T.C.

BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANA BİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

TELİN TİTREŞİM DENKLEMİ İÇİN LOKAL OLMAYAN SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

(Yüksek Lisans Tezi)

Seyit Nur BAŞARAN

İSTANBUL, 2008

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANA BİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

TELİN TİTREŞİM DENKLEMİ İÇİN LOKAL OLMAYAN SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

(Yüksek Lisans Tezi)

Hazırlayan:
Seyit Nur BAŞARAN
050860009

Tez Danışmanı:
Prof. Dr. Mahir RESULOV

İSTANBUL, 2008

ÖNSÖZ

Bu tez konusunu bana öneren ve tezimin her aşmasında yardımlarını esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübelerini öğrencileriyle paylaşan değerli hocam Sayın Prof. Dr. Mahir RESULOV' a en içten saygılarımı sunar, sonsuz teşekkür ederim. Ayrıca bizlere her türlü desteği sunan Enstitü müdürümüz ve hocam Sayın Prof. Dr. Mehmet ERDOĞAN' a ve tezimin değişik aşamalarında bana sağlamış olduğu değerli katkılarından dolayı Sayın Yrd. Doç. Dr. Bahaddin SİNSOYSAL' a teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca ailem olarak daima yanımda olan ablam Nuran hanımefendi ve değerli eşi Şakir KARA'ya teşekkür ederim.

İSTANBUL, 2008 **Seyit Nur BAŞARAN**

YEMİN METNİ

Sunduğum Yüksek Lisans Tezimi, Akademik Etik İlkelerine bağlı kalarak, hiç kimseden akademik ilkelere aykırı bir yardım almaksızın bizzat kendim hazırladığıma and içerim. 15/02/2008

Aday: Seyit Nur BAŞARAN

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ
TEZLİ YÜKSEK LİSANS TEZ SINAV TUTANAĞI

.10./.06./.2008

Enstitümüz Matematik Bilgisayar Anabilim dalı Uygulamalı Matematik Bilim dalı yüksek lisans öğrencilerinden 050860009 numaralı ***Seyit Nur Başaran'a*** *"Beykent Üniversitesi Lisansüstü Eğitim - Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'*nin ilgili maddesine göre hazırlayarak, Enstitümüze teslim ettiği ***"TELİN TİTREŞİM DENKLEMİ İÇİN LOKAL OLMAYAN SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ"*** *tezini*, Yönetim Kurulumuzun 22.02.2008 tarih ve 2008/05 sayılı toplantısında seçilen ve Fakülte binasında toplanan biz jüri üyeleri huzurunda, ilgili yönetmeliğin *(c) bendi gereğince* (75) dakika süre ile aday tarafından savunulmuş ve sonuçta adayın tezi hakkında ***oybirliği*** ile ***Kabul*** kararı verilmiştir.

İşbu tutanak, 4 nüsha olarak hazırlanmış ve Enstitü Müdürlüğü'ne sunulmak üzere tarafımızdan düzenlenmiştir.

DANIŞMAN
PROF. DR. MAHİR RESULOV

ÜYE
PROF. DR. MEHMET ERDOĞAN

ÜYE
YRD. DOÇ. DR. BAHADDİN SİNSOYSAL

TELİN TİTREŞİM DENKLEMİ İÇİN LOKAL OLMAYAN SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

ÖZET

Tezde telin küçük titreşimlerini ifade eden lineer dalga denkleminin lokal olmayan sınır koşulları altında gerçek çözümü elde edilmiştir. Bu amaçla önce uygun spektral problemin çözümü elde edilmiş, problemin Green fonksiyonu bulunmuş ve uygun ayrılış formülü elde edilmiştir. Söz konusu ayrılış formülü kullanılarak esas problemin çözümü spektral problemin tam rezidüleri cinsinden sonsuz seri şeklinde elde edilmiştir.

THE EXACT SOLUTION OF THE NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE VIBRATION OF STRING EQUATION

ABSTRACT

In this thesis the exact solution of the problem for the linear wave equation with nonlocal boundary conditions is obtained. Firstly, the solution of the corresponding spectral problem is found. Secondly, the Green's functions of the investigated spectral problem and formula of expansion are studied. Finally, using the obtained expansion formula the exact solution of the mixed problem is found.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ...i

YEMİN METNİ...ii

JÜRİ SAYFASI..iii

ÖZET...iv

ABSTRACT...v

İÇİNDEKİLER..vi

1. GİRİŞ……………………..…………………………………............................... 1

2. TELİN TİTREŞİM DENKLEMİ İÇİN 1. SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN FOURIER METODU.. 2

2.1 İki Ucundan Bağlı Telin Titreşimlerinin İncelenmesi…………………..………........... 2

2.2 Telin Mecburi Titreşimlerinin İncelenmesi………………………………………........ 12

2.3 Örnekler…………………………………………………………………………......... 14

3. TELİN TİTREŞİM DENKLEMİ İÇİN LOKAL OLMAYAN SINIR KOŞULLU PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ…......…………………………………………….......... 16

3.1 Telin Titreşim Denklemi İçin Lokal Olmayan Sınır Koşullu Probleminin Gerçek Çözümü... 16

3.2 A. Cauchy Probleminin Çözümü…………………………………………………......... 17

3.3 B. Sınır Değer Probleminin Çözümü ve Ayrılış Formülü.. 19

3.4 Rezidülerin Hesaplanması………………………………………………………….......25

4. SONUÇLAR………………………………………………….................................. 31

5. KAYNAKLAR……………………………………………………..…………....... 32

ÖZGEÇMİŞ..…………..…………………………………..33

1. GİRİŞ

Bilindiği gibi lineer kısmi türevli diferansiyel denklemler için yazılmış başlangıç-sınır değer probleminin çözümünü elde etmek için uygulanan en genel yöntem Fourier serisi yöntemidir. Söz konusu yöntem diferansiyel problemi oluşturan diferansıyel operatörün self adjoint olduğu durumda uygulanabilir. Çünkü Fourier serisi yönteminin uygulanabilmesi için esas probleme karşılık gelen spektral problemin öz değerlerinin sade olması, öz fonksiyonlarının ise tam ve ortogonal sistem oluşturması gerekmektedir. Buna karşın mühendisliğin bir çok problemi self adjoint olmayan diferansiyel denklem veya denklem sistemi için uygun şekilde yazılmış başlangıç-sınır değer probleminin çözümüne indirgenebilir. Örneğin, telin titreşim denklemi için yazılmış

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),$$

$$u(x,0) = \varphi_1(x),$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi_2(x),$$

$$u(0,t) - u(\lambda,t) = 0\,, \quad \frac{\partial u(\lambda,t)}{\partial x} = 0$$

problemin öz değerleri $\lambda_v = 2\pi v \quad (v = 0,\mu 1,\mu 2,\mu 3,...)$ iki katlı kök olmaktadır ve bu öz değerlere karşılık gelen öz fonksiyonlar tam sistem oluşturmamaktadır. Bu durumda Fourier serisi yönteminin uygulanmasında bir çok zorluklar çıkarmaktadır. Çünkü başlangıç fonksiyonları $\varphi_i(x)$, $(i = 1,2)$ leri ve kaynak fonksiyonu olan $f(x,t)$ i söz konusu öz fonksiyonlar cinsinden seriye açmak mümkün olmamaktadır.

Bu nedenle, tezde yukarıda yazılmış problemin çözümü için rezidü yöntemi incelenmiştir. Bu amaçla göz önüne aldığımız problem, birincisi Cauchy problemi, ikincisi ise kompleks parametreye bağlı spektral problem olmak üzere iki yardımcı probleme parçalanır. Sonra ise söz konusu yardımcı problemler ayrı ayrı çözülür, uygun ayrılış formülü kullanılarak esas problemin çözümü için ifade edilir.

Tezde aşağıdaki ayrılış formülü verilmiş ve formülde bulunan rezidüler açık şekilde hesaplanmıştır.

Teorem 1. Eğer $h(x)$ ve $h'(x)$ fonksiyonları $[0,\lambda]$' de sürekli fonksiyonlar ise aşağıdaki ayrılış formülü

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_{v}\int_{c_v}\lambda^{s}d\lambda\int_{0}^{\lambda}y(x,\lambda;f)h(\xi)d\xi=\begin{cases}h(x), & \text{eger s}=1\\ 0, & \text{eger s}=0\end{cases}$$

geçerlidir. Burada c_v, $\Delta(\lambda)=0$ denkleminin yalnız tek bir kökünü içerisine alan kapalı eğridir ve U toplama endeksi tüm kökleri kapsamaktadır.

Tezin ikinci bölümünde gereken temel kavramlar, Fourier serileri ve Fourier serisi yönteminin bazı uygulamaları da incelenmiştir.

2. TELİN TİTREŞİM DENKLEMİ İÇİN 1. SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN FOURIER METODU

2.1. İki Ucundan Bağlı Telin Titreşimlerinin İncelenmesi

Literatürden bilindiği üzere, uçları bağlanmış telin titreşimi matematiksel olarak aşağıdaki 1.sınır-değer problemi

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}, \tag{1}$$

$$u(t,0)=0,\quad u(t,l)=0, \tag{2}$$

$$u(0,x)=\varphi_0(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=\varphi_1(x), \tag{3}$$

ile ifade edilmektedir.

Burada $u(t,x)$ telin t zamanında ve x noktasında ox- ekseninden saptığı mesafeyi göstermektedir. (1) denkleminde kaynak fonksiyonunun olmaması, telin bir defa harekete geçirilmiş sonra da tele dışarıdan uygulanan kuvvetin kaldırılmış olduğunu ifade etmektedir. Yani serbest titreşimler söz konusu olmaktadır. (1)-(3) problemine 1. sınır değer problemi denir. (1)-(3) probleminin çözümünü değişkenlerine ayırma yöntemiyle elde etmek (1) denkleminin çözümünü

$$u(t,x)=T(t)y(x) \tag{4}$$

şeklinde arayalım. (4) ifadesi (1) de yerine konulursa,

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{y''(x)}{y(x)}=\lambda \tag{5}$$

elde ederiz. (5) ve (2) sınır koşullarını da dikkate almakla $y(x)$ fonksiyonu için

$$y''-\lambda y=0, \tag{6}$$

$$y(0)=0\,,\quad y(\lambda)=0 \tag{7}$$

problemini $T(t)$ fonksiyonu ise,

$$T''(t)-\lambda a^2 T(t)=0 \tag{8}$$

denklemini elde ederiz. Görüldüğü gibi (7) problemi λ parametresini içeren için sınır-değer problemi olmaktadır. Isı iletimi denklemi için 1. sınır-değer probleminde olduğu gibi (6), (7) problemine Strium-Liuvill veya "spektral" problem denir. (6) a karşılık gelen karakteristik denklemi

$$k^2-\lambda=0 \tag{9}$$

yazalım. Buradan $k=\mu\sqrt{\lambda}$ ve λ yı kompleks gibi düşünerek (6) nın genel çözümünü şöyle

$$y(x)=c_1e^{\sqrt{\lambda}x}+c_2e^{-\sqrt{\lambda}x}. \tag{10}$$

yazabiliriz. (10) ifadesindeki c_1 ve c_2 sabitleri (7) sınır koşullarından

$$\begin{cases} c_1+c_2=0 \\ c_1e^{\sqrt{\lambda}\lambda}+c_2e^{-\sqrt{\lambda}\lambda}=0 \end{cases} \tag{11}$$

bulunur. (11) sistemi c_1 ve c_2 ye göre homojen cebirsel denklem sistemi olmaktadır. Bu sistemin çözümünün olması için gerek ve yeter şart,

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\lambda}\lambda} & \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}\lambda} \end{vmatrix}=0 \tag{12}$$

olmasıdır. Buradan,

$$\lambda_n^{\ 2}=-\left(\frac{\pi n}{\lambda}\right)^2 \qquad (n=0,\mu 1,\mu 2,\mu 3,...)$$

olarak elde ederiz. λ_n nın değerleri yerine konursa ve $c_1=-c_2$ olduğunu dikkate alırsak,

$$y_n(x)=c_1\left(e^{\sqrt{\lambda_n}x}-e^{-\sqrt{\lambda_n}x}\right)=c_1\left(e^{\frac{i\pi nx}{\lambda}}-e^{\frac{-i\pi nx}{\lambda}}\right)=2ic_1\sin\frac{\pi nx}{\lambda},\ \ (n=0,1,2,3,...) \tag{13}$$

buluruz. (13) öz fonksiyonlar sistemini normalleştirirsek,

$$y_n(x)=\sin\frac{\pi nx}{\lambda} \tag{14}$$

elde ederiz. $\lambda=\lambda_n$ in değerleri (8) de yerine yazarsak

$$T''(t)+\left(\frac{a\pi n}{\lambda}\right)^2+T(t)=0 \tag{15}$$

elde ederiz. Şimdi (15) karakteristik denklemi yazarsak,

$$K^2 + \left(\frac{a\pi n}{\lambda}\right)^2 = 0 \quad K_{1,2} = \mu\frac{ia\pi n}{\lambda},$$

olur. O zaman (8) in genel çözümü

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{a\pi n}{\lambda}t + B_n \sin\frac{a\pi n}{\lambda}t \tag{16}$$

(16) ve (14) ifadeleri (4) de yerine konulursa, $u_n(t,x)$ için aşağıdaki ifadeyi

$$u_n(t,x) = \left(A_n \cos\frac{a\pi n}{\lambda}t + B_n \sin\frac{a\pi n}{\lambda}t\right)\sin\frac{\pi n x}{\lambda},\ n = 1,2,3...,\tag{17}$$

elde edilir. Ayrıca (1) denklemi lineer olduğundan dolayı,

$$u_n(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{a\pi n}{\lambda}t + B_n \sin\frac{a\pi n}{\lambda}t\right)\sin\frac{\pi n x}{\lambda}\tag{18}$$

ifadesi (1) denkleminin formal çözümüdür. Formal çözümün, (1) denklemini sağladığını, söz konusu serinin x ve t ye göre iki kez difarensiyellemekle mümkün olduğunu ve $x \to 0$ ve $x \to \lambda$ olduğu durumda limite geçmenin mümkün olduğunu göstermek gerekmektedir. (18) çözümünü ve (3) koşullarında yerine yazarsak,

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi n x}{\lambda} = \varphi_0(x),\tag{19}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a\pi n}{\lambda} B_n \sin\frac{\pi n x}{\lambda} = \varphi_1(x)\tag{20}$$

olur. (19) ve (20) ifadelerindeki A_n ve B_n katsayılarını bulabiliriz. Bundan dolayı (19) ve (20) ifadelerini $\sin\frac{\pi n x}{\lambda}$ ile çarpıp bu ifadelerin $(0,\lambda)$ üzerine integralleyelim

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^{\lambda} \sin\frac{\pi n x}{\lambda}\sin\frac{\pi m x}{\lambda}dx = \int_0^{\lambda}\varphi_0(x)\sin\frac{\pi m x}{\lambda}dx \tag{21}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{a\pi n}{\lambda}\int_0^{\lambda} \sin\frac{\pi n x}{\lambda}\sin\frac{\pi m x}{\lambda}dx = \int_0^{\lambda}\varphi_1(x)\sin\frac{\pi m x}{\lambda}dx.$$

buluruz. Buradan

$$A_m\frac{\lambda}{2} = \int_0^{\lambda}\varphi_0(x)\sin\frac{\pi m x}{\lambda}dx,$$

ve

$$\frac{a\pi m}{\lambda}B_n\frac{\lambda}{2} = \int_0^{\lambda}\varphi_1(x)\sin\frac{\pi m x}{\lambda}dx,$$

$$\left.\begin{aligned} A_m &= \varphi_{0m} = \frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda} \varphi_0(x)\sin\frac{\pi m x}{\lambda}dx \\ B_m &= \varphi_{1m}\frac{\lambda}{a\pi m}, \\ \varphi_{1m} &= \frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda}\varphi_1(x).\sin\frac{\pi m x}{\lambda}dx \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

olarak elde ederiz. (22) ifadeleri (18) de yerine yazılırsa (1)- (3) probleminin çözümü için

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_{0n}\cos\frac{a\pi n}{\lambda}t + \frac{\lambda}{a\pi n}\sin\frac{a\pi n}{\lambda}t\right)\sin\frac{\pi n x}{\lambda} \tag{23}$$

olarak elde ederiz.

Çözümün doğrulanması. (23) formülü ile ifade edilen çözümü, değişkenlere ayırma yöntemi ile ele alırken, söz konusu çözümü formal olarak bulmuştuk. (23) serisinin gerçekten de (1)-(3) probleminin çözümü olduğunu ispatlamak için bu serinin t ye ve x e göre iki defa diferansiyellenebildiğini ve ele alınan serilerin yakınsak olduğunu ispatlamak yeterlidir. Ayrıca (2) ve (3) koşullarında da limite geçeceğiz. Bundan dolayı $\varphi_0(x)$ ve $\varphi_1(x)$ fonksiyonlarına göre belli koşullar belirlenecektir.

Teorem 2. Eğer $\varphi_0(x)$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında ikinci mertebeden sürekli üçüncü mertebeye kadar ise parçalı sürekli ve

$$\varphi(0) = \varphi_0(\lambda) = \varphi''(0) = \varphi''(\lambda) \tag{24}$$

ise ve $\varphi_1(x)$ fonksiyonu $[0,\lambda]$ aralığında birinci mertebeden sürekli, ikinci mertebeden parçalı sürekli ve

$$\varphi_1(0) = \varphi_1(\lambda) = 0 \tag{25}$$

koşullarını sağlarsa (23) serisi (1)-(3) probleminin t ye ve x e göre ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip olan çözümüdür.

İspat. (23) serisini x e göre formal olarak iki defa diferansiyelim,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi n}{\lambda}\left(\varphi_{0n}\cos\frac{a\pi n t}{\lambda} + \lambda\frac{\varphi_{1n}}{a\pi n}\sin\frac{a\pi n t}{\lambda}\right)\cos\frac{\pi n x}{\lambda}, \tag{26}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi n}{\lambda}\right)^2\left(\varphi_{0n}\cos\frac{a\pi n t}{\lambda} + \lambda\frac{\varphi_{1n}}{a\pi n}\sin\frac{a\pi n t}{\lambda}\right)\sin\frac{\pi n x}{\lambda}. \tag{27}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\varphi_{0n}\right| + \lambda\left|\frac{\varphi_{1n}}{a\pi n}\right|, \tag{28}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{\lambda}\left(\left|\varphi_{0n}\right| + \lambda\frac{\varphi_{1n}}{a\pi n}\right), \tag{29}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{\lambda}\right)^2\left(\left|\varphi_{0n}\right| + \lambda\frac{\varphi_{1n}}{a\pi n}\right) \tag{30}$$

(23), (26), (27) serilerinin “majorant” sayısal serileri oldukları açıktır. (23) serisinin iki defa diferansiyellenebilirliğini kanıtlamak için Weierstrass teoremini kullanalım. Bunun için, (23), (26), (27) serilerinin düzgün yakınsak olduklarını göstermek yeterli olacaktır. Söz konusu serilerin yakınsak olmaları (28), (29) ve (30) sayısal serilerinin yakınsak olmaları sonucu gibi görülebilir. (30) serisinin yakınsaklığını göstermek zordur. Bu serinin yakınsaklığından (29) ve (28) serilerinin yakınsaklığı görülür. Teoremin şartını kullanarak φ_{0n} katsayılarını şöyle yazalım,

$$\varphi_{0n} = \frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda} \varphi_0(x)\sin\frac{\pi nx}{\lambda}dx = \frac{-2}{\lambda}\frac{\lambda}{n\pi}\varphi_0(x)\cos\frac{\pi nx}{\lambda}\Big|_0^{\lambda} + \frac{2}{\lambda}\frac{\lambda}{n\pi}\int_0^{\lambda}\varphi'(x)\cos\frac{\pi nx}{\lambda}dx$$

$$= -\frac{2}{\lambda}\frac{\lambda}{n\pi}\int_0^{\lambda}\varphi_0(x)\cos\frac{\pi nx}{\lambda}dx$$

$$+\frac{2}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{n\pi}\right)^2\varphi_0'(x)\sin\frac{\pi nx}{\lambda}\Big|_0^{\lambda} - \frac{2}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{n\pi}\right)^2\int_0^{\lambda}\varphi_0''(x)\sin\frac{\pi nx}{\lambda}dx$$

$$= -\frac{2}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{n\pi}\right)^2\int_0^{\lambda}\varphi_0''(x)\sin\frac{\pi nx}{\lambda}dx$$

$$= \frac{2}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{n\pi}\right)^3\varphi_0''(x)\cos\frac{\pi nx}{\lambda}\Big|_0^{\lambda} - \frac{2}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{n\pi}\right)^3\int_0^{\lambda}\varphi_0''(x)\cos\frac{\pi nx}{\lambda}dx$$

$$= \frac{-2}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{n\pi}\right)^3\int_0^{\lambda}\varphi_0'''(x)\cos\frac{\pi nx}{\lambda}dx.$$

$$\alpha_n = \frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda}\varphi_0'''(x)\cos\frac{\pi nx}{\lambda}dx \tag{30}$$

denilirse o halde,

$$\varphi_{0n} = \left(\frac{\lambda}{n\pi}\right)^3\alpha_n$$

olur. Benzer yolla,

$$\varphi_{1n} = -\left(\frac{\lambda}{n\pi}\right)^3\beta_n \quad , \quad \beta_n = \frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda}\varphi_0''(x)\sin\frac{\pi nx}{\lambda}dx \tag{31}$$

elde ederiz. Görüldüğü gibi α_n ve β_n belli parçalı sürekli fonksiyonların uygun olarak $\cos\frac{\pi nx}{\lambda}$ ve $\sin\frac{\pi nx}{\lambda}$ ortogonal fonksiyonlar sistemine göre Fourier serileri olmaktadır. Buradan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2 \le \frac{\lambda}{2}\int_0^{\lambda}\left[\varphi_0''(x)\right]^2dx,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^2 \le \frac{\lambda}{2}\int_0^{\lambda}\left[\varphi_0''(x)\right]^2dx$$

ortaya çıkmaktadır. Analiz konularından bildiğimiz gibi Fourier katsayılarının karelerinden oluşturulmuş seriler yakınsaktır. Bu Bessel eşitsizliğinden görülmektedir. Eşitsizliklerde sağ taraftaki integraller teoremin şartına göre mevcut olduğundan ve ayrıca soldaki seriler pozitif olduğundan dolayı, bu eşitsizliklerden söz konusu serilerin yakınsak olduğu açıktır. α_n ve β_n ifadeleri (30) da yerine konursa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{\lambda}\right)\left[\left(\frac{\lambda}{n\pi}\right)^3|\alpha_n|+\frac{\lambda}{a\pi n}\left(\frac{\lambda}{n\pi}\right)^2|\beta_n|\right]$$
$$=\frac{\lambda}{n}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\alpha_n|}{n}+\frac{\lambda}{a\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\beta_n|}{n} \qquad (32)$$

elde ederiz. Bilinen eşitsizliğe göre

$$\frac{|\alpha_n|}{n}\le\frac{1}{2}\left(\alpha_n^2+\frac{1}{n^2}\right),$$
$$\frac{|\beta_n|}{n}\le\frac{1}{2}\left(\beta_n^2+\frac{1}{n^2}\right).$$

olur. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ serisi yakınsaktır ve $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^2$, $\sum_{n=1}^{\infty}\beta^2$ serilerinin yakınsak olduğunu az önce söylemiştik. O zaman, (32) serisi de yakınsaktır. Demek ki, (30) serisi de teoremin koşulları çerçevesinde yakınsaktır. Buradan (29) ve (28) serileri de yakınsak olur. (28), (29) ve (30) serilerinin yakınsaklığından Weierstrass teoremine göre (25), (26) ve (27) serileri de mutlak ve düzgün yakınsak olmaktadır. Bu serilerin her bir toplamı sürekli fonksiyon olduğundan Weierstrass'in diğer teoremine göre serilerin toplamı da süreklidir. Böylelikle (25) serisi ile ifade edilen fonksiyonun x değişkenine göre 2. mertebeden kimsi türevleri vardır. (25) denkleminde, seri işareti altında tüm toplamların t ye göre türevi alındığı zaman bir a çarpanı ortaya çıkar. Bu çarpanın ise teoremin ispatına hiç bir etkisi yoktur. Böylelikle $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ türevi de $[0,\lambda]x[0,T_0]$ gibi keyfi dörtgende sürekli olur. (25), (29) serileri mutlak ve düzgün yakınsak olduğundan dolayı (2) ve (3) koşulları ile bağımlı limitleri seri altında yazılabilir. Buradan

$$u\big|_{x=0}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_{0n}\cos\frac{a\pi n}{\lambda}t+\frac{\lambda}{a\pi n}\sin\frac{a\pi n}{\lambda}t\right)\sin 0=0,$$
$$u\big|_{x=\lambda}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_{0n}\cos\frac{a\pi n}{\lambda}t+\frac{\lambda}{a\pi n}\sin\frac{a\pi n}{\lambda}t\right)\sin\pi=0,$$
$$u\big|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{0n}\sin\frac{\pi nx}{\lambda}=\varphi_0(x),$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{1n}\sin\frac{\pi nx}{\lambda}=\varphi_1(x).$$

bulunur. Böylece teorem ispatlanmış olur. Sonuç olarak gördük ki

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

denkleminin,

$$u\big|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1(x),$$

başlangıç şartlarını ve

$$u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=\lambda} = 0,$$

sınır koşullarında sağlayan çözümünü

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi at}{\lambda} + b_k \sin\frac{k\pi at}{\lambda}\right)\sin\frac{k\pi x}{\lambda}$$

formülü ile verilmektedir. Burada,

$$a_k = \frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda}\varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\lambda}dx, \quad b_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^{\lambda}\varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\lambda}dx$$

dır.

Örnek 1. Başlangıç profili $\varphi(x) = \frac{4h}{\lambda^2}x(\lambda - x)$ olan tel $x=0$ ve $x = \lambda$ noktalarından bağlanmıştır. Başlangıç hızı 0 olduğu durumda telin *ox* ekseninden sapmasını bulunuz.

Çözüm. Burada

$$\varphi(x) = \frac{4h}{\lambda^2}x(\lambda - x), \; \psi(x) = 0$$

iken a_k ve b_k katsayılarını bulalım.

$$a_k = \frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda}\varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\lambda}dx = \frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda}\frac{4h}{\lambda^2}x(\lambda - x)\sin\frac{k\pi x}{\lambda}dx$$

$$= \frac{8h}{\lambda^3}\int_0^{\lambda}\left(x\lambda - x^2\right)\sin\frac{k\pi x}{\lambda}dx, \; b_k = 0$$

a_k katsayısını bulmak için kısmi integrasyon yöntemini kullanalım.

$$u_1 = x\lambda - x^2, \; \sin\frac{k\pi x}{\lambda}dx = dv_1,$$

$$du_1 = (\lambda - 2x)dx \quad v_1 = -\frac{\lambda}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{\lambda},$$

$$a_k = \frac{-8h}{\lambda^3}\left(x\lambda - x^2\right)\frac{\lambda}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{\lambda}\Big|_0^{\lambda} + \frac{8h}{k\pi\lambda^2}\int_0^{\lambda}(\lambda - 2x)\cos\frac{k\pi x}{\lambda}dx$$

$$=\frac{8h}{k\pi\lambda^2}\int_0^{\lambda}(\lambda-2x)\cos\frac{k\pi x}{\lambda}dx,$$

$$u_2=\lambda-2x, \qquad \cos\frac{k\pi x}{\lambda}dx=dv_2$$

$$du_2=-2dx, \qquad v_2=\frac{\lambda}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{\lambda}$$

$$\frac{8h}{k^2\pi^2\lambda}(\lambda-2x)\sin\frac{k\pi x}{\lambda}\Big|_0^{\lambda}+\frac{16h}{k^2\pi^2\lambda}\int_0^{\lambda}\sin\frac{k\pi x}{\lambda}dx=\frac{-16h}{k^3\pi^3}\cos\frac{k\pi x}{\lambda}\Big|_0^{\lambda}$$

$$=-\frac{16h}{k^3\pi^3}(\cos k\pi-1)=\frac{16h}{k^3\pi^3}\left[1-(-1)^k\right]$$

a_k ve b_k nın değerleri $u(t,x)$ de dikkate alınırsa

$$u(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{16h}{k^3\pi^3}\left[1-(-1)^k\right]\cos\frac{k\pi at}{\lambda}\sin\frac{k\pi x}{\lambda}dx$$

olup, burada

$$k=2n \qquad \text{için} \qquad \left[1-(-1)^k=0\right]$$

$$k=2n+1 \ \text{için} \qquad \left[1-(-1)^k=2\right]$$

olur. Bu durumda çözüm

$$u(t,x)=\frac{32h}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{\lambda}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{\lambda}$$

olmaktadır.

Örnek 2. $x=0$ $x=\lambda$ uçlarından bağlanmış telin başlangıç profilinin ox-ekseninden sapması sıfıra eşittir. Başlangıç hızı

$$\psi(x)=\begin{cases} v_0, & x\in\left[\frac{\lambda-h}{2},\frac{\lambda+h}{2}\right] \\ 0, & x\notin\left[\frac{\lambda-h}{2},\frac{\lambda+h}{2}\right]\end{cases}$$

olan telin $t \succ 0$ olduğu durumunu bulunuz.

Çözüm .

$$\varphi(x)=0, \ \psi(x)=\begin{cases} v_0, & x\in\left[\frac{\lambda-h}{2},\frac{\lambda+h}{2}\right] \\ 0, & \left[\frac{\lambda-h}{2},\frac{\lambda+h}{2}\right]\end{cases}$$

olduğundan

$$a_k = 0 \text{ ve } b_k = \frac{2}{k\pi a}\int_{\frac{\lambda-h}{2}}^{\frac{\lambda+h}{2}} v_0 \sin\frac{k\pi x}{\lambda}dx = \frac{-2v_0}{k\pi a}\frac{\lambda}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{\lambda}\Bigg|_{\frac{\lambda-h}{2}}^{\frac{\lambda+h}{2}}$$

$$b_k = \frac{2v_0\lambda}{\pi^2 k^2 a}\left[\cos\frac{k\pi(\lambda-h)}{2\lambda} - \cos\frac{k\pi(\lambda+h)}{2\lambda}\right]\frac{4v_0\lambda}{\pi^2 a}\sin\frac{k\pi}{\lambda}\sin\frac{k\pi h}{2\lambda}$$

dır. Böylelikle problemin çözümünü

$$u(t,x) = \frac{4v_0\lambda}{\pi^2 a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin\frac{k\pi}{\lambda}\sin\frac{k\pi h}{2\lambda}\cos\frac{k\pi a t}{\lambda}\sin\frac{k\pi x}{2\lambda}$$

olarak elde ederiz.

Örnek 3. Varsayalım ki, tel $x = 0$ ve $x = \lambda$ noktalarından bağlanmış ve başlangıç profili

$$\varphi(x) = A\sin\frac{\pi n x}{\lambda}$$

dır. Başlangıç hızı sıfır olan telin $t \phi 0$ olduğu durumu bulunuz. Burada A verilmiş bir sabittir.

Çözüm.

$$b_n = 0 \text{ ve}$$

$$a_n = A\frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda}\sin^2\frac{k\pi}{\lambda} = A$$

olduğundan

$$u(t,x) = A\sin\frac{\pi a n t}{\lambda}\sin\frac{\pi n x}{\lambda}$$

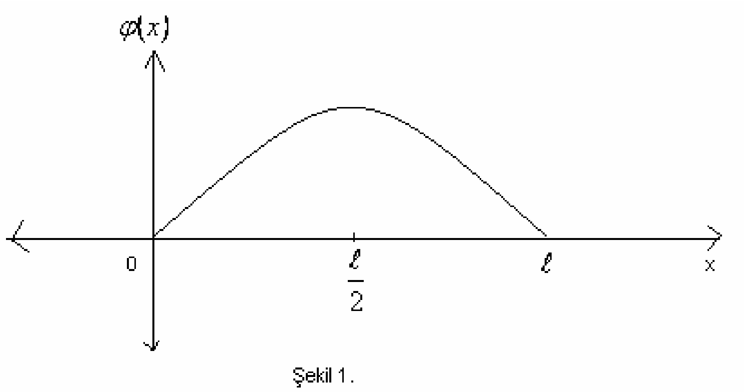
bulunur.

Örnek 4. Uç noktalarından bağlanmış telin başlangıç profili aşağıdaki şekilde verilmiş parabol olsun. Başlangıç hızının sıfır olduğunu dikkate alarak telin $t \phi 0$ olduğu durumunu bulunuz.

Çözüm. Önce parabolün denklemini bulalım. $\varphi(x)$ i

$$y = ax^2 + bx + c,$$

şeklinde arayalım. Burada a, b ve c şimdilik bilinmeyen sabitlerdir.



Şekil 1.

Şimdi bu sabitleri bulalım.

$x=0$, $y=0$ olduğunda $c=0$ bulunur.

$$x=\frac{\lambda}{2}\ ,\ y=0,$$

$$h=a\frac{\lambda^2}{4}+b\frac{\lambda}{2},$$

olur. $x=\lambda$, $y=0$ olduğunda $c=0$ bulunur.

$$0=a\lambda^2+b\lambda$$

olup

$$b\lambda=-a\lambda^2$$

olur. $b\lambda$ nin bu değeri yerine konulursa

$$a\frac{\lambda^2}{4}-a\frac{\lambda^2}{2}=h$$

$$-a\frac{\lambda^2}{4}=h\ ,\ a=\frac{-4h}{\lambda^2}$$

elde edilir. Buradan

$$-a\lambda^2=4h$$

$$b\lambda=4h$$

$$b=\frac{4h}{\lambda}$$

bulunur. Bulunan değerler yerine konulursa $\varphi(x)$ yani,

$$y=x^2\left(\frac{-4h}{\lambda^2}\right)+\frac{4h}{\lambda}x \text{ veya } y=\frac{4h}{\lambda^2}x(\lambda-x),$$

olarak elde edilir. Şimdi a_k ve b_k Fourier katsayılarını bulalım,

$$a_k=\frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda}\frac{4h}{\lambda}x(\lambda-x)\sin\frac{k\pi x}{\lambda}dx$$

$$=\frac{8}{\lambda^3}\int_0^{\lambda}x(\lambda-x)\sin\frac{k\pi x}{\lambda}dx$$

$$=\frac{8}{\lambda^3}\int_0^{\lambda}(\lambda x-x^2)\sin\frac{k\pi x}{\lambda}dx$$

$$=\frac{-16h}{k^3\pi^3}(\cos k\pi-1)\ =\frac{16h}{k^3\pi^3}\left[1-(-1)^k\right]$$

$b_k=0$, a_k ve b_k nin değerleri $u(t,x)$ de dikkate alınırsa

$$u(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{16}{k^3\pi^3}\left[1-(-1)^k\right]\cos\frac{k\pi at}{\lambda}\sin\frac{k\pi}{\lambda},$$

olarak elde ederiz.

$$k=2n \quad \text{olursa} \quad \left[1-(-1)^k\right]=0$$

$$k=2n+1 \text{ olursa} \quad \left[1-(-1)^k\right]=2$$

olur ve sonuç olarak

$$u(t,x)=\frac{32}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{\lambda}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{\lambda}$$

bulunur.

2.2. Telin Mecburi Titreşimlerinin İncelenmesi

Eğer, tele dış kuvvetler etki ediyorsa böyle titreşimleri aşağıdaki

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x) \tag{33}$$

denklemi ile ifade edebiliriz. Burada $f(t,x)$ dış kuvvetleri ifade eden kaynak fonksiyonudur.

$$u(t,0) = 0,\ u(t,\lambda) = 0 \tag{34}$$

$$u(0,x) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \tag{35}$$

inceleyelim. $f(t,x)$ fonksiyonunun spektral problemlerinin özfonksiyonlarına göre Fourier serisine açılabilir olmasını varsayalım. Yani

$$f(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\frac{\pi n x}{\lambda} \tag{36}$$

olsun. (33) denkleminin çözümü de $\sin\frac{\pi n x}{\lambda}$ özfonksiyonlarına göre

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin\frac{\pi n x}{\lambda} \tag{37}$$

Fourier serisi gibi arayalım. Burada $u_n(t)$ ler çözümün belli olmayan katsayılarıdır. Söz konusu katsayıları bulmak için (34) yi göz önüne alarak (36) ifadesini (33) te yerine yazalım

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n''(t) \sin\frac{\pi n x}{\lambda} = -a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{\lambda}\right)^2 u_n(t) \sin\frac{\pi n x}{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\frac{\pi n x}{\lambda},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[u_n''(t) + \left(\frac{a\pi n}{\lambda}\right)^2 u_n(t) - f_n(t) \right] \sin\frac{\pi n x}{\lambda} = 0, \tag{38}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) \sin\frac{\pi n x}{\lambda} = 0 \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(0) \sin\frac{\pi n x}{\lambda} = 0. \tag{39}$$

Fourier katsayılarının tekliğine göre $u_n(t)$ katsayıları aşağıdaki diferansiyel denklemin çözümü olmak zorundadırlar

$$u_n''(t) + \left(\frac{a\pi n t}{\lambda}\right)^2 u_n(t) = f_n(t), \tag{40}$$

$$u_n(0) = 0,\ u_n'(0) = 0. \tag{41}$$

(40) denklemi 2. mertebeden sabit katsayılı bir denklemdir.

Bu denklemin genel çözümü,

$$u_n(t) = A_n \cos\frac{a\pi nt}{\lambda} + B_n \cos\frac{a\pi nt}{\lambda} + \frac{\lambda}{a\pi nt}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{an\pi(t-\tau)}{\lambda}d\tau \tag{42}$$

olmaktadır. (42) 'nin içerdiği A_n ve B_n ler (35) koşulundan bulunur. Yani,

$$A_n = B_n = 0$$

dır. Böylelikle , (40) özel çözümü,

$$u_n(t,x) = \frac{\lambda}{a\pi nt}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{an\pi(t-\tau)}{\lambda}d\tau \tag{43}$$

olur. Bu ifadeyi (37)' te yerine yazarsak (33)-(35) denkleminin çözümü olarak

$$u_n(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda}{a\pi nt}\left[\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{an\pi(t-\tau)}{\lambda}d\tau\right]\sin\frac{\pi nx}{\lambda}, \tag{44}$$

buluruz. Burada

$$f_n(t) = \frac{2}{\lambda}\int_0^t f(t,x)\sin\frac{\pi nx}{\lambda}dx \tag{45}$$

dir. (44) formülünü doğrulamak için $f(t,x)$ 'in x 'e göre aşağıdaki koşulları sağladığını varsayalım,

$$f(t,0) = f(t,\lambda) = 0 \tag{46}$$

f'_x sürekli, $f''_{xx}(t,x)$ parçalı sürekli olsun. Şimdi (35) şartlarından daha da genel şartları

$$u\big|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left[\frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0} = \varphi_1(x)\right. \tag{47}$$

göz önüne alalım. Amacımız (33), (34), (47) probleminin çözümünü bulmaktır bu problemi iki yardımcı probleme

$$\text{I}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u\big|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0} = \varphi_1(x) \end{cases}$$

$$\text{II.}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x) \\ u\big|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

parçalayalım. I ve II problemlerinin çözümlerini dikkate alırsak,

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\varphi_{0n}\cos\frac{a\pi nt}{\lambda} + \frac{\varphi_{1n}\lambda}{an\pi}\sin\frac{a\pi nt}{\lambda} + \frac{\lambda}{a\pi nt}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{an\pi(t-\tau)}{\lambda}d\tau\right]\sin\frac{n\pi x}{\lambda} \tag{48}$$

buluruz.

ÖRNEKLER

Örnek 1. Farz edelim ki, teli $t = 0$ anında serbest ivme kuvveti etkilemektedir. Uç noktalarından bağlı telin $t \phi 0$ zamanındaki durumunu bulunuz.

Çözüm. Telin serbest ivme altındaki hareket denklemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - g$$

olup problemin koşulları

$$u(0,t) = 0, \quad u(\lambda,t) = 0,$$

$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$$

dır. Burada g= 9.8. olur. Çözümün ifadesi

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda}{a\pi n}\left[\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{an\pi(t-\tau)}{\lambda}d\tau\right]\sin\frac{n\pi x}{\lambda}$$

olmaktadır. Burada,

$$f_n(t) = \frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda} f(x,t)\sin\frac{n\pi x}{\lambda}dx = \frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda}(-g)\sin\frac{n\pi x}{\lambda}dx = -\frac{-2g}{\lambda}\int_0^{\lambda}\sin\frac{n\pi x}{\lambda}dx$$

$$= -\frac{-2g}{\lambda}.\frac{\lambda}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{\lambda}\Big|_0^{\lambda} = \frac{2g}{n\pi}[\cos n\pi - 1] = \frac{-2g}{n\pi}[1-\cos n\pi]$$

dır. Böylece,

$$f_n(t) = \frac{-2g}{n\pi}(1-\cos n\pi),$$

n =2k olursa $\quad f_{2k} = 0,$

n=2k+1 olursa $\quad f_{2k+1} = \dfrac{4g}{(2k+1)\pi}$

bulunur. Şimdi $u_n(t)$ ' leri bulalım,

$$u_{2k+1}(t) = \frac{\lambda}{a(2k+1)\pi}\int_0^t\left(\frac{-4g}{(2k+1)\pi}\right)\sin\frac{a(2k+1)\pi}{\lambda}(t-\tau)d\tau$$

$$= \frac{4g\lambda}{a(2k+1)^2\pi^2}\int_0^t \sin\frac{a(2k+1)\pi}{\lambda}(t-\tau)d\tau$$

$$= \frac{-4g\lambda}{a(2k+1)^2\pi^2}\frac{\lambda}{a(2k+1)}\cos\frac{a(2k+1)\pi}{\lambda}(t-\tau)\Big|_0^t$$

$$= \frac{-4g\lambda^2}{a^2(2k+1)^3\pi^3}\left[1-\cos\frac{a(2k+1)\pi}{\lambda}t\right]$$

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k+1}(t)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{\lambda}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-4g\lambda^2)}{a^2(2k+1)^3\pi^3}\left[1-\cos\frac{a(2k+1)\pi t}{\lambda}\right]\sin\frac{(2k+1)\pi x}{\lambda}$$

$$= \frac{-4g\lambda^2}{\pi^3 a^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\left[1-\cos\frac{a(2k+1)\pi t}{\lambda}\right]\sin\frac{(2k+1)\pi x}{\lambda}$$

bulunur.

Örnek 2. $x=0$, $x=\lambda$ noktalarından bağlı, başlangıç profili ve hızı sıfır olan tele $g(x,t)=A\rho\sin\omega t$ kuralına göre kuvvet etki etmektedir. Telin $t \succ 0$ zamanındaki durumunu bulunuz. Burada

$$f(x,t)=\frac{g(x,t)}{\rho}=A\sin\omega t$$

olarak alınız.

Çözüm . Verilen koşullara göre problem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(t,x),$$

$$u(t,0)=0\ ,\ u(t,\lambda)=0,$$

$$u(0,x)=0\ ,\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0$$

halini alır. Aranılan çözüm

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin\frac{\pi nx}{\lambda}$$

formundadır. Burada,

$$u_n(t)=\frac{\lambda}{a\pi nt}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{an\pi(t-\tau)}{\lambda}d\tau\ ,$$

$$f_n(t)=\frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda}f(t,x)\sin\frac{n\pi x}{\lambda}dx,$$

olmaktadır. Önce $f_n(t)$ ' yi hesaplayalım

$$f_n(t)=\frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda}A\sin\omega t\sin\frac{n\pi x}{\lambda}dx$$

$$=\frac{2}{\lambda}A\sin\omega t\int_0^{\lambda}\sin\frac{n\pi x}{\lambda}dx$$

$$=\frac{2}{\lambda}A\sin\omega t\frac{-\lambda}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{\lambda}\Big|_o^{\lambda}$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\sin\omega t[\cos\pi n-1].$$

$n=2k$ olursa $f_{2k}(t)=0$,

$n=2k+1$ olursa $f_{2k+1}=\dfrac{4A}{(2k+1)}\sin\omega t$

bulunur. O halde

$$u_{2k+1}(t)=\frac{2}{a(2k+1)\pi}\int_0^t\frac{-4A}{(2k+1)\pi}\sin\omega\tau\sin\frac{a(2k+1)\pi(t-\tau)}{\lambda}d\tau$$

$$=\frac{-4A}{(2k+1)^2\pi^2}\int_0^t\sin\omega\tau\sin\frac{a(2k+1)\pi(t-\tau)}{\lambda}d\tau$$

olur. Buradaki

$$\int_0^t \sin w\tau \sin\frac{a(2k+1)\pi}{\lambda}(t-\tau)d\tau = \int_0^t \sin\omega t \sin b_{2k+1}(t-\tau)d\tau$$

$$= \int_0^t \sin\omega t\left[\sin b_{2k+1}\tau\cos b_{2k+1}\tau - \sin b_{2k+1}\tau\sin b_{2k+1}\right]d\tau$$

$$= \sin b_{2k+1}\int_0^t\left[\sin\omega\tau\cos b_{2k+1}\tau + \sin b_{2k+1}\tau\sin 2b_{k+1}\tau\sin\omega\tau\right]d\tau$$

$$= \sin b_{2k+1}\int_0^t\left[\sin\omega\tau - \cos b_{2k+1}\tau\right]d\tau$$

$$= \frac{b_{2k+1}\sin\omega\tau - \omega\sin b_{2k+1}t}{b_{2k+1}{}^2 - \omega^2}$$

elde ederiz. Buradan

$$u_{2k+1}(t) = \frac{4\pi\lambda}{a(2k+1)^2\pi^2}\frac{b_{2k+1}\sin\omega\tau - \omega\sin b_{2k+1}t}{b_{2k+1}{}^2 - \omega^2}$$

bulunur. $u_{2k+1}(t)$ nin bu değeri aradığımız çözüm formülünde yerine konulursa

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4A\lambda}{a(2k+1)^2\pi^2}\frac{b_{2k+1}\sin\omega\tau - \omega\sin b_{2k+1}t}{b_{2k+1}{}^2 - \omega^2}\sin\frac{n\pi x}{\lambda}$$

elde edilir.

3. TELİN TİTREŞİM DENKLEMİ İÇİN LOKAL OLMAYAN SINIR KOŞULLU PROBLEMİN ÇÖZÜMÜ

3.1. Telin Titreşim Denklemi İçin Lokal Olmayan Sınır Koşullu Problemin Gerçek Çözümü

Aşağıdaki problemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \tag{49}$$

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \tag{50}$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi_2(x), \tag{51}$$

$$u(0,t) - u(\lambda,t) = 0, \quad \frac{\partial u(\lambda,t)}{\partial x} = 0 \tag{52}$$

göz önüne alalım. Burada $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ ve $f(x,t)$ bilinen fonksiyonlar olmaktadır. Rezidü yönteminin genel yapısına göre (49)-(52) problemine 2 yardımcı problem karşılık getirelim:

A. Cauchy problemi

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \lambda^2 z = f(x,t), \tag{53}$$

$$z(0) = \varphi_1(x), \tag{54}$$

$$\frac{dz(0)}{dt} = \varphi_2(x). \tag{55}$$

B. Sınır – değer problemi

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + \lambda^2 y = h(x) \tag{56}$$

$$y(0) - y(\lambda) = 0, \quad y'(\lambda) = 0. \tag{57}$$

Şimdi A ve B problemlerini ayrı ayrı çözelim.

3.2. A. Cauchy Probleminin Çözümü

Önce

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \lambda^2 z = f(x,t)$$

denklemine karşılık gelen homojen denklemi çözelim. Karakteristik denklemin kökleri

$$z'' + \lambda^2 z = 0 \Rightarrow k^2 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm\lambda i$$

olduğundan temel çözümler $z_1 = \cos\lambda t$ ve $z_2 = \sin\lambda t$ olmaktadır. (53) e karşılık gelen homojen denklemin genel çözümü

$$z(t) = c_1 \cos\lambda t + c_2 \sin\lambda t \tag{58}$$

olmaktadır. (58) ifadesini kullanarak (53) denkleminin genel çözümünü bulalım. Bunun için c_1 ve c_2 yi t ye bağlı fonksiyon olarak düşünelim, yani

$$z(t) = c_1(t)\cos\lambda t + c_2(t)\sin\lambda t$$

olsun. Buradan türev alınırsa

$$z'(t) = c_1' \cos\lambda t - \lambda c_1 \sin\lambda t + c_2' \sin\lambda t + \lambda c_2 \cos\lambda t$$

bulunur. c_1 ve c_2 yi öyle seçelim ki

$$c_1' \cos\lambda t + c_2' \sin\lambda t = 0 \tag{59}$$

olsun. Bu takdirde

$$z'(t) = -\lambda c_1 \sin\lambda t + \lambda c_2 \cos\lambda t \tag{60}$$

olur ve

$$z''(t) = -\lambda c_1' \sin\lambda t - \lambda^2 c_1 \cos\lambda t + \lambda c_2' \cos\lambda t - \lambda^2 c_2 \sin\lambda t \tag{61}$$

dır. (58) ve (61) ifadeleri (53) denkleminde yerine konulursa

$$-\lambda c_1' \sin\lambda t - \lambda^2 c_1 \cos\lambda t + \lambda c_2' \cos\lambda t - \lambda^2 c_2 \sin\lambda t \lambda^2 (c_1 \cos\lambda t + c_2 \sin\lambda t) = f(x,t)$$

veya

$$-\lambda c_1' \sin\lambda t + \lambda c_2' \cos\lambda t = f(x,t)$$

olur. c_1 ve c_2 bilinmeyenlerini elde etmek için

$$\begin{cases} c_1' \cos\lambda t + c_2' \sin\lambda t = 0 \\ c_1'(-\lambda \sin\lambda t) + c_2'(\lambda\cos\lambda t) = f(x,t) \end{cases}$$

cebirsel denklem sistemini elde ederiz. Söz konusu sistemin çözümünü Cramer metodu ile arayalım. Bilinmeyenlerin katsayısından oluşan determinant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos\lambda t & \sin\lambda t \\ -\lambda\sin\lambda t & \lambda\cos\lambda t \end{vmatrix} = \lambda\cos^2\lambda t + \lambda\sin^2\lambda t = \lambda \neq 0, \tag{62}$$

olduğundan

$$c_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin\lambda t \\ f(x,t) & \lambda\cos\lambda t \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-f(x,t)\sin\lambda t}{\lambda} = -\frac{1}{\lambda} f(x,t)\sin\lambda t, \tag{63}$$

ve

$$c_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} \cos\lambda t & o \\ -\lambda\sin\lambda t & f(x,t) \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-f(x,t)\cos\lambda t}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} f(x,t)\cos\lambda t \tag{64}$$

elde ederiz. (63) ve (64) ifadelerini *0* dan *t* ye kadar integralleyelim

$$c_1(t) = -\frac{1}{\lambda}\int_0^t \sin\lambda\tau f(x,\tau)d\tau + c_1,$$

$$c_2(t) = \frac{1}{\lambda}\int_0^t \cos\lambda\tau f(x,\tau)d\tau + c_2,$$

ve ele alınan ifadeleri

$$z(t) = c_1(t)\cos\lambda t + c_2(t)\sin\lambda t$$

ifadesinde yerine yazalım.

$$z(t) = \left(-\frac{1}{\lambda}\int_o^t \sin\lambda\tau f(x,\tau)d\tau + c_1\right)\cos\lambda t + \left(\frac{1}{\lambda}\int_0^t \cos\lambda\tau f(x,\tau)d\tau + c_2\right)\sin\lambda t$$

$$= c_1\cos\lambda t + c_2\sin\lambda t + \frac{1}{\lambda}\int_0^t [\sin\lambda t\cos\lambda\tau - \cos\lambda t\sin\lambda\tau] f(x,\tau)d\tau$$

buluruz.

$$\sin\lambda t\cos\lambda\tau - \cos\lambda t\sin\lambda\tau = \sin\lambda(t-\tau)$$

olduğundan A probleminin genel çözümünü

$$z(t) = c_1\cos\lambda t + c_2\sin\lambda t + \frac{1}{\lambda}\int_0^t \sin\lambda(t-\tau) f(x,\tau)d\tau \tag{65}$$

şeklinde elde ederiz. Genel çözümündeki c_1 ve c_2 sabitlerini bulabilmek için (54) ve (55) koşullarını kullanalım. (54) den

$$z(0) \equiv \varphi_1(x) = c_1$$

c_2 sabitini bulabilmek için (65) ifadesinin türevi

$$z'(t) = -\lambda c_1\sin\lambda t + c_2\lambda\cos\lambda t + \frac{1}{\lambda}\int_0^t \overbrace{\frac{d}{dt}[\sin\lambda(t-\tau)]}^{\lambda\cos\lambda(t-\tau)} f(x,\tau)d\tau$$

ile (55) ifadesini göz önüne alırsak

$$z'(0) \equiv \varphi_2(x) = c_2\lambda \Rightarrow c_2 = \frac{1}{\lambda}\varphi_2(x)$$

olur. Böylece A probleminin çözümünü

$$z(x,t) = \varphi_1(x)\cos\lambda t + \frac{1}{\lambda}\varphi_2(x)\sin\lambda t + \frac{1}{\lambda}\int_0^t \sin\lambda(t-\tau)f(x,\tau)d\tau \qquad (66)$$

şeklinde buluruz.

3.3. B. Sınır Değer Problemin Çözümü ve Ayrılış Formülü

Şimdi B probleminin çözümünü bulalim. Bunun için (56) 'ya karşılık gelen homojen denklemi çözelim.

$$y'' + \lambda^2 y = 0$$

denkleminin temel çözümleri

$$y_1 = \cos\lambda x \text{ ve } y_2 = \sin\lambda x$$

olduğundan, homojen denklemin genel çözümü

$$y(x) = c_1\cos\lambda x + c_2\sin\lambda x \qquad (67)$$

şeklindedir. (67) ifadesini kullanarak (56) denkleminin genel çözümünü

$$y(x) = c_1(x)\cos\lambda x + c_2(x)\sin\lambda x\,,$$

şeklinde arayalım. Buradan

$$y'(x) = c_1'\cos\lambda x - \lambda c_1\sin\lambda x + c_2'\sin\lambda x + \lambda c_2\cos\lambda x$$

dir. c_1 ve c_2'yi öyle seçelim ki,

$$c_1'\cos\lambda x + c_2'\sin\lambda x = 0 \qquad (68)$$

olsun. Bu takdirde,

$$y'(x) = -\lambda c_1\sin\lambda x + \lambda c_2\cos\lambda x \qquad (69)$$

olur ve

$$y''(x) = -\lambda c_1'\sin\lambda x - \lambda^2 c_1\cos\lambda x + \lambda c_2'\cos\lambda x - \lambda^2 c_2\sin\lambda x \qquad (70)$$

bulunur. (66) ve (70) ifadeleri (56) da yerine konulursa

$$-\lambda c_1'\sin\lambda x - \lambda^2 c_1\cos\lambda x + \lambda c_2'\cos\lambda x - \lambda^2 c_2\sin\lambda x + \lambda^2(c_1\cos\lambda x + c_2\sin\lambda x) = h(x)$$

veya

$$-\lambda c_1'\sin\lambda x + \lambda c_2'\cos\lambda x = h(x)$$

ifadesini alırız. Böylelikle c_1 ve c_2 fonksiyonlarını elde etmek için aşağıdaki cebirsel denklem sistemini bulmuş oluruz.

$$\begin{cases} c_1'\cos\lambda x + c_2'\sin\lambda x = 0 \\ c_1'(-\lambda\sin\lambda x) + c_2'(\lambda\cos\lambda x) = h(x) \end{cases}$$

söz konusu denklem sistemini Cramer yöntemi ile çözelim

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos\lambda x & \sin\lambda x \\ -\lambda\sin & \lambda x\lambda\cos\lambda x \end{vmatrix} = \lambda\cos^2\lambda x + \lambda\sin^2\lambda x = \lambda \neq 0\,, \tag{71}$$

olduğundan

$$c_1' = \frac{1}{\lambda}\begin{vmatrix} 0\sin & \lambda x \\ h(x)\lambda & \cos\lambda x \end{vmatrix} = -\frac{1}{\lambda}h(x)\sin\lambda x\,, \tag{72}$$

ve

$$c_2' = \frac{1}{\lambda}\begin{vmatrix} \cos\lambda x & o \\ -\lambda\sin\lambda x & h(x) \end{vmatrix} = -\frac{1}{\lambda}h(x)\cos\lambda x\,, \tag{73}$$

olarak elde edilir. (72) ve (73) ifadelerini *0* dan *x* e kadar integrallersek

$$c_1(x) = -\frac{1}{\lambda}\int_0^x h(\xi)\sin\lambda\xi d\xi + c_1(0)$$

ve

$$c_2(x) = \frac{1}{\lambda}\int_{\lambda_x}^x h(\xi)\cos\lambda\xi d\xi + c_2(0)$$

bulunur. Ele aldığımız ifadeleri y' nin ifadesinde yerine yazarsak

$$y = c_1(0)\cos\lambda x - \frac{1}{\lambda}\int_0^x h(\xi)\cos\lambda x\sin\lambda\xi d\xi + c_2(0)\sin\lambda x + \frac{1}{\lambda}\int_0^x h(\xi)\sin\lambda x\cos\lambda\xi d\xi \tag{74}$$

veya

$$y = c_1(0)\cos\lambda x + c_2(0)\sin\lambda x + \frac{1}{\lambda}\int_0^x [\sin\lambda x\cos\lambda\xi - \cos\lambda x\sin\lambda\xi]h(\xi)d\xi \tag{75}$$

denklemini alırız. Şimdi (72) ve (73) ifadelerini λ den *x* e kadar integralleyelim

$$c_1(x) = -\frac{1}{\lambda}\int_\lambda^x \sin\lambda\xi h(\xi)d\xi + c_1(\lambda)\,,$$

$$c_2(x) = -\frac{1}{\lambda}\int_\lambda^x \cos\lambda\xi h(\xi)d\xi + c_2(\lambda)\,.$$

Sonuncu ifadeleri $y(x,\lambda)$ nın ifadesinde yerine yazarsak

$$y = c_1(\lambda)\cos\lambda x - \frac{1}{\lambda}\int_\lambda^x \cos\lambda x\sin\lambda\xi h(\xi)d\xi + c_2(\lambda)\sin\lambda x + \frac{1}{\lambda}\int_\lambda^x \sin\lambda x\cos\lambda\xi h(\xi)d\xi \tag{76}$$

veya

$$y = c_1(\lambda)\cos\lambda x + c_2(\lambda)\sin\lambda x + \frac{1}{\lambda}\int_\lambda^x [\sin\lambda x\cos\lambda\xi - \cos\lambda x\sin\lambda\xi]h(\xi)d\xi \tag{77}$$

elde ederiz. (74) ve (76) ifadeleri toplanıp 2 ye bölünürse

$$y = \frac{1}{2}\Big\{[c_1(0) + c_1(\lambda)]\cos\lambda x + [c_2(0) + c_2(\lambda)]\sin\lambda x$$
$$+ \frac{1}{\lambda}\int_0^x \sin\lambda(x-\xi)h(\xi)d\xi + \frac{1}{\lambda}\int_\lambda^x \sin\lambda(x-\xi)h(\xi)d\xi\Big\}$$

veya

$$y = c_1\cos\lambda x + c_2\sin\lambda x + \frac{1}{2\lambda}\int_0^x \sin\lambda(x-\xi)h(\xi)d\xi - \frac{1}{2\lambda}\int_x^\lambda \sin\lambda(x-\xi)h(\xi)d\xi\,. \tag{78}$$

olur. Aşağıdaki notasyonu dahil edersek,

$$g(x,\xi,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\lambda}\sin\lambda(x-\xi), & 0\le\xi\le x\le\lambda\\ -\dfrac{1}{2\lambda}\sin\lambda(x-\xi), & 0\le x\le\xi\le\lambda\end{cases} \tag{79}$$

bu notasyonda (78) i

$$y(x)=c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x+\int_0^{\lambda} g(x,\xi,\lambda)h(\xi)d\xi \tag{80}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada

$$c_i=c_i(0)+c_i(\lambda) \qquad (i=1,2),$$

dir. Bu ifadedeki c_1 ve c_2 sabitlerini bulmak için (57) sınır koşullarını kullanırsak

$$y(0)-y(\lambda)=c_1+\int_0^{\lambda} g(0,\xi,\lambda)h(\xi)d\xi-c_1\cos\lambda\lambda-c_2\sin\lambda\lambda-\int_0^{\lambda} g(\lambda,\xi,\lambda)h(\xi)d\xi,$$

veya

$$c_1(1-\cos\lambda\lambda)-c_2\sin\lambda\lambda=\int_0^{\lambda} g(\lambda,\xi,\lambda)h(\xi)d\xi-\int_0^{\lambda} g(0,\xi,\lambda)h(\xi)d\xi \tag{81}$$

alırız. (57) nin ikinci koşulundan

$$y'(\lambda)=0$$

ve

$$y'(x)=-\lambda c_1\sin\lambda x+\lambda c_2\cos\lambda x+\int_0^{\lambda} g_x(x,\xi,\lambda)h(\xi)d\xi$$

olduğunu dikkate alırsak

$$c_1(-\lambda\sin\lambda\lambda)+c_2(\lambda\cos\lambda\lambda)=-\int_0^{\lambda} g_x(\lambda,\xi,\lambda)h(\xi)d\xi \tag{82}$$

elde ederiz. (81) ve (82) den bilinmeyen c_1 ve c_2 sabitleri

$$\begin{cases} c_1(1-\cos\lambda\lambda)-c_2\sin\lambda\lambda=\displaystyle\int_0^{\lambda} g(\lambda,\xi,\lambda)h(\xi)d\xi-\int_0^{\lambda} g(0,\xi,\lambda)d\xi\\ c_1(1-\sin\lambda\lambda)-c_2(\cos\lambda\lambda)=\displaystyle\int_0^{\lambda} g(\lambda,\xi,\lambda)h(\xi)d\xi\end{cases}$$

denklem sistemi yardıyla bulunabilirler. Cramer metoduna göre

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\cos\lambda\lambda & -\sin\lambda\lambda\\ -\lambda\sin\lambda\lambda & \lambda\cos\lambda\lambda\end{vmatrix}=\lambda\cos\lambda\lambda-\lambda\cos^2\lambda\lambda-\lambda\sin^2\lambda\lambda=\lambda\cos\lambda\lambda-\lambda$$

ve $\Delta(\lambda)=0$ denkleminin kökleri haricinde

$$c_1=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{vmatrix}\displaystyle\int_0^{\lambda}\big(g(\lambda,\xi,\lambda)-g(\lambda,\xi,\lambda)\big)h(\xi)d\xi & -\sin\lambda\lambda\\ \displaystyle\int_0^{\lambda} g_x(\lambda,\xi,\lambda)h(\xi) & \lambda\cos\lambda\lambda\end{vmatrix}$$

$$c_2 = \frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{vmatrix} 1-\cos\lambda\lambda & \int_0^{\lambda}\left(g(\lambda,\xi,\lambda)-g(\lambda,\xi,\lambda)\right)h(\xi)d\xi \\ -\lambda\sin\lambda\lambda & \int_0^{\lambda} g_x(\lambda,\xi,\lambda)h(\xi) \end{vmatrix}$$

bulunur. Ele aldığımız bu ifadeleri (80) de yerine yazarsak B probleminin çözümü

$$y(x,\lambda) = \int_0^{\lambda} G(x,\xi,\lambda)h(\xi)d\xi \tag{83}$$

şeklinde elde ederiz. $G(x,\xi,\lambda)$ fonksiyonu B probleminin Green fonksiyonudur ve

$$G(x,\xi,\lambda) = \frac{\Delta(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$$

dır. Burada,

$$G(x,\xi,\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{vmatrix} g(x,\xi,\lambda) & \cos\lambda x & \sin\lambda x \\ \lambda_1(g(x,\xi,\lambda)) & \lambda_1(\cos\lambda x) & \lambda_1(\sin\lambda x) \\ \lambda_2(g(x,\xi,\lambda)) & \lambda_2(\cos\lambda x) & \lambda_2(\sin\lambda x) \end{vmatrix},$$

$$\lambda_1(g(x,\xi,\lambda)) \equiv g(0,\xi,\lambda) - g(\lambda,\xi,\lambda) = \frac{1}{2\lambda}\sin\lambda\xi - \frac{1}{2\lambda}\sin\lambda(\lambda-\xi),$$

$$\lambda_2(g(x,\xi,\lambda)) \equiv \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{2}\cos\lambda(\lambda-\xi),$$

$$\lambda_1(\cos\lambda x) = \cos 0 - \cos\lambda\lambda = 1-\cos\lambda\lambda,$$

$$\lambda_1(\sin\lambda x) = \sin 0 - \sin\lambda\lambda = 1-\sin\lambda\lambda,$$

$$\lambda_2(\cos\lambda x) = \frac{d}{dx}(\cos\lambda x)\Big|_{x=\lambda} = -\lambda\sin\lambda x\Big|_{x=\lambda} = -\lambda\sin\lambda\lambda,$$

$$\lambda_2(\sin\lambda x) = \frac{d}{dx}(\sin\lambda x)\Big|_{x=\lambda} = -\lambda\cos\lambda x\Big|_{x=\lambda} = -\lambda\cos\lambda\lambda$$

olduğunu dikkate alırsak $\Delta(x,\xi,\lambda)$ 'yı aşağıdaki gibi hesaplarız.

$$\Delta(x,\xi,\lambda) = \begin{vmatrix} g(x,\xi,\lambda) & \cos\lambda x & \sin\lambda x \\ \frac{1}{2\lambda}\sin\lambda\xi - \frac{1}{2\lambda}\sin\lambda(\lambda-\xi) & 1-\cos\lambda\lambda & -\sin\lambda\lambda \\ \frac{1}{2}\cos\lambda(\lambda,\xi) & -\lambda\sin\lambda\lambda & \lambda\cos\lambda\lambda \end{vmatrix}$$

$$= g(x,\xi,\lambda)\begin{vmatrix} 1-\cos\lambda\lambda & -\sin\lambda\lambda \\ -\lambda\sin\lambda\lambda & \lambda\cos\lambda\lambda \end{vmatrix} - \cos\lambda x\begin{vmatrix} \frac{1}{2\lambda}\sin\lambda\xi & -\frac{1}{2\lambda}\sin\lambda(\lambda-\xi)-\sin\lambda\lambda \\ \frac{1}{2}\cos\lambda(\lambda-\xi) & \lambda\cos\lambda\lambda \end{vmatrix}$$

$$+\sin\lambda x\begin{vmatrix} \frac{1}{2\lambda}\sin\lambda\xi-\frac{1}{2\lambda}\sin\lambda(\lambda-\xi) & 1-\cos\lambda\lambda \\ \frac{1}{2}\cos\lambda(\lambda-\xi) & -\lambda\sin\lambda\lambda \end{vmatrix}$$

$$= g(x,\xi,\lambda)\left[\lambda\cos\lambda\lambda-\lambda\cos^2\lambda\lambda-\lambda\sin^2\lambda\lambda\right]$$

$$-\cos\lambda x\left[\frac{1}{2}\cos\lambda\lambda\sin\lambda\xi-\frac{1}{2}\cos\lambda\lambda\sin\lambda(\lambda-\xi)+\frac{1}{2}\sin\lambda\lambda\cos\lambda(\lambda-\xi)\right]$$

$$+\sin\lambda x\left[-\frac{1}{2}\sin\lambda\lambda\sin\lambda\xi+\frac{1}{2}\sin\lambda\lambda\sin\lambda(\lambda-\xi)-\frac{1}{2}\cos\lambda(\lambda-\xi)+\frac{1}{2}\cos\lambda\lambda\cos\lambda(\lambda-\xi)\right]$$

$$\Delta(x,\xi,\lambda)=g(x,\xi,\lambda)\left[\lambda\cos\lambda\lambda-\lambda\right]$$

$$-\frac{1}{2}\cos\lambda x\cos\lambda\lambda\sin\lambda\xi+\frac{1}{2}\cos\lambda x\cos\lambda\lambda\sin\lambda(\lambda-\xi)-\frac{1}{2}\cos\lambda x\sin\lambda\lambda\cos\lambda(\lambda-\xi)$$

$$-\frac{1}{2}\sin\lambda x\sin\lambda\lambda\sin\lambda\xi+\frac{1}{2}\sin\lambda x\sin\lambda\lambda\sin\lambda(\lambda-\xi)-\frac{1}{2}\sin\lambda x\cos\lambda(\lambda-\xi)$$

$$+\frac{1}{2}\sin\lambda x\cos\lambda\lambda\cos\lambda(\lambda-\xi).$$

Buradan

$$\Delta(x,\xi,\lambda_v)=g(x,\xi,\lambda_v)[\lambda_v\cos\lambda_v\lambda-\lambda_v)$$

$$-\frac{1}{2}\cos\lambda_v x\cos\lambda_v\lambda\sin\lambda_v\xi+\frac{1}{2}\cos\lambda_v x\cos\lambda_v\lambda\sin\lambda_v(\lambda-\xi)-\frac{1}{2}\cos\lambda_v x\sin\lambda_v\lambda\cos\lambda_v(\lambda-\xi)$$

$$-\frac{1}{2}\sin\lambda_v x\sin\lambda_v\lambda\sin\lambda_v\xi+\frac{1}{2}\sin\lambda_v x\sin\lambda_v\lambda\sin\lambda_v(\lambda-\xi)-\frac{1}{2}\sin\lambda_v x\cos\lambda_v(\lambda-\xi)$$

$$+\frac{1}{2}\sin\lambda_v x\cos\lambda_v\lambda\cos\lambda_v(\lambda-\xi)$$

$$=-\frac{1}{2}\cos\lambda_v x\sin\lambda_v\xi+\frac{1}{2}\cos\lambda_v x(-\sin\lambda_v\xi)-\frac{1}{2}\sin\lambda_v x\cos\lambda_v\xi+\frac{1}{2}\sin\lambda_v x\cos\lambda_v\xi.$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\Delta(x,\xi,\lambda_v)=-\cos\lambda_v x\sin\lambda_v\xi$$

elde ederiz.

Şimdi sonraki işlemlerimiz için gereken $\Delta'(x,\xi,\lambda_v)$ yi hesaplayalım

$$\sin\lambda_v(\lambda-\xi)=\sin(\lambda_v\lambda-\lambda_v\xi)=\sin\lambda_v\lambda\cos\lambda_v\xi-\cos\lambda_v\lambda\sin\lambda_v\xi=-\sin\lambda_v\xi$$

$$\cos\lambda_v(\lambda-\xi)=\cos(\lambda_v\lambda-\lambda_v\xi)=\cos\lambda_v\lambda\cos\lambda_v\xi-\sin\lambda_v\lambda\sin\lambda_v\xi=-\cos\lambda_v\xi$$

olduğunu dikkate alarak $\Delta'(x,\xi,\lambda_v)$’ yı

$$\Delta'(x,\xi,\lambda) = g'(x,\xi,\lambda)[\lambda\cos\lambda\lambda - \lambda] + g(x,\xi,\lambda)[\cos\lambda\lambda - \lambda\lambda\sin\lambda\lambda - 1]$$

$$+\frac{x}{2}\sin\lambda x\cos\lambda\lambda\sin\lambda\xi + \frac{1}{2}\cos\lambda x\sin\lambda_v\lambda\sin\lambda\xi - \frac{\xi}{2}\cos\lambda x\cos\lambda\lambda\cos\lambda\xi$$

$$-\frac{x}{2}\sin\lambda x\cos\lambda\lambda\sin\lambda(\lambda-\xi) - \frac{\lambda}{2}\cos\lambda x\sin\lambda_v\lambda\sin\lambda(\lambda-\xi) + \frac{\lambda-\xi}{2}\cos\lambda x\cos\lambda\lambda\cos\lambda(\lambda-\xi)$$

$$+\frac{x}{2}\sin\lambda x\sin\lambda\lambda\cos\lambda(\lambda-\xi) - \frac{\lambda}{2}\cos\lambda x\cos\lambda\cos\lambda(\lambda-\xi) + \frac{\lambda-\xi}{2}\cos\lambda x\sin\lambda_v\lambda\sin\lambda(\lambda-\xi)$$

$$-\frac{x}{2}\cos\lambda x\sin\lambda\lambda\sin\lambda\xi - \frac{\lambda}{2}\sin\lambda x\cos\lambda_v\lambda\sin\lambda\xi - \frac{\xi}{2}\sin\lambda x\sin\lambda\lambda\cos\lambda\xi$$

$$+\frac{x}{2}\cos\lambda x\sin\lambda_v\lambda\sin\lambda(\lambda-\xi) + \frac{\lambda}{2}\sin\lambda x\cos\lambda\sin\lambda(\lambda-\xi) + \frac{\lambda-\xi}{2}\sin\lambda x\sin\lambda_v\lambda\cos\lambda(\lambda-\xi)$$

$$-\frac{x}{2}\cos\lambda x\cos\lambda(\lambda-\xi) + \frac{\lambda-\xi}{2}\sin\lambda x\sin\lambda(\lambda-\lambda) + \frac{x}{2}\cos\lambda x\cos\lambda\lambda\cos\lambda(\lambda-\xi)$$

$$-\frac{\lambda}{2}\sin\lambda\lambda\sin\lambda\cos\lambda(\lambda-\xi) - \frac{\lambda-\xi}{2}\sin\lambda x\cos\lambda\ \lambda\sin\lambda(\lambda-\xi)$$

olarak buluruz. Burada $\lambda=\lambda_v$ koyarsak

$$\Delta'(x,\xi,\lambda_v) = -\frac{\xi}{2}\cos\lambda_v x\cos\lambda_v\xi - \frac{x}{2}\sin\lambda_v x(-\sin\lambda_v\xi) + \frac{\lambda-\xi}{2}\cos\lambda_v x\cos\lambda_v\xi$$

$$-\frac{\lambda}{2}\cos\lambda_v x\cos\lambda_v\xi - \frac{\lambda}{2}\sin\lambda_v x\sin\lambda_v\xi + \frac{\lambda}{2}\sin\lambda_v x(-\sin\lambda_v\xi) - \frac{x}{2}\cos\lambda_v x\cos\lambda_v\xi$$

$$\frac{\lambda-\xi}{2}\sin\lambda_v x(-\sin\lambda_v\xi) + \frac{x}{2}\cos\lambda_v x\cos\lambda_v\xi - \frac{\lambda-\xi}{2}\sin\lambda_v x(-\sin\lambda_v\xi)$$

$$= -\frac{\xi}{2}\cos\lambda_v x\cos\lambda_v\xi + \frac{x}{2}\sin\lambda_v x\sin\lambda_v\xi + \frac{\lambda}{2}\cos\lambda_v x\cos\lambda_v\xi - \frac{\xi}{2}\cos\lambda_v x\cos\lambda_v\xi$$

$$-\frac{\lambda}{2}\cos\lambda_v x\cos\lambda_v\xi - \frac{\lambda}{2}\sin\lambda_v x\sin\lambda_v\xi - \frac{\lambda}{2}\sin\lambda_v x\sin\lambda_v\xi$$

$$= -\xi\cos\lambda_v x\cos\lambda_v\xi + x\sin\lambda_v x\sin\lambda_v\xi - \lambda\sin\lambda_v x\sin\lambda_v\xi$$

olur. Nihayet

$$\Delta'(x,\xi,\lambda_v) = (x-\lambda)\sin\lambda_v x\sin\lambda_v\xi - \xi\cos\lambda_v x\cos\lambda_v\xi$$

elde ederiz.

Teorem 3. Eğer $h(x)$ ve $h'(x)$ $[0,1]$ de sürekli fonksiyonlar ise aşağıdaki ayrılış formülü

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_v\int_{c_v}\lambda d\lambda\int_0^{\lambda}G(x,\xi,\lambda)h(\xi)d\xi = \sum_v\int_0^{\lambda}G(x,\xi,\lambda)h(\xi)d\xi = \begin{cases} h(x), & \text{egers}=1 \\ 0, & \text{egers}=0 \end{cases}$$

gerçek olmaktadır. Burada $G(x,\xi,\lambda)$ B probleminin Green fonksiyonun c_v ise $\Delta(\lambda)$ nin tek bir kökünü içerisine alan kapalı eğri olmaktadır.

3.4. Rezidülerin Hesaplanması

Teoreme göre (49)-(52) probleminin çözümü

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_{v}\int_{c_v}\lambda y[x,\lambda,z(t,\lambda,x)]d\lambda$$

şeklindedir ve v integral altı fonksiyonunun tüm kutup noktaları üzere değişmektedir. $y(x,\lambda,h)$ ifadesini dikkate alırsak $u(x,t)$ aşağıdaki

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_{v}\int_{c_v}\lambda d\lambda\int_0^{\lambda}G(x,\xi,\lambda)z(t,\xi,\lambda)d\xi \tag{84}$$

şekilde yazabiliriz.(84) ifadesinde $z(t,\xi,\lambda)$ yerine

$$z(t,\xi,\lambda)=\varphi_1(x)\cos\lambda t+\frac{1}{\lambda}\varphi_2(x)\sin\lambda+\int_0^t\sin\lambda(\lambda-\tau)f(x,\tau)d\tau$$

ifadesini yazarsak ve ayrıca $G(x,\xi,\lambda)$ nin $\dfrac{\Delta(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$ olduğunu da dikkate alırsak çözüm aşağıdaki şekilde

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_{v}\int_{c_v}\lambda d\lambda\int_0^{\lambda}\frac{\Delta(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\Big[\varphi_1(\xi)\cos\lambda t$$

$$+\frac{\varphi_2(\xi)}{\lambda}\sin\lambda t+\frac{1}{\lambda}\int_0^t\sin\lambda(t-\tau)f(\xi,\tau)d\tau\Big]d\xi \tag{85}$$

veya

$$u(x,t)=-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_{v}\int_{c_v}\lambda d\lambda\int_0^{\lambda}\frac{\Delta(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\varphi_1(\xi)\frac{\cos\lambda t}{\lambda}d\xi$$

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_{v}\int_{c_v}\lambda d\lambda\int_0^{\lambda}\frac{\Delta(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\varphi_2(\xi)\frac{\sin\lambda t}{\lambda}d\xi$$

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_{v}\int_{c_v}\lambda d\lambda\int_0^{\lambda}\frac{\Delta(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\frac{1}{\lambda}\int_0^t\sin\lambda(t-\tau)f(\xi,\tau)d\tau d\xi$$

$$=u_1(x,t)+u_2(x,t)+u_3(x,t) \tag{86}$$

yazılabilir. (86) ifadesindeki integralleri hesaplayalım

$$u_1(x,t)=-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_{v}\int_{c_v}\lambda d\lambda\int_0^{\lambda}\frac{\Delta(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\cos\lambda t\varphi_1(\xi)d\xi$$

$$=-\sum_{v}\int_0^{\lambda}\left[\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_0^{\lambda}\frac{\Delta(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\cos d\lambda\right]\varphi_1(\xi)d\xi$$

$$I_1=\frac{1}{2\pi}\int_{c_v}\frac{\lambda\Delta(x,\xi,\lambda)}{\Delta(x)}\cos\lambda t d\lambda$$

şimdi rezidüsünü hesaplayalım. Görüldüğü gibi $\lambda_v = 2\pi v$ ($v = 1,2,3,...$) $\Delta(\lambda)$' nın 2 katlı kökleri olmaktadır. Lakin $\lambda_0 = 0$ ise 3 katlı kök oluşturur. Aşağıdaki formülü kullanalım

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_0} \frac{g(\lambda)}{h(\lambda)} = \operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_v} \frac{2g'(\lambda_v)}{h''(\lambda v)} - \frac{2g(\lambda_v)h'''(\lambda_v)}{3[h''(\lambda_v)]^2}$$

$$g(\lambda) = \lambda\cos\lambda t\Delta(x,\xi,\lambda) \Rightarrow g(0) = 0$$

$$g'(\lambda) = \cos\lambda t\Delta(x,\xi,\lambda) - \lambda t\sin\lambda t\Delta(x,\xi,\lambda) + \lambda\cos\lambda t\Delta'(x,\xi,\lambda) \Rightarrow g'(0) = 0$$

$$g''(\lambda) = -2t\sin\lambda t\Delta(x,\xi,\lambda) + 2\cos\lambda t\Delta'(x,\xi,\lambda) - \lambda t^2\cos\lambda t\Delta(x,\xi,\lambda)$$

$$-\lambda t\sin\lambda t\Delta''(x,\xi,\lambda) - \lambda t\sin\lambda t\Delta'(x,\xi,\lambda) + \lambda\cos\lambda t\Delta''(x,\xi,\lambda) \Rightarrow g''(0) = -2\xi,$$

$$h(\lambda) = \Delta(\lambda) = \lambda\cos\lambda\lambda - \lambda \Rightarrow h(0) = 0,$$

$$h'(\lambda) = \Delta'(\lambda) = \cos\lambda\lambda - 1 - \lambda\sin\lambda\lambda \Rightarrow h'(0) = 0,$$

$$h''(\lambda) = \Delta''(\lambda) = -2\lambda\sin\lambda\lambda - \lambda\lambda^2\cos\lambda\lambda \Rightarrow h''(0) = 0,$$

$$h'''(\lambda) = \Delta'''(\lambda) = -3\lambda^2\cos\lambda\lambda + \lambda\lambda^3\sin\lambda\lambda \Rightarrow h'''(0) = -3\lambda^2,$$

$$g(\lambda) = \lambda\cos\lambda t\Delta(x,\xi,\lambda),$$

$$g(\lambda_v) = \lambda_v\cos\lambda_v t(-\cos\lambda_v x\sin\lambda_v\xi) = \lambda_v\cos\lambda_v t\cos\lambda_v x\sin\lambda_v\xi,$$

$$g'(\lambda) = \cos\lambda t\Delta(x,\xi,\lambda) - \lambda t\sin\lambda t\Delta(x,\xi,\lambda) + \lambda\cos\lambda t\Delta'(x,\xi,\lambda),$$

$$g'(\lambda_v) = \cos\lambda_v t(-\cos\lambda_v x\sin\lambda_v\xi) - \lambda_v\sin\lambda_v t(-\cos\lambda_v x\sin\lambda_v\xi),$$

$$+\lambda_v\cos\lambda_v t(-\cos\lambda_v x\sin\lambda_v\xi + x\sin\lambda_v x\sin\lambda_v\xi - \lambda\sin\lambda_v x\sin\lambda_v\xi),$$

$$g'(\lambda_v) = \cos\lambda_v t\cos\lambda_v x\sin\lambda_v\xi + \lambda_v\sin\lambda_v t\cos\lambda_v x\sin\lambda_v\xi,$$

$$\xi\lambda_v\cos\lambda_v t\cos\lambda_v x\cos\lambda_v\xi + x\lambda_v\cos\lambda_v t\sin\lambda_v x\sin\lambda_v\xi,$$

$$-\lambda\lambda_v\cos\lambda_v t\sin\lambda_v x\sin\lambda_v\xi,$$

$$h(\lambda) = \Delta(\lambda) = \lambda\cos\lambda\lambda - \lambda \Rightarrow h(\lambda_v) = 0$$

$$h'(\lambda) = \cos\lambda\lambda - \lambda\sin\lambda\lambda - 1 \Rightarrow h'(\lambda_v) = 0$$

$$h''(\lambda) = -2\lambda\sin\lambda\lambda - \lambda\lambda^2\cos\lambda\lambda \Rightarrow h''(\lambda_v) = -\lambda_v\lambda^2$$

$$h'''(\lambda) = -3\lambda^2 \cos\lambda\lambda + \lambda\lambda^3 \sin\lambda\lambda \Rightarrow h'''(\lambda_v) = -3\lambda^2$$

$$\frac{2g'(\lambda_v)}{h''(\lambda_v)} = \frac{-2\cos\lambda_v t\cos\lambda_v x\sin\lambda_v\xi}{\lambda_v\lambda^2} + \frac{-2\lambda_v \sin\lambda_v t\cos\lambda_v x\sin\lambda_v\xi}{-\lambda_v\lambda^2}$$

$$\frac{-2\lambda x\cos\lambda_v t\sin\lambda_v x\sin\lambda_v\xi}{-\lambda_v\lambda^2} - \frac{-2\lambda_v\lambda\cos\lambda_v t\sin\lambda_v x\sin\lambda_v\xi}{-\lambda_v\lambda^2}$$

$$\frac{2g(\lambda_v)h'''(\lambda_v)}{3[h''(\lambda_v)]^2} = \frac{-2\cos\lambda_v t\cos\lambda_v x\sin\lambda_v\xi(-3\lambda^2)}{3(\lambda_v\lambda^2)^2} = \frac{-2\lambda_v \sin\lambda_v t\cos\lambda_v x\sin\lambda_v\xi}{\lambda_v\lambda^2}$$

ifadeleri dikkate alınırsa

$$I_1 = \frac{2}{\lambda^2}[-\sin\lambda_v t\cos\lambda_v x\sin\lambda_v\xi + \lambda\cos\lambda_v t\cos\lambda_v x\cos\lambda_v\xi$$
$$-x\cos\lambda_v t\sin\lambda_v x\sin\lambda_v\xi + \lambda\cos\lambda_v t\sin\lambda_v x\sin\lambda_v\xi]$$

olarak buluruz. Aynı yolla $u_2(x,t)$yi hesaplayalım

$$u_2(x,t) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{c_v}\sin\lambda t\frac{\Delta(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\int_0^\lambda \varphi_2(\xi)\frac{\sin\lambda t}{\lambda}d\xi \qquad (87)$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{c_v}\sin\lambda t\frac{\Delta(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}d\lambda$$

olsun ve I_2' yi hesaplayalım. Önce $\lambda_0 = 0$' a karşılık gelen rezidüleri hesaplayalım

$$g(\lambda) = \sin\lambda t\Delta(x,\xi,\lambda) \Rightarrow g(0) = 0,$$

$$g'(\lambda) = t\cos\lambda t\Delta(x,\xi,\lambda) + \sin\lambda t\Delta'(x,\xi,\lambda) \Rightarrow g'(0) = 0,$$

$$g''(\lambda) = -t^2\sin\lambda t\Delta(x,\xi,\lambda) + 2t\cos\lambda t\Delta'(x,\xi,\lambda) + \sin\lambda t\Delta''(x,\xi,\lambda) \Rightarrow g''(0) = -2t\xi,$$

$$h(\lambda) = \Delta(\lambda) = \lambda\cos\lambda\lambda - \lambda,$$

$$h(0) = 0 \Rightarrow h'(0) = 0 \Rightarrow h''(0) = 0 \Rightarrow h'''(0) = -3\lambda^2,$$

olduğunu dikkate alırsak

$$\operatorname*{Res}_{\lambda_0=0}\frac{\sin\lambda t\Delta(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)} = 3\frac{g''(\lambda_0)}{h'''(\lambda_0)} = 3\frac{-2t\xi}{-3\lambda^2} = \frac{2t\xi}{\lambda^2}.$$

Şimdi $\lambda_v = 2\pi v$, $(v \neq 0)$ öz değerlerine karşılık gelen rezidüleri hesaplayalım

$$g(\lambda) = \sin\lambda t\Delta(x,\xi,\lambda),$$

$$g'(\lambda) = \sin\lambda_v t(-\cos\lambda_v x\sin\lambda_v\xi) = \sin\lambda_v \cos\lambda_v x\sin\lambda_v\xi,$$

$$g'(\lambda) = t\cos\lambda t\Delta(x,\xi,\lambda) + \sin\lambda t\Delta'(x,\xi,\lambda),$$

$$g'(\lambda_v) = t\cos\lambda_v t(-\cos\lambda_v x\sin\lambda_v\xi)$$

$$+\sin\lambda_v\left(-\xi\cos\lambda_v x\cos\lambda_v\xi + x\sin\lambda_v x\sin\lambda_v\xi - \lambda\sin\lambda_v x\sin\lambda_v\xi\right),$$

$$g'(\lambda_v) = -t\cos\lambda_v \cos\lambda_v x\sin\lambda_v\xi - \xi\sin\lambda_v t\cos\lambda_v ,$$

$$+x\sin\lambda_v t\sin\lambda_v x\sin\lambda_v\xi - \lambda\sin\lambda_v t\sin\lambda_v x\sin\lambda_v\xi ,$$

$$h(\lambda) = \Delta(\lambda) = \lambda\cos\lambda\lambda - \lambda \Rightarrow h''(\lambda_v) = -\lambda_v\lambda^2 ,$$

$$\Rightarrow h''(\lambda_v) = -3\lambda^2 ,$$

olduğundan

$$I_2 = \frac{-2t\cos\lambda_v t\cos\lambda_v x\sin\lambda_v\xi}{-\lambda\lambda^2} - \frac{-2\xi\sin\lambda_v t\cos\lambda_v x\cos\lambda_v\xi}{-\lambda\lambda^2}$$

$$\frac{-2x\sin\lambda_v t\sin\lambda_v x\sin\lambda_v\xi}{-\lambda\lambda^2} - \frac{-2\lambda\sin\lambda_v t\sin\lambda_v x\sin\lambda_v\xi}{-\lambda\lambda^2} - \frac{2t\sin\lambda_v t\cos\lambda_v x\sin\lambda_v\xi\left(-3\lambda^2\right)}{3\left(-\lambda\lambda^2\right)^2}$$

$$= \frac{2}{\lambda\lambda^2}\left[t\cos\lambda_v t\cos\lambda_v x\sin\lambda_v\xi + \xi\sin\lambda_v t\cos\lambda_v x\cos\lambda_v\xi - x\sin\lambda_v t\sin\lambda_v x\sin\lambda_v\xi\right.$$

$$\left. - x\sin\lambda_v t\sin\lambda_v x\sin\lambda_v\xi - \frac{1}{\lambda}\sin\lambda_v t\cos\lambda_v x\sin\lambda_v x\right]$$

olur. Şimdi $u_3(x,t)$ yi hesaplayalım.

$$u_3(x,t) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_v\int_{c_v}\lambda d\lambda\int_0^{\lambda}\frac{\Delta(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\frac{1}{\lambda}\int_0^t\sin\lambda(t-\tau)f(\xi-\tau)d\tau d\xi \tag{88}$$

$$= -\sum_v\int_0^{\lambda}\left\{\int_o^{\lambda}\left[\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{c_v}\sin\lambda(t-\tau)\frac{\Delta(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}d\lambda\right]f(\xi,\tau)\right\}d\xi$$

dır. I_3 ile aşağıdaki ifadeyi

$$I_3 = -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{c_v}\sin(t-\tau)\frac{\Delta(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}d\lambda$$

gösterelim. I_3' ü hesaplayalım. $\lambda_0 = 0$ olan durumu irdeleyelim,

$$g(\lambda) = \sin\lambda(t-\tau)\Delta(x,\xi,\lambda) \Rightarrow g(0) = 0,$$

$$g'(\lambda) = (t-\tau)\cos\lambda t\Delta(x,\xi,\lambda) + \sin\lambda(t-\tau)\Delta'(x,\xi,\lambda) \Rightarrow g'(0) = 0,$$

$$g''(\lambda) = -(t-\tau)^2\sin\lambda(t-\tau)\Delta(x,\xi,\lambda) + 2(t-\tau)\cos\lambda(t-\tau)\Delta'(x,\xi,\lambda)$$

$$+\sin\lambda(t-\tau)\Delta''(x,\xi,\lambda) \Rightarrow g''(0) = -2\xi(t-\tau),$$

$$h(\lambda) = \Delta(\lambda) = \lambda\cos\lambda\lambda - \lambda ,$$

$$h(0) = 0 \Rightarrow h'(0) = 0 \Rightarrow h''(0) = 0 \Rightarrow h'''(0) = -3\lambda^2 ,$$

$$\operatorname*{Res}_{\lambda_0}\frac{\sin\lambda(t-\tau)\Delta(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)} = 3\frac{g''(\lambda_0)}{h'''(\lambda_0)} = 3\frac{-2(t-\tau)\xi}{-3\lambda^2} = \frac{2\xi(t-\tau)}{\lambda^2}$$

olarak elde ederiz. Şimdi $\lambda_v = 2\pi v$ olan durumu inceleyelim

$$g(\lambda)=\sin\lambda(t-\tau)\Delta(x,\xi,\lambda),$$

$$g'(\lambda)=\sin\lambda_\nu(t-\tau)(-\cos\lambda_\nu x\sin\lambda_\nu\xi)=-\sin\lambda_\nu(t-\tau)\cos\lambda_\nu x\sin\lambda_\nu\xi,$$

$$g'(\lambda)=(t-\tau)\cos\lambda t\Delta(x,\xi,\lambda)+\sin\lambda(t-\tau)\Delta'(x,\xi,\lambda),$$

$$g'(\lambda_\nu)=(t-\tau)\cos\lambda_\nu(t-\tau)(-\cos\lambda_\nu x\sin\lambda_\nu\xi)$$

$$+\sin\lambda_\nu(t-\tau)(-\xi\cos\lambda_\nu x\cos\lambda_\nu\xi+x\sin\lambda_\nu x\sin\lambda_\nu\xi-\lambda\sin\lambda_\nu x\sin\lambda_\nu\xi)$$

veya

$$g'(\lambda_\nu)=-(t-\tau)\cos\lambda_\nu\cos\lambda_\nu x\sin\lambda_\nu\xi-\xi\sin\lambda_\nu(t-\tau)\cos\lambda_\nu\cos\lambda_\nu\xi$$

$$+x\sin\lambda_\nu(t-\tau)\sin\lambda_\nu x\sin\lambda_\nu\xi-\lambda\sin\lambda_\nu(t-\tau)\sin\lambda_\nu x\sin\lambda_\nu\xi,$$

$$h(\lambda)=\Delta(\lambda)=\lambda\cos\lambda\lambda-\lambda\Rightarrow h''(\lambda_\nu)=-\lambda_\nu\lambda^2,$$

$$\Rightarrow h''(\lambda_\nu)=-3\lambda^2$$

olduğundan

$$I_3=\frac{-2(t-\tau)\cos\lambda_\nu(t-\tau)\cos\lambda_\nu x\sin\lambda_\nu\xi}{-\lambda\lambda^2}-\frac{-2\xi\sin\lambda_\nu(t-\tau)\cos\lambda_\nu x\cos\lambda_\nu\xi}{-\lambda\lambda^2}$$

$$\frac{-2x\sin\lambda_\nu(t-\tau)\sin\lambda_\nu x\sin\lambda_\nu\xi}{-\lambda\lambda^2}-\frac{-2\lambda\sin\lambda_\nu(t-\tau)\sin\lambda_\nu x\sin\lambda_\nu\xi}{-\lambda\lambda^2}$$

$$-\frac{-2t\sin\lambda_\nu(t-\tau)\cos\lambda_\nu x\sin\lambda_\nu\xi(-3\lambda^2)}{3(-\lambda\lambda^2)^2}$$

$$=\frac{2}{\lambda\lambda^2}[(t-\tau)\cos\lambda_\nu(t-\tau)\cos\lambda_\nu x\sin\lambda_\nu\xi$$

$$+\xi\sin\lambda_\nu(t-\tau)\cos\lambda_\nu x\cos\lambda_\nu\xi-\sin\lambda_\nu(t-\tau)\sin\lambda_\nu x\sin\lambda_\nu\xi$$

$$\left.-x\sin\lambda_\nu(t-\tau)\sin\lambda_\nu x\sin\lambda_\nu\xi-\frac{1}{\lambda}\sin\lambda_\nu(t-\tau)\cos\lambda_\nu x\sin\lambda_\nu x\right]$$

olur. Ele aldığımız ifadeleri yerine yazarsak sırasıyla $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$, $u_3(x,t)$ fonksiyonları için aşağıdaki ifadeleri elde ederiz.

$$u_1(x,t)=-\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\int_0^{\lambda}[-\sin\lambda_\nu t\sin\lambda_\nu\xi\cos\lambda_\nu x+\xi\cos\lambda_\nu t\cos\lambda_\nu x\cos\lambda_\nu\xi$$

$$x\cos\lambda_\nu t\sin\lambda_\nu x\sin\lambda_\nu\xi+\lambda\cos\lambda_\nu t\sin\lambda_\nu\xi]\}\varphi_1(\xi)d\xi+\frac{2}{\lambda^2}\int_0^{\lambda}\xi\varphi_1(\xi)d\xi$$

toplam işareti altındaki ifadelerin çift olduğunu $(\nu'\,ye$ göre$)$ dikkate alırsak

$$u_1(x,t)=\frac{4}{\lambda^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{\cos\lambda_\nu t\cos\lambda_\nu x\int_0^{\lambda}\xi\cos\lambda_\nu\xi\varphi_1(\xi)d\xi-\sin\lambda_\nu t\cos\lambda_\nu x\int_0^{\lambda}\sin\lambda_\nu\xi\varphi_1(\xi)d\xi\right.$$

$$\left.-x\cos\lambda_\nu t\sin\lambda_\nu x\int_0^{\lambda}\sin\lambda_\nu\xi\varphi_1(\xi)d\xi+\lambda\cos\lambda_\nu t\sin\lambda_\nu\xi\int_0^{\lambda}\sin\lambda_\nu\xi\varphi_1(\xi)d\xi\right\}+\frac{2}{\lambda^2}\int_0^{\lambda}\xi\varphi_1(\xi)d\xi$$

ve

$$u_2(x,t)=-\sum_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\lambda}\left\{\frac{2}{\lambda_\nu\lambda^2}\left[t\cos\lambda_\nu t\cos\lambda_\nu x\sin\lambda_\nu\xi+\xi\sin\lambda_\nu t\cos\lambda_\nu x\cos\lambda_\nu\xi\right.\right.$$

$$\left.\left.-x\sin\lambda_\nu t\sin\lambda_\nu x\sin\lambda_\nu\xi+\lambda\sin\lambda_\nu t\sin\lambda_\nu x\sin\lambda_\nu\xi-\frac{1}{\lambda_\nu}\sin\lambda_\nu t\cos\lambda_\nu x\xi\right]\right\}+\frac{2A}{\lambda^2}\int_0^{\lambda}\xi\varphi_2(\xi)d\xi;$$

$$+\frac{2A}{\lambda^2}\int_0^{\lambda}\xi\varphi_2(\xi)d\xi;$$

olur. Benzer yolla

$$u_3(x,t)=\frac{4}{\lambda^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_\nu}\left\{t\cos\lambda_\nu t\cos\lambda_\nu x\int_0^{\lambda}\sin\lambda_\nu\xi\varphi_2(\xi)+\sin\lambda_\nu t\cos\lambda_\nu x\int_0^{\lambda}\xi\cos\lambda_\nu\xi\varphi_2 d(\xi)\right.$$

$$-x\sin\lambda_\nu t\sin\lambda_\nu x\int_0^{\lambda}\sin\lambda_\nu\xi\varphi_2 d(\xi)+\lambda\sin\lambda_\nu t\sin\lambda_\nu x\int_0^{\lambda}\sin\lambda_\nu\xi\varphi_2(\xi)$$

$$\left.-\frac{1}{\lambda_\nu}\sin\lambda_\nu t\sin\lambda_\nu x\int_0^{\lambda}\sin\lambda_\nu\xi\varphi_2(\xi)\right\}+\frac{2t}{\lambda^2}\int_0^{\lambda}\xi\varphi_2(\xi)d\xi;$$

elde ederiz. Nihayet

$$u_3(x,t)=-\sum_{\substack{\nu=-\infty\\ \nu\neq 0}}^{\infty}\int_0^{\lambda}\left\{\frac{2}{\lambda_\nu\lambda^2}\left[(t-\tau)\cos\lambda_\nu(t-\tau)\cos\lambda_\nu x\sin\lambda_\nu\xi+\xi\sin\lambda_\nu(t-\tau)\cos\lambda_\nu x\cos\lambda_\nu\xi\right.\right.$$

$$-x\sin\lambda_\nu(t-\xi)\sin\lambda_\nu x\sin\lambda_\nu\xi+\lambda\sin\lambda_\nu(t-\tau)\sin\lambda_\nu x\sin\lambda_\nu\xi$$

$$\left.\left.-\frac{1}{\lambda_\nu}\sin\lambda_\nu t\cos\lambda_\nu x\xi\right]f(\xi,\tau)d\xi\right\}d\tau+\int_0^{t}\frac{2t}{\lambda^2}\int_0^{\lambda}\xi(t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi$$

$$=\frac{4}{\lambda^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_\nu}\int_0^{t}\left\{(t-\tau)\cos\lambda_\nu(t-\tau)\cos\lambda_\nu x\int_0^{\lambda}\sin\lambda_\nu f(\xi,\tau)d\xi\right.$$

$$+\sin\lambda_\nu(t-\tau)\cos\lambda_\nu x\int_0^{\lambda}\xi\cos\lambda_\nu\xi f(\xi,\tau)d\xi-x\sin\lambda_\nu(t-\tau)\sin\lambda_\nu x\int_0^{\lambda}\sin\lambda_\nu\xi f(\xi,\tau)d\xi$$

$$+\lambda\sin\lambda_\nu(t-\tau)\sin\lambda_\nu x\int_0^{\lambda}\sin\lambda_\nu\xi f(\xi,\tau)d\xi$$

$$\left.-\frac{1}{\lambda_\nu}\sin\lambda_\nu(t-\tau)\cos\lambda_\nu x\int_0^{\lambda}\sin\lambda_\nu\xi f(\xi,\tau)d\xi\right\}d\tau+\frac{2}{\lambda^2}\int_0^{\lambda}(t-\tau)\int_0^{\lambda}\xi f(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

$$u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t)+u_3(x,t).$$

Böylelikle esas problemin çözümünü elde etmiş olduk.

4. SONUÇLAR

Tezde telin titreşim denklemi için yazılmış lokal olmayan sınır koşullu problemin gerçek çözümü için "Rezidü metodu" incelenmiştir ve alınan sonuçlar aşağıdaki gibi sıralanabilir:

1. Başlangıç-sınır değer problemine karşılık gelen spektral problemin çözümü için analitik bir ifade ve problemin Green fonksiyonu bulunmuştur.

2. Ayrılış formülü incelenmiştir.

3. Ayrılış formülleri kullanılarak esas problemin çözümü sonsuz seri şeklinde elde edilmiştir.

5. KAYNAKLAR

[1] Stanley J.F, Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, John Wiley & Sons. Inc, 1982.

[2] Rasulov, M.L, Methods of Contour Integration, North-Holland Publishing Company-Amsterdam, 1967.

[3] Osborne, Anthony D., Complex Variables and Their Applications, Harlow: Addison-Wesley, 1999.

ÖZGEÇMİŞ

1976 yılında Van'ın Muradiye ilçesinde dünyaya geldi. 1997 yılında Fırat Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünden mezun oldu. 2006 yılında Beykent Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik-Bilgisayar Ana Bilim Dalı Uygulamalı Matematik Bilim Dalında yüksek lisansa başladı. Halen Büyükçekmece Gürpınar 80. Yıl Lisesinde matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.

Seyit Nur BAŞARAN