T.C
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANA BİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

1.BASAMAKTAN NONLİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER SİSTEMİNİN ZAYIF ÇÖZÜMLERİ VE RİEMANN İNVARYANTLARI

(Yüksek Lisans Tezi)

Tezi Hazırlayan: **Recai DANACI**

İSTANBUL, 2008

T.C
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANA BİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

1.BASAMAKTAN NONLİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER SİSTEMİNİN ZAYIF ÇÖZÜMLERİ VE RİEMANN İNVARYANTLARI

(Yüksek Lisans Tezi)

Tezi Hazırlayan:
Recai DANACI
Öğrenci No:
050860014

Danışman:
Prof. Dr. Mahir RESULOV

İSTANBUL, 2008

ÖNSÖZ

Öncelikle, eğitim hayatımda bana her türlü desteği sağlayan anneme, babama ve ayrıca bu tez çalışmalarımda bana sürekli yardımcı olan eşime çok teşekkür ediyorum.

Bu tez konusunda hiçbir yardımı esirgemeyen, bilgilerini sürekli bizle paylaşan değerli hocam Sayın Prof. Dr. Mahir RESULOV' a saygılarımı sunar çok teşekkür ederim. Ayrıca bizlere her türlü desteği sunan Sayın Prof. Dr. Mehmet ERDOĞAN' a ve yine bilgilerini esirgemeyen ve katkılarını sürekli gördüğüm Sayın Doç. Dr. Bahaddin SİNSOYSAL' a teşekkürü bir borç bilirim.

İSTANBUL, 2008 **Recai DANACI**

YEMİN METNİ

Sunduğum Yüksek Lisans Tezimi, Akademik Etik İlkelerine bağlı kalarak, hiç kimseden akademik ilkelere aykırı bir yardım almaksızın bizzat kendim hazırladığıma and içerim. 15/07/2008

Aday : Recai DANACI

ÖZET

1.Basamaktan Nonlineer Diferansiyel Denklemler Sisteminin Zayıf Çözümleri ve Riemann İnvaryantları

Tezde 1.basamaktan kuazi lineer kısmi türevli diferansiyel denklemler sistemi incelenmiştir. Bilindiği gibi 1.basamaktan kısmi türevli denklemler için yazılmış Cauchy probleminin çözümü için mevcut olan klasik yöntem karakteristikler yöntemi olmaktadır. Fakat karakteristikler yöntemini 1.basamaktan kısmi türevli denklemler sistemine direk uygulamak mümkün olmamaktadır. Bu nedenle Riemann invaryantları kavramı içerilir ve 1.basamaktan kısmi türevli denklemler sisteminin her bir denklemini bilinen bir yön üzere tam diferansiyel şeklinde yazılabilir. Böyle yönlere karakteristikler denir. Bu nedenle tezde karakteristikleri elde etmek için gerekli koşullar bulunur ve karakteristikler üzerindeki koşullar kullanılarak Riemann invaryantları bulunmuştur.

ABSTRACT

The Weak Solution of 1.Order Nonlinear System of Differential Equations and Riemann Invariants

In this thesis the system of quasi - linear differential equations is investigated. It is known that method of characteristics is the key to the solution of the Cauchy problem for 1.order partial differential equations. But, it is impossible to apply the method of characteristic to the solution of system of differential equations. For this aim the concept of Riemann invariants are introduced. Using the Riemann's invariants, each equation of the system could be reduced to an ordinary differential equation.

In the second part of this thesis the condition for obtaining the characteristics is suggested then using this conditions, the Riemann invariants for some System of differential equations are found

İÇİNDEKİLER

1 GİRİŞ

İki bölümden oluşan tezin amacı, lineer ve kuazi lineer kısmi türevli diferansiyel denklemler sistemi için Riemann invaryantlarının incelenmesidir. Literatürden bilindiği üzere tek denklemler için karakteristikler yönteminin anahtarı, karakteristik eğri içermek ile verilmiş denklemi bu karakteristik üzerinde tam diferansiyel şeklinde yazmaktır. Yani, kısmi türevli diferansiyel denklem adi diferansiyel denklemler sistemine indirgenilir ki, böylece bu adi diferansiyel denklemler sistemini çözerek esas problemin çözümünü ele alabiliriz

Karakteristikler yönteminin mantığını kısmi diferansiyel denklemler sistemine direk olarak uygulamak mümkün değildir. Çünkü sistemin her bir denklemi, farklı bilinmeyen fonksiyonların çeşitli yönlerde türevlerini içermektedir. Karakteristikler yöntemini diferansiyel denklemler sistemine uygulayabilmemiz için özel şekilde bulunmuş öyle bir karakteristikler bulunur ki, bu karakteristikler üzerinde invaryant kalan ifadeler elde etmek mümkün olur. Bunlara Riemann invaryantları denir. Riemann invaryantları dikkate alınarak göz önüne aldığımız sistemin her bir denklemini uygun karakteristikler üzerinde tam diferansiyel şeklinde ifade etmek mümkündür. Dolayısı ile yinede kısmi türevli diferansiyel denklemler sistemi adi diferansiyel denklemler sistemine indirgenebilir. Söz konusu adi diferansiyel denklemler sistemini çözerek, verilmiş problemin gerçek çözümlerini elde ederiz.

Yukarıda söylediklerimizi gerçekleştirmek için lineer cebirden gereken kavramlar tezin birinci bölümünde verilmiştir. Tezin sonuncu bölümünde ise, Riemann invaryantlarını kullanarak bazı kısmi türevli diferansiyel denklemler sistemi için yazılmış Cauchy probleminin gerçek çözümleri ele alınmıştır.
Sonraki işler için gereken kavramları içerelim

1.1 MATRİS VE VEKTÖRLER

Tanım1. m x n ölçülü bir A matrisi m satır ve n sütundan bulunan mn den oluşan dikdörtgensel diziye denir.

A matrisi

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

gibi gösterilir.

A=$\left(a_{ij}\right)$ matrisinin i. satır ve j. sütun elemanı a_{ij} ile gösterilir. A matrisinin satır ve sütunlarının kendi içinde yer değiştirmesiyle elde edilen matrise A matrisinin devriği (transpoz) denir ve A^T ile gösterilir. Bütün elemanları sıfır olan matrise sıfır matris, esas köşegen üzerindeki elemanları 1 olan diğer elemanları 0 olan matrise birim matris denir ve aşağıdaki gibi gösterilir.

$$0_{m\,x\,n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$I_{n\,x\,n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Son olarak şunu söyleyebiliriz ki, A=$\left(a_{i\,j}\right)$ ve B=$\left(b_{i\,j}\right)$ gibi $m \times n$ matrislerin eşit olması için birbirine karşılık gelen elemanlarının eşit olması gerekmektedir. Yani,

$$a_{i\,j}=b_{i\,j} \text{ için } 1 \le i \le m \quad \text{ve } 1 \le j \le m$$

1 x n A matrisi bir satır vektör adını alır. n x 1 B matrisi bir sütun vektör adını alır. Satır vektörü x ile sütun vektörünü y ile gösterelim. Bu özel matrislerin çarpımına iç veya skaler çarpım denir ve şöyle

$$xy=\left(x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n\right)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ .. \\ .. \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

gösterilir.

x, y harflerini satır ve sütun vektörlerinin her ikisini de ifade etmek için kullanabiliriz. Genellikle, aşağıdaki gibi tanımlanan sütun vektörü

$$\text{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix}$$

x=col($x_{1,} x_2 ......, x_n$) şeklinde de yazılabilir.

1.Matrislerde Toplama. A= (a_{ij}) ve B= (b_{ij}) gibi iki matrisi toplayabilmek için birbirine denk gelen elemanlarını toplarız. Yani,

$$\text{A + B} = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

2.Matrisi Sabit ile Çarpma. A matrisinin reel veya kompleks c gibi bir sabitle çarpımı, c yi matrisin her bir elemanıyla çarparak olur. Yani,

$$cA = Ac = ca_{ij}$$

3.Matrislerde Çıkarma. A-B farkını ifade edebilmek için B matrisini (-1) ile çarparak –B şeklinde yazabiliriz ve şöyle ifade

$$\text{A- B = A+(-B)},$$

$$\text{A-B} = (a_{ij} - b_{ij}).$$

edebiliriz.

4. Matrislerde Çarpma. A ve B gibi iki matrisi çarpabilmek için A nın sütun sayısı, B nin satır sayısına eşit olmalıdır. Eğer A m x r matris ve B r x n matris ile çarpım, $C = AB$ şeklinde c_{ij} elemanlı m x n matris olur. c_{ij} yi A′ nın i.satırı ile B' nin j. sütununu iç veya skaler çarpım şeklinde şöyle ifade

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + ...a_{ir} b_{rj} = \sum_{1}^{r} a_{ik} b_{kj}$$

edebiliriz.

Asosyatif Kuralı. (AB)C=A(BC)

Örnek 1. Eğer

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}$$

olursa (AB)C=A(BC) olduğunu gösterelim

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 5\\ 20 & 13\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$(AB)C=\begin{pmatrix}8 & 5\\ 20 & 13\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 15\\ 46 & 39\\ 4 & 3\end{pmatrix}$$

$$BC=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 9\\ 4 & 3\end{pmatrix}$$

$$A(BC)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10 & 9\\ 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 15\\ 46 & 39\\ 4 & 3\end{pmatrix}$$

$$(AB)C=A(BC)$$

Distribütif Kuralı. A(B+C)=AB+AC

Örnek 2. Eğer.

$$A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 3 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

ise A(B+C)=AB+AC olduğunu ispatla

$$B+C=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\text{A (B + C)}=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 27 & 12 \\ 19 & 10 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{AB}=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 17 \\ 6 & 13 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{AC}=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 17 & -5 \\ 13 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{AB+BC}=\begin{pmatrix} 10 & 17 \\ 6 & 13 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 17 & -5 \\ 13 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 27 & 12 \\ 19 & 10 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A(B+C)=AB+AC

Matris Çarpımı Komütatif Değildir. Yani,

$$\text{AB} \neq \text{BA}$$

5. Matris Determinantı. $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ Sayısına 2 x 2 boyutlu bir $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ matrisinin determinantı denir.

Örnek 3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ matrisinin determinantını bulunuz.

Çözüm. Tanıma göre

$$|A| = 4.1 - (6.2) = 4 - 12 \Rightarrow -8$$

3 x 3 boyutlu matrislerin determinantlarını bulmak için ise Sarrus kuralını uyguluyoruz. Bu kurala göre ilk iki satır altta veya ilk sütun sağa yazılıp esas köşegen çarpımlarından yedek köşegen çarpımları çıkartılır. Yani,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

Örnek 4. A= $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ matrisinin determinantını Sarrus yöntemi ile bul.

Çözüm.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{matrix}$$

$$|A| = 1.2.2 + 0.1.4 + 3.3.1 - 4.2.3 - 1.1.1 - 2.3.0 = -12$$

6. Determinantın Minörleri. Bir A kare matrisinin a_{ij} elemanının bulunduğu satır ve sütun dışında kalan elemanların oluşturduğu determinanta a_{ij} teriminin minörü denir. ve M_{ij} ile gösterilir.

Örnek 6. A matrisinin

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

determinantını bul.

Çözüm.

$$|A| = a_{11}.M_{11} - a_{21}.M_{21} + a_{31}M_{31}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-1) - 2(3) + 0(4) = -9$$

7. Matrisin Tersi . Bir n x n A kare matrisinin tersi A^{-1} ile gösterilir. Aşağıdaki gibi

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$$

ifade edilir.

$|A| = 0$ olduğunda A kare matrisine tekil denir ve A matrisinin tersi yoktur. 2 x 2 tekil olmayan matris için matrisin tersi şöyle bulunur.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$|A| = ad - bc$ A matrisinin determinantıdır.

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I \, .$$

Örnek 7. $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$ olduğunu ispatla.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$$

Çözüm.

$$|A| = ad - bc \ , \ A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$|A| = 56 - 54 = 2 \ , A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -9 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}.$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \, .$$

1.2 Özdeğerler ve Özvektörler

A, reel sayılardan oluşan n x n kare matrisi olsun. S, n x 1 sütun vektör olsun. Aşağıdaki eşitliği göz önüne

$$Ax = \lambda x$$

alalım.

Burada, sütun vektörü $x \in S$ ve bilinmeyen vektördür. λ ise sayıdır. Açıkça, her λ sayısı için bu eşitliğin bir çözümü vardır. Biz, sıfır olmayan $x \in S$ vektörlerinin bulunma olasılığını araştırıyoruz. Burada $x \in S$ ler seçilen λ sayısının bazıları için çözümdür.

Tanım 2. $Ax = \lambda x$ denkleminin bir x çözüm vektörüne karşılık gelen λ' ya A matrisinin özdeğerleri denir.

$Ax = \lambda x$ denkleminin λ sayılarına karşılık gelen sıfırdan farklı x vektörüne A matrisinin özvektörleri denir.

Örnek 1 $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ matrisinin özdeğer ve özvektörlerini bulunuz.

Çözüm. Tanıma göre

$$\begin{pmatrix} 6-\lambda & -3 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0 = (6-\lambda)(1-\lambda) + 6$$

$$= \lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$$

Buradan

$$\lambda_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2}$$

$$\lambda_1 = 4 \quad , \quad \lambda_2 = 3 \ .$$

Şimdi $\lambda_1 = 4$ sayısına karşılık gelen özvektörü bulalım

$$\begin{cases} (6-4)\gamma_1 - 3\gamma_2 = 0 \\ 2\gamma_1 + (1-4)\gamma_2 = 0 \end{cases}$$

Cebirsel denklemler sisteminden öz vektörü $\gamma^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ olarak elde ederiz

$\lambda_2 = 3$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü ise

$$\begin{cases} (6-3)\gamma_1 - 3\gamma_2 = 0 \\ 2\gamma_1 + (1-3)\gamma_2 = 0 \end{cases}$$

Denklemler sisteminde

$\gamma^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ olarak elde ederiz.

Genel olarak n x n boyutlu bir kare A matrisinin özdeğer ve özvektörlerinin saptanması için şu yol izlenir.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

reel sayıların n x n kare matris , $x = col(x_1, x_2, \dots x_n)$

olsun.

Böylece (2) denklemini aşağıdaki gibi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

yazabiliriz. Veya

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots + \dots \quad + \dots + \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \dots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

Buradan

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= \lambda x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= \lambda x_2, \\ \ldots \; + \; \ldots \; + \ldots + \ldots \; &= \; \ldots \\ \ldots \; + \; \ldots \; + \ldots + \ldots \; &= \; \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= \lambda x_n \end{aligned}$$

elde ederiz

Sonuncu ifadeyi aşağıdaki gibi de

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \ldots + \; \ldots \; + \ldots \; + \ldots \; &= 0, \\ \ldots \; + \; \ldots \; + \ldots \; + \ldots \; &= 0, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

yazabiliriz.

(3) homojen lineer cebirsel denklemler sisteminin tek bir çözümünün varlığı için gerek ve yeter koşul

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad 3)$$

olmaktadır.

(3) determinantını aşağıdaki gibi de

$$|A - \lambda I| = 0$$

yazabiliriz

(3) determinantı λ'ya göre n dereceli cebirsel bir denklem olmaktadır ve denklemin çözümleri A matrisinin özdeğerleri olmaktadır.

1.3 Kare Matrislerin Üçgen Matrislere İndirgenmesi

Determinantları hesaplamak için onu üçgen determinantlara indirgeyelim..

Örnek 1. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

matrisini üçgen matrise indirgeyelim.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Örnek 2. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ matrisini üçgen matrise indirgeyelim

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

Örnek 3. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisini üçgen matrise indirgeyelim.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & 3 & -7 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

2. BİRİNCİ BASAMAKTAN KUAZİ LİNEER DENKLEMLER SİSTEMİ

2.1 Hiperbolik sistemler

Günümüzde bir çok fiziksel problem skaler diferansiyel denklemden ziyade birinci basamaktan kuazi lineer kısmi türevli diferansiyel denklemler sistemi şeklinde ifade edilebiliyor. Kolaylık için biz burada iki boyutlu problemleri göz önüne alacağız. Değişkenlerden biri x-ekseni diğeri ise $t-$ zaman değişkenleri olacaktır. Eğer bilinmeyen fonksiyonlar $u_i(x,t)$, $(\mathrm{i}=1,2,\ldots \mathrm{n})$ olursa, birinci mertebeden kuazi lineer diferansiyel denklemler sisteminin genel yazılım formu aşağıdaki gibi

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial t}(x,t)+b_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x}(x,t)\right)+c_i\right)=0, \qquad \mathrm{i}=1,2,\ldots.,\mathrm{n} \tag{4}$$

olacaktır.

(4) sistemini kolaylık için n=2 durumunda açık şekilde

$$\begin{aligned} a_{11}\frac{\partial u_1}{\partial t}+a_{12}\frac{\partial u_2}{\partial t}+b_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x}+b_{12}\frac{\partial u_2}{\partial x}+c_1 &= 0, \\ a_{21}\frac{\partial u_1}{\partial t}+a_{22}\frac{\partial u_2}{\partial t}+b_{21}\frac{\partial u_1}{\partial x}+b_{22}\frac{\partial u_2}{\partial x}+c_2 &= 0, \end{aligned} \tag{5}$$

yazalım.

Burada $a_{ij}\,(i,j=1,2)$ x ve t ye bağlı bilinen fonksiyonlardır.

Öncelikle (5) sisteminin hiperbolik sistem olması için bir koşul bulalım. Ayrıca hiperbolik sistemin bazı sonuçlarını inceleyelim. Birinci mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemin çözümünü ararken öncelikle bu denklemin karakteristiklerini bulup bunu adi diferansiyel denklemler sistemine dönüştürüyorduk. Bazı durumlarda elde ettiğimiz adi diferansiyel denklemlerin çözümünü bulabiliyorduk. En azından ele aldığımız diferansiyel denklemler sistemini sayısal olarak çözmek mümkündür. Her iki durumda da göz önünde bulunan kısmi türevli diferansiyel denklem "yerel" olarak çözülür. Bu ise genelde dalgaların dağılım durumlarına denk gelmektedir. Gerçekten de küçük bir zaman diliminde keyfi bir noktanın hareketine, o noktaya yakın olan noktanın etkisi olabilir. Doğal olarak karşımıza şöyle bir soru çıkar. "(4) denklemler sistemi içinde böyle bir yerel hesaplama işlemleri yapılabilir mi?" Eğer bu işlemleri yapmak mümkün ise o zaman sistem hiperbolik türe ait olur.

Hiperbolik sistemin tanımını vermeden önce bazı bilgilere göz atalım. Genelde (4) sisteminin her bir denklemi u_j fonksiyonları ve $\frac{\partial u_j}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathrm{u_j}}{\partial \mathrm{x}}$ türevlerinin keyfi kombinasyonlarını içermektedir. Yani (4) veya (5) denklemler sisteminin her bir denklemi u_j fonksiyonunun $\frac{\partial u_j}{\partial t}$ ve $\frac{\partial \mathrm{u_j}}{\partial \mathrm{x}}$ türevlerini lineer bağımlı durumda içerir. Bu, şu anlama gelir, denklemler keyfi u_j fonksiyonunun çeşitli yerlerdeki değişim hızı hakkında bilgi verir ve bu denklemlerden keyfi u_j fonksiyonunun söz konusu değişim hızlarının bilinen bir yönde değişmesi hakkında herhangi bir bilgi almak mümkün değildir. (4) denklemler sistemi üzerinde çeşitli dönüşümler yapsak acaba yukarıda bahsettiğimiz bilgileri elde edebilir miyiz? Bunu araştıralım.

(4) denklem sistemini henüz bilinmeyen

$$\vec{l}=\left(l_1(x,t,y),\ldots\ldots\ldots,l_n(x,t,u)\right)$$

vektörü ile çarpıp toplayalım

$$\sum_{i=1}^{n} l_i\left(\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}\frac{\partial u_j(x,t)}{\partial t}+b_{ij}\frac{\partial u_j(x,t)}{\partial x}\right)+c_i\right)=0 \qquad (6)$$

$$\sum_{i=1}^{n} l_i \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u_j(x,t)}{\partial t} + b_{ij} \frac{\partial u_j(x,t)}{\partial x} \right] + \sum_{i=1}^{n} l_i c_i = 0 \tag{7}$$

$n = 2$ için (6) şöyle olur.

$$l_1 \left(a_{11} \frac{\partial u_1}{\partial t} + b_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u_2}{\partial t} + b_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) +$$

$$l_2 \left(a_{21} \frac{\partial u_1}{\partial t} + b_{21} \frac{\partial u_1}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u_2}{\partial t} + b_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) + l_1 c_1 + l_2 c_2 = 0 . \tag{8}$$

$$x = x(\eta), \quad t = t(\eta), \tag{9}$$

dönüşümünü yapalım. Bu dönüşüme göre,

$$\frac{\partial u_j}{\partial \eta} = t' \frac{\partial u_j}{\partial t} + x' \frac{\partial u_j}{\partial x} \tag{10}$$

elde edilir.

$$\alpha = x'(\eta) \quad , \quad \beta = \tau'(\eta) \tag{11}$$

(8) denklemini değiştirirsek (11) denklemi aşağıdaki forma

$$\sum_{j=1}^{n} m_j \frac{\partial u_j}{\partial \eta} + c_j l_j = 0 . \tag{12}$$

döner.

Gerçekten, (8) ifadesini düzenlersek

$$(l_1 a_{11} + l_2 a_{21}) \frac{\partial u_1}{\partial t} + (l_1 b_{11} + l_2 b_{21}) \frac{\partial u_1}{\partial x} + (l_1 a_{12} + l_2 c_{22}) \frac{\partial u_2}{\partial t}$$

$$+ (l_1 b_{12} + l_2 b_{22}) \frac{\partial u_2}{\partial x} + l_1 c_1 + l_2 c_2 = 0 \tag{13}$$

(13) formunu elde ederiz. Burada

$$l_1 a_{11} + l_2 a_{21} = m_1 \beta \qquad l_1 a_{12} + l_2 a_{22} = m_2 \beta \tag{14}$$

$$l_1 b_{11} + l_2 b_{21} = m_1 \alpha \qquad l_1 b_{12} + l_2 b_{22} = m_2 \alpha \tag{15}$$

olarak tanımlanırsa (6) sistemi

$$\sum_{j=1}^{2} \left(m_j \beta \frac{\partial u_j}{\partial t} + m_j \alpha \frac{\partial u_j}{\partial x} + l_j c_j \right) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{2} \left(m_j \left(\beta \frac{\partial u_j}{\partial t} + \alpha \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) + l_j c_j \right) = 0 \tag{16}$$

Şekline dönüşür.

(14) sisteminde eşitliğin her iki yanını α ile (15) sisteminde eşitliğin her iki yanını β ile çarpıp birbirine.

$$\alpha l_1 a_{11} + \alpha l_2 a_{21} = m_1 \alpha\beta \tag{17}$$

$$\alpha\, l_1 a_{12} + \alpha l_2 a_{22} = m_2 \alpha\beta$$

eşitleyelim

Buradan

$$\beta\, l_1 b_{11} + \beta l_2 b_{21} = m_1 \beta\alpha$$

$$\beta\, l_1 b_{12} + \beta l_2 b_{22} = m_2 \beta\alpha \tag{18}$$

veya

$$\alpha l_1 a_{11} + \alpha\, l_2 a_{21} = \beta\, l_1 b_{11} + \beta l_2 b_{21}$$

$$\alpha\, l_1 a_{12} + \alpha l_2 a_{22} = \beta\, l_1 b_{12} + \beta l_2 b_{22}$$

olur. Buradan

$$l_1 (\alpha\, a_{11} - \beta\, b_{11}) + l_2 (\alpha\, a_{21} - \beta\, b_{21}) = 0$$

$$l_1 (\alpha\, a_{12} - \beta\, b_{12}) + l_2 (\alpha\, a_{22} - \beta\, b_{22}) = 0 \tag{12}$$

Homojen denklemler sistemini elde ederiz

(19) sisteminin bir çözümü olması için

$$\begin{vmatrix} \alpha\, a_{11} - \beta\, b_{11} & \alpha\, a_{21} - \beta\, b_{21} \\ \alpha\, a_{12} - \beta\, b_{12} & \alpha\, a_{22} - \beta\, b_{22} \end{vmatrix} = 0 \tag{20}$$

olmalıdır. Yani

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \tag{21}$$

olarak tanımlarsak (20) denklemi şöyle

$$\left| A_{ij} X' - B_{ij} T' \right| = 0 \tag{22}$$

olmalıdır.

2.2 Karakteristikler

Bu bölümde (6) denklemler sisteminin karakteristiklerini bulalım.

Aşağıdaki sistemi göz önüne.

$$A_{11}(x,t)\frac{\partial u_1}{\partial t} + A_{12}(x,t)\frac{\partial u_2}{\partial t} + B_{11}(x,t)\frac{\partial u_1}{\partial x} + B_{12}(x,t)\frac{\partial u_2}{\partial x} = f_1(x,t),$$

$$A_{21}(x,t)\frac{\partial u_1}{\partial t} + A_{22}(x,t)\frac{\partial u_2}{\partial t} + B_{21}(x,t)\frac{\partial u_1}{\partial x} + B_{22}(x,t)\frac{\partial u_2}{\partial x} = f_2(x,t) \tag{23}$$

alalım.

(23) sistemini matris formunda yazalım,

$$A.\frac{\partial u}{\partial t} + B\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,t), \tag{24}$$

burada , A, B, u ve f

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \ f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}. \qquad (25)$$

olarak tanımlanmaktadır.

Farz edelim ki, (24) sisteminin $(x,t)\in D$ bölgesinde pürüzsüz (türevlenebilir) çözümü vardır

D bölgesinde bulunan (x_0,t_0) noktasını göz önüne alalım. Bu noktadan bir γ eğrisi geçirelim. Bu eğri üzerinde (x_0,t_0) noktasındaki küçük kaydırma vektörlerini (dx,dt) ile gösterelim.

Farz edelim ki, (24) sisteminin çözümleri γ eğrisi üzerinde verilmiştir. Amacımız ise u_1 ve u_2 nin γ eğrisi üzerinde verilen değerlerine ve sağladıkları (25) sistemine göre tüm D bölgesinde tanımlamak ve ele alarak incelemektir.

Bilinen γ eğrisinin etrafında verilmiş değerlere göre (25) sisteminin çözümünün bulunmasına "Cauchy problemi" diyoruz.

u_1 ve u_2 fonksiyonları γ eğrisi üzerinde bilindikleri için, bu eğri üzerinde onların türevleri de bilinmektedir. Dolayısıyla normal türevlerinin değerlerine göre keyfi yön üzerinde olan türevleri

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial t}, \frac{\partial u_2}{\partial x}$$

γ eğrisi üzerinde bulabiliriz. Tersine bu dört türev biliniyorsa, yön üzerinde türevlerini bulabiliriz. Bu takdirde problemi şöyle ifade edelim, u fonksiyonunun γ eğrisi üzerinde bilinmekte olduğunu varsayarak, bu eğrinin tüm noktalarında $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}$ türevlerini buluruz.

Söz konusu olan türevleri (x_0,t_0) noktasında u fonksiyonunun bilindiği durumda (dx,dt) vektörü üzerinde bilindiğini varsayarak hesaplamaya çalışacağız. Bu diferansiyelleri türevler yardımıyla

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}dt + \frac{\partial u_1}{\partial x}dx = du_1 ,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}dt + \frac{\partial u_2}{\partial x}dx = du_2 \qquad (26)$$

yazalım.

Bu sistemdeki diferansiyeller γ eğrisi üzerinde belirlidir. (26) ifadelerini (23) denklemler sistemine ekleyerek $\frac{\partial u_1}{\partial t}, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial t}, \frac{\partial u_2}{\partial x}$ bilinmeyen fonksiyonları ele almak için aşağıdaki denklemler sistemini göz önüne

$$A_{11}\frac{\partial u_1}{\partial t} + A_{12}\frac{\partial u_2}{\partial t} + B_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x} + B_{12}\frac{\partial u_2}{\partial x} = f_1 ,$$

$$A_{21}\frac{\partial u_1}{\partial t} + A_{22}\frac{\partial u_2}{\partial t} + B_{21}\frac{\partial u_1}{\partial x} + B_{22}\frac{\partial u_2}{\partial x} = f_2$$

$$dt\frac{\partial u_1}{\partial t} + dx\frac{\partial u_1}{\partial x} = du_1 ,$$

$$dt\frac{\partial u_2}{\partial t} + dx\frac{\partial u_2}{\partial x} = du_2 \qquad (27)$$

alalım.

(27) ifadesini matris formunda

$$A\frac{\partial u}{\partial t} + B\frac{\partial u}{\partial x} = f \quad ,$$

veya

$$dtE\frac{\partial u}{\partial t} + dxE\frac{\partial u}{\partial x} = du \, . \qquad (28)$$

yazalım. Burada,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dir. (28) sisteminin bilinmeyenlerini bulmak için

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ dtE & dxE \end{pmatrix} \neq 0 \tag{29}$$

(24) denklemi için

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ dtE & dxE \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & B_{11} & B_{12} \\ A_{21} & A_{22} & B_{21} & B_{22} \\ dt & 0 & dx & 0 \\ 0 & dt & 0 & dx \end{vmatrix} \tag{30}$$

olur.

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ dtE & dxE \end{pmatrix} = 0$$

eşitliğini sağlayan eğrilere (24) sisteminin karakteristikleri denir.

Farz edelim ki, γ eğrisinin kendisi karakteristik eğridir. (28)sisteminin determinantının sıfıra eşit olduğuna bakmadan bu sistemin çözümü vardır.

Varsayımımıza göre (24) sisteminin γ eğrisi üzerinde tanımlanan bir çözümü vardır. Bu ise genişletilmiş olan

$$\begin{pmatrix} A & B & f \\ dtE & dxE & du \end{pmatrix}$$

matrisinin rankının

$$\begin{pmatrix} A & B \\ dtE & dxE \end{pmatrix}$$

matrisinin rankına eşit olması anlamına gelir. Böylelikle du vektörü, karakteristikler boyunca keyfi olamaz ve aşağıdaki koşulu sağlamak zorundadır.

$$rank\begin{pmatrix} A & B & f \\ dtE & dxE & du \end{pmatrix} = rank\begin{pmatrix} A & B \\ dtE & dxE \end{pmatrix} \tag{31}$$

(31) ifadesine, karakteristiklerin koşulu denir.

Karakteristikleri daha iyi anlayabilmek için şöyle bir örneğe dikkat edelim. Ses dalgalarını ifade eden denklem sistemini göz önüne

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^{\,2}\frac{\partial u}{\partial x} = 0 . \tag{32}$$

alalım.

(32) sistemini aşağıdaki gibi düzenleyerek matris şeklinde ifade

$$1\frac{\partial u}{\partial t} + 0\frac{\partial u}{\partial x} + 0\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$0\frac{\partial u}{\partial t} + \rho_0 c_0^{\,2}\frac{\partial u}{\partial x} + 1\frac{\partial p}{\partial t} + 0\frac{\partial p}{\partial x} = 0 , \tag{33}$$

veya

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho_0} \\ \rho_0 c_0^{\,2} & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{34}$$

edelim.

(33) sistemini şu şekilde

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho_0} \\ 0 & 1 & \rho_0 c_0^{\,2} & 0 \\ dt & 0 & dx & 0 \\ 0 & dt & 0 & dx \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial p}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ du \\ dp \end{pmatrix} . \tag{35}$$

yazabiliriz

Karakteristikler denklemi şöyle olur.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho_0} \\ 0 & 1 & \rho_0 c_0^{\;2} & 0 \\ dt & 0 & dx & 0 \\ 0 & dt & 0 & dx \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \rho_0 c_0^{\;2} & 0 \\ 0 & dx & 0 \\ dt & 0 & dx \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\rho_0} \\ 1 & \rho_0 c_0^{\;2} & 0 \\ dt & 0 & dx \end{vmatrix} dt$$

$$= dx \begin{vmatrix} 1 & \rho_0 c_0^{\;2} \\ 0 & dx \end{vmatrix} + dt \begin{vmatrix} 1 & \rho_0 c_0^{\;2} \\ dt & 0 \end{vmatrix} \frac{1}{\rho_0} = (dx)^2 - c_0^{\;2}(dt)^2 = 0\,. \tag{36}$$

Böylelikle karakteristikler için

$$(dx)^2 - c_0^{\;2}(dt)^2 = (dx - c_0 dt)(dx + c_0 dt) = 0 \tag{37}$$

$$\Rightarrow dx = \mp c_0 dt$$

$$\Rightarrow x \mp c_0 t = sabit \tag{38}$$

elde ederiz. Şimdi karakteristikler için olan koşulu ele alalım. Bunun için

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho_0} & 0 \\ 0 & 1 & \rho_0 c_0^{\;2} & 0 & 0 \\ dt & 0 & dx & 0 & du \\ 0 & dt & 0 & dx & dp \end{pmatrix}$$

matrisinin rankı ile bu matrisin keyfi dört sütunundan düzenlenmiş yeni matrisin rankı aynı olsun. Sonucunda da determinantı sıfırdır. Dolayısıyla bu sonucu matrisin 4×4 minörünün birisi sıfıra eşit olmalıdır. Örneğin ,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \rho_0 c_0^{\;2} & 0 \\ dt & 0 & dx & du \\ 0 & dt & 0 & dp \end{vmatrix} = 0 \tag{39}$$

dır.

Buradan

$$0=\begin{vmatrix}1 & \rho_0 c_0^{\ 2} & 0\\ 0 & dx & du\\ dt & 0 & dp\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}dx & du\\ 0 & dp\end{vmatrix}+\rho_0 c_0^{\ 2}\begin{vmatrix}0 & du\\ dt & dp\end{vmatrix}\Rightarrow$$

$$dxdp+dtdu\rho_0 c_0^{\ 2}=0 \tag{40}$$

Birinci karakteristik üzerinde,

$$\frac{dx}{dt}=c_0 \Rightarrow \quad dx=c_0 dt\,. \tag{41}$$

Son ifadeyi (40) de yerine yazalım.

$$c_0 dtdp+dtdu\rho_0 c_0^{\ 2}=0$$

$$dp+\rho_0 c_0 du=0\,,$$

$$du+\frac{1}{\rho_0 c_0}dp=0\,,$$

$$d\left(u+\frac{\rho}{\rho_0 c_0}\right)=0,$$

$$u+\frac{\rho}{\rho_0 c_0}=sabit \tag{42}$$

İkinci karakteristik üzerinde

$$\frac{dx}{dt}=-c_0 \Rightarrow \quad dx=-c_0 dt \tag{43}$$

Bu ifadeyi (40) de yerine yazarsak

$$d\left(u-\frac{\rho}{\rho_0 c_0}\right)=0,$$

$$u - \frac{\rho}{\rho_0 c_0} = sabit \tag{44}$$

elde edilir.

Buradaki (43) ve (44) ifadelerine Riemann invaryantları denir.

ikinci bir örnek olarak Cauchy-Riemann sistemini göz önüne

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0\,, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0\,. \end{cases} \tag{45}$$

alalım.

Bu ifadeyi daha geniş şeklide yazarak matris formunda

$$\begin{cases} 1\dfrac{\partial u}{\partial x} + 0\dfrac{\partial u}{\partial y} + 0\dfrac{\partial v}{\partial x} - 1\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ 1\dfrac{\partial u}{\partial x} + 0\dfrac{\partial u}{\partial y} + 0\dfrac{\partial v}{\partial x} + 1\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0\,. \tag{46}$$

yazalım.

Şimdi karakteristik denklemi

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ dx & 0 & dy & 0 \\ 0 & dx & 0 & dy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & dy & 0 \\ dx & 0 & dy \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ dx & 0 & dy \\ 0 & dx & 0 \end{vmatrix}$$

$$= dy\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ dx & dy \end{vmatrix} - dx\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ dx & dy \end{vmatrix} = (dy)^2 + (dx)^2 = 0,$$

$$\Rightarrow dy = \mp i dx. \tag{47}$$

Cauchy-Riemann sistemi reel karakteristiklere sahip değildir.

Tanım 3. Bir kısmi türevli diferansiyel denklemler sisteminin tüm karakteristikleri reel ise, böyle bir sisteme hiperbolik sistem denir.

2.3 Hiperbolik Denklemler Sistemi için Cauchy Problemi

Hiperbolik denklemler sistemi için Cauchy problemini incelerken, başlangıç verilerini t=0 noktasında bilindiğini varsayacağız. Yani

$$u_i(x,0) = u_i^{(0)}(x) \tag{48}$$

burada $u_i^{(0)}$ bilinen fonksiyonlardır.

Farz edelim ki, ox ekseni karakteristik olmasın. Yani $u(x,0)$ keyfi değerlerine göre sistem, t ye göre türevlerin bulunmasına olanak sağlamaktadır. Buna göre aşağıdaki sistemi göz önüne

$$A\frac{\partial u}{\partial t} + B\frac{\partial u}{\partial x} = f, \tag{49}$$

alalım. Burada $\det A \neq 0$ dır. Bu taktirde

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A^{-1}B\frac{\partial u}{\partial x} = A^{-1}f \tag{50}$$

veya $A^{-1}B = C, \quad A^{-1}f = g$ olarak ifade edilirse (50) a göre

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = g$$

şeklinde ifade edebiliriz. Bu sistem için karakteristik determinantı yazalım

$$\begin{vmatrix} E & C \\ dtE & dxE \end{vmatrix}_{2n} = (dt)^n \begin{vmatrix} E & C \\ E & \frac{dx}{dtE} \end{vmatrix}$$

$$= (dt)^n \begin{vmatrix} 0 & C - \frac{dx}{dtE} \\ E & \frac{dx}{dtE} \end{vmatrix} = (-1)^n (dt)^n \det \left| C - \frac{dx}{dtE} \right|$$

Böylelikle elde edebileceğimiz karakteristikler

$$\frac{dx_i}{dt} = K_i(x,t) \tag{51}$$

denklemlerini sağlayacaktır. Böyle keyfi karakteristiklerin eğim açısı K_i ler

$$\det(C - KE) = 0 \tag{52}$$

denkleminin kökleri olur. Bu köklere C matrisinin öz değerleri denir.

Şimdi aşağıdaki kuazi lineer denklemler sistemini

$$A(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial t} + B(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,t,u) \tag{53}$$

inceleyelim

Bu durumda karakteristikler çözümlere de bağlı olacaktır. Bir çözüm için elde edilen karakteristikler diğer çözüm için uygun olmayacaktır. Örneğin, gaz dinamiğindeki bir sistemi göz önüne alalım

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\rho'(\rho)}{\rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + u\dfrac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0\,. \end{cases} \tag{54}$$

Şimdi bu son sistem için karakteristik denklemi yazalım, bundan dolayı

$$1\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+0\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\rho'}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}=0,$$

$$1\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+0\frac{\partial u}{\partial t}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}=0. \tag{55}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}u\\ \rho\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u & \frac{\rho'}{\rho}\\ \rho & u\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}u\\ \rho\end{pmatrix}=0. \tag{56}$$

yazalım. Karakteristiklerin denklemini şöyle yazarız

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & u & \frac{\rho'}{\rho}\\ 0 & 1 & \rho & u\\ dt & 0 & dx & 0\\ 0 & dt & 0 & dx\end{vmatrix}=0, \tag{57}$$

$$\begin{vmatrix}1 & \rho & u\\ 0 & dx & 0\\ dt & 0 & dx\end{vmatrix}+dt\begin{vmatrix}0 & u & \frac{\rho'}{\rho}\\ 1 & \rho & u\\ dt & 0 & dx\end{vmatrix}=0$$

$$0=\begin{vmatrix}dx & 0\\ 0 & dx\end{vmatrix}+dt\begin{vmatrix}\rho & u\\ dx & 0\end{vmatrix}+dt\left[-\begin{vmatrix}u & \frac{\rho'}{\rho}\\ 0 & dx\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}u & \frac{\rho'}{\rho}\\ \rho & u\end{vmatrix}dt\right]$$

$$(dx)^2-udxdt+dt\left[-udx+dt\left(u^2-\rho'\right)\right]=0,$$

$$(dx)^2-udxdt+-udxdt+(dt)^2\left(u^2-\rho'\right)=0,$$

$$(dx)^2-2udxdt+u^2(dt)^2-\rho'(dt)^2=0,$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)-2u\frac{\partial x}{\partial t}+\left(u^2-\rho'\right)=0,$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{1,2} = u \mp \sqrt{u^2 - \left(u^2 - \rho'\right)} = u \mp \sqrt{\rho'} \ , \tag{58}$$

Buradan

$$\frac{dx}{dt} = u + \sqrt{\rho'} \tag{59}$$

$$\frac{dx}{dt} = u - \sqrt{\rho'} \tag{60}$$

olur şimdi invaryantlarını bulalım. Bunun için genişletilmiş matris yazalım

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & u & \frac{\rho'}{\rho} & 0 \\ 0 & 1 & \rho & u & 0 \\ dt & 0 & dx & 0 & du \\ 0 & dt & 0 & dx & d\rho \end{vmatrix} = 0\,. \tag{61}$$

(61) ifadesinde determinant sıfıra eşit olduğu için keyfi 4×4 minörü sıfıra eşit olmalıdır. Örneğin,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & u & 0 \\ 0 & 1 & \rho & 0 \\ dt & 0 & dx & du \\ 0 & dt & 0 & d\rho \end{vmatrix} = 0 \tag{62}$$

yani,

$$\begin{vmatrix} 1 & \rho & 0 \\ 0 & dx & du \\ dt & 0 & d\rho \end{vmatrix} + dt \begin{vmatrix} 0 & u & 0 \\ 1 & \rho & 0 \\ dt & 0 & d\rho \end{vmatrix} = 0\,, \tag{63}$$

$$dxd\rho + \rho dtdu - udtd\rho = 0 \tag{64}$$

Buradan birinci karakteristik üzerinde

$$\frac{dx}{dt} = u + \sqrt{\rho'}$$

$$\Rightarrow dx = \left(u + \sqrt{\rho'(\rho)}\right)dt \tag{65}$$

Bu son ifadeyi (64) eşitliğinde de yerine yazalım

$$d\rho\left(u + \sqrt{\rho'(\rho)}\right)dt + \rho dtdu - udtd\rho = 0$$

$$\sqrt{\rho'(\rho)}d\rho + \rho\, du = 0$$

$$\frac{du}{d\rho} = -\frac{\sqrt{\rho'(\rho)}}{d\rho}\,.$$

İkinci karakteristik üzerinde yeni

$$\frac{dx}{dt} = u - \sqrt{\rho'(\rho)}$$

$$\frac{du}{d\rho} = \frac{\sqrt{\rho'(\rho)}}{d\rho} \tag{66}$$

elde edilir. Böylelikle

$$\frac{dx}{dt} = u + \sqrt{\rho'(\rho)}\,,$$

$$\frac{du}{d\rho} = -\frac{\sqrt{\rho'(\rho)}}{d\rho}\,; \tag{67}$$

$$\frac{dx}{dt} = u - \sqrt{\rho'(\rho)}\,,$$

$$\frac{du}{d\rho} = \frac{\sqrt{\rho'(\rho)}}{d\rho}\,. \tag{68}$$

adi diferansiyel denklemler sistemini elde etmiş oluruz.

3 RİEMANN PROBLEMİ

Sabit katsayılı denklemler sistemi için Riemann problemini göz önüne alalım.

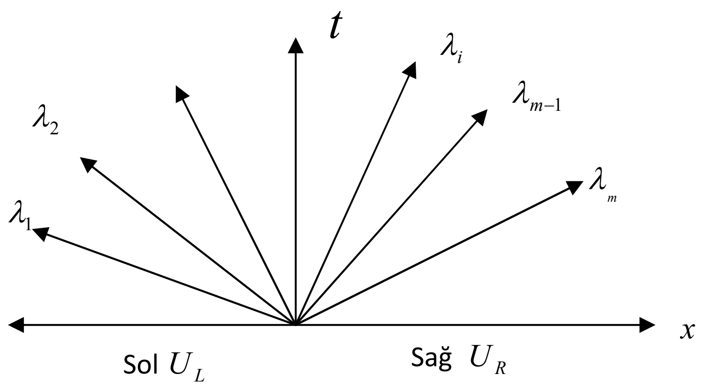
$$U_t + AU_X = O, \qquad -\infty < x < \infty \qquad , \ t = 0 \tag{69}$$

$$U(x,0) = U^{(0)}(x) = \begin{cases} U_L, & x < 0 \\ U_R, & x > 0 \end{cases} \tag{70}$$

Burada A $n \times n$ ölçülü bir matris olmaktadır. Varsayalım ki A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ olmaktadır ve

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 .... < \lambda_m \tag{71}$$

yani, sistem tamamen hiperboliktir.



Sekil 1

$W = K^{-1}U$ değişken dönüşümü yapalım. Değişken dönüşümü yaptıktan sonra (69) denklemini bağımsız denklemler sistemine parçalamış

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial w_i}{\partial x} = 0 \ , \quad (i = 1,2,3,\ldots,m) \tag{72}$$

olduk.

$U = KW$ olur ve bu eşitlikte K , $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_m$ özdeğerlerine karşılık gelen ve $K^{(i)}$, $(i = 1,2,3,\dots,m)$ özvektörlerinden oluşan bir matristir.

Bu çözümde $K^{(i)}$ ler lineer bağımlı değildir. Bu durumda biz U_L ve U_R verilerini $K^{(i)}$, $(i = 1,2,3,\dots,m)$ lere göre şu şekilde

$$U_L = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i K^{(i)} \quad , \quad U_R = \sum_{i=1}^{m} \beta_i K^{(i)} \tag{73}$$

yazabiliriz.

Bu eşitlikte α_i ve β_i ler sabitlerdir, $(i = 1,2,3,\dots,m)$
(73) denkleminin çözümünü şöyle

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdots \\ u_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1^{(1)} \\ K_2^{(1)} \\ \cdots \\ K_m^{(1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_1^{(2)} \\ K_2^{(2)} \\ \cdots \\ K_m^{(2)} \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} K_1^{(m)} \\ K_2^{(m)} \\ \cdots \\ K_m^{(m)} \end{pmatrix} \tag{74}$$

veya şöyle ifade edebiliriz.

$$U(x,t) = \sum_{i=1}^{m} W_i(x,t) K^{(i)} \tag{75}$$

ve

$W_i(x,t) = W^{(0)}(x - \lambda_i t) K^{(i)}$ olduğunu da dikkate alırsak

$$U(x,t) = \sum_{i=1}^{m} W^{(0)}(x - \lambda_i t) K^{(i)} \tag{76}$$

olarak yazabiliriz.

Böylelikle, $x - t$ düzleminin her bir (x,t)noktasında $\mathrm{U}(\mathrm{x},\mathrm{t})$ fonksiyonu yalnız başlangıç verilerinin m noktasından $\left(x_0^{(i)} = x - \lambda_i t\right)$ bağımlı olmaktadır. Bu noktalar λ_i

hızına sahip karakteristiklerin x ekseni ile kesiştiği noktalar olmaktadırlar. (76) denkleminin çözümüne m dalganın süper pozisyonu gibi bakılabilir. Öyle ki, bu dalgaların her birisi bağımsız olarak formu değişmeden dağılmaktadır.

i nolu dalganın formu $W_i^{(0)}(x)K^{(i)}$ e eşittir ve bu dalganın değişme hızı λ_i dir.

Şimdi, (69) , (70) Riemann problemini göz önüne alalım. (69),(70) problemlerinin genel çözümü Şekil 1 de verildiği gibi olmaktadır. Bu çözüm her bir λ_i özdeğerine sahip ve orijinden çıkan m dalgadan oluşmaktadır. Her i dalga U da bulunan süreksizlik sıçrayışlarını λ_i hızı hareket ettirmektedir.

Normalde çözüm λ_1 dalgadan solda sadece U_L başlangıç verisine, λ_m dalgadan sağda ise U_R başlangıç verisine eşit olmaktadır. Problemin çözümü λ_1 ve λ_m dalgaları arasındaki yelkipte bulunmaktadır. $K^{(1)}, K^{(2)}, ..., K^{(m)}$ özvektörleri lineer bağımsız olduklarından sırasıyla U_L ve U_R özvektörleri üzere lineer kombinasyon şeklinde yazabiliriz.

$$U_L = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i K^{(i)}, \qquad U_R = \sum_{i=1}^{m} \beta_i K^{(i)} \tag{77}$$

burada $\alpha_i, \beta_i, \ (i = 1,2,...,m)$.

Formal olarak (69) ,(70) probleminin (76) şeklindeki çözümü karakteristik $W_i^{(0)}(x)$ başlangıç verilerinde ve sağ $K^{(i)}$ özvektörleri temrinde ifade edilmektedir.

Belirtelim ki , (77) un her bir ifadesi (76) in özel durumları olmaktadır. (76) ve (77) ifadelerinden karakteristik W_i değişkenlerinde m sayıda skaler Riemann problemini elde

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial w_i}{\partial x} = 0 \tag{78}$$

$$W_i^{(0)}(x) = \begin{cases} \alpha_i, & x < 0 \\ \beta_i, & x > 0 \end{cases} \tag{79}$$

ederiz.

(78),(79) probleminin çözümü,

$$W_i(x,t) = W_i^{(0)}(x - \lambda_i t) = \begin{cases} \alpha_i, & x - \lambda_i t < 0 \\ \beta_i, & x - \lambda_i t > 0 \end{cases} \tag{80}$$

şeklinde olmaktadır.

Verilmiş (x,t) için öyle bir λ_i özdeğeri vardır ki,

$$\forall i, \quad i < I \quad ; \quad \lambda_I < \frac{x}{t} < \lambda_{I+1} \qquad ; x - \lambda_i t > 0$$

Böylelikle, (69),(70) probleminin çözümünü son olarak şöyle yazabiliriz.

$$U(x,t) = \sum_{i=I+1}^{m} \alpha_i K^{(i)} + \sum_{i=1}^{I} \beta_i K^{(i)} \tag{81}$$

Burada $Ix - \lambda_i t > 0$ eşitliğini koruyan i indislerinin maksimumudur

Not. $$\frac{\partial U}{\partial t} + A\frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

denklemini göz önüne alalım (82)

L_i, $|A - \lambda I| = 0$ denkleminin sağ özvektörü olsun

Yani,

$$L_i A = \lambda L_i \ .$$

Eğer (82) denklemini sağdan L_i ile çarparsak

$$L_i\left(\frac{\partial U}{\partial t} + A\frac{\partial U}{\partial x}\right) = L_i\frac{\partial U}{\partial t} + L_i A\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$L_i\left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_i\frac{\partial}{\partial x}\right)U = 0 \tag{83}$$

olur

2×2 sistem için çözüm.

Örnek olarak, 2×2 ölçülü sistem için Riemann problemini göz önüne

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + a_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial u_2}{\partial x} = 0\ , \tag{84}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + a_{21}\frac{\partial u_1}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \tag{85}$$

alalım

Aşağıdaki notasyonları

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = u\,, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{86}$$

içerelim.

bu notasyonlarda (84) (85) sistemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{87}$$

gibi yazılır.

A matrisini iki tane birbirinden farklı reel özdeğerlerinin olduğunu varsayalım. Bunları sırasıyla λ_1 ve λ_2 olarak gösterelim. $\lambda_1 < \lambda_2$ olduğunu kabul edelim.

$K^{(i)}$ ile λ_i lere karşılık gelen özvektörleri gösterelim. (87) denklemini sağdan $K^{(i)}$özvektörlere çarpalım.

$$K^{(i)}\frac{\partial U}{\partial t} + K^{(i)}A\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \tag{88}$$

veya

$$K^{(i)}\frac{\partial U}{\partial t} + \lambda_i K^{(i)}A\frac{\partial U}{\partial x} = K^{(i)}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial}{\partial x}\right)U = 0 \tag{89}$$

W=KU özel değişkenlerinde (87) denklemini, aşağıdaki gibi ayrıklaştırmış olduk

$$\frac{\partial W_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial W_i}{\partial x} = 0 \;\;, \text{(i =1,2)} \tag{90}$$

(90) denkleminin karakteristiklerini elde ederiz

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_i \ , \qquad \xi = x - \lambda_i t \ . \tag{91}$$

olmaktadır.

$\dfrac{dx}{dt} = \lambda_1$ karakteristiği için sol çözüm

$$U_L = \alpha_1 K^{(1)} + \alpha_2 K^{(2)} \tag{92}$$

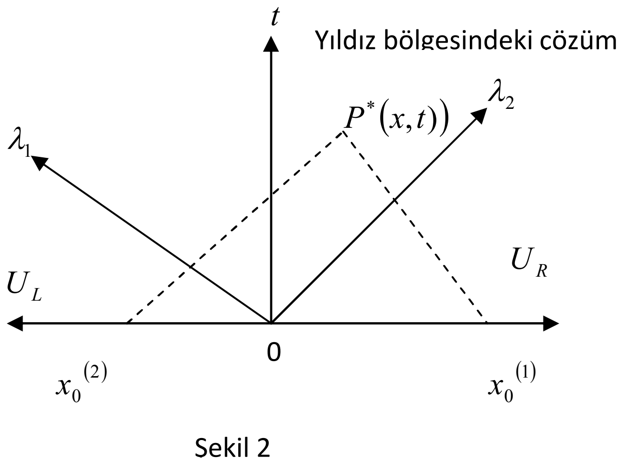
ve

$\dfrac{dx}{dt} = \lambda_2$ için sağ çözüm.

$$U_R = \beta_1 K^{(1)} + \beta_2 K^{(2)} \tag{93}$$

şeklinde yazılır.

λ_1 ve λ_2 dalgaları arasındaki bölgeye yıldız bölgesi denir ve bu bölgede çözümü U^* ile gösteririz. Bu değer süreksiz başlangıç verilerinden oluşan ve orijinden çıkan iki dalganın devamının değeri olmaktadır.



Sekil 2

Şekil 2 de $P^*(\mathrm{x}, t)$ noktasından geriye λ_1 ve λ_2 hızıyla karakteristikleri çizelim. Bunlar orijinden çıkan karakteristiklere paralel olur. P^* noktasından çıkan karakteristikler $x_0^{(2)} = x - \lambda_2 t$ ve $x_0^{(1)} = x - \lambda_1 t$ başlangıç noktasından çıkmaktadırlar.

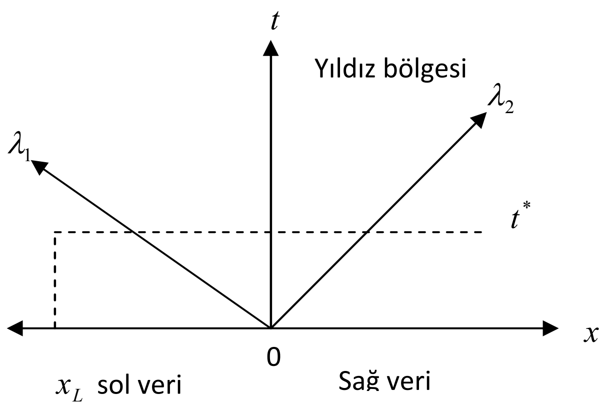
Böylelikle, (76) ile bulunan $U(x,t)$nin katsayıları tanımlanmaktadır. P^* noktasındaki çözüm (76) ile tanımlanır. Esas problem α_i ve β_i katsayılarını doğru seçmek olmaktadır. $U(x_L, t^*) = U_L$ eşitliğini koruyan dalgadan solda t^* ve x_L noktasını seçelim. Açıktır ki x_L, t^* noktasından çıkan dalga

$$U_L = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i K^{(i)} = \alpha_1 K^{(1)} + \alpha_2 K^{(2)}. \tag{94}$$

şeklinde olmaktadır. Yani, açılışın tüm katsayıları α lar olmaktadır. Yani x_L, t^* noktası her bir dalganın solunda yerleşmektedir. Ne zamanki, horizontal $t = t^*$ doğrusu üzere hareket ediyoruz, $\frac{dx}{dt} = \lambda_1$ dalgasını keseriz. Böylelikle $x - \lambda_1 t$ negatiften pozitife değişir. Buna göre de α_1 katsayısı β_1 katsayısına çevrilir. O zaman çözüm $\lambda\lambda_1$ ve $\lambda\lambda_2$ dalgaları arasında yıldız bölgesinde şu şekilde.

$$U^*(x,t) = \beta_1 K^{(1)} + \alpha_2 K^{(2)} \tag{95}$$

olur.



Sekil 3

Sağa doğru hareket etmeyi devam ettirdikçe λ_2 dalgasını keseriz ve $x - \lambda_2 t$ negatiften pozitife değişir (95) ifadesindeki λ_2 katsayısı β_2 ye dönüşür ve sonuçta (95) ifadesi

$$U_R = \beta_1 K^{(1)} + \beta_2 K^{(2)} \tag{96}$$

şeklini alır.

Aşağıdaki formda dalga denklemini göz önüne

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0. \qquad (97)$$

alalım.

(97) denklemini birinci basamaktan diferansiyel denklemlere indirgeyelim

$$u_t = v \quad , u_x = w \quad \left(c^2 = 1\right) \quad \text{olsun} \qquad (98)$$

$$\begin{cases} v_t - w_x = 0 \\ w_t - v_x = 0 \end{cases}$$

veya

$$u_t + Au_x = 0. \qquad (99)$$

Burada

$$u = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

olmaktadır.

Eğer, $c^2 \neq 1$ olduğunu varsayarsak.

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0. \qquad (100)$$

olur ve (97) denklemi aşağıdaki gibi 1. basamaktan olan denkleme

$$\begin{cases} v_t - cw_x = 0 \\ w_t - cv_x = 0 \end{cases}$$

dönüşür.

Sonra şu denklemi göz önüne

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \qquad (101)$$

alalım.

(101) denklemini şu şekilde.

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{a^2}{\rho_0}\frac{\partial u}{\partial x}\right]=0$$

yazalım ve

$$\frac{\partial u}{\partial t}=u_1 \ , \qquad -\frac{a^2}{\rho_0}\frac{\partial u}{\partial x}=u_2$$

değişken dönüşümlerini yapalım

Buradan,

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial u_1}{\partial t}+\frac{\partial u_2}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}+\rho_0\frac{\partial u_2}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}=\frac{\partial u_1}{\partial x} \ , \qquad -\frac{a^2}{\rho_0}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}=\frac{\partial u_2}{\partial t}$$

Sonra

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}=-\frac{\rho}{a^2}\frac{\partial u_2}{\partial t}=0$$

veya

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}+\frac{a^2}{\rho}\frac{\partial u_1}{\partial x}=0 \, .$$

Böylelikle (101) denklemini aşağıdaki denklemler sistemi gibi

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_1}{\partial t}+\rho_0\dfrac{\partial u_2}{\partial x}=0\\[2mm] \dfrac{\partial u_2}{\partial t}+\dfrac{a^2}{\rho_0}\dfrac{\partial u_1}{\partial x}=0\end{cases} \qquad (102)$$

yazabiliriz.

Sonuncu denklemi vektöriyel formda da

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A\frac{\partial u}{\partial x} = 0\,, \tag{103}$$

yazabiliriz. Burada

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \rho_0 \\ \dfrac{a^2}{\rho_0} & 0 \end{pmatrix}.$$

olmaktadır.

Şimdi aşağıdaki başlangıç değer problemini inceleyelim,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{a^2}{\rho_0}\dfrac{\partial u_1}{\partial x} = 0\,, \end{cases} \tag{104}$$

$$\rho(x,0) = \begin{cases} \rho_L, & x < 0 \\ \rho_R, & x > 0\,, \end{cases} \tag{105}$$

$$u(x,0) = \begin{cases} u_L, & x < 0 \\ u_R, & x > 0 \end{cases} \tag{106}$$

$$u(x,0) \equiv u(x,0) = u_0 = \begin{cases} u_L, & x < 0 \\ u_R, & x > 0\,, \end{cases}$$

$$\rho(x,0) \equiv \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1 = \begin{cases} \rho_L, & x < 0 \\ \rho_R, & x > 0\,, \end{cases}$$

olduğundan u ve ρ fonksiyonları için başlangıç koşulları yukarıdaki gibi yazılır,

(104) denklemine karşılık gelen matris

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \rho_0 \\ \frac{a^2}{\rho_0} & 0 \end{pmatrix}$$

olmaktadır.

A matrisinin özdeğerlerini bulalım

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \rho_0 \\ \frac{a^2}{\rho_0} & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \lambda^2 - a^2 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = a \quad , \quad \lambda_2 = -a \, .$$

Özvektörler ise şöyle ifade edilir.

Öncelikle, $\lambda_1 = -a$ dır.

$$\begin{cases} a\alpha_1 + \rho_0\alpha_2 = 0 \\ \frac{a^2}{\rho_0}\alpha_1 + a\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a\lambda_1 + \rho_0\lambda_2 = 0 \quad \Rightarrow \alpha_1 = \rho_0 \quad , \quad \alpha_2 = -a \, .$$

λ_1 e karşılık gelen özvektör şöyledir.

$$K^{(1)} = (\rho_0 \, , -a)^T \quad \Rightarrow K^{(1)} = \begin{pmatrix} \rho_0 \\ -a \end{pmatrix} \; ;$$

şimdi $\lambda_2 = a$ yı ele alalım.

$$\begin{cases} -a\alpha_1 + \rho_0\lambda_2 = 0 \\ \frac{a^2}{\rho_0}\alpha_1 - a\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad a\alpha_1 + \rho_0\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \rho \quad , \quad \alpha_2 = a \, ,$$

burada da ikinci özvektör şöyledir

$$K^{(2)} = \begin{pmatrix} \rho_0 \\ a \end{pmatrix}$$

Önce, $u_L = (\rho_L, u_L)^T$ sol başlangıç durumu özvektörler için ayrılışını yazalım.

$$u_L = \begin{pmatrix} \rho_L \\ u_L \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i K_L^{(i)} = \alpha_1 K^{(1)} + \alpha_2 K^{(2)} = \alpha_1 K^{(1)} + \alpha_2 K^{(2)},$$

$$\begin{cases} \rho_L = \alpha_1 \rho_0 + \alpha_2 \rho_0 \\ u_L = -\alpha_1 a + \alpha_2 a \end{cases}$$

Bu sistemin çözümü Cramer yöntemi ile bulalım.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \rho_0 & \rho_0 \\ -a & a \end{vmatrix} = a\rho_0 + a\rho_0 = 2a\rho_0 \,,$$

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} \rho_L & \rho_0 \\ u_L & a \end{vmatrix}}{2a\rho_0} = \frac{\rho_L a - \rho_0 u_L}{2a\rho_0} \,,$$

$$\alpha_2 = \frac{\begin{vmatrix} \rho_0 & \rho_L \\ -a & u_L \end{vmatrix}}{2a\rho_0} = \frac{\rho_L u_L + a\rho_L}{2a\rho_0} \,.$$

Şimdi, $u_R = (\rho_R, u_R)^T$ sağ başlangıç verileri $K^{(i)}$ ler üzere ayrılışını yapalım.

$$u_R = \begin{pmatrix} \rho_R \\ u_R \end{pmatrix} = \beta_1 K^{(1)} + \beta_2 K^{(2)} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 \rho_0 + \beta_2 \rho_0 \\ -\beta_1 a + \beta_2 a \end{cases}$$

$$\beta_1 = \frac{a\rho_R - \rho_0 u_R}{2a\rho_0} \,,$$

$$\beta_2 = \frac{a\rho_R - \rho_0 u_R}{2a\rho_0} \,.$$

Yıldız bölgesinde $u^*(x,t) = \beta_1 K^{(1)} + \beta_2 K^{(2)}$ olduğunu dikkate alırsak.

$$u^* = \begin{pmatrix} \rho^* \\ a^* \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} \rho_0 \\ -a \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \rho_0 \\ a \end{pmatrix}$$

Yani,

$$\rho^* = \beta_1\rho_0 + \alpha_2\rho_0 = \frac{a\rho_2 - u_R}{2a\rho_0}\rho_0 + \frac{\rho_0 u_R + a\rho_R}{2a\rho_0}\rho_0$$

$$= \frac{a\rho_L}{2a} - \frac{\rho_0 u_L}{2a} + \frac{\rho_0 u_R}{2a} + \frac{a\rho_R}{2a}$$

$$= \frac{1}{2}(\rho_L + \rho_R) - \frac{\rho_0}{2a}(u_L - u_R)$$

$$u^* = -\beta_1 a + \alpha_2 a = -\frac{a\rho_R - \rho_0 u_R}{2a\rho_0}a + \frac{\rho_0 u_L + a\rho_L}{2a\rho_0}a$$

$$= -\frac{a\rho_R}{2\rho_0} + \frac{\rho_0 u_R}{2\rho_0} + \frac{\rho_0 u_L}{2\rho_0} + \frac{a\rho_L}{2\rho_0}$$

$$= -\frac{a}{2\rho_0}(\rho_R - \rho_L) + \frac{1}{2}(u_L + u_R).$$

Sonuç olarak,

$$\rho^* = \frac{1}{2}(\rho_L + \rho_R) - \frac{\rho_0}{2a}(u_R - u_L),$$

$$u^* = \frac{1}{2}(u_L + u_R) - \frac{a}{2\rho_0}(\rho_R - \rho_L).$$

olduğunu görürüz.

Örnek 1.

$$\rho_0 = 1 \quad , \quad a = 1 ,$$
$$\rho_L = 1 \quad , \quad \rho_R = \frac{1}{2} ;$$
$$u_L = 0 \quad , \quad u_R = 0$$

$$\rho(x,0)=\begin{cases}1, & x<0\\ \frac{1}{2}, & x>0\end{cases} \quad ; \quad u(x,0)=\begin{cases}0, & x<0\\ 0, & x>0\end{cases}$$

$$\rho(x,t)=\begin{cases}\rho_L, & \frac{x}{t}<\lambda_1\\ \rho^*, & \lambda_1<\frac{x}{t}<\lambda_2\\ \rho_R, & \frac{x}{t}>\lambda_2\end{cases}$$

$$u=\begin{cases}u_L, & \frac{x}{t}<\lambda_1\\ u^*, & \lambda_1<\frac{x}{t}<\lambda_2\\ u_R, & \frac{x}{t}>\lambda_2\end{cases}$$

SONUÇLAR

Tezde elde edilen sonuçları aşağıdaki gibi sıralamak mümkündür.

1. Bir yer değişkenine bağlı n kuazi lineer denklemler sistemi için karakteristikler bulunmuştur
2. Özel durumda iki değişkene bağlı diferansiyel denklemler sistemi için Riemann invaryantları bulunmuştur
3. Riemann invaryantlarını kullanarak telin titreşimlerini ifade eden denklemler sisteminin gerçek çözümü ele alınmıştır

KAYNAKLAR

1. Eleuterio F.Toro Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics
   Springers-Verlag Berlin Heidelberg 1999 printed in GERMANY
2. Linear Albegra with Applications by Steven J. Leon
   Hardcover Jun 16 , 2005
3. Differantial Equations
   Paul Blanchard, Robert Devaney, Glen R. Hall September 2005

ÖZGEÇMİŞ

17.07.1975 tarihinde Sinop ili Erfelek ilçesinde doğdum. İlkokulu Erfelek ilçesinde ki Akçasöğüt köyü ilkokulunda okuduktan sonra sırasıyla Kastamonu Merkez Ortaokulunu ve Kastamonu Abdurrahmanpaşa Lisesini bitirdim. 1997 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği bölümünden mezun oldum ve aynı yıl İstanbul da bir ilköğretim okulunda göreve başladım.1999 yılında Trabzon Çaykara ve Dernekpazarı ilçelerinin askerlik şubesi başkan vekili olarak askerliğimi yaptım. 2006 yılında Beykent Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Uygulamalı Matematik Bölümünde yüksek lisansa başladım. Halen İst-K.Çekmecede bir lisede matematik öğretmeni olarak çalışmaktayım.