonksiyonlardır ve sayılabilir sayıda λ_ν ($\nu=0,\pm1,\pm2,\ldots$) ve μ_κ ($\kappa=0,\pm1,\pm2,\ldots$) kutup noktalarına sahiptirler. Ayrıca da keyfi $\varphi(x,y)$ fonksiyonu $X(x,\lambda,h_1)$ ve $Y(y,\mu,h_2)$ fonksiyonlarının tüm rezidüleri üzerinden,

$$\varphi(x,y)=-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_\nu\int_{c_\nu}\lambda d\lambda\int_0^{\ell}G_1(x,\xi,\lambda)\varphi(\xi,y)d\xi \tag{155}$$

$$=(-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}})^2\sum_\nu\int_{c_\nu}\lambda d\lambda\int_0^{\ell}G_1(x,\xi,\lambda)d\xi$$

$$\sum_{\kappa}\int_{\tilde{c}_k}\mu d\mu\int_0^{\ell}G_2(y,\eta,\mu)\varphi(\xi,\eta)d\eta$$

seriye ayrılabilir.

Burada c_v ve $\tilde{c}_\kappa$ sırasıyla λ_v ve μ_κ kutup noktalarından sadece birini içerisine alan kapalı çevreler olmaktadırlar, ayrıca da v ve κ endeksine göre olan toplam işlemleri yer değiştirme özeliklerine de sahiptirler.

Şimdi (135)-(138) probleminin çözümünü,

$$u(x,y,t)=-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_{v}\int_{c_v}\lambda d\lambda\int_0^{\ell}G_1(x,\xi,\lambda)\upsilon(\xi,y,t,\lambda)d\xi \tag{156}$$

şeklinde arayalım. Burada $\upsilon(\xi,y,t,\lambda)$ fonksiyonunun, $G_1(x,\xi,\lambda)$ Green fonksiyonunun λ_v kutup noktaları civarında analitik fonksiyon olduğu varsayılmaktadır. Şimdi (156)'yı (135)'de yerine yazalım.

$$0=\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)u(x,y,t)=$$

$$=-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_{v}\int_{c_v}\lambda d\lambda\left\{\int_0^{\ell}G_1(x,\xi,\lambda)\frac{\partial\upsilon(\xi,y,t,\lambda)}{\partial t}d\xi-\right.$$

$$\left.-\int_0^{\ell}G_1(x,\xi,\lambda)L_1\ \ \upsilon(\xi,y,t,\lambda)\ d\xi-\int_0^{\ell}G_1(x,\xi,\lambda)L_2\ \ \upsilon(\xi,y,t,\lambda)\ \ d\xi\right\}=$$

$$=-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_{v}\int_{c_v}\lambda d\lambda\left\{\int_0^{\ell}G_1(x,\xi,\lambda)\frac{\partial\upsilon(\xi,y,t,\lambda)}{\partial t}d\xi-\right.$$

$$-(L_1(x,\frac{d}{dx})-\lambda^2)\int_0^{\ell}G_1(x,\xi,\lambda)\upsilon(\xi,y,t,\lambda)d\xi+$$

$$+\lambda^2\int_0^{\ell}G_1(x,\xi,\lambda)\upsilon(\xi,y,t,\lambda)d\xi-$$

$$\left.-\int_0^{\ell}G_1\ \ x,\xi,\lambda\ \ L_2\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)\upsilon(\xi,y,t,\lambda)d\xi\right\}=$$

$$= -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_{\nu}\int_{c_\nu}\lambda d\lambda\left\{\int_0^{\ell} G_1(x,\xi,\lambda)[\frac{\partial \upsilon(\xi,y,t,\lambda)}{\partial t} - \lambda^2\upsilon(\xi,y,t,\lambda) - \frac{\partial^2\upsilon(\xi,y,t,\lambda)}{\partial y^2}]d\xi\right\}$$

olur. Son eşitliğin korunması için integral altındaki ifadenin sıfıra eşit olması gerekir, yani

$$\frac{\partial \upsilon(\xi,y,t,\lambda)}{\partial t} - \lambda^2\upsilon(\xi,y,t,\lambda) - \frac{\partial^2\upsilon(\xi,y,t\lambda)}{\partial y^2} = 0 \tag{157}$$

olmalıdır. (157) denklemi için başlangıç ve sınır koşulları,

$$\upsilon(\xi,y,0,\lambda) = \varphi(\xi,y), \tag{158}$$

$$\upsilon(\xi,0,t,\lambda) - \upsilon(\xi,\ell,t,\lambda) = 0, \qquad \frac{\partial \upsilon(\xi,\ell,t,\lambda)}{\partial y} = 0 \tag{159}$$

olmaktadır. Böylelikle, eğer $\upsilon(x,y,t,\lambda)$ (158)-(159) probleminin $G_1(x,\xi,\lambda)$ Green fonksiyonunun λ_ν kutup noktalarının civarında λ' ya göre analitik fonksiyon ise, (156) ifadesi ile tanımlanan $u(x,y,t)$ fonksiyonu (135)-(137) probleminin çözümü olmaktadır.
(157)-(159) probleminin çözümü,

$$\upsilon(\xi,y,t,\lambda) = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_{\kappa}\int_{\tilde{c}_\kappa}\mu d\mu\int_0^{\ell} G_2(y,\eta,\mu)Z(t,\xi,\lambda,\mu)d\mu \tag{160}$$

şeklinde olmaktadır. (160) ifadesinde toplam $G_2(y,\eta,\mu)$ Green fonksiyonunun tüm rezidüleri üzerinde gerçekleşmektedir. Burada $\tilde{c}_\kappa$, $G_2(y,\eta,\mu)$ Green fonksiyonunun yalnız bir kutup noktasını içerisine alan kapalı eğri olmaktadır ve $Z(t,x,\xi,\lambda,\mu)$ ise,

$$\frac{\partial Z(t,x,y,\lambda,\mu)}{\partial t} + (\lambda^2+\mu^2)Z(t,x,y,\lambda,\mu) = 0, \tag{161}$$

$$Z(0,x,y,\lambda,\mu) = \varphi(x,y) \tag{162}$$

Cauchy probleminin çözümü olmaktadır.

(161)-(162) probleminin çözümü,

$$Z(t,x,y,\lambda,\mu) = \varphi(x,y)e^{-(\lambda^2+\mu^2)t} \tag{163}$$

dir. Buna göre,

$u(x,y,t)=$

$$=\left(\frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}}\right)^2\sum_{\nu}\int_{c_\nu}\lambda d\lambda\int_0^{\ell}G_1(x,\xi,\lambda)d\xi\sum_{\kappa}\int_{\tilde{c}_\kappa}\mu d\mu\int_0^{\ell}G_2(y,\eta,\mu)Z(t,\xi,\eta,\lambda,\mu)d\eta \quad (164)$$

$$u(x,y,t)=\sum_{\nu}\int_0^{\ell}\left(\frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}}\right)\int_{c_\nu}\lambda e^{-\lambda^2 t}G_1(x,\xi,\lambda)d\lambda$$

$$\sum_{k}\int_0^{\ell}\left(\frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}}\right)\int_{\tilde{c}_k}\mu e^{-\mu^2 t}G_2(y,\eta,\mu)d\mu\,\varphi(\xi,\eta)d\eta d\xi \quad (165)$$

şeklinde elde ederiz.

Şimdi (165)-(166) problemini rezidü yöntemi ile hesaplayalım. (146) ve (151)'den

$$\lambda_\nu=2\pi\nu,(\nu=\pm1,\pm2,...)\text{ ve }\lambda_k=2\pi k,(k=\pm1,\pm2,...)$$

kutup noktaları $G_1(x,\xi,\lambda)$ ve $G_2(y,\eta,\mu)$ Green fonksiyonlarının ikinci mertebeden kutup noktalarıdır. Gerçekten de,

$$\Delta_1(\lambda_\nu)=\lambda_\nu(1-\cos\lambda_\nu)=0,\ \Delta_1'(\lambda_\nu)=1-\cos\lambda_\nu+\lambda_\nu\sin\lambda_\nu=0$$

ve $\Delta_1''(\lambda_\nu)=2\pi\nu$ olmaktadır.

$$\lambda e^{-\lambda^2 t}\frac{\Delta_1(x,\xi,\lambda)}{\Delta_1(\lambda)},\quad \lambda e^{-\lambda^2(t-\tau)}\frac{\Delta_1(x,\xi,\lambda)}{\Delta_1(\lambda)}$$

Fonksiyonlarının rezidülerini hesaplayarak $u=(x,y,t)$ için aşağıdaki gösterimi elde ederiz.

$$u(x,y,t)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}e^{-2\pi(\mu^2+k^2)t}\ \big[2(16\pi\nu kt)^2\cos(2\pi\nu x)\cos(2\pi ky)$$

$$-2(64\pi)\nu t(1-y)\cos(2\pi\nu x)\sin(2\pi ky)-2(64\pi)kt(1-x)\sin(2\pi\nu x)\cos(2\pi ky)$$

$$+32(1-x)(1-y)\sin(2\pi\nu x)\sin(2\pi ky)\ \int_0^{\ell}\int_0^{\ell}\sin(2\pi\nu\xi)\sin(2\pi k\eta)\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta$$

$$+\big[\ -4(64\pi\nu\eta t)\cos(2\pi\nu x)\cos(2\pi ky)+4(16\eta)(1-x)\sin(2\pi\nu x)\cos(2\pi ky)\big]$$

$$\int_0^{\ell}\int_0^{\ell}\sin(2\pi\nu\xi)\cos(2\pi k\eta)\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta$$

$$+2\ 16(1-y)\cos(2\pi\nu x)\sin(2\pi k\eta)-64\pi k+\cos(2\pi\nu x)$$

$$\int_0^{\ell}\int_0^{\ell}\xi\cos(2\pi\nu\xi)\sin(2\pi k\eta)\varphi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

$$\left.+32\cos(2\pi\nu x)\cos(2\pi ky)\int_0^{\ell}\int_0^{\ell}\xi\eta\cos(2\pi\nu\xi)\cos(2\pi k\eta)\varphi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\right\}$$

$$+16\int_0^{\ell}\int_0^{\ell}\xi\eta\varphi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta. \qquad (166)$$

SONUÇLAR

Tezde elde edilen sonuçları aşağıdaki gibi sıralamak mümkündür:

- Bir boyutlu ısı denklemi için lokal olmayan sınır koşullu probleminin gerçek çözümü elde edilmiştir.
- Spektral problemin Green fonksiyonu kurulmuş ve uygun ayrılış formülü ispatlanmıştır.
- İki boyutlu ısı denklemi için lokal olmayan sınır koşullu problemin hızlı yakınsak seri şeklinde gerçek çözümü elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

1. Choi, Y.S. and Chaw, K.Y. (1992) A parobolic equation with nonlocal boundary conditions arising from electro chemistry, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications 18 (4), pp. 317–331.

2. Cannon, J.R. (1963) The solution of the heat equation subject to the specification of energy. Quart.App l. Math. 21, pp. 155-160.

3. Cannon, J.R. and Denson, C. Hill (1970) On the Movement of a Chemical Reaction, Indiana University Mathematics, Journal, vol. 20, No. 5, pp. 429–454.

4. Ionkin, N.I. (1977) Solution of Boundary Value Problems in Heat Conduction Theory with Nonlocal Boundary Conditions, Differential, Uravn. 13:2, pp.294–304.

5. Rasulov, M.L. (1967) Methods of Contour Integration, North-Holland Publishing Company, Amsterdam.

ÖZGEÇMİŞ

11.06.1979 yılında Konya ili Ereğli ilçesinde doğdum. İlkokulu Kazım Karabekir okulunda, orta ve lise öğrenimimi Ereğli Lisesi'nde tamamladım. 1997 yılında Selçuk Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliğini kazandım. 2002 yılında İstanbul'da M.E.B' a bağlı bir kurumda matematik öğretmeni olarak göreve başladım. 2004 yılının Mart ayında vatani görevime Burdur 58. Piyade Eğitim Alay Komutanlığı'nda başladım ve Tunceli Anadolu Öğretmen Lisesi'nde matematik öğretmeni olarak tamamladım. 2006 yılında Beykent Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Bilgisayar Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik Bölümünde yüksek lisansa başladım. Halen matematik öğretmeni olarak görev yapmaktayım.