T.C.

BEYKENT UNIVERSITY

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANA BİLİM DALI

UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

KONVEKS DÜZLEM EĞRİLERİNİN EVOLÜSYONU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hamza DALBUDAK

İstanbul, 2009

T.C.

BEYKENT UNIVERSITY

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANA BİLİM DALI

UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

KONVEKS DÜZLEM EĞRİLERİNİN EVOLÜSYONU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hamza DALBUDAK

Öğrenci NO: 070860004

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mehmet ERDOĞAN

İstanbul, 2009

KONVEKS DÜZLEM EĞRİLERİNİN EVOLÜSYONU

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışma konusunu veren, gerek ders gerekse tezin hazırlanması aşamalarında bana her türlü desteği veren değerli hocam ve danışmanım Prof. Dr. Mehmet ERDOĞAN'A ve yüksek lisans derslerinde her türlü destek ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocalarım Prof. Dr. Mahir RESULOV ve Yard. Doç.Dr. Bahaddin SİNSOYSAL' a teşekkür ederim.

Hamza DALBUDAK

ÖZET

Bu tez çalışması 5 bölümden oluşmaktadır.

Birinci Bölümde, düzlemsel eğrilerin evolüsyon probleminin tarihsel gelişimi ve probleme literatürde yapılan katkılar ele alındı, ayrıca tez çalışmasında ele alacağımız evolüsyon problemi tanımlandı.

İkinci bölümde, eğrilerin lokal teorileri, eğriliğin farklı şekillerdeki tanımları ve uzay eğrilerinin Frenet-Serre denklemleri verildi ve eğriler teorisinin temel teoremi ifade edildi. Bu bölümün ikinci kısmında ise düzlemsel bir eğrinin zamana göre hareketi incelenerek evolüsyon denklemleri elde edildi.

Üçüncü bölümde, genel bir düzlem eğrisinin eğriliği, uzunluğu ve sınırladığı alanın evolüsyon denklemleri elde edildi ve bulunan denklemlerin eğrinin zamana göre hız vektörünün teğetsel bileşeninden bağımsız oldukları kanıtlandı.

Dördüncü bölüm ise başlangıç eğrisi konveks olan evolüsyon eğrisinin evulüsyon sürecince konveksliğini koruduğunu ve evolüsyonun nihai şeklinin Hausdorff metriğine göre bir çember olduğunu kanıtlamaya ayrıldı.

Beşinci ve son bölüm ise genel sonuçları ve bir değerlendirmeyi kapsamaktadır.

ABSTRACT

This study consist of five chapters.

In the first chapter, we give an historical development of the evolution problem and search through the works have been done before in literature and then describe the evolution problem on which we study.

In the second chapter, we state the fundamental theorem of tne local theory of curves, different definitions of curvature of a curve, Frenet-Serre equations of the curves and further more we investigate the motion of a plane curve with respect to time variable and obtain its evolution equations.

In the third chapter, we dealt with the general evolution equation of embedded planar curves and obtain the evolution equations for the length of the curve and the area it bounds and prove that the tangential componenets of the evolution vector does not effect the length and area during the evolution process.

Fourth chapter is devoted to proving that the evolving curve remain convex during the evolution process and the final shape is a circle in the Haussdorff metric if the initial curve is convex.

Finally, the last chapter covers general remarks and an evaluation of the thesis.

1. GİRİŞ

Eğri ve yüzeylerin diferansiyel geometrisinin temelleri 19.yüzyılın başlarına kadar gider. Gauss (1777-1855), Liuoville (1809-1882), Frenet (1816-1888) ve Serret (1819-1885) in çalışmalarında eğri ve yüzeylerin sistematik şekilde çalışıldığını görmekteyiz. Gauss' un denklemleri klasik diferansiyel geometri ile kısmi türevli non-lineer diferansiyel denklemler ve soliton teorisi arasındaki ilişkiyi ortaya koymaktadır. Yüksekliği ile orantılı bir hızla hareket eden büyük öteleme dalgaları ilk defa İskoç mühendis John Scott Russell tarafından gözlemlendi ve bu öteleme dalgalarına daha sonra soliton dalgaları adı verildi.

Bu tezde eğrilerin lokal denklemleri yanında düzlemsel eğrilerin zamana göre hareketinden elde edilen evolüsyon denklemleri elde edildi ve bir eğrinin evolüsyonunun eğriliği bir integro-diferansiyel operatör tarafından belirlenirki bu literatürde Korteweg-de Vries (KdV) denkleminin recursion operatörü olarak adlandırılır.

Günümüz matematikçileri, daha çok hareketi esnasında muayyen zorlamalara maruz kalan ve bu nedenle üzerinde tanımlanan metriklerinde değişebildiği eğrilerin zamana göre evolüsyonlarını çalışmaktadırlar . En basit hal düzlemde eğriyi kısaltan eğri akımlarıdır.

Hız vektörleri her noktada eğrilik vektörü ile aynı olan eğrilerin düzlemdeki hareketini göz önüne alalım. Düzlemde başlangıç eğrisi $\alpha_0(r)=\alpha(r,0)$ olan

$$\alpha(r,t):\left[a,b\right]\times\left[0,T\right]\rightarrow \mathbb{R}^2$$

biçimindeki eğri ailesini göz önüne alalım. Bu durumda eğriyi kısaltan akım

$$\alpha_t=\kappa N \qquad (1.1)$$

$$\alpha(r,0) = \alpha_0(r) \qquad (1.2)$$

denklemleriyle verilir. Burada κ, evolüsyon eğrisinin eğriliği, N içe doğru yönlendirilmiş birim normal vektör alanı ve türevde t zaman değişkenine göre türevdir. Bu çalışmada böyle bir hareket sonucunda $\alpha_0(r)$ eğrisi ne hale gelir sorusunun cevabını araştıracağız.uzun süreli değişimde geniş ölçekten bakarsak eğrinin L uzunluğu ile çevrelediği A alanının değişimine bakmamız gerekecektir. Klasik matematikten aşağıdaki formülleri biliyoruz:

$$L_t = -\oint \kappa^2 ds \qquad (1.3)$$

$$A_t = -\oint \kappa ds = -2\pi \ . \qquad (1.4)$$

Burada $s = s(r,t)$ evolüsyon eğrisinin t anındaki yay uzunluğudur. (1.4) den zamanla A nı azalacağını ve $T = \dfrac{A_0}{2\pi}$ de $A = 0$ olacağını anlıyoruz. Ancak eğrinin diğer özelliklerini görmek kolay değildir. Örneğin konveks bir eğrinin konveksliği evolüsyon sürecinde korunurmu, her basit kapalı eğri evolüsyon sonunda bir noktaya dönüşürmü ve evolüsyon süreci bir singülar hal ortaya çıkarırmı gibi soruları yanıtlamak kolay değildir. [3], [4] ve [6] da Gage ve Hamilton konveks bir eğrinin evolüsyonda sürecinde yine konveks kalacağını ve eğrinin git gide yuvarlaklaşarak sonlu bir zaman sürecinde bir noktaya dönüşeceğini kanıtladılar. 1987 Grayson herhangi bir eğrinin bile evolüsyon süreci içerisinde konveks hale dönüşeceğini ve nihayetinde bir noktaya çökeceğini Gage-Hamiltonun çalışmalarından yararlanarak [7] de kanıtlamıştır. Ayrıca 1986, Gage [3], [4] ve [6] dan yararlanarak düzlem eğrilerin alanı koruyan evolüsyon denklemlerinin

$$\alpha_t = \left(\kappa - \frac{2\pi}{L}\right) N, \quad \alpha(r,0) = \alpha_0(r) \qquad (1.5)$$

biçiminde verileceğini gösterdi ve eğer başlangıç eğrisi kapalı ve konveks ise evolüsyon sürecinde eğri konveks kalmaya devam edeceğini ve eğrinin C^{∞}-metriğine göre gitgide $\sqrt{\frac{A_0}{\pi}}$ yarıçaplı bir çembere dönüşüşeceğini gösterdi, ancak evolüsyon sürecinin düzgün olup olmayacağı yani basit kapalı eğrilerin konveks hale dönüşürken singüler durumlar ortaya çıkarıp çıkarmıyacağı sorusu günümüzde bile hala çözülememiş açık bir sorudur.

Bu tezin içeriğinde $\alpha(r,0) = \alpha_0(r)$ olmak üzere

$$\alpha(r,t):[a,b]\times[0,\infty)\to \mathbb{R}^2$$

şeklindeki kapalı düzlemsel bir eğri ailesi aşağıdaki evolüsyon denklemleri ile ele alınıp incelenmiştir:

$$\alpha_t = \left(\kappa - \frac{L}{2A}\right)N \tag{1.6}$$

$$L(t) = \int_a^b |\alpha_r| dr = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2}\, dr \tag{1.7}$$

$$A(t) = \frac{1}{2}\int_a^b \left(x\frac{\partial y}{\partial r} - y\frac{\partial x}{\partial r}\right) dr \tag{1.8}$$

Burada $x = x(r,t)$ ve $y = y(r,t)$ $\alpha(r,t)$ yer vektörünün koordinat fonksiyonlarını, κ evolüsyon eğrisinin işaretli eğriliğini, $L(t)$ ve $A(t)$ de evolüsyon eğrisinin t zamanındaki uzunluğu ile bu anda çevrelediği alanı göstermektedir.

2. EĞRİLERİN LOKAL TEORİSİ VE DÜZLEMSEL EĞRİLERİN ZAMANSAL EVOLÜSYONU

2.1. Eğrilikler ve Frenet-Serre Denklemleri

Bu kısımda 3-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^3$ deki eğrilerin temel tanım ve geometrik özellikleri verilecektir. $\mathbb{R}^3$ de bir eğri, $\mathbb{R}^3$ de bir parçacığın hareketi ile izlenen yolun bir t parametresine göre parametrik olarak ifade edilmiş noktaların bir kümesidir.

Tanım. 2.1.1 $\mathbb{R}^3$ de düzgün bir eğri $\alpha : I=(a,b) \to \mathbb{R}^3$ şeklinde $C^k, k \geq 1$, sınıfından olmak üzere $\forall t \in (a,b)$ için $\dfrac{d\alpha}{dt} \neq 0$ koşulunu sağlayan bir fonksiyondur.

$\forall t \in I$ için $\alpha(t)$ eğrinin bu noktadaki durum vektörünü gösterir.

Tanım. 2.1.2 Düzgün $\alpha(t)$ eğrisinin bir $t = t_o$ noktasındaki $\dfrac{d\alpha}{dt}(t_o)$ türevi eğrinin bu noktadaki hız vektörü adını alır. $\left\| \dfrac{d\alpha}{dt} \right\|$ ye eğrinin $\alpha(t)$ noktasındaki hızı ve vektör değerli $\left(\dfrac{d\alpha}{dt} \right)$ vektör alanına ise eğrinin hız(tanjant) vektör alanı adını vereceğiz. $T(t) = \dfrac{d\alpha/dt}{\left\| d\alpha/dt \right\|}$ vektör değerli fonksiyonuna ise $\alpha(t)$ eğrisinin birim teğet vektör alanı diyeceğiz.

Tanım. 2.1.3 Düzgün $\alpha(t)$ eğrisinin bir $t = t_o$ noktasında

$$s(t) = \int_{t_o}^{t} \left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\| dt \qquad (2.1)$$

şeklindeki s fonksiyonuna eğrinin yay uzunluğu fonksiyonu adı verilir. Eğer $s = t$ ise eğriye yay uzunluğu cinsinden parametrelendirilmiştir deriz, bu durumda $\dfrac{d\alpha}{ds}$ birim vektör ve

$\left\|\frac{d\alpha}{ds}\right\|=1$ dir. Böyle bir eğriye birim hızlıdır diyeceğiz. Bir t parametresi ile verilmiş bir eğriyi $s(t)$ yay uzunluğu fonksiyonu ile $(\alpha\circ t)(s)$ bileşke fonksiyonu sayesinde yeniden parametrelendirebiliriz.Yay uzunluğu ile verilmiş eğrilerin geometrisini çalışmak bize kolaylık sağlayacaktır.

Tanım. 2.1.4 Yay uzunluğu ile parameterelendirilmiş yani birim hızlı bir $\alpha(s)$ eğrisinin eğrilik fonksiyonu $\forall s\in I$ için

$$\kappa(s)=\left\|\frac{d^2\alpha}{ds^2}\right\|=\left\|\frac{dT}{ds}\right\| \qquad (2.2)$$

şeklinde tanımlanır

Örneğin, $\alpha(s)=as+b$, a ve b $\mathbb{R}^3$ de sabit vektörler, şeklinde bir doğrunun eğriliği, $\frac{d\alpha}{ds}=a$ ve $\frac{d^2\alpha}{ds^2}=\frac{dT}{ds}=0$ olduğundan $\kappa(s)=0$ dır.

$\alpha(t)=(r\cos t, r\sin t, 0)$ şeklindeki r yarıçaplı çemberin yay uzunluğu $s(t)=\int_0^t\left\|\frac{d\alpha}{dt}\right\|dt$ ifadesinde $\frac{d\alpha}{dt}=(-r\sin t, r\cos t, 0)$ ve $\left\|\frac{d\alpha}{dt}\right\|=\sqrt{r^2\sin^2 t+r^2\cos^2 t}=r$ yazarsak $s(t)=\int_0^t r\ dt=rt$ şeklinde bulunur, buradan $t=\frac{s}{r}$ elde ederiz. O halde

$$\alpha(s)=(\alpha\circ t)(s)=\alpha(t(s))=\alpha(s/r)=(r\cos(s/r), r\sin(s/r), 0)$$

ve

$$\frac{d^2\alpha}{ds^2}=\left(-\frac{1}{r}\sin(s/r), \frac{1}{r}\cos(s/r), 0\right)$$

buluruz. Böylece r yarıçaplı çemberin eğriliği $\kappa(s)=\left\|\frac{d^2\alpha}{ds^2}\right\|=\frac{1}{r}$ bulunur.

Diğer taraftan, $\mathbb{R}^3$ de sabit hızlı bir $T(s)$ vektörünün $\frac{dT}{ds}$ türevine dik olduğunu kolayca kanıtlayabiliriz. Şöyleki; $\|T(s)\|$ sabit olduğundan bunu s ye türetirsek $2T(s).\frac{dT}{ds}=0$ olduğundan $T(s)\perp\frac{dT}{ds}$ elde ederiz.

Tanım. 2.1.5 Birim hızlı $N=\frac{dT/ds}{\|dT/ds\|}$ vektör alanına $\alpha(s)$ eğrisinin birim normal vektör alanı, $B(s)=T(s)\times N(s)$ vektör alanına da $\alpha(s)$ eğrisinin binormal vektör alanı adı verilir.

$\alpha(s)$ eğrisinin binormal vektör alanı $B(s)$ de birimdir, çünkü

$\|B(s)\|^2=\|T(s)\times N(s)\|^2=\langle T(s)\times N(s),T(s)\times N(s)\rangle = \begin{vmatrix}\langle T,T\rangle & \langle N,T\rangle\\ \langle N,T\rangle & \langle N,N\rangle\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$. Üstelik

$N=\frac{dT/ds}{\|dT/ds\|}$ ve $\kappa(s)=\left\|\frac{dT}{ds}\right\|$ den

$$\frac{dT}{ds}=\kappa N \qquad (2.3)$$

elde ederiz. Yukarıda $\|B(s)\|=1$ elde etmiştik, o halde $B(s)\perp\frac{dB}{ds}$ (i) dir. $B(s)=T(s)\times N(s)$ eşitliğini s ye göre türetirsek

$\frac{dB}{ds}=\frac{dT}{ds}\times N(s)+T(s)\times\frac{dN}{ds}=\kappa N\times N+T(s)\times\frac{dN}{ds}=T(s)\times\frac{dN}{ds}$ bulunur ki buradan $\frac{dB}{ds}\perp T(s)$ (ii) olduğu görülür, o halde (i) ve (ii) den $\frac{dB}{ds}$ nin $N(s)$ yönünde olduğunu, böylece

$$\frac{dB}{ds}=\tau(s)N(s) \qquad (2.4)$$

ifadesini elde ederiz.

Tanım. 2.1.6 Yukarıda (2.4) ile verilen $\tau(s) = \frac{dB}{ds}.N(s)$ fonksiyonuna $\alpha(s)$ eğrisinin vektörel burulma (Torsiyon) fonksiyonu adı verilir. Bu vektörün uzunluğu eğrinin burulması olarak tanımlanır. Yani $\tau = \left\| \frac{dB}{ds} \right\|$ dir.

Diğer taraftan, $B(s) = T(s) \times N(s)$ ifadesinden $N(s) = B(s) \times T(s)$ elde ederiz. Bu ifadeyi s ye göre türetirsek

$$\frac{dN}{ds} = \frac{dB}{ds} \times T(s) + B(s) \times \frac{dT}{ds} = \tau(s)(N \times T) + \kappa(s)(B \times N) = -\tau(s)B - \kappa(s)T$$

bulunur ki bu bize $\frac{dN}{ds} = -\kappa T - \tau B$

verir. Literatürde çoğunlukla $\tau(s)$ yerine $-\tau(s)$ alınır, o nedenle bizde buna uyarak

$$\frac{dN}{ds} = -\kappa T + \tau B \qquad (2.6)$$

yazacağız.

Tanım. 2.1.7 Yukarıdaki bir $\alpha(s)$ eğrisi sayesinde tanımladığımız ortonormal vektör alanlarının $\{T(s), N(s), B(s)\}$ kümesine $\mathbb{R}^3$ için Frenet-Serre çatısı adı verilir. (2.3), (2.4) ve (2.6) denklemlerine ise yani

$$\dot{T} = \frac{dT}{ds} = \kappa N$$

$$\dot{B} = \frac{dB}{ds} = \tau(s)N(s) \qquad (2.7)$$

$$\dot{N} = \frac{dN}{ds} = -\kappa T + \tau B$$

denklemlerine de $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet-Serre denklemleri adı verilir.

Frenet-Serre denklemlerinin daha kapalı ancak daha kullanışlı olabilen matris şeklini verebiliriz. Eğer $E = (T, N, B)^t$ dersek

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

matrisini oluşturabiliriz. Dikkat edilirse Ω anti-simetrik ve izi sıfır olan bir matristir. Böylece Frenet-Serre denklemleri bunlar cinsinden basitçe

$$\frac{dE}{ds} = \Omega E \tag{2.9}$$

biçiminde yazılabilir. Biz daha çok düzgün eğrilerle ilgileneceğimizden buradaki κ ve τ fonksiyonlarını her mertebeden sürekli türevlere sahip olduğunu kabul edeceğiz. Düzlemsel eğriler için $\tau = 0$ olduğundan yukarıdaki (2.7) denklemleri basit bir hal alır. Pek çok integre edilebilir denklemler için düzlemsel eğriler yeterli olacağından (2.7) denklemleri yalın olarak

$$\left.\begin{aligned} \dot{T} &= \frac{\partial T}{\partial s} = \kappa N \\ \dot{N} &= \frac{\partial N}{\partial s} = -\kappa T \\ \dot{B} &= \frac{\partial B}{\partial s} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

biçiminde yazılır. Eğer $\mathbb{R}^3$ yerine 3-boyutlu Minkowski uzayı M^3 ü almış olsa idik yukarıdaki denklemler biraz farklı olurdu. Eğer $\langle \, , \rangle$, M^3 deki iç çarpım ise, burada ortonormal $\{T(s), N(s), B(s)\}$ bazı

$$\langle T, T \rangle = 1, \quad \langle N, N \rangle = -1, \quad \langle B, B \rangle = -1$$

şeklindeki ortogonallik koşulunu sağlar ve buna göre Frenet-Serre denklemleri

$$\dot{T} = \frac{dT}{ds} = \kappa N$$

$$\dot{B} = \frac{dB}{ds} = \tau N \tag{2.11}$$

$$\dot{N} = \frac{dN}{ds} = \kappa T - \tau B$$

şeklinde olurdu, [8].

Örnek.2.1 (Dairesel Helis Eğrisi) Bir dik dairesel helis eğrisi

$$\alpha(s) = (a\cos cs, a\sin cs, bcs), \qquad c = (a^2 + b^2)^{-1/2}$$

parametrik denklemi ile verilir. Eğrinin hız vektörü

$$T(s) = \frac{d\alpha}{ds} = c(-a\sin cs, a\cos cs, b)$$

veya buradan

$$\frac{dT}{ds} = -c^2 a(\cos cs, \sin cs, 0)$$

bulunur. O halde

$$\left\|\frac{dT}{ds}\right\| = c^2 a\sqrt{\cos^2 cs + \sin^2 cs} = c^2 s\ .$$

olduğundan Tanım.2.1.4 den eğrilik $\kappa(s) = c^2 s$ bulunur. Ayrıca,

$$N(s) = \frac{dT/ds}{\|dT/ds\|} = (-\cos cs, -\sin cs, 0)$$

olduğundan

$$B(s) = T(s) \times N(s) = c(b\sin cs, -b\sin cs, a)$$

ve

$$\frac{dB}{ds} = c^2 b(\cos cs, \sin cs, 0)$$

buluruz. O halde $\tau(s) = \frac{dB}{ds}.N(s)$ torsion vektörünün uzunluğu eğrinin torsiyonunu vereceğinden

$$\tau = \left\|\frac{dB}{ds}\right\| = c^2 b\sqrt{\cos^2 cs + \sin^2 cs} = c^2 s$$

şeklinde elde ederiz. Şimdi eğriler teorisinin temel teoremini ifade edelim.

Teorem.2.1.1 C^1 sınıfından $\kappa(s)$ ve bir aralıktaki bütün s ler için pozitif $\tau(s)$ fonksiyonları verilmiş olsun. O takdirde yay uzunluğu s ve eğrilikleri her s için verilen $\kappa(s)$ ve $\tau(s)$ olan bir tek $\alpha(s)$ eğrisi bir katı hareket (bir dönme ve öteleme hareketinin bileşkesi) farkı ile daima bulunabilir.

Yukarıdaki teorem nedeni ile $\kappa=\kappa(s)$ ve $\tau=\tau(s)$ fonksiyonlarına $\alpha(s)$ eğrisinin doğal (intrinsic) denklemleri adı verilir. Bir eğrinin kartezyen koordinatlardaki $x=x(s),\ y=y(s),\ z=z(s)$ şeklindeki parametrik denklemlerini bulma işlemine doğal denklemlerin integrasyonu diyeceğiz. Bunu verilen $\kappa=\kappa(s)$ ve $\tau=\tau(s)$ fonksiyonlarını Frenet-Serre denklemlerinde yerine koyup integral alma yoluyla sonuçlandırırız.

Örnek.2.2 C^3 sınıfından bir $\kappa=\kappa(s)$ fonksiyonu ve $\tau=\tau(s)=0$ verilsin. Şimdi eğrilikleri verilen $\kappa=\kappa(s)$ ve $\tau=\tau(s)$ fonksiyonları olan eğriyi kartezyen koordinatlarda bulacağız. (2.10) denklemleri ile $\dot{B}=\dfrac{dB}{ds}=0$ dan $B=B_0=sbt.$ bulunur. O halde $\mathbb{R}^3$ de $e_3\equiv B_0$ olacak şekilde bir $\{e_1,e_2,e_3\}$ sabit ortonormal bazını göz önüne alalım. Bu durumda e_1,e_2 vektörleri $B(s)$ vektörüne dik olurlar. Diğer taraftan $T(s)$ ve $N(s)$ teğet ve normal vektörler binormal vektör diyeceğimiz $B(s)$ vektörüne dik olduğundan sabitlediğimiz e_1,e_2 vektörlerinin gerdiği düzlem içinde bulunurlar. Böylece $T(s)$ ile e_1 vektörlerinin belirttiği açıyı $\theta(s)$ ile gösterirsek $T(s)$ ve $N(s)$ birim vektörlerini e_1,e_2 ortonormal bazı cinsinden

$$\left.\begin{aligned} T(s)&=\cos\theta\, e_1+\sin\theta\, e_2\\ N(s)&=-\sin\theta\, e_1+\cos\theta\, e_2\end{aligned}\right\}\qquad(2.12)$$

şeklinde ifade edebiliriz. Bu denklemleri s ye göre türetirsek

$$\left.\begin{aligned} \frac{dT}{ds} &= (-\sin\theta\; e_1 + \cos\theta\; e_2)\frac{d\theta}{ds} \\ \frac{dN}{ds} &= (-\cos\theta\; e_1 - \sin\theta\; e_2)\frac{d\theta}{ds} \end{aligned}\right\} \quad (2.13)$$

yazarız. Bu denklemleri $\dot{T} = \kappa(s)N$, $\dot{N} = -\kappa(s)T$ şeklindeki Frenet-Serre denklemleri ile karşılaştırırsak

$$\frac{d\theta}{ds} = \kappa(s)$$

elde ederiz. O halde bu denklemi integrallemek suretiyle

$$\theta(s) = \int_0^s \kappa(t)\; dt + \theta_0 \;,\;\; \theta_0 = \theta(0)$$

bulunur. Burada θ_0 sabiti başlangıç değeridir. Eğer aradığımız eğriyi $\alpha(s)$ ile gösterirsek

$$\frac{d\alpha}{ds} = T(s) = \cos\left(\int_0^s \kappa(t)dt + \theta_0\right)e_1 + \sin\left(\int_0^s \kappa(t)dt + \theta_0\right)e_2$$

veya

$$\frac{d\alpha}{ds} = \left(\cos(\int_0^s \kappa(t)dt)\cos\theta_0 - \sin(\int_0^s \kappa(t)dt)\sin\theta_0\right)e_1 + \left(\sin(\int_0^s \kappa(t)dt)\cos\theta_0 + \cos(\int_0^s \kappa(t)dt)\sin\theta_0\right)e_2$$

yazabiliriz. $x'(s) = \int_0^s \cos\left(\int_0^s \kappa(r)dr\right)dt,\; \mathrm{y}'(s) = \int_0^s \sin\left(\int_0^s \kappa(r)dr\right)dt$ olmak üzere yukarıdaki denklemi integre edersek ve elde edeceğimiz integral sabitini $\alpha_0 = (x_0, y_0)$ ile gösterirsek,

$$\begin{aligned} x(s) &= x'(s)\cos\theta_0 + y'(s)\sin\theta_0 + x_0 \\ y(s) &= y'(s)\cos\theta_0 + x'(s)\sin\theta_0 + y_0 \end{aligned}$$

şeklinde bileşenler olmak üzere düzlemsel eğriyi

$$\alpha(s) = x(s)e_1 + y(s)e_2$$

olarak buluruz.

Ayrıca eğrinin toplam eğriliği

$$\oint \kappa ds = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

dir. Eğer kapalı bir eğri keyfi *r* parametresi ile $\alpha(r)$ şeklinde verilmiş ise eğriyi *b-a* peryotlu olarak periyodik bir fonksiyon gibi düşünmemizde yarar vardır. Eğer eğriyi θ parametresi ile parametrelendirdiğimizi düşünürsek bu durumda $\alpha(\theta)$ eğrisi 2π peryotlu bir eğri olacağından T, N ve κ eğriliğini de 2π peryotlu fonksiyonlar olarak düşünmemiz gerekecektir. Bu durumda konveks $\alpha(\theta)$ eğrisini

$$\alpha(\theta) = \alpha(0) + \left(\int_0^{\theta} \frac{\cos\varphi}{\kappa(\varphi)} d\varphi,\ \int_0^{\theta} \frac{\sin\varphi}{\kappa(\varphi)} d\varphi \right) . \qquad (2.14)$$

$\alpha(\theta)$ eğrisinin uzunluk ve alanını sırasıyla

$$L = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\kappa(\theta)} \qquad (2.15)$$

ve

$$A = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \langle \alpha(\theta), N(\theta) \rangle \frac{d\theta}{\kappa(\theta)} \qquad (2.16)$$

şeklinde tanımlarız. Şimdi tezimizde yaralı olacak ve kanıtları sırasıyla [3] ve [10] daki kaynaklarda bulunan iki teoremi ifade edelim.

Teorem.2.1.2 2π peryotlu bir pozitif peryodik fonksiyon $\kappa(\theta)$ olsun. $\kappa(\theta)$ nın kapalı konveks bir eğrinin eğriliğini göstermesi için gerek ve yeter koşul

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{\kappa(\theta)} d\theta = 0 \qquad (2.17)$$

denklemini sağlamasıdır.

Teorem.2.1.3 (Gage eşitsizliği) κ kapalı konveks bir α eğrisinin eğrilik fonksiyonu ve sırasıyla L ve A da bu eğrinin uzunluğu ve onun sınırladığı alanı göstermek üzere

$$\int_0^L \kappa^2 ds \geq \frac{\pi L}{A} \qquad (2.18)$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem.2.1.4 (İzoperimetrik eşitsizlik) Uzunluğu L olan basit kapalı bir α eğrisinin sınrladığı alan A ise

$$L^2 - 4\pi A \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır, eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul α eğrisinin bir çember eğrisi olmasıdır. İspatı [2] de bulunabilir.

Bu teorem literatürde klasik izoperimetri eşitsizliği olarak bilinmektedir

Eğrinin keyfi bir t parametresi sayesinde verilmiş olması durumunda

$$\alpha(t) = \alpha(s(t)), \quad \frac{ds}{dt} = \left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\| > 0$$

olsun. t parametresine göre türevleri

$$\alpha' \equiv \frac{d\alpha}{dt}, \quad \alpha'' \equiv \frac{d^2\alpha}{dt^2}, \quad \alpha''' \equiv \frac{d^3\alpha}{dt^3}$$

biçiminde gösterirsek aşağıdaki teoremi kolayca kanıtlayabiliriz.

Teorem.2.1.5 $\mathbb{R}^3$ de bir t parametresi ile verilmiş bir $\alpha(t)$ eğrisinin Frenet-serre çatısı $\{T(t), N(t), B(t)\}$

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \quad \mathrm{B}(t) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}, \quad N(t) = B(t) \times T(t)$$

denklemleri ile, eğrilikleri ise

$$\kappa(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}, \quad \tau(t) = \frac{[\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t)]}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}$$

şeklinde verilir. Burada $\left[\alpha',\alpha'',\alpha'''\right]$ vektörlerin karma çarpımlarını göstermektedir.

$\mathbb{R}^3$ de bir *t* parametresi ile verilmiş bir $\alpha(t)$ eğrisinin Frenet-serre denklemleri ise

$$\frac{dT}{dt}=\kappa vN,\quad \frac{dT}{dt}=-\kappa vT+\tau vB,\quad \frac{dT}{dt}=-\tau vN$$

biçiminde olur, burada $v=\left\|\alpha'(t)\right\|$ dir.

2.2 Düzlemsel Eğrilerin Zamansal Evolüsyonu(Evrimi)

Bu kısımda bir düzlemsel eğrinin zamana göre hareketini inceliyeceğiz.

$$\alpha_0(r):\ I=(a,b)\rightarrow \mathbb{R}^3$$

eğrisini ve

$$\alpha(r,t):\ I\times\left[0,\infty\right]:\rightarrow \mathbb{R}^3,\ \alpha(r,0)=\alpha_0(r)$$

eğri ailesini göz önüne alalım. Burada *t* zamanı *r* ise eğrilerin parametresini göstersin Sabit bir *t* anında $\mathbb{R}^3$ de düzgün bir eğriyi $\alpha(r,t)$ vektörel denklemi ile göstereceğiz. Eğrinin *s* yay uzunluğu

$$s(r,t)=\int_0^r\sqrt{g(\xi,t)}d\varsigma \qquad (2.19)$$

ve eğri üstünde 1-boyutlu Riemann metriği ise

$$g(r,t)=\langle\frac{\partial\alpha}{\partial r},\frac{\partial\alpha}{\partial r}\rangle \qquad (2.20)$$

şeklinde tanımlanır. (2.19) den $ds=\sqrt{g(r,t)}\ dr$, böylece

$$\frac{\partial}{\partial s}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial r}\ \text{ve}\ \frac{\partial s}{\partial r}=\sqrt{g}$$

olduğu açıktır. (2.19) ve (2.20) den eğrinin teğet vektörü

$$T=\frac{\partial\alpha}{\partial s}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\alpha}{\partial r} \qquad (2.21)$$

şeklindedir. Üstelik $\{T(s,t), N(s,t), B(s,t)\}$ eğrinin Frenet-Serre şeklindedir ve bir t anında s yay uzunluğu parametresine göre aşağıdaki Frenet-Serre denklemleri sağlanır.

$$\frac{\partial T}{\partial s}=\kappa N \ , \ \frac{\partial B}{\partial s}=-\tau N \ , \ \frac{\partial N}{\partial s}=-\kappa T+\tau B \qquad (2.22).$$

Burada $\kappa=\kappa(s,t),\ \tau=\tau(s,t)$ eğrinin bir t anındaki eğrilikleridir. Şimdi eğri üstündeki bir noktanın hareketini $\alpha(r,t)$ vektörel denkleminin zamana göre evolüsyon eğrisini

$$\alpha_t=\frac{\partial\alpha}{\partial t}=U(r,t)N(r,t)+V(r,t)B(r,t)+W(r,t)T(r,t)\,,\ \alpha(r,0)=\alpha_0(r) \qquad (2.23)$$

şeklindeki vektörel denklemi ile tanımlarız. Ancak, (2.23) denklemi eğrinin Frenet-Serre denklemleri ile bağdaşmalıdır, yani aşağıdaki bağdaşabilirlik koşulları sağlanmalıdır, [1]:

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial\alpha(r,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\alpha(r,t)}{\partial r} \qquad (2.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial T(r,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \qquad (2.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial N(r,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial N(r,t)}{\partial r} \qquad (2.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial B(r,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial B(r,t)}{\partial r} \qquad (2.27).$$

Eğer r parametresi yerine yay uzunluğu parametresini alırsak yukarıdaki denklemlerde $\frac{\partial}{\partial r}$ yerine $\sqrt{g}\,\frac{\partial}{\partial s}$ yazmalıyız.

Şimdi düzlemsel eğrilerin hareketlerini ve zamana göre evrimsel denklemlerini ifade edelim. Düzlemsel eğrilerin hareketleri

$$\alpha_t=\frac{\partial\alpha}{\partial t}=U(r,t)N(r,t)+W(r,t)T(r,t)\,,\ \ \alpha(r,0)=\alpha_0(r) \qquad (2.28)$$

denklemleri tarafından verilir. Bu kısımda T teğeti, N normali, g metriği, s yay uzunluğu ile κ eğriliğinin zamana göre evolüsyon denklemlerini elde edeceğiz.

(2.28) denkleminde $\dfrac{\partial}{\partial r} = \sqrt{g}\dfrac{\partial}{\partial s}$ yazmak suretiyle

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial \alpha(r,t)}{\partial t} = \sqrt{g}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right) = \sqrt{g}\frac{\partial}{\partial s}\left(UN + WT\right)$$

buluruz. Bu denklemde türevin Leibniz kuralı ile düzlemsel halde yay uzunluğu cinsinden verilmiş olan (2.10) Frenet-Serre denklemlerini yerine yazarsak

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial \alpha(r,t)}{\partial t} = \sqrt{g}\left(\frac{\partial U}{\partial s} + W\kappa\right)N + \sqrt{g}\left(\frac{\partial W}{\partial s} - U\kappa\right)T \tag{2.29}$$

elde ederiz. Üstelik $\dfrac{\partial}{\partial r} = \sqrt{g}\dfrac{\partial}{\partial s}$ olduğundan

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \alpha(r,t)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{g}\frac{\partial \alpha}{\partial s}\right) = \frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial \alpha}{\partial s} + \sqrt{g}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial s}\right)$$

veya $\dfrac{\partial \alpha}{\partial s} = T$ olduğundan

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \alpha(r,t)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{g}\frac{\partial \alpha}{\partial s}\right) = \frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial g}{\partial t}T + \sqrt{g}\frac{\partial T}{\partial t} \tag{2.30}$$

sonucunu elde ederiz. Buradan $\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial \alpha(r,t)}{\partial r} = \dfrac{\partial}{\partial r}\dfrac{\partial \alpha(r,t)}{\partial t}$ şeklindeki bağdaşabilirlik koşulu ile

(2.29) den

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial \alpha(r,t)}{\partial t} = \sqrt{g}\left(\frac{\partial U}{\partial s} + W\kappa\right)N + \sqrt{g}\left(\frac{\partial W}{\partial s} - U\kappa\right)T$$

ve (2.29) den

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \alpha(r,t)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{g}\frac{\partial \alpha}{\partial s}\right) = \frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial g}{\partial t}T + \sqrt{g}\frac{\partial T}{\partial t}$$

olduğundan bu iki ifadenin T üzerine olan izdüşümlerini eşitlemek suretiyle

$$\frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial g}{\partial t}=\sqrt{g}\left(\frac{\partial W}{\partial s}-U\kappa\right)$$

denkleminden

$$\frac{\partial g}{\partial t}=2g\left(\frac{\partial W}{\partial s}-U\kappa\right) \qquad (2.31)$$

sonucunu elde ederiz. Yine $\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial \alpha(s,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \alpha(s,t)}{\partial s}$ bağdaşabilirlik koşulundan $\frac{\partial \alpha}{\partial s}=T$

olduğunu dikkate alarak

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \alpha(s,t)}{\partial s}=\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial \alpha(s,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial s}(UN+WT)$$

veya

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial s}(UN+WT)=\left(\frac{\partial U}{\partial s}N+U\frac{\partial N}{\partial s}\right)+\left(\frac{\partial W}{\partial s}T+W\frac{\partial T}{\partial s}\right)$$

buluruz. Buradan Frenet-Serre denklemlerini kullanarak

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\left(\frac{\partial U}{\partial s}N+U(-\kappa T+\tau B\right)+\left(\frac{\partial W}{\partial s}T+W(\kappa N)\right)$$

veya

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\left(\frac{\partial U}{\partial s}+W\kappa\right)N+\left(\frac{\partial W}{\partial s}-U\kappa\right)T \qquad (2.32)$$

şeklindeki T teğet vektörünün evolüsyon denklemini elde ederiz. Bu denklemi biraz daha basitleştirebiliriz. (2.32) nin her iki yanının T teğet vektörü ile iç çarpımını yaparsak

$$\langle\frac{\partial T}{\partial t},T\rangle=\langle N,T\rangle=0,\quad \langle T,T\rangle\neq 0$$

olduğundan

$$\frac{\partial W}{\partial s}-U\kappa=0 \;\Rightarrow\; W=\int_0^s U\kappa d\xi \qquad (2.33)$$

ve böylece T teğet vektörünün evolüsyon denklemini olarak

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \left(\frac{\partial U}{\partial s} + W\kappa \right) N \qquad (2.34)$$

buluruz. (2.34) dan *r* ye göre türeterek

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) = \sqrt{g}\,\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) = \sqrt{g}\,\frac{\partial}{\partial s}\left((\frac{\partial U}{\partial s} + W\kappa) N \right)$$

$$= \sqrt{g}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial s^2} + \frac{\partial W}{\partial s}\kappa + W\frac{\partial \kappa}{\partial s} \right) N + \sqrt{g}\left(\frac{\partial U}{\partial s} + W\kappa \right)\frac{\partial N}{\partial s}$$

veya $\frac{\partial N}{\partial s} = -\kappa T$ olduğundan

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) = \sqrt{g}\left(\left(\frac{\partial^2 U}{\partial s^2} + \frac{\partial W}{\partial s}\kappa + W\frac{\partial \kappa}{\partial s} \right) N + \left(\frac{\partial U}{\partial s}\kappa + W\kappa^2 \right) T \right) \qquad (2.35)$$

ifadesini elde ederiz. Buradan $\frac{\partial}{\partial r} = \sqrt{g}\,\frac{\partial}{\partial s}$ olduğundan

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{g}\,\frac{\partial T}{\partial s}\right) = \frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial s} + \sqrt{g}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)$$

veya

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial s} + \sqrt{g}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)$$

buluruz. Burada (2.31) dan $\frac{\partial g}{\partial t} = 2g\left(\frac{\partial W}{\partial s} - U\kappa\right)$ olduğunu $\frac{\partial T}{\partial s} = \kappa N$ eşitliğini kullanarak

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{1}{2\sqrt{g}}2g\left(\frac{\partial W}{\partial s} - U\kappa\right)\kappa N + \sqrt{g}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\kappa N\right)$$

$$= \sqrt{g}\left(\frac{\partial W}{\partial s} - U\kappa\right)\kappa N + \sqrt{g}\left(\frac{\partial \kappa}{\partial t} N + \kappa\frac{\partial N}{\partial t}\right)$$

veya

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right) = \sqrt{g}\left(\left(\frac{\partial W}{\partial s}\kappa - U\kappa^2 + \frac{\partial \kappa}{\partial t} \right) N + \kappa\frac{\partial N}{\partial t} \right) \qquad (2.36)$$

elde ederiz. Bağdaşabilirlik koşulundan (2.35) ve (2.36) denklemlerinin sol tarafları eşit olduğundan sağ taraflarınıda eşitleyip her iki tarafın N normal doğrultusundaki ve T teğet doğrultusundaki katsayılarını eşitlersek $\langle N, \frac{\partial N}{\partial t} \rangle = 0$ olduğu da göz önüne alınırsa

$$\frac{\partial W}{\partial s}\kappa - U\kappa^2 + \frac{\partial \kappa}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} + \frac{\partial W}{\partial s}\kappa + W\frac{\partial \kappa}{\partial s}$$

veya

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} + W\frac{\partial \kappa}{\partial s} + U\kappa^2 \qquad (2.37)$$

şeklindeki eğriliğin evolüsyon denklemini elde ederiz, [12,13]. Aynı şekilde T teğet doğrultusundaki katsayılarını da eşitlersek

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\left(\frac{\partial U}{\partial s} + \kappa W\right)T \qquad (2.38)$$

denklemini buluruz ki bu da bize N normalinin t zamanına göre evolüsyon denklemini verir. (2.31) ve (2.33) denklemlerinden s yay uzunluğu fonksiyonunun zamana göre evolüsyon denklemini elde edebiliriz. (2.1) den $s(r,t) = \int_0^r \sqrt{g(\frac{d\alpha}{dt'}, \frac{d\alpha}{dt'})}\, dt' = \int_0^r \left\| \frac{\partial \alpha}{\partial t'} \right\| dt'$ denklemini t ye göre türetirsek,

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \int_0^r \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial t} dt' = \int_0^r \frac{\partial g}{2\sqrt{g}\partial t} dt'$$

$$= \int_0^r \frac{1}{2\sqrt{g}} \frac{\partial g}{\partial t} dt' = \int_0^r \frac{1}{2\sqrt{g}} 2g\left(\frac{dW}{ds} - U\kappa\right) dt'$$

$$= \int^r \sqrt{g}\left(\frac{dW}{ds} - U\kappa\right) dt'$$

$$= \int_0^r \frac{dW}{dt'} dt' - \int_0^s U\kappa dt'$$

veya

$$\frac{\partial s}{\partial t} = W - \int_0^s U\kappa dt' \qquad (2.39)$$

şeklinde yay uzunluğunun zamana göre evolüsyon denklemini elde ederiz. (2.34) ve (2.38) denklemlerini yeniden yazalım;

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \left(\frac{\partial U}{\partial s} + W\kappa\right)N \qquad \text{ve} \qquad \frac{\partial N}{\partial t} = -\left(\frac{\partial U}{\partial s} + \kappa W\right)T$$

denklemleri matris gösterimi ile yeniden

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} T \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial U}{\partial s} + W\kappa \\ -\frac{\partial U}{\partial s} - W\kappa & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T \\ N \end{bmatrix} \qquad (2.40)$$

biçiminde yazılabilir, diğer taraftan (2.10) düzlemsel Frenet-Serre denklemlerini matris gösterimi ile

$$\frac{\partial}{\partial s}\begin{bmatrix} T \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T \\ N \end{bmatrix} \qquad (2.41)$$

biçiminde yazabiliriz. Literatürde Pauli matrisi adı verilen

$$\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi yardımıyla (2.40) ve (2.41) matrislerini

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} T \\ N \end{bmatrix} = i\sigma_2\left(\frac{\partial U}{\partial s} + W\kappa\right)\begin{bmatrix} T \\ N \end{bmatrix} \qquad (2.42)$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial s}\begin{bmatrix} T \\ N \end{bmatrix} = i\sigma_2\kappa\begin{bmatrix} T \\ N \end{bmatrix} \qquad (2.43)$$

biçiminde yazdıktan sonra

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s}\begin{bmatrix} T \\ N \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} T \\ N \end{bmatrix}$$

bağdaşabilirlik koşulunu göz önüne alarak

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} + \kappa i \sigma_2 \left(\frac{\partial U}{\partial s} + W\kappa \right) = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial s^2} + \frac{\partial W}{\partial s}\kappa + W\frac{\partial \kappa}{\partial s} \right) + \kappa i \sigma_2 \left(\frac{\partial U}{\partial s} + W\kappa \right)$$

ifadesini veya (2.33) den $\frac{\partial W}{\partial s} - U\kappa = 0 \;\Rightarrow\; W = \int_0^s U(t')\kappa(t')dt'$ olduğunu dikkate alarak

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial s^2} + U\kappa^2 + \frac{\partial \kappa}{\partial s}\int_0^s \kappa(t')U(t')dt' \right)$$

veya

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \kappa^2 + \frac{\partial \kappa}{\partial s}\int_0^s \kappa(t')dt' \right) U \qquad (2.44)$$

sonucunu elde ederiz. (2.44) denkleminde parentez içinde verilen

$$\operatorname{Re} c = \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \kappa^2 + \frac{\partial \kappa}{\partial s}\int_0^s \kappa(t')dt' \qquad (2.45)$$

operatörüne literatürde mKdV oluşumunun Recursion operatörü adı verilir, [1,9].

3. BASİT KAPALI EĞRİLERİN UZUNLUK VE ALANLARININ ZAMANA GÖRE EVOLÜSYONU

Basit kapalı düzlem eğrilerinin uzunluk ve alan evolüsyonları

Bu kısımda basit kapalı düzlem eğrilerinin uzunlukları ve bu eğriler tarafından çevrelenen alanların zamana göre evolüsyonlarını inceleyeceğiz ve bunların eğrinin evolüsyonundaki teğetsel bileşeni olan *W* den etkilenmiyeceğini göstereceğiz.

$$\alpha_0(r):[a,b]\to \mathbf{R}^2$$

düzlemde basit kapalı bir eğri olsun. $\alpha(r,0)=\alpha_0(r)$ olmak üzere zamana göre değişen düzlemsel bir eğri ailesi

$$\alpha(r,t):[a,b]\times[0,\infty)\to \mathbf{R}^2$$

olsun. Bu eğri ailesinin zamana göre evolüsyonu önceki bölümdeki gibi

$$\alpha_t = W(r,t)T(r,t)+U(r,t)N(r,t)\ ,\ \ \alpha(r,0)=\alpha_0(r) \qquad (3.1)$$

denklemleri sayesinde verilsin, [11]. Burada $\alpha(r,t)$ bir *t* anındaki eğrinin vektörel ifadesi, *T* ve *N* sırasıyla eğrinin *t* anındaki teğet vektörünü ve içe doğru olan normal vektörünü göstersin, *W* ve *U* ise *r* ye göre peryodu *b-a* olan keyfi fonksiyonlar olsun. Eğri boyunca metrik tensör $g=g(r,t)=\|\alpha_r\|=\sqrt{x_r^2+y_r^2}$; *x* ve *y* $\mathbf{R}^2$ nin koordinat fonksiyonları ve $s(r,t)=\int_0^r g(\xi,t)d\xi$ yay uzunluğu olmak üzere $ds=g(r,t)dr$ veya formal olarak

$$\frac{\partial}{\partial s}=\frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial r}\ ,\qquad \frac{\partial s}{\partial r}=g \qquad (3.2)$$

biçiminde gösterelim.

T teğeti, N normali, $\theta = \measuredangle(T, x)$ oryantasyonu, κ eğriliği, eğrinin L uzunluğu ve çevrelediği A alanı standart şekilde aşağıdaki denklemlerle verilebilir.

$$T = \frac{\partial \alpha}{\partial s} = \frac{1}{g}\frac{\partial \alpha}{\partial r} \qquad (3.3)$$

$$N = \frac{1}{\kappa}\frac{\partial T}{\partial s} = \frac{1}{\kappa g}\frac{\partial T}{\partial r} \qquad (3.4)$$

$$\kappa = \frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{1}{g}\frac{\partial \theta}{\partial r} \qquad (3.5)$$

$$L(t) = \int_a^b g(r,t)\,dr = \oint ds \qquad (3.6)$$

$$A(t) = \frac{1}{2}\oint x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_a^b \left(x\frac{\partial y}{\partial r} - y\frac{\partial x}{\partial r} \right) dr = -\frac{1}{2}\int_a^b \langle \alpha, gN \rangle\, dr = -\frac{1}{2}\oint \langle \alpha, N \rangle\, ds\ . \qquad (3.7)$$

Bu eğriler için Frenet-Serre denklemleri

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \kappa g N, \quad \frac{\partial N}{\partial r} = -\kappa g T\ , \qquad (3.8)$$

g Riemann metriğinin evolüsyon denklemi

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial r} - U\kappa g\ , \qquad (3.9)$$

teğet ve normalin evolüsyon denklemleri ise

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \left(W\kappa + \frac{\partial U}{\partial s} \right) N = \left(W\kappa + \frac{1}{g}\frac{\partial U}{\partial r} \right) N \qquad (3.10)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\left(W\kappa + \frac{\partial U}{\partial s} \right) T = -\left(W\kappa + \frac{1}{g}\frac{\partial U}{\partial r} \right) T \qquad (3.11)$$

denklemleri ile daha önce verilmişti.

Teorem 3.1 Basit kapalı bir α eğrisinin t anındaki $\alpha_t = \alpha(r,t)$ evolüsyonunun $L(t)$ uzunluğunun ve bu eğrinin çevrelediği $A(t)$ alanının zamana göre evolüsyonu

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\oint U\kappa ds \ , \qquad \frac{\partial A}{\partial t} = -\oint U ds \qquad (3.12)$$

denklemleri ile verilir.

Kanıt. $L(t) = \int_a^b g(r,t)dr = \oint ds$ ifadesini t ye göre türetirsek (3.9) dan ve $\int_a^b \frac{\partial W}{\partial r} dr = 0$

olduğunu kullanarak ilk denklemi

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial t} dr = \int_a^b \left(\frac{\partial W}{\partial r} - U\kappa g \right) dr = \int_a^b \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right) dr - \int_a^b (U\kappa g) dr = -\oint U\kappa ds$$

biçiminde elde ederiz. İkinci denklemi elde etmek için (3.7) denklemini t ye göre türetelim;

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{1}{2}\int_a^b \frac{\partial}{\partial t}\langle \alpha, gN \rangle dr = -\frac{1}{2}\int_a^b \left(\langle \alpha_t, gN \rangle + \langle \alpha, g_t N + gN_t \rangle \right) dr$$

ifadesinde $g_t = \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial r} - U\kappa g$ ve $\frac{\partial N}{\partial t} = -\left(W\kappa + \frac{1}{g}\frac{\partial U}{\partial r} \right) T$ olduğunu kullanırsak

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{1}{2}\int_a^b \left(\langle WT + UN, gN \rangle + \langle \alpha, (\frac{\partial W}{\partial r} - U\kappa g)N - g(W\kappa + \frac{1}{g}\frac{\partial U}{\partial r})T \rangle \right) dr$$

$$= -\frac{1}{2}\int \left(Ug + \langle \alpha, N \rangle W_r - \langle \alpha, N \rangle \kappa g U - \langle \alpha, T \rangle W g \kappa - \langle \alpha, T \rangle U_r \right) dr$$

buluruz. Bu ifadeden kısmi integrasyon alarak (3.3) ve (3.8) den

$$T = \frac{\partial \alpha}{\partial s} = \frac{1}{g}\frac{\partial \alpha}{\partial r}$$

ve

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \kappa g N, \quad \frac{\partial N}{\partial r} = -\kappa g T$$

denklemlerini kullanıp ve ayrıca

$$\langle T, N \rangle = 0, \quad \langle \alpha, N \rangle W \Big|_a^b = 0, \quad \langle \alpha, T \rangle U \Big|_a^b = 0$$

ifadelerini de dikkate alırsak aşağıdaki gibi sonuca ulaşırız.

$$\frac{\partial A}{\partial t}=-\frac{1}{2}\int\left[Ug-W\left(\langle\alpha_r,N\rangle+\langle\alpha,N_r\rangle\right)-\langle\alpha,N\rangle\kappa gU-\langle\alpha,T\rangle Wg\kappa+U\left(\langle\alpha_r,T\rangle+\langle\alpha,T_r\rangle\right)\right]dr$$

$$\frac{\partial A}{\partial t}=-\frac{1}{2}\int\left[Ug-W\langle\alpha,-\kappa gT\rangle-\langle\alpha,N\rangle\kappa gU-\langle\alpha,T\rangle Wg\kappa+U\left(g+\langle\alpha,\kappa gN\rangle\right)\right]dr$$

$$\frac{\partial A}{\partial t}=-\int_a^b Ugdr=-\oint Uds$$

elde ederizki bu teoremin ikinci denklemini kanıtlar.

Diğer taraftan, (3.2) , (3.10) ve $\kappa=\frac{\partial\theta}{\partial s}$ olduğunu dikkate alırsak,

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=W\kappa+\frac{\partial U}{\partial s}=W\kappa+\frac{1}{g}\frac{\partial U}{\partial r} \qquad (3.13)$$

ve

$$\frac{\partial\theta}{\partial r}=\kappa g \qquad (3.14)$$

elde ederiz. Böylece κ eğriliğinin evolüsyon denklemi olarak

$$\frac{\partial\kappa}{\partial t}=\frac{\partial^2U}{\partial s^2}+W\frac{\partial\kappa}{\partial s}+U\kappa^2=\frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{g}\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{W}{g}\frac{\partial\kappa}{\partial r}+U\kappa^2 \qquad (3.15)$$

buluruz. Bu denklem basit olmayıp sabit bir t anında $0\le s\le L(t)$ şeklinde serbest sınıra sahip olmak üzere $s=s(r,t)$, hem r ye ve hemde t zamanının bir fonksiyonudur. Sabit bir t anı için yönlendirilmiş θ açısının 0 ve 2π aralığında değiştiği dikkate alınarak θ yı bir parametre olarak kullanabiliriz. θ yı bir parametre olarak kullanırsak eğriliğin evolüsyon denklemini belirlemek için zaman değişkenini yeniden $\tau=t$ olarak alırız ve θ yı da diğer parametre olarak kullanırız. Kısaca (r,t) den (θ,τ) ya bir dönüşüm tanımlamış oluruz. Şu halde r sabit iken $\frac{\partial}{\partial t}$ kısmi türevi gösterecek , θ sabit iken $\frac{\partial}{\partial\tau}$ kısmi türevi gösterecektir. Böylece (θ,τ) için (3.15) evolüsyon denklemi

$$\frac{\partial \kappa}{\partial \tau} = \kappa^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + U\kappa^2 \qquad (3.16)$$

biçiminde elde edilir.

Sonuç. 3.1 Teorem 3.1 den ve (3.16) denkleminden eğrilik, uzunluk ve alan için elde edilen evolüsyon denklemlerinin α_t hız vektörünün teğetsel bileşeninden bağımsız olduğu, dolayısıyla eğrinin zamana bağlı evolüsyonunun şeklinin teğetsel bileşenden etkilenmediğini böylece, bu bileşen *W* yi uygun seçilde istediğimiz gibi işlemleri kolaylaştıracak biçimde seçebiliriz. Bu husus Gage-Hamilton, [6] ve Gage, [3-5] in çalışmalarında verilmiştir.

4. KONVEKS DÜZLEM EĞRİLERİNİN EVOLÜSYONU

Bu bölümde 2. ve 3. bölümlerde verilenler doğrultusunda düzlemde kapalı konveks bir eğrinin evolüsyonunun son şeklini elde etmek istiyoruz.

4.1. Kapalı konveks düzlem eğrilerinin evolüsyonu

$\alpha_0(r):\ I=(a,b)\rightarrow \mathbb{R}^3$

kapalı ve konveks eğrisini ve kapalı

$$\alpha(r,t):\ I\times[0,\infty]:\rightarrow \mathbb{R}^3,\ \alpha(r,0)=\alpha_0(r)$$

eğri ailesini göz önüne alalım. Aşağıdaki evolüsyon problemini göz önüne alalım:

$$\alpha_t=\left(\kappa-\frac{L}{2A}\right)N \qquad (4.1)$$

$$L(t)=\int_a^b|\alpha_r|dr=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2}\,dr \qquad (4.2)$$

$$A(t)=\frac{1}{2}\int_a^b\left(x\frac{\partial y}{\partial r}-y\frac{\partial x}{\partial r}\right)dr \qquad (4.3)$$

$$\alpha(r,0)=\alpha_0(r) \qquad (4.4)$$

Burada $x=x(r,t)$ ve $y=y(r,t)$ $\alpha(r,t)$ yer vektörünün koordinat fonksiyonlarını, κ evolüsyon eğrisinin işaretli eğriliğini, $L(t)$ ve $A(t)$ de evolüsyon eğrisinin *t* zamanındaki uzunluğu ile bu anda çevrelediği alanı göstermektedir. Evolüsyon eğrisinin geometrik olarak davranışını teğetsel bileşen etkilemiyeceğinden evolüsyon denklemini eşdeğer biçimde aşağıdaki şekilde seçebiliriz:

$$\alpha_t=WT+\left(\kappa-\frac{L}{2A}\right)N \qquad (4.5)$$

burada T eğrinin birim teğet vektörüdür. x-ekseni ile T teğeti arasındaki açı θ olmak üzere T, N ve θ, t zaman değişkeninden bağımsız olduklarından yukarıdaki evolüsyon problemini eşdeğer biçimde aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz:

$$\alpha_t = -\frac{\partial \kappa}{\partial \theta} T + \left(\kappa - \frac{L}{2A} \right) N \qquad (4.6)$$

$$L(t) = \int_0^{2\pi} \left| \alpha_\theta \right| d\theta \qquad (4.7)$$

$$A(t) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(x \frac{\partial y}{\partial \theta} - y \frac{\partial x}{\partial \theta} \right) d\theta \qquad (4.8)$$

$$\alpha(\theta, 0) = \alpha_0(\theta) \ . \qquad (4.9)$$

Eğrinin t zamanındaki uzunluk ve çevrelediği alan ise

$$L_t = -\oint \kappa^2 ds + \frac{\pi L}{A} = -\int_0^{2\pi} \kappa d\theta + \frac{\pi L}{A} \qquad (4.10)$$

$$A_t = -2\pi + \frac{L^2}{2A} \qquad (4.11)$$

biçiminde verilebilir. İleride bunları ve Cauchy-Schwarz eşitsizliği ile İzoperimetrik eşitsizliği kullanarak $\frac{L}{A}$ oranının evolüsyon esnasında azalacağını, yani payının küçülüp paydasının artacağını, dolayısıyla konveks bir eğrinin bu akış sürecinde konveksliğinin değişmeyeceğini kanıtlayacağız.

4.2. Konveks düzlem eğrilerinin evolüsyonunun son şekli

Önceki kısımlarda verdiğimiz bilgileri kullanarak ve $W = 0$ ve $U = \kappa - \frac{L}{2A}$ olduğunu göz önünde tutarak aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem. 4.1 Önceki kısımda verilenler ışığında bir eğrinin evolüsyon denklemlerini aşağıdaki gibi verebiliriz;

$$\frac{\partial g}{\partial t}=-\left(\kappa-\frac{L}{2A}\right)\kappa g\,,$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial \kappa}{\partial s}N,$$

$$\frac{\partial N}{\partial t}=-\frac{\partial \kappa}{\partial s}T,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}=\frac{\partial \kappa}{\partial s}=\frac{1}{g}\frac{\partial \kappa}{\partial r},$$

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t}=\frac{\partial^2 \kappa}{\partial s^2}+\left(\kappa-\frac{L}{2A}\right)\kappa^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial t}=-\oint\left(\kappa-\frac{L}{2A}\right)\kappa ds=-\oint\kappa^2 ds+\frac{\pi L}{A}$$

$$\frac{\partial A}{\partial t}=-\oint\left(\kappa-\frac{L}{2A}\right)\kappa ds=-2\pi+\frac{L^2}{2A}.$$

Yukarıdaki evolüsyon denklemlerinde *s* yay uzunluğu fonksiyonu hem *r* ve hemde *t* zaman değişkenine bağlı olduğundan bu denklemleri çalışmak zordur ancak yukarıda ifade ettiğimiz gibi evolüsyonun $W=W(r,t)$ teğetsel bileşenini uygun bir şekilde seçerek yukarıdaki denklemleri basitleştirebiliriz. Böylece, (4.1)-(4.4) denklemlerine eşdeğer olarak aşağıdaki denklemleri ele alabiliriz.

$$\alpha_t=WT+\left(\kappa-\frac{L}{2A}\right)N \qquad (4.12)$$

$$L=\int_a^b|\alpha_r|dr \qquad (4.13)$$

$$A=\frac{1}{2}\int_a^b xdy-ydx\,, \qquad (4.14)$$

$$\alpha(r,0)=\alpha_0(r)\,. \qquad (4.15)$$

Teorem.4.1 deki denklemleride

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \alpha_r - \left(\kappa - \frac{L}{2A} \right) \kappa g \,, \qquad (4.16)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \left(W\kappa + \frac{\partial \kappa}{\partial s} \right) N, \qquad (4.17)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\left(W\kappa + \frac{\partial \kappa}{\partial s} \right) T, \qquad (4.18)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = W\kappa + \frac{\partial \kappa}{\partial s} = W\kappa + \frac{1}{g}\frac{\partial \kappa}{\partial r}, \qquad (4.19)$$

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = \frac{\partial^2 \kappa}{\partial s^2} + W\frac{\partial \kappa}{\partial s} + \left(\kappa - \frac{L}{2A} \right) \kappa^2 \qquad (4.20)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\oint \kappa^2 ds + \frac{\pi L}{A} \qquad (4.21)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -2\pi + \frac{L^2}{2A} \,. \qquad (4.22)$$

Bu denklemlerden L ve A nın evolüsyon denklemlerinin W den bağımsız olduğunu görüyoruz. Genel olarak θ, r ve t nin fonksiyonudur, o halde θ yı t den bağımsız yapmak için W teğetsel bileşenini (4.19) a göre

$$W = -\frac{1}{\kappa}\frac{\partial \kappa}{\partial s} = -\frac{\partial \kappa}{\partial \theta} \qquad (4.23)$$

şeklinde seçmemiz gerekir. Bu seçime göre (4.17) ve (4.18) den ayrıca T ve N nin de t den bağımsız olduğu görülür. O halde θ ve t yeni koordinatlar olarak seçilirse eğrilik,uzunluk ve alan için aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem. 4.2 θ ve t koordinatlarına göre

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = \kappa^2 \frac{\partial^2 \kappa}{\partial \theta^2} + \kappa^3 - \frac{L}{2A}\kappa^2 \qquad (4.24)$$

$$\frac{dL}{dt} = -\int_0^{2\pi} \kappa d\theta + \frac{\pi L}{A} \qquad (4.25)$$

$$\frac{dA}{dt} = -2\pi + \frac{L^2}{2A} \quad . \qquad (4.26)$$

Bundan sonraki kısımda aşağıdaki denklemleri ele alacağız.

$$\alpha_t = -\frac{\partial \kappa}{\partial \theta} T + \left(\kappa - \frac{L}{2A} \right) N \qquad (4.27)$$

$$L(t) = \int_0^{2\pi} |\alpha_\theta| \, d\theta \qquad (4.28)$$

$$A(t) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(x \frac{\partial y}{\partial \theta} - y \frac{\partial x}{\partial \theta} \right) d\theta \qquad (4.29)$$

$$\alpha(\theta, 0) = \alpha_0(\theta) \ . \qquad (4.30)$$

Burada $\alpha(\theta,t) = \left(x(\theta,t), y(\theta,t) \right)$ eğrinin yer vektörü olarak alınacaktır.

Teorem. 4.3 $\alpha(\theta,t) : [0,2\pi] \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^2$ eğrisinin evolüsyon denklemleri (4.27)-(4.30) daki gibi olsun. Bu durumda evolüsyon süreci boyunca $\frac{L}{A}$ oranı azalır.

Kanıt. Yukarıdaki Teorem 4.2 de $\frac{dL}{dt} = -\int_0^{2\pi} \kappa d\theta + \frac{\pi L}{A}$ ve $\frac{dA}{dt} = -2\pi + \frac{L^2}{2A}$ olduğu gösterilmişti, bu denklemlerde $\oint \kappa ds = 2\pi$ olduğunu göz önüne alarak, Cauchy-Schwarz eşitsizliği ile izoperimetri eşitsizliğini kullanmak suretiyle

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{L}{A} \right) = \frac{1}{A}\left(-\oint \kappa^2 ds + \frac{\pi L}{A} \right) - \frac{L}{A^2}\left(-2\pi + \frac{L^2}{2A} \right)$$

$$\leq \frac{1}{A}\left(-\frac{4\pi^2}{L} + \frac{\pi L}{A} \right) - \frac{L}{A^2}\left(-2\pi + \frac{L^2}{2A} \right)$$

$$= \frac{\pi}{A} \frac{L^2 - 4\pi A}{AL} - \frac{L}{A^2} \frac{L^2 - 4\pi A}{2A}$$

$$= \frac{\left(L^2 - 4\pi A \right)\left(2\pi A - L^2 \right)}{2A^2 L} \leq 0$$

olduğundan $\frac{L}{A}$ oranının t ye göre azalan olduğu kanıtlanmış olur.

Teorem. 4.4 Evolüsyon denklemleri (4.27)-(4.30) ile verilen kuvvetli konveks bir eğrinin konveksliği evolüsyon süreci boyunca korunur.

Kanıt. Başlangıçta eğriliği pozitif olan eğrinin bu eğriliğinin daima pozitif kalacağını göstermek için maksimum prensibini kullanacağız.

Şimdi μ daha sonra uygun şekilde tespit edilecek olan bir sabiti göstermek üzere $\beta(\theta,t)=\kappa(\theta,t)e^{\mu t}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. O takdirde β fonksiyonu

$$\beta_t=\kappa^2\beta_{\theta\theta}+\left(\kappa^2-\frac{L}{2A}\kappa+\mu\right)\beta \qquad (4.32)$$

denklemini sağlar. Burada β nın katsayısı κ ya göre diskriminantı $\frac{L^2}{4A^2}-4\mu$ olan ikinci dereceden bir polinomdur. Teorem 4.3 den $\forall t>0$ için $\frac{L}{A}\leq\frac{L_0}{A_0}$ elde ederiz. Burada L_0 ve A_0 eğrinin başlangıçtaki uzunluğunu ve onun çevrelediği alanı göstermektedir. Şimdi eğer $\mu>\frac{L_0{}^2}{16A_0{}^2}$ seçersek bu durumda diskriminant negatif olacağından β nın katsayısı daima pozitif olacaktır. O nedenle $\mu>\frac{L_0{}^2}{16A_0{}^2}$ seçelim. Ayrıca,

$$\beta_{\min}(t)=\inf\left\{\beta(\theta,t):0\leq\theta\leq 2\pi\right\}$$

tanımlayalım. Kabul edelimki bir $t>0$ için $\beta_{\min}(t)=\eta$ olduğunda $0<\eta<\beta_{\min}(0)=\kappa_{\min}(0)$ olacak şekilde bir $\eta>0$ pozitif sayısı mevcuttur. $t_0=\inf\left\{t:\beta_{\min}(t)=\eta\right\}$ ile gösterelim, bu durumda β nın sürekli olmasından dolayı η minimumu başlangıç anında yani (θ_0,t_0) noktasında alınır ve bu noktada

$$\beta_t\leq 0,\ \ \beta_{\theta\theta}\geq 0,\ \ \beta=\eta>0$$

dır. Bu sonuç ise (4.32) ile çelişir, o halde kabulumuz yanlıştır yani, $t > 0,\ \beta_{\min}(t) \geq \beta_{\min}(0)$ olmalıdır. Böylece her $t > 0$ için

$$\kappa(\theta,t) \geq \kappa_{\min}(t) = \beta_{\min}(t)e^{-\mu t} = \kappa_{\min}(0)e^{-\mu t} > 0$$

elde ederiz ki böylece teorem kanıtlanır.

Teorem. 4.5 Evolüsyon denklemleri aşağıdaki (4.27), (4.28), (4.29) ve (4.30)

$$\alpha_t = -\frac{\partial \kappa}{\partial \theta}T + \left(\kappa - \frac{L}{2A}\right)N$$

$$L(t) = \int_0^{2\pi} |\alpha_\theta|\, d\theta$$

$$A(t) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(x\frac{\partial y}{\partial \theta} - y\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)d\theta$$

$$\alpha(\theta,0) = \alpha_0(\theta)$$

denklemleri ile verilen başlangıç eğrisinin konveks olduğu bir evolüsyon süreci boyunca evolüsyon eğrisinin uzunluğu azaldıkça bu eğri tarafından sınırlanan bölgenin alanı artar.

Kanıt. Teorem 4.4 den dolayı evolüsyon süreci boyunca (2.18) ile verdiğimiz Gage eşitsizliği her bir eğri için sağlanır. (4.25) eşitliği olan $\dfrac{dL}{dt} = -\displaystyle\int_0^{2\pi} \kappa d\theta + \frac{\pi L}{A}$ ve (2.18) Gage eşitsizliğinden

$$L_t = -\oint \kappa^2 ds + \frac{\pi L}{A} \leq 0$$

elde ederiz ki bu ilk iddiamızı kanıtlar, yani eğrinin uzunluğu evolüsyon süreci boyunca azalır. Diğer taraftan (4.26) dan $\dfrac{dA}{dt} = -2\pi + \dfrac{L^2}{2A}$ olduğunu biliyoruz. Bu denklemle izoperimetri eşitsizliğinden $L^2 - 4\pi A \geq 0$ olduğundan

$$A_t = \frac{L^2 - 4\pi A}{2A} \geq 0$$

elde ederiz ki bu eşitsizlikte evolüsyon eğrisinin sınırladığı alanın evolüsyon süreci boyunca arttığını kanıtlar.

5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu bölümde önceki bölümlerde kanıtladığımız teoremlerin sonucunu değerlendireceğiz. Teorem 4.5 den evolüsyon eğrisinin uzunluk ve kapladığı alanın eğrinin başlangıçtaki uzunluk ve sınırladığı alan sırasıyla L_0 ve A_0 olmak üzere $L \leq L_0$ ve $A \geq A_0$ olduğunu İzoperimetri eşitsizliği ile birleştirirsek

$$4\pi A_0 \leq 4\pi A \leq L^2 \leq L_0^{\,2} \qquad (5.1)$$

yazarız. Böylece

$$\frac{4\pi}{L_0} \leq \frac{4\pi}{L} \leq \frac{L}{A} \leq \frac{L_0}{A_0} \quad \text{ve} \quad 4\pi \leq \frac{L^2}{A} \leq \frac{L_0^{\,2}}{A_0} \qquad (5.2)$$

elde ederiz. Böylece L ve A fonksiyonları monoton ve sınırlı fonksiyonlardır, o nedenle

$$\lim_{t\to\infty} L(t) = \overline{L} \quad \text{ve} \quad \lim_{t\to\infty} A(t) = \overline{A}$$

olacak şekilde $\overline{L}\left(\sqrt{4\pi A_0} \leq \overline{L} \leq L_0\right)$ ve $\overline{A}\left(A_0 \leq \overline{A} \leq \dfrac{L_0^{\,2}}{4\pi}\right)$

limit fonksiyonları vardır. Bu nedenle t sonsuza yaklaşırken $\dfrac{L}{A}$ nın sonlu pozitif bir $\dfrac{\overline{L}}{\overline{A}}$

limiti mevcuttur. Ayrıca, Teorem 4.5 den $L^2 - 4\pi A$ izoperimetrik farkı azalandır. Gerçekten,

$$\frac{d}{dt}\left(L^2 - 4\pi A\right) = 2LL_t - 4\pi A_t \leq 0$$

dır ve böylece $L^2 - 4\pi A$ izoperimetrik farkı azalandır. (4.25) ve (4.26) ile Teorem 4.5 den (5.1) eşitsizliklerini kullanarak

$$\frac{d}{dt}\left(L^2 - 4\pi A\right) = 2LL_t - 4\pi A_t \leq -4\pi\frac{L^2 - 4\pi A}{2A}$$
$$\leq -\frac{8\pi^2}{L_0^{\,2}}\left(L^2 - 4\pi A\right)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buradan integral alırsak

$$L^2 - 4\pi A \leq \left(L_0^{\ 2} - 4\pi A_0\right) e^{-\frac{8\pi^2}{L_0^{\ 2}} t}$$

buluruz. Buradan $t \to \infty$ için limit alınırsa İzoperimetrik farkın sıfıra yakınsayacağını bunun ise İzoperimetri teoremine göre eğrinin limit konumunun bir çember olacağını gösterir, benzer biçimde izoperimetri oranı dediğimiz $\frac{L^2_{\ t}}{A_t}$ oranı da azalarak $t \to \infty$ için 4π ye yakınsar. Böylece aşağıdaki sonucu ispatsız ifade edebiliriz. Bu sonucun kanıtı için [5] e bakılabilir.

Sonuç. 5.1 Bir eğri evolüsyonu eğer singüler haller doğurmuyor ise Hausdorff metriğine göre bir çembere yakınsar, dolayısıyla pozitif bir R sayısı için

$$\lim_{t \to \infty} L(t) = 2\pi R, \quad \lim_{t \to \infty} A(t) = \pi R^2$$

olarak bulunur.

KAYNAKLAR

[1] F. Akıncı, Geometry of Moving Curves and Soliton Equations, A Dissertation for M.S.

Degree, Dept. of Maths., İzmir Institute of Technology, Oct. 2004, İzmir,Turkey.

[2] M. Do Carmo, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice- Hall Inc., Englewood, New Jersey, 1976.

[3] M.E. Gage, An Isoperimetric Inequality with Applications to Curve Shortening, Duke Math. J. 50(1983), 1225-1229.

[4] M.E. Gage, Curve Shortening Makes Convex Curves Circular, Invent. Math., 76(1984), 357-364.

[5] M.E. Gage, On an Area-preserving Evolution Equation for Plane Curves, in " Nonlinear Problems in Geometry" (D. M. DeTurck edited), Contemp. Math., Vol. 51(1986), 51-62.

[6] M.E. Gage & R.S.Hamilton, The Heat Equation Shrinking Convex Plane Curves, J. Diff. Geom., 23(1986), 69-96.

[7] M. Grayson, The heat equation shrinks embedded plane curve to round points, J. Diff. Geom. 26 (1987), 285-314.

[8] M. Gürses, Motions of Curves on Two-dimensional Surfaces and Soliton Equations, Phys Lett. A, 241(1998), 329-334.

[9] H. Hasimoto, A Soliton on a Vertex Filament, J. Fluid Mech., 51(1972), 477-485.

[10] C. C. Hsiung, A First Course in Differential Geometry, John Wiley & Sons, Inc., 1981.

[11] Lishang Jiang & Shengliang Pan, On An Evolution Problem for Convex Curves, East China Normal University Preprints; 2003-016.

[12] J. Langer, Straightening Soliton Curves, Appl. Math. Lett., 14(2000), 387-391.

[13] K. Nakayama, H. Segur, M. Wadati, Integrability and the Motion of Curves, Phys. Rev. Lett., 69 (1992), 2603-2606.

ÖZ GEÇMİŞ

01.01.1958 tarihinde Sivas İlinin Kangal İlçesinin Hamal köyünde doğdum. İlk ve orta tahsilimi sırasıyla Halide Edip Adıvar İlkokulu ve Mehmet Beyazıt Ortaokulu'n da ve liseyi Haydarpaşa Endüstri Meslek Lisesinde 1975-1976 döneminde tamamlayıp, Atatürk Eğitim Enstitüsü Matematik Bölümünden 10.11.1979 yılında mezun oldum. Bilahare Anadolu Üniversitesinin Matematik Lisans Tamamlama Programını 1997–1998 öğretim yılı haziran döneminde bitirdim. 30.11.1992-04.10.1999 arası yakacık teknik ve endüstri meslek lisesi,04.10.1999 tarihinden beri maltepe anadolu Meslek Lisesinde matematik öğretmeni olarak görev yapmaktayım. Beykent Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Uygulamalı Matematik Programına 29 Eylül 2007 tarihinde yüksek lisans öğrencisi olarak kaydoldum. Evli ve 1 çocuk babasıyım.