T.C.

BEYKENT UNIVERSITY

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANA BİLİM DALI

UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

MINKOWSKI UZAYINDA EĞRİLER VE ELASTİK OLMAYAN HAREKETLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Figen TANDOĞAN

Öğrenci NO: 070860003

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mehmet ERDOĞAN

İstanbul, 2009

MINKOWSKI UZAYINDA EĞRİLER VE ELASTİK OLMAYAN HAREKETLERİ

İÇİNDEKİLER *ii*

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışma konusunu veren, gerek ders gerekse tezin hazırlanması aşamalarında bana her türlü desteği veren değerli hocam ve danışmanım Prof. Dr. Mehmet ERDOĞAN'A ve yüksek lisans derslerinde her türlü destek ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocalarım Prof. Dr. Mahir RESULOV ve Yard. Doç.Dr. Bahaddin SİNSOYSAL' a teşekkür ederim.

Figen TANDOĞAN

ÖZET

Bu tez çalışması 5 bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, düzlemsel eğrilerin evolüsyon probleminin tarihsel gelişimi ve çeşitli yazarlar tarafından yapılan katkılar incelenerek E_1^3 Minkowski uzayında inceleyeceğimiz problem ifade edildi.

İkinci bölümde, E_1^3 Minkowski uzayı ile ilgili temel kavramlar verildi ve bu uzaydaki vektörler uzaysal, zamansal ve ışıksal olarak sınıflandırılarak eğrilerin lokal teorileri bu sınıflandırmaya göre incelendi.

Üçüncü bölümde, E_1^3 Minkowski uzayında genel bir düzlem eğrisinin eğriliğinin farklı şekillerdeki tanımları yapılarak, eğrilerin karekterlerine göre Frenet-Serre denklemleri verildi. Ayrıca, farklı karekterlere sahip sabit eğrilikli düzlemsel eğriler incelendi.

Dördüncü bölümde, E_1^3 Minkowski uzayında zamansal uzay eğrilerinin elastik olmayan hareketleri incelenerek evolüsyon denklemleri elde edildi ve zamansal düzlem eğriler için bu denklemlerin çözümü verildi.

Beşinci ve son bölüm ise genel sonuçları ve E_1^3 deki ışıksal eğriler hakkında bir değerlendirmeyi kapsamaktadır.

ABSTRACT

This study consist of five chapters.

In the first chapter, we give an historical development of the evolution problem and search through the works have been done before in literature and then describe the problem which we study in Minkowski 3- space E_1^3.

In the second chapter, we give the fundamental notions about Minkowski 3- space E_1^3 and classify the vectors in this space as spacelike, timelike and lightlike or null and also investigate the local theory of these curves based on this classification.

In the third chapter, different types of the curvature of a curve and Frenet-Serre equations of the curves having different causal character in Minkowski 3- space E_1^3 are given and further more it is investigated the curves with constant curvature.

In the fourth chapter, we study evolution equations of inelastic plane curves which is timelike and obtain the solution of evolution equation of a timelike planar curve in Minkowski 3- space E_1^3.

Finally, the last chapter covers general remarks and an evaluation on lighlike curves in E_1^3.

1. GİRİŞ

Fizik, kimya ve biyolojideki lineer olmayan problemlerin çoğu eğri ve yüzeylerin dinamikleri yardımıyla açıklanabilir, ayrıca eğri ve yüzeylerin evolüsyon denklemleri bilgisayarda görüntü işlemede önemli uygulama alanlarına sahiptir. Diferansiyel geometri ve kımi türevli diferansiyel denklemler farklı disiplinler olmasına karşın E^3 Öklid uzayı veya E_1^3 Minkowski uzayındaki eğri ve yüzeylerin lokal özelliklerini çalışırken bazı kımi türevli diferansiyel denklemler ile karşılaşırız. Örneğin Liouville ve Sine-Gordon denklemleri sabit Gauss eğrilikli yüzeyleri tanımlar. Gauss-Codazzi-Mainardi denklemleri E^3 Öklid uzayı veya E_1^3 Minkowski uzayına gömülmüş yüzeyleri tanımlar. Son yıllarda diferansiyel geometrinin farklı bir yönü soliton teorisinde karşımıza çıkmıştır. Eğri ailelerinin hareketleri için Frenet-Serre denklemleri, bu eğrilerin eğrilikleri olan κ ve τ fonksiyonlarının belirli kısmi türevli diferansiyel denklemleri ile verilir. Bazı soliton denklemleri yanında, modified Korteweg de Vries (mKdV), sine-Gordon ve non-lineer Schrodinger denklemleri de uzay eğrilerinin hareketler tarafından ortaya çıkan denklemlerdendir,[12]. Non-lineer evolüsyon denklemlerinin çoğunluğu farklı geometrilerde eğrilerin harekeleri ile ilişkilidir. Örneğin Mullins' in non-lineer difuzyon modeli eğrileri kısaltan hareket problemleri ile açıklanır [11], ayrıca Hasimoto [7], Schrödinger denklemlerinin $\mathbb{R}^3$ deki elastik olmayan eğri hareketlerinden elde edilebileceğini kanıtlamıştır. Elastik olmayan eğri hareketleri hareket süreci boyunca yay uzunluğunun korunduğu harekelerdir. Elastik olmayan eğri akımları içinde gerilme enerjisi barındırmayan hareketleri doğurur. Örneğin sabit uzunluklu bir sicimin salınma hareketi elastik olmayan bir eğri hareketi oluşturur. Bu tür örnekler fiziksel uygulamalarda sıkça karşımıza çıkar. Esnek olmayan eğri hareketleri ayrıca bilgi işlem görüntüleme, bilgisayar animasyonlarında hatta yapısal mekanikte dahi karşımıza çıkmaktadır. Bütün bu uygulamalar eğrilerin zamana göre evolüsyonlarını içerir. Eğrilerin eğrilik vektör alanları boyunca yani ivme vektörleri boyunca evolüsyonlarını çalışmak için Gage, Hamilton ,[3,5] de yeni metotlar bulmuşlar ve Grayson [6] de ısı denklemini kullanarak kapalı düzlemsel eğrilerin bir çembere evolüsyonunu kanıtlamıştır, ayrıca Gage [4] de alanı koruyan düzlemsel eğri evolüsyonunu ve Kwon [9,10] de $\mathbb{R}^3$ deki eğrilerin elastik olmayan hareketlerini incelemiştir.

Bu tez çalışmasında biz 3-boyutlu Minkowski uzayında elastik olmayan eğri hareketlerini ve bu hareketelerin varlığı için gerekli ve yeter koşulları eğrilik ve burulma fonksiyonlarını içeren kısmi türevli diferansiyel denklemler yardımıyle ifade ettik.

2. E_1^3 LORENTZ-MINKOWSKI UZAYI VE MINKOWSKI UZAYINDA EĞRİLER

2.1. E_1^3 Lorentz- Minkowski Uzayı ile ilgili temel kavramlar

$\mathbb{R}^3$, 3-boyutlu reel vektör uzayı olsun. $\mathbb{R}^3$ deki vektörleri

$$e_1 = (1,0,0),\ \ e_2 = (0,1,0),\ \ e_3 = (0,0,1)$$

olmak üzere $\{e_1, e_2, e_3\}$ bazına göre $x = (x_1, x_2, x_3)$ biçiminde veya $x = \sum_{i=1}^{3} x_i e_i$ şeklinde vektörel biçimde göstereceğiz. $\{u_1, u_2, ..., u_m\}$ sonlu sayıda vektörün oluşturduğu bir küme ise bu vektörlerin lineer birleşimlerinin oluşturduğu

$$\langle u_1, ..., u_m \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{m} a_i u_i :\ \ a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

kümesine $\{u_1, u_2, ..., u_m\}$ kümesinin vektörleri tarafından gerilen *alt vektör uzayı* adını vereceğiz, [1].

Tanım 2.1.1 Lorentz metriği adını vereceğimiz ve $u = (u_1, u_2, u_3),\ \ \mathrm{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektörleri için

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 - u_3 v_3 \qquad (2.1)$$

şeklinde tanımlanan $\langle , \rangle$ Minkowski metriği ile birlikte $E_1^3 = \left(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle\right)$ metrik uzayına 3-boyutlu Minkowski uzayı adı verilir. Burada metrik negatif işaretin sayısının 1 olması nedeniyle indeksi 1 olan non-dejenere bir metriktir, yani $\forall v \in E_1^3$ için $\langle u, v \rangle = 0 \Rightarrow u = 0$ önermesi sağlanır. Yukarıdaki (2.1) ifadesini bazen

$$\langle u,v\rangle = u^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} v = u^t G v$$

şeklinde de yazacağız. Yukarıdaki tanımı Lorentz metriğini genelleştirmek suretiyle daha yüksek boyutlara genişletmemiz mümkündür, şöyleki; $E_1^n = \left(\mathbb{R}^n, \langle,\rangle\right)$. Metriğin katsayılarını bir $\{e_1, e_2, e_3\}$ bazına göre $g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$ şeklinde gösterirsek metriği matris formunda

$$diag[1,1,-1] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

biçiminde yazabiliriz.

Tanım 2.1.2 E_1^3 Minkowski uzayında bir v vektörü

i) $\langle v,v\rangle > 0$ veya $v = 0$ koşulunu sağlarsa uzaysal (*spacelike*),

ii) $\langle v,v\rangle < 0$ koşulunu sağlarsa zamansal (*timelike*),

iii) $v \neq 0$ için $\langle v,v\rangle = 0$ koşulunu sağlarsa ışıksal (*lightlike, null, isotropic*) vektör

olarak adlandırılır. Bu tanıma göre $v = 0$ vektör uzaysal bir vektördür.

Tanım 2.1.3 E_1^3 Minkowski uzayının ışıksal vektörlerinin

$$C = \left\{(x,y,z) \in E_1^3 :\ x^2 + y^2 - z^2 = 0\right\} - \left\{(0,0,0)\right\}$$

şeklindeki kümesine E_1^3 in ışık konisi (*light-cone*) adı verilir. Benzer şekilde,

$S = \left\{(x,y,z) \in E_1^3 :\ x^2 + y^2 - z^2 > 0\right\}$ ve $T = \left\{(x,y,z) \in E_1^3 :\ x^2 + y^2 - z^2 < 0\right\}$

kümelerine de sırasıyla uzaysal ve zamansal vektörlerin kümesi diyeceğiz.

Şimdi $\mathbb{R}^3$ ün bir U alt kümesini göz önüne alalım ve E_1^3 deki Minkowski metriğini U alt kümesine kısıtlayalım, yani $u, v \in U$ için $\langle u,v\rangle_U = \langle u,v\rangle$ olsun. Bu kısıtlanmış metriğin pozitif tanımlı, indeksi 1 olan non-dejenere bir metrik veya dejenere ve $U \neq \{0\}$ olmasına göre U alt kümesine sırasıyla uzaysal, zamansal veya ışıksal karaktere (*Causal character*) sahiptir diyeceğiz. Benzer tanımlama vektörler için de geçerlidir. Böylece $\mathbb{R}^3$ ün herhangi bir alt kümesi bu üç karakterden birine daima sahip olur.

Örnek 2.1.1 E_1 ve E_2 vektörleri uzaysal ve E_3 zamansal bir vektör ise;

a) $E_2 + E_3$ ışıksaldır.

b) $\langle E_1, E_2 \rangle$ düzlemi uzaysaldır, $\langle E_1, E_3 \rangle$ ve $\langle E_2, E_3 \rangle$ düzlemleri zamansal ve $\langle E_1, E_2 + E_3 \rangle$ düzlemi de ışıksaldır.

c) $E_1 + E_2 + E_3$ vektörü zamansaldır ancak $\langle E_1, E_1 + E_2 + E_3 \rangle$ düzlemi ışıksaldır.

d) $E_2 + E_3$ vektörü ışıksaldır ancak $\langle E_2 + E_3, E_3 \rangle$ düzlemi zamansaldır.

Tanım 2.1.4 g non-dejenere bir metrik olmak üzere (V, g) metrik uzayını göz önüne alalım. $U \subset V$ alt kümesi V nin bir alt vektör uzayı olmak üzere V nin

$$U^{\perp} = \{v \in V : \ \forall u \in U, g(u,v) = 0\}$$

alt vektör uzayına U ya ortogonal alt uzay adı verilir.

Teorem 2.1.1 (V, g) bir metrik uzay ve g bir non-dejenere metrik olsun.

i) $U \subset V$ bir alt uzay ise $boyU^{\perp} = boyV - boyU$ dir.

ii) $U \subset V$ bir alt uzay ise $\left(U^{\perp}\right)^{\perp} = U$ dır.

iii) $U \subset V$ bir non-dejenere alt uzay ise o takdirde $U^{\perp}$ de bir non-dejenere alt uzaydır.

Kanıt.

i) U nun bir $\{e_1, ..., e_m\}$ bazını V nin bir $\{e_1, ..., e_n\}$ bazına genişletelim. $u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in U^{\perp}$ vektörünü alalım. Bu durumda,

$$0=\left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i , e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} g_{ji} x_i = 0,\ 1 \le j \le m$$

yazabiliriz, sağdaki denklemi ise matris formunda

$$\begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{m1} & \cdots & g_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

veya $AX=0$ ve $A=\left(g_{ij}\right)_{m\times n}$ şeklinde yazarız. *A* matrisinin rankı *m* olduğundan $AX=0$

homojen denklem sisteminin çözüm uzayı *n-m* boyutlu olur ki bu isteneni kanıtlar.

ii) $\left(U^{\perp}\right)^{\perp} \subset U$ ve $boy\left(U^{\perp}\right)^{\perp} = boyU$ olduğundan $\left(U^{\perp}\right)^{\perp} = U$ elde ederiz.

iii) *U* nun ortonormal bir $\beta=\{e_1,...,e_m\}$ bazı verilsin, böylece $g|_U$ metriğinin matrisi asıl köşegen elemanları sadece 1 ve -1 lerden oluşur. *U* nun β bazını *V* nin ortonormal $\{e_1,...,e_n\}$ bazına genişletelim. $boyU^{\perp}=n-m$ olduğundan $\{e_{m+1},...,e_n\}$ kümesi $U^{\perp}$ in bazını oluşturacağından teoremin bu kısmıda kanıtlanmış olur.

Şimdide alt uzayları causal karakterlerine bağlı olarak karakterize eden bir teorem kanıtlayacağız.

Teorem 2.1.2

i) $v\in E_1^3$ olsun. Bu durumda, *v* nin zamansal bir vektör olması için gerek ve yeter koşul $\langle v\rangle^{\perp}$ in uzaysal olmasıdır, bu durumda $E_1^3=\langle v\rangle \oplus \langle v\rangle^{\perp}$ dir. Benzer olarak, *v* nin uzaysal bir vektör olması için gerek ve yeter koşul $\langle v\rangle^{\perp}$ in zamansal olmasıdır.

ii) $U\subset V$ bir alt uzay olsun. *U* nun uzaysal olması için gerek ve yeter koşul $U^{\perp}$ in zamansal olmasıdır.

iii) *U* bir alt uzay ise, *U* nun ışıksal olması için gerek ve yeter koşul $U^{\perp}$ in ışıksal olmasıdır.

Kanıt.

i) v bir zamansal vektör ise onu gerekirse bir sayı ile çarparak $\beta = \{e_1, e_2, v\}$, E_1^3 in ortonormal bir bazı olacak şekilde v yi β bazına dahil edebiliriz. O zaman $\langle v \rangle^{\perp} = \langle e_1, e_2 \rangle$ düzlemi E_1^3 in uzaysal bir alt uzayı olur. Böylece, $E_1^3 = \langle v \rangle \oplus \langle v \rangle^{\perp}$ dır. Tersine, eğer $\{e_1, e_2\}$, $\langle , \rangle\big|_{\langle , \rangle^{\perp}}$ pozitif tanımlı bir metrik olmak üzere , $\langle v \rangle^{\perp}$ in ortonormal bir bazı ise o zaman $\{e_1, e_2, v\}$ de E_1^3 in metriği köşegensel olan bir bazıdır, yani $g_{11} = g_{22} = 1$ ve $g_{33} < 0$ dır dolayısıyla v bir zamansal vektördür.

ii) U , E_1^3 in zamansal bir alt uzayı U da zamansal bir vektör v olsun. O zaman $U^{\perp} \subset \langle v \rangle^{\perp}$ dir. $\langle v \rangle^{\perp}$ uzaysal olacağından $U^{\perp}$ uzaysal olacaktır. Tersi $\left(U^{\perp}\right)^{\perp} = U$ olduğunu göz önüne alarsak kolayca görülür.

iii) Teoremin bu kısmı ilk iki şıkkın bir sonucudur.

Lorentz –Minkowski uzayı E_1^3 ün E^3 Öklid uzayından farkı, uzunluğu negatif olabilen vektörleri içermesi ve daha ilginci uzunluğu sıfır olan fakat kendisi sıfır vektör olmayan ışıksal vektörleri de içermesidir. Bu durum, Lorentz –Minkowski uzayında çalışırken Öklid uzayında olmayan bazı zorlukları da ortaya çıkarır. Şimdi de ışıksal vektörlerin bazı özelliklerini vereceğiz.

Teorem 2.1.3 1) u ve v iki ışıksal vektör olsun. Bunların lineer bağımlı olması için gerek ve yeter koşul $\langle u, v \rangle = 0$ olmasıdır.

2) u ve v nin her ikiside $\langle u, v \rangle = 0$ olacak şekilde zamansal veya ışıksal vektörler ise o takdirde bu vektörlerin her ikiside ışıksal vektörlerdir.

3) U bir ışıksal alt uzay ise o takdirde $boy\left(U \cap U^{\perp}\right) = 1$ dir.

Kanıt:

1) u ve v den biri diğerinin bir katı ise vektörler ışıksal olduklarından ortogonal olurlar, yani $\langle u,v\rangle = 0$ dır. Tersine, $\langle u,v\rangle = 0$ yani vektörler ortogonal olsunlar.

$E_1^3 = \langle E^3\rangle^{\perp} \oplus \langle E^3\rangle$ şeklindeki direkt toplam ayrışımını kullanarak,

$u = x + w,\ v = y + w$ şeklinde yazalım: Kabul edelimki w vektörü göstermek istediğimiz gibi yani, her iki ayrışımda yani hem $\langle E^3\rangle^{\perp}$ de ve hemde $\langle E^3\rangle$ de aynı olsun. u ve v nin her ikiside ışıksal ve $\langle u,v\rangle = 0$ olduğundan

$$\langle x,y\rangle + \langle w,w\rangle + \langle x,w\rangle + \langle y,w\rangle = 0\,,$$

$$\langle x,x\rangle + \langle w,w\rangle + 2\langle x,w\rangle = 0\,,$$

$$\langle y,y\rangle + \langle w,w\rangle + 2\langle y,w\rangle = 0$$

denklemlerini yazabiliriz. Bu üç denklemi birlikte kullanarak $|x|^2 + |y|^2 - 2\langle x,y\rangle = 0$ veya $|x-y|^2 = 0$ elde ederiz, o halde buradan $x-y$ uzaysal yani $x - y \in \langle w\rangle^{\perp}$ olduğundan $x = y$ olacağından $u = v$ sonucunu buluruz.

2) u ve v zamansal iseler $\langle u,v\rangle \neq 0$ dır. Çünkü $\langle v\rangle^{\perp}$ uzaysal bir alt uzay olmak üzere $E_1^3 = \langle v\rangle^{\perp} \oplus \langle v\rangle$ olduğunu kullanarak $u = x + \lambda v$ yazabiliriz. Böylece

$$\langle u,v\rangle = \langle v,x\rangle + \lambda\langle v,v\rangle = \lambda\langle v,v\rangle$$

yazarız. Eğer $\langle u,v\rangle = 0$ olsaydı bu durumda $\lambda = 0$ ve dolayısıyla $u = x$ olur ve u uzaysal olurdu. O nedenle her iki vektörde ışıksal olmak zorundadır.

3) Eğer $u, v \in U \cap U^{\perp}$ ise $\langle u, v \rangle = 0$ dır. Böylece u ve v lineer bağımlıdır. Bu ise

$boy\left(U \cap U^{\perp}\right) \leq 1$ olduğunu gösterir. Eğer boyut tam olarak sıfır ise bu durumda

$E_1^3 = U \oplus U^{\perp}$ olacağından E_1^3 deki her vektör ışıksal olacaktır.

Şimdide zamansal alt uzaylar için aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 2.1.4 $U \subset E_1^3$ iki boyutlu bir alt uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler eşdeğerdir:

i) U bir zamansal alt uzaydır.

ii) U lineer bağımsız iki ışıksal vektör içerir.

iii) U bir zamansal vektör içerir.

Kanıt

$i \Rightarrow ii$ $\{e_1, e_2, e_3\}$ E_1^3 in ortonormal bir bazı olsun. Bu halde $e_2 + e_3$ ve $e_2 - e_3$ lineer bağımsız ışıksal iki vektördür.

$ii \Rightarrow iii$ u ve v lineer bağımsız iki ışıksal vektör ise $u + v$ veya $u - v$ zamansal olmak zorundadır, çünkü

$$\langle u \pm v, u \pm v \rangle = \pm 2 \langle u, v \rangle$$

dir ve $\langle u, v \rangle \neq 0$ olduğundan her iki vektörde zamansal olmak durumundadır.

$iii \Rightarrow i$ v, U da bir zamansal vektör olsun. Bu durumda $U^{\perp} \subset \langle v \rangle^{\perp}$ dir ve $\langle v \rangle^{\perp}$ zamansal vir alt uzaydır, bu nedenle $U^{\perp}$ uzaysal olacağından U zamansal olacaktır.

Şimdi de ışıksal alt uzayları karakterize eden aşağıdaki teoremleri kanıtlayalım.

Teorem 2.1.5 $U \subset E_1^3$ bir alt uzay olsun. Aşağıdaki önermeler eşdeğerdir.

i) U bir ışıksal alt uzaydır.

ii) U ışıksal bir vektör kapsar ancak zamansal bir vektörü kapsamaz.

iii) E_1^3 deki ışık konisi C ve ışıksal vektörlerin kümeside L olmak üzere

$U \cap C = L - \{0\}$ ve $boyL = 1$ dir.

Kanıt

$i \Rightarrow ii$ $\langle , \rangle$ metriği dejenere metrik olduğundan U bir ışıksal vektör kapsar ancak Teorem 2.1.4 den dolayı U hiç bir zamansal vektör kapsayamaz.

$ii \Rightarrow iii$ U ışıksal vektöre sahip olduğundan $U \cap C$ boş olmayan bir kümedir. Yine Teorem 2.1.4 den dolayı lineer bağımsız iki ışıksal vektör kapsanırsa bu durumda bir zamansal vektörde kapsanmak durumundadır, bu ise iddiayı kanıtlar.

$iii \Rightarrow i$ Teorem 2.1.4 den dolayı U ne uzaysal ne de zamansal alt uzaydır.

Teorem 2.1.6 P, E_1^3 de bir düzlem olsun. Öklid metriğine göre $\vec{n}$ vektörü düzleme ortogonal ise P nin uzaysal (sırasıyla zamansal, ışıksal) bir düzlem olması için gerek ve yeter koşul $\vec{n}$ nin zamansal (sırasıyla uzaysal, ışıksal) bir vektör olmasıdır.

Kanıt $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ ax + by + cz = 0\}$ olsun. Böylece $\vec{n}$ ile (a,b,c) vektörleri lineer bağımlıdır. Üstelik,

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ ax + by - (-c)z = 0\} = \langle (a,b,-c) \rangle^{\perp}$$

yazabileceğimizden $\vec{n}$ ile $(a,b,-c)$ vektörlerinin causal karakterleri aynı olur ki bu teoremi kanıtlar.

Tanım 2.1.5 $u \in E_1^3$ verilsin. $|u| = \sqrt{|\langle u,u \rangle|}$ sayısına u vektörünün normu (uzunluğu) veya modülü diyeceğiz. Buna göre eğer u vektörü uzaysal ise $|u| = \sqrt{\langle u,u \rangle}$**,** eğer zamansal ise $|u| = \sqrt{-\langle u,u \rangle}$ olacaktır.

Teorem 2.1.7 P, E_1^3 de bir uzaysal düzlem ve $\langle v,v\rangle=-1$ olmak üzere $P=\langle v\rangle^{\perp}$ şeklinde ise o takdirde $\mathbb{R}^3$ deki $\langle , \rangle_{\varepsilon}$ Öklid metriğine göre

$$|v|_{\varepsilon}\geq 1$$

dir.

Kanıt $P=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ ax+by+cz=0\}$, $\vec{n}=(a,b,c)$ olmak üzere $a^2+b^2+c^2=1$ yazarsak $v=\dfrac{(a,b,-c)}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}$ olmak üzere $\langle v,v\rangle=-1$ olduğundan $P=\langle v\rangle^{\perp}$ diyebiliriz. Böylece v nin Öklid normunu hesaplarsak

$$|v|_{\varepsilon}^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{c^2-a^2-b^2}=\frac{1}{c^2-a^2-b^2}\geq 1$$

buluruz.

E_1^3 deki zamansal vektörlerin kümesini T ile gösterelim. $\forall u\in T$ için u nun *zamansal konisini*

$$C(u)=\{v\in T:\ \langle u,v\rangle<0\}$$

kümesi olarak tanımlarız. $u\in C(u)$ olduğundan bu küme boş değildir, üstelik T, $C(u)$ ile $C(-u)$ ayrık kümelerinin birleşim kümesidir. Çünkü, eğer $v\in T$ ise o zaman $\langle u,v\rangle\neq 0$ dır ve ya $v\in C(u)$ veya $v\in C(-u)$ dir. Üstelik $C(u)\cap C(-u)=\varnothing$ dir. Aşağıdaki teoremler ile zamansal koninin bazı özelliklerini verelim:

Teorem 2.1.8

i) İki zamansal u ve v vektörlerinin aynı zaman konisinde bulunmaları için gerek ve yeter koşul $\langle u,v\rangle<0$ olmasıdır.

ii) $u\in C(v)$ olması için gerek ve yeter koşul $C(u)=C(v)$ olmasıdır.

iii) Zaman konileri konveks kümelerdir.

Kanıt

i) $\langle u,v\rangle < 0$ ise o zaman $u \in C(v)$ dir. $u,v \in C(w)$ olduğunu kabul edelim. $\langle w,w\rangle = -1$ kabul edebiliriz. $x,y \in \langle w\rangle^{\perp}$ olmak üzere $u = x + aw$ ve $v = y + bw$ yazalım. $\langle w\rangle^{\perp}$ bir uzaysal alt uzay olduğundan $|\langle x,y\rangle| \le |x||y|$ dir, böylece

$$\langle u,v\rangle = -ab + \langle x,y\rangle \le -ab + |x||y|$$

buluruz. O halde $\langle x,x\rangle < a^2$ ve $\langle y,y\rangle < b^2$ olduğundan ispat tamamlanır.

ii) $u \in C(v)$ ise o zaman $\langle u,v\rangle < 0$ olduğundan $v \in C(u)$ dır.

iii) $u,v \in C(w)$ ve $t \in [0,1]$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\langle tu + (1-t)v, w\rangle = t\langle u,w\rangle + (1-t)\langle v,w\rangle < 0$$

bulunur ki bu $tu + (1-t)v \in C(w)$ olması demektir.

Şimdide zamansal vektörler için Cauchy-Schwartz eşitsizliği benzeri bir teoremi kanıtlayacağız. Böylece iki zamansal vektör arasındaki açıyı tanımlama olanağı elde ederiz.

Teorem 2.1.9 *u* ve *v* iki zamansal vektör olsun. O takdirde

$$|\langle u,v\rangle| \ge \sqrt{-\langle u,u\rangle}\sqrt{-\langle v,v\rangle}$$

dir. Burada eşitlik halinin gerçekleşmesi için gerek ve yeter koşul iki vektörün orantılı olması yani lineer bağımlı olmasıdır, bu durumda her iki vektörde aynı zaman konisi içinde bulunur ve $\langle u,v\rangle = -|u||v|\cosh\varphi$ olacak şekilde bir tek $\varphi \ge 0$ sayısı mevcuttur. Bu φ sayısına *u* ve *v* vektörleri arasındaki *hiperbolik açı* adı verilir.

Kanıt *u* ve *v* lineer bağımsız iki zamansal vektör olsun. Böylece, $U = \langle u,v\rangle$ zamansal bir düzlemdir. Teorem 2.1.4 den dolayı *a* ve *b* ye göre

$$\langle au + bv, au + bv\rangle = a^2\langle u,u\rangle + b^2\langle v,v\rangle + 2ab\langle u,v\rangle = 0$$

şeklindeki denklemin çözümü vardır. Üstelik *v* vektörünün zamansal oluşuna aykırı olarak $a \neq 0$ dır. Böylece *a* ile bölersek λ ya göre ikinci dereceden

$$\langle u,u\rangle + 2\lambda\langle u,v\rangle + \lambda^2\langle v,v\rangle = 0$$

denklemi çözüme sahip olur. Özel olarak, ikinci derece denkleminin diskriminantı pozitif olması gerektiğinden

$$\langle u,v\rangle^2 > \langle u,u\rangle\langle v,v\rangle$$

olur. Bu *u* ve *v* nin lineer bağımsız olması hali için istenen eşitsizliği kanıtlar. Diğer taraftan *u* ve *v* orantılı yani lineer bağımlı iseler bu halde eşitlik elde ederiz.

Teoremin ikinci kısmını kanıtlamak için

$$\frac{\langle u,v\rangle^2}{\left(-\langle u,u\rangle\right)\left(-\langle v,v\rangle\right)} \geq 1$$

olsun. Eğer *u* ve *v* aynı zaman konisi içinde iseler o zaman $\langle u,v\rangle < 0$ olacağından yukarıdaki ifadeden

$$\frac{-\langle u,v\rangle}{\sqrt{-\langle u,u\rangle}\sqrt{-\langle v,v\rangle}} \geq 1$$

buluruz. Hiperbolik kosinüs fonksiyonu $\cosh : [0,\infty) \to [1,\infty)$ şeklinde birebir bir fonksiyon olduğundan

$$\cosh\varphi = \frac{-\langle u,v\rangle}{\sqrt{-\langle u,u\rangle}\sqrt{-\langle v,v\rangle}}$$

olacak şekilde birtek φ sayısı bulunmuş olur. Böylece aşağıdaki sonucu ifade edebiliriz.

Sonuç 2.1.1 Eğer *u* ve *v* aynı zaman konisi içinde bulunan iki zamansal vektör ise o takdirde

$$|u+v| \geq |u| + |v|$$

dir ve eşitlik halinin geçerli olması ancak ve ancak *u* ve *v* orantılı yani lineer bağımlı olması durumunda geçerlidir.

Tanım 2.1.6 $u, v \in E_1^3$ olsun. *u* ile *v* nin Lorentzian vektörel çarpımı

$$\langle u \times v, w \rangle = \det(u, v, w) \qquad (2.2)$$

koşulunu gerçekleyen bir $u \times v$ vektörüdür. Buradan

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & -k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \qquad (2.3)$$

olacağı açıktır. Metriğin bilineer oluşundan bu vektör mevcut ve birtek olacağı açıktır. Eğer Öklidsel vektör çarpımını $u \times_\varepsilon v$ ile gösterirsek $u \times_\varepsilon v$ nin $z = 0$ düzlemine göre yansıması $u \times v$ vektörü olarak bulunacaktır.

Teorem 2.1.10 Vektörel çarpımın aşağıdaki özelikleri vardır.

i) $u \times v = -v \times u$,

ii) $u \times v$ vektörü hem *u* vektörüne hemde *v* vektörüne ortogonaldir,

iii) $u \times v = 0$ olması için gerek ve yeter koşul *u* ile *v* nin lineer bağımsız olmasıdır,

iv) $u \times v \neq 0$ vektörünün $P = \langle u, v \rangle$ düzleminde bulunması için gerek ve yeter koşul *P* düzleminin ışıksal bir düzlem olmasıdır.

2.2. E_1^3 Lorentz- Minkowski Uzayında Parametrik eğriler ve Frenet-Serre Denklemleri

Tanım 2.2.1 Diferansiyellenebilir $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to E_1^3$ dönüşümü Minkowski uzayında bir eğri göstersin. Bir $t \in I$ için $\alpha'(t)$ vektörü uzaysal (sırasıyla zamansal veya ışıksal) ise α eğrisine $\alpha(t)$ noktasında uzaysaldır (sırasıyla zamansaldır veya ışıksaldır) denir. Eğer $\forall t \in I$ için

$\alpha'(t)$ vektörü uzaysal (sırasıyla zamansal veya ışıksal) ise α eğrisine uzaysal (sırasıyla zamansal veya ışıksal) bir eğri adı verilir.

O halde genel olarak E_1^3 de bir eğri bu üç sınıftan birine ait olmak zorunda değildir, yani I nın tamamında eğri aynı cinsten olmayabilir, örneğin; $\alpha(t) = \left(\cosh t, t^2, \sinh t\right)$ eğrisi için

$$\left\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \right\rangle = 4t^2 - 1$$

olduğundan bu eğri $\left(-\infty, -1/2\right) \cup \left(1/2, \infty\right)$ aralığında uzaysal, $\left(-1/2, 1/2\right)$ aralığında zamansal ve $\left\{-1/2, 1/2\right\}$ kümesi üstünde de ışıksaldır. Üstelik uzaysal veya zamansal olma özelikleri açık özeliklerdir, yani eğer α eğrisi bir $t_\circ \in I$ noktasında uzaysal veya zamansal ise bu durumda $t_\circ \in I$ noktasının $\left(t_\circ - \delta, t_\circ + \delta\right)$ şeklinde bir δ -komşuluğu, α eğrisi bu komşuluğun tamamında uzaysal veya zamansal olacak şekilde bulunabilir. O halde bir $t_\circ \in I$ noktasında $\left\langle \alpha'(t_\circ), \alpha'(t_\circ) \right\rangle > 0$ (veya <0) ise o takdirde α eğrisinin I üstünde sürekli olması nedeniyle $t_\circ$ ın en az bir komşuluğu, bu komşuluktaki $\forall t$ için $\left\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \right\rangle > 0$ (veya <0) olacak şekilde bulunabileceği garanti edilir.

Tanım 2.2.2 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to E_1^3$ eğrisi verilsin. Eğer bir $t_\circ \in I$ noktasında $\alpha'(t_\circ) \neq 0$ ise bu noktada eğri düzgün (regüler) dir deriz, eğer $\forall t \in I$ için α eğrisi düzgün ise eğriye sadece düzgündür deriz.

Şimdi E_1^3 de bazı düzlemsel eğri örnekleri vermek istiyoruz. $p, v \in \mathbb{R}^3$ ve $r > 0$ verilsin.

1) $\alpha(t) = p + tv$ doğrusu v ile aynı causel karaktere sahip bir eğridir.

2) $\alpha(t) = p + r(\cos t, \sin t, 0)$ çemberi uzaysal bir düzlemde kapsanan uzaysal bir eğridir.

3) $\alpha(t) = p + r(0, \sinh t, \cosh t)$ hiperbolü zamansal bir düzlemde kapsanan uzaysal bir eğridir.

4) $\alpha(t) = p + r(0, \cosh t, \sinh t)$ hiperbolü ışıksal bir düzlemde kapsanan zamansal bir eğridir.

5) $\alpha(t)=(t,t^2,t^3)$ parabolü ışıksal bir düzlemde kapsanan uzaysal bir eğridir.

Şimdi de düzlemsel olmayan bazı eğri örnekleri verelim.

1) $\alpha(t)=\left(\cos t,\sin t,at\right),a\neq 0$ helisi bir Öklidyen helistir.

2) $\alpha(t)=\left(at,\sinh t,\cosh t\right),a\neq 0$.

3) $\alpha(t)=\left(at,\cosh t,\sinh t\right),a\neq 0$.

Minkowski uzayında bir eğrinin causal karakteri o eğrinin düzgün oluşunu ve toplojisini tanımlamamızı sağlar.

Teorem 2.2.1 Herhangi bir zamansal veya ışıksal eğri düzgün bir eğridir.

Kanıt Eğrinin zamansal olduğunu kabul edelim ve *x*, *y*, *z* fonksiyonları *t* nin diferansiyellenebilir fonksiyonları olmak üzere $\alpha(t)=\left(x(t),y(t),z(t)\right)$ olsun. Bu durumda

$$\left\langle \alpha'(t),\alpha'(t)\right\rangle = x'(t)^2+y'(t)^2-z'(t)^2<0$$

olması $z'(t)^2\neq 0$ olmasını gerektirir ki bu $\alpha(t)$ eğrisinin düzgün olmasını garanti eder. Eğer $\alpha(t)$ eğrisi ışıksal ise

$$\left\langle \alpha'(t),\alpha'(t)\right\rangle = x'(t)^2+y'(t)^2-z'(t)^2=0$$

olması yine $z'(t)^2\neq 0$ olmasını gerektirir, çünkü aksi takdirde eğer $z'(t)^2=0$ olursa bu durumda yukarıdaki denklemden dolayı $x'(t)=y'(t)=0$ elde ederiz ki bu da $\alpha'(t)=0$ olmasını gerektirir, bu ise eğrinin ışıksal oluşu ile çelişir. Bu nedenle $\alpha'(t)\neq 0$ olmak zorundadır, yani eğri düzgündür.

Sonuç 2.2.1 Zamansal veya ışıksal bir eğri bir $t_\circ$ noktasının bir δ-komşuluğunda düzgün *f* ve *g* fonksiyonları için $t\in\left(t_\circ-\delta,t_\circ+\delta\right)$ olmak üzere

$$\alpha(t)=\left(f(t),g(t),t\right)$$

şeklinde yazılabilir, eğer eğri uzaysal ise bu durumda $\alpha(t)=\left(t,\, f(t), g(t)\right)$ veya $\alpha(t)=\left(f(t), t, g(t)\right)$ yazabiliriz.

Teorem 2.2.2 E_1^3 de kapalı bir α eğrisi bir P afin düzleminde kapsanılsın. O takdirde,

1) α eğrisi uzaysal ise o durumda P uzaysal bir düzlemdir.

2) α eğrisi zamansal veya ışıksal olamaz.

Kanıt

1) Genelliği bozmaksızın P düzleminin bir vektörel düzlem olduğunu göz önüne alabiliriz. Eğer P düzlemi zamansal ise $P=\langle e_2, e_3\rangle$ şeklinde olduğunu varsayalım. O halde $\alpha(t)=\left(0, y(t), z(t)\right)$ yazabiliriz ve $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun diferansiyellenebilir, dolayısıyla sürekli olmasından dolayı bir $t_\circ$ noktasında bir maksimuma sahip olduğunu söyleyebiliriz. Böylece, $y'(t_\circ)=0$ olacağından $\alpha'(t_\circ)=\left(0,0,z'(t_\circ)\right)$ vektörü zamansal olurki bu hal için yapılmış olur. Diğer taraftan eğer P düzlemi ışıksal ise $P=\langle e_1, e_2+e_3\rangle$ şeklinde olduğunu varsabiliriz. Bu durumda $\alpha(t)=\left(x(t), y(t), y(t)\right)$ yazabiliiz ve buradaki $x(t)$ fonksiyonu yukarıdaki gibi bir $t_\circ$ noktasında maksimuma sahip olur. Böylece $\alpha'(t_\circ)=\left(0, y'(t_\circ), y'(t_\circ)\right)$ vektörünün ışıksal olduğu elde edilir ki bu bir çelişmedir, dolayısıyla bu hal içinde ispat tamamlanmış olur.

2) α eğrisinin zamansal olduğunu kabul edelim. Bu durumda uzaysal veya ışıksal düzlemler zamansal vektör kapsayamayacağından düzlem zamansal olmak zorundadır. Eğer $P=\langle e_2, e_3\rangle$ dersek, $z(t)$ fonksiyonunun bir maksimuma sahip olacağı bir $t_\circ$ noktasında $\alpha'(t_\circ)=\left(0, y'(t_\circ), 0\right)$ olurki bu vektör uzaysaldır. Bu ise bir çelişmedir, çünkü α eğrisinin zamansal bir eğri olduğunu kabul etmiştik. O halde

α eğrisi zamansal olamaz. Benzer şekilde α eğrisinin ışıksal olamayacağını da kanıtlayabiliriz, böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 2.2.2 E_1^3 Minkowski uzayında zamansal ve ışıksal kapalı eğri bulunamaz.

Şimdide uzaysal olmayan düzlemlerin kapalı olmayan eğriler içerebileceğini örneklerle gösterelim. $\alpha(s) = (0, \sinh s, \cosh s)$ eğrisi $\langle e_2, e_3 \rangle$ zamansal düzlemde bulunan uzaysal bir eğridir. Benzer şekilde, $\alpha(s) = (s, s^2, s^3)$ eğrisi ışıksal $\langle e_1, e_2 + e_3 \rangle$ düzleminde bulunan uzaysal bir eğridir.

Bundan böyle ele alacağımız bütün eğriler düzgün olacaktır. Aşağıdaki teoremi ispatsız ifade edelim.

Teorem 2.2.3 [2], α eğrisinin uzaysal veya zamansal bir eğri olduğunu kabul edelim. O takdirde $|\alpha'(s)| = 1$ olacak şekilde bir parametre değişimi vardır. Yani $t_\circ \in I$ olsun. $\beta = \alpha \circ \phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to E_1^3$ dönüşümü için $|\beta'(s)| = 1$ olacak şekilde bir $\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to (t_\circ - \delta, t_\circ + \delta)$ dönüşümünü tanımlayan $\varepsilon, \delta > 0$ pozitif reel sayıları daima bulunabilir.

Bu teoremdeki *s* yay uzunluğu fonksiyonu uzaysal eğriler için bilinen klasik ifadesiyle verilirken zamansal eğriler için

$$s(t) = -\int_{t_\circ}^{t} \langle \alpha'(u), \alpha'(u) \rangle \, du$$

biçiminde verilir. Işıksal eğriler içinse durum daha farklı farklıdır. Çünkü eğer $\alpha(t)$ bir ışıksal eğri ise $\alpha'(t)$ hız vektörüde ışıksal olacağından bu eğriyi yay uzunluğu cinsinden yeniden parametrelendirmek anlamsız olacaktır. Ancak $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = 0$ olduğundan bu eşitliğin *t* ye göre diferansiyeli alırsak $\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle = 0$ elde ederiz. $\alpha''(t) \neq 0$ olduğunu kabul edersek o zaman $\alpha''(t)$ uzaysal bir vektör olacağından $\alpha(t)$ eğrisini $|\alpha''(t)| = 1$ olacak biçimde yeniden parametrelendirebiliriz. Bunun mümkün olduğunu aşağıdaki teoremden görebiliriz.

Teorem 2.2.4 E_1^3 de ışıksal bir α eğrisi verilsin. α nın $|\beta''(s)| = 1$ olacak biçimde $\beta(s) = \alpha(\phi(s))$ ile verilen bir yeniden parametrelendirilmiş bir $\beta(s)$ eğrisi vardır. Bu durumda α eğrisi s yay uzunluğuna göre yarı-parametrelendirilmişdir deriz, bu parametreye bazen pseudo-parametre veya pseudo-yay uzunluğu adı da verilir.

Kanıt Bilinmeyen bir ϕ fonksiyonu için $\beta(s) = \alpha(\phi(s))$ yazalım. Bu eşitliği iki kez türetirsek

$$\beta''(s) = \phi''(s)\alpha'(t) + \left(\phi'(s)\right)^2 \alpha''(t)$$

elde ederiz. Buradan

$$\langle \beta''(s), \beta''(s) \rangle = \left(\phi'(s)\right)^4 |\alpha''(t)|^2$$

buluruz ki eğer bu ifade 1 olacak şekilde alırsak ϕ fonksiyonunu

$$\phi'(s) = \frac{1}{\sqrt{|\alpha''(\phi(s))|}}, \ \phi(0) = t_\circ$$

şeklindeki diferansiyel denklemin çözümü olarak tanımlayabiliriz.

3. E_1^3 MINKOWSKI UZAYINDAKİ EĞRİLERİN EĞRİLİKLERİ VE DÜZLEMSEL EĞRİLER

3.1. Eğrilik ve Burulma

Bu bölümde E_1^3 de verilen düzgün bir eğrinin her noktasına bir ortonormal baz karşılık getirerek eğrinin geometrisini bu bazlara göre inceleyeceğiz. Bu baza Frenet çatısı veya bazen Frenet üçyüzlüsü adı verilir. Bu bazın eğri boyunca değişimini incelemek suretiyle eğrinin ambient (üst) uzay içindeki deformasyonu hakkında bilgi sahibi olabileceğiz. Bilindiği üzere en basit eğriler uzaydaki doğrulardır. Eğer $p \in E_1^3$ noktası ve $v \neq 0$ vektörü verilirse bu noktadan geçen ve doğrultusu verilen vektör ile aynı olan doğru $\alpha(t) = p + tv$ şeklinde parametrelendirilir. Böylece $\alpha''(t) = 0$ olacağından eğrinin ivmesi sıfır olur ve doğrunun eğriliğinin sıfır olduğunu söyleriz. Tersine herhangibir s parametresi için $\alpha''(s) = 0$ ise bu denklemi iki kez integre etmek suretiyle doğrunun denklemini elde ederiz. Eğer eğriyi yay uzunluğu olmayan keyfi bir parametre ile yeniden parametrelendirisek, örneğin $\langle e_1 \rangle$ doğrusunu $\alpha(s) = s^3 e_1$ şeklinde bir parametrelendirilmişi göz önüne alırsak $\alpha''(s) = 0$ koşulu gerçeklenmez. Bu nedenle daha kolay çalışabilmek için eğrileri ya yay uzunluğu veya pseudo-yay uzunluğu ile parametrelendirmeyi tercih ederiz.

Tanım 3.1.1 $\alpha(s)$ eğrisi s yay uzunluğu veya pseudo-yay uzunluğu ile parametrelendirilmiş olsun. $T(s) = \alpha'(s)$ vektörüne s noktasındaki tanjant (teğet) vektör diyeceğiz. Buna göre $\langle T(s), T'(s) \rangle = 0$ dır ve her s için $T'(s) \neq 0$ ve $T(s)$ ile $T'(s)$ nin lineer bağımsız olduklarını kabul edeceğiz. $\kappa(s) = |T'(s)|$ ye $\alpha(s)$ eğrisinin s noktasındaki eğriliği adı verilir.

Şimdi eğrileri karakterlerine göre ele alalım:

Zamansal eğriler.

$\alpha(s)$, E_1^3 de zamansal bir eğri olsun. Böylece $T'(s) \neq 0$ dır ve $T(s)$ ile lineer bağımsızdır.

$\alpha(s)$ eğrisinin eğriliği $\kappa(s)$ olmak üzere

$$N(s) = \frac{\alpha''(s)}{|\alpha''(s)|} = \frac{T'(s)}{\kappa(s)} \qquad (3.1)$$

şeklinde tanımlanan vektörü eğrinin normal vektörü olarak tanımlarız. (3.1) den

$\kappa(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle$ elde ederiz.

$$B(s) = T(s) \times N(s) \qquad (3.2)$$

şeklinde tanımlı $B(s)$ vektörüne de eğrinin binormal vektörü adını vereceğiz. $B(s)$ vektörü birim vektör ve uzaysal bir vektördür. Böylece eğrinin her noktasında elde ettiğimiz $\{T, N, B\}$ çatısına E_1^3 in Frenet çatısı adını vereceğiz.

$$\tau(s) = \langle N'(s), B(s) \rangle \qquad (3.3)$$

şeklinde tanımlayacağımız $\tau(s)$ fonksiyon değerine de eğrinin s noktasındaki burulması adını vereceğiz. Eğer T, N, B vektörlerinin türevlerini $\{T, N, B\}$ bazı cinsinden ifade edersek Frenet-Serre denklemleri adını vereceğimiz ve üçünü birden matris notasyonu ile

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} \qquad (3.4)$$

şeklinde göstereceğimiz eğrinin Frenet-Serre denklemlerini elde ederiz.

Uzaysal eğriler.

Şimdide $\alpha(s)$, E_1^3 de uzaysal bir eğri olsun. $T'(s)$ nin causal karakterine göre üç durum söz konusudur.

a) $T'(s)$ vektörü uzaysal olsun. Benzer şekilde, $\kappa(s) = |T'(s)|$, $N(s) = \dfrac{T'(s)}{\kappa(s)}$ ve

$B(s) = T(s) \times N(s)$ yazabiliriz. Ancak bu hal için yukarıda verdiğimiz (3.4) denklemi

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} \qquad (3.5)$$

şeklindedir ve burulma fonksiyonu $\tau = -\langle N', B \rangle$ şeklinde verilir.

b) $T'(s)$ vektörü zamansal olsun. $\kappa(s) = \sqrt{-\langle T'(s), T'(s) \rangle}$ olmak üzere normal vektör $N = \dfrac{T'}{\kappa}$

şeklindedir ve $B(s) = T(s) \times N(s)$ binormal vektör uzaysal bir vektördür. Bu halde (3.4) ve

(3.5) denklemleri

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} \qquad (3.6)$$

şeklindedir. Eğrinin burulması ise $\tau = \langle N', B \rangle$ şeklinde olur.

c) $T'(s)$ vektörü ışıksal olsun. $T'(s) \neq 0$ ve $T(s)$ ile lineer bağımsız olduğundan normal

vektörü $N(s) = T'(s)$ olarak tanımlayabiliriz. $B(s)$ binormal vektör T ye dik olan ve

$\langle N, B \rangle = 1$ koşulunu sağlayan ışıksal bir birim vektördür. Bu hal için Frenet-Serre

denklemleri

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ -1 & 0 & -\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} \qquad (3.7)$$

şeklinde elde edilir. Buradaki τ, α eğrisinin burulmasıdır ancak eğrinin κ eğriliği

tanımlanamaz.

Işıksal eğriler.

Bu halde, α eğrisinin s pseudo-yay uzunluğu ile parametrelendirildiğini ve $\alpha''(s)$ vektörünün uzaysal bir birim vektör olduğunu kabul ediyoruz. Tanjant ve normal vektörler sırasıyla $T = \alpha'$ ve $N(s) = T'(s)$ şeklinde ve binormal vektör ise $N(s)$ ye dik olarak ve $\langle N(s), B(s) \rangle = 1$ koşulunu sağlayan ışıksal bir birim vektör olarak tanımlanır. BU durumda Frenet-Serre denklemleri

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \tau & 0 & -1 \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} \qquad (3.8)$$

şeklinde elde edilir. Buradaki τ bir önceki haldekine benzer olarak α eğrisinin burulmasıdır ancak eğrinin κ eğriliği yine tanımlanamaz.

Eğrinin yay uzunluğu cinsinden parametrelendirilmemiş olması durumunda Öklidyen ambient uzaydaki eğrilerde olduğu gibi eğrilik ve burulma fonksiyonlarını mümkün olan haller için tanımlayabiliriz. Bu durumda, eğriyi $\beta = \alpha \circ \phi$ şeklinde yay uzunluğu cinsinden yeniden parametrelendirirsek $\kappa_\alpha(t) = \kappa_\beta \circ \phi^{-1}$ ve $\tau_\alpha(t) = \tau_\beta \circ \phi^{-1}$ şeklinde tanımlarız ve örneğin zamansal eğriler için

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3} = \frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{\left(-\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle\right)^{3/2}} \qquad (3.9)$$

ve

$$\tau(t) = \frac{\det\left(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t)\right)}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|^2} \qquad (3.10)$$

şeklindeki eğrilik ve burulma ifadelerini elde ederiz.

Şimdi E_1^3 deki düzlemsel zamansal eğriler için Öklidyen düzlemsel eğrilerinkine benzer bir teoremi verelim ve kanıtlayalım.

Teorem 3.1.1 P, E_1^3 de zamansal bir düzlem ve $\kappa : I \to \mathbb{R}$ düzgün bir fonksiyon olsun. Bu takdirde *P* düzlemi içinde eğriliği verilen κ fonksiyonu olan bir uzaysal eğri bulunabilir. Benzer şekilde, *P* düzlemi içinde eğriliği verilen κ fonksiyonu olan bir zamansal eğri vardır.

Kanıt Genelliği bozmaksızın $P = \langle e_1, e_3 \rangle$ ve $p_\circ = (0,0,0)$ alabiliriz.

1) $\alpha(0) = (0,0,0)$ ve $\alpha'(0) = e_1$, $\kappa_\alpha(s) = \kappa(s)$ olacak şekilde bir uzaysal α eğrisi bulmamız gerekir. $\theta : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\theta(s) = \int_0^s \kappa(t)\, dt$$

şeklinde tanımlansın ve

$$x(s) = \int_0^s \cosh(\theta(t))\, dt, \ \mathrm{z}(s) = \int_0^s \sinh(\theta(t))\, dt$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. Böylece $\alpha(s) = \big(x(s), z(s)\big)$ aradığımız eğri olur. Çünkü, öncelikle $\alpha(0) = (0,0)$ dır ve

$$\alpha'(s) = \big(\cosh(\theta(s)), \sinh(\theta(s))\big), \quad \alpha''(s) = \kappa(s)\big(\sinh(\theta(s)), \cosh(\theta(s))\big)$$

olduğundan $\alpha'(0) = \big(\cosh(0), \sinh(0)\big) = (1,0)$ bulunur ki bu α eğrisinin yay uzunluğu cinsinden parametrelendirilmiş bir uzaysal eğri olmasını gerektirir. Buna göre α eğrisinin eğriliği $\kappa(s) = |\alpha''(s)|$ dir.

2) Başlangıç hız vektörü e_3 olan zamansal bir eğri bulmamız içinse $\theta(s) = \int_0^s \kappa(t)\, dt$ ve

$$x(s) = \int_0^s \sinh(\theta(t))\, dt, \ \mathrm{z}(s) = \int_0^s \cosh(\theta(t))\, dt$$

almamız yeterli olacaktır.

3.2. E_1^3 de sabit eğrilikli düzlemsel eğriler

E_1^3 deki bir afin düzlemde kapsanan düzlemsel bir eğri göz önüne alalım. Katı bir hareket sonrası bu afin düzlemi bir düzlem gösteren bir vektör uzayı şeklinde düşünebiliriz. Bu kısımda böylesi bir düzlemde sabit eğrilikli eğrileri inceleyeceğiz.

Teorem 3.2.1 α eğrisi zamansal bir düzlemde kapsanan yay uzunluğu ile parametrelendirilmiş zamansal bir eğri olsun. v ise bu düzlemde $\langle v, e_3 \rangle < 0$ koşulunu sağlayan $(v \in C(e_3))$, yani geleceğe yönlendirilmiş (future-pointing) sabit bir birim vektör olsun. $\phi(s)$, $T(s)$ ile v arasındaki hiperbolik açı ise o takdirde $\kappa(s) = |\phi'(s)|$ dir.

Kanıt. Genelliği bozmaksızın $P = \langle e_1, e_2 \rangle$ ve $v_3 > 0$ olmak üzere $v = (0, v_2, v_3)$ alalım.

$$-\cos\phi(s) = \langle T(s), v \rangle$$

şeklinde tanımladığımızı dikkate alırsak bu eşitliği türetirsek

$$-\phi'(s)\sinh\phi(s) = \kappa(s)\langle N(s), v \rangle$$

elde ederiz. $\{N, T\}$, P düzleminin bir bazı olduğundan

$$v = \langle v, N(s) \rangle N(s) - \langle v, T(s) \rangle T(s)$$

yazabiliriz. Böylece,

$$-1 = \langle v, N(s) \rangle^2 - \langle v, T(s) \rangle^2 = \langle v, N(s) \rangle^2 - \cosh(\phi(s))^2$$

yani, $\langle v, N(s) \rangle = \pm\sinh(\phi(s))$ buluruz, bu nedenle $\kappa(s) = |\phi'(s)|$ dir.

Bu teoremi kanıtladığımıza göre artık sabit eğrilikli düzlemsel eğrileri çalışabiliriz. Bu sabit eğrilik sıfır ise eğrinin bir doğru olacağı açıktır, o nedenle sabit eğriliğin sıfırdan farklı olduğu halleri ele alacağız. Şimdi sabit eğrilikli düzlemsel eğrileri karakterlerine göre inceleyelim:

a) Sabit eğrilikli zamansal eğriler

Bu durumda eğriyi kapsayan düzlemde zamansal olmak zorundadır. O halde $P = \langle e_2, e_3 \rangle$ olduğunu ve böylece $\alpha(s) = y(s)e_2 + z(s)e_3$ şeklinde olduğunu kabul edebiliriz. Eğri yay uzunluğu cinsinden parameterelendirilidiğine göre $y'(s)^2 - z'(s)^2 = -1$ dir. O zaman

$$z'(s) = \cosh\phi(s), \quad y'(s) = \sinh\phi(s)$$

yazabiliriz. Böylece α nın eğriliği

$$\kappa(s) = |\alpha''(s)| = |\phi'(s)| := a$$

şeklinde hesaplanır. Bu durumda $\phi(s) = as + b$ den

$$y' = \sinh(as+b), \quad z'(s) = \cosh(as+b)$$

yazılır ki buradan eğrinin

$$\alpha(s) = \frac{1}{a}\left(\cosh(as+b)e_2 + \sinh(as+b)e_3\right)$$

denklemi ile verilen *P* düzlemindeki bir Öklidyen hiperbol eğrisi olduğunu buluruz.

b) Sabit eğrilikli uzaysal eğriler

Şimdide sabit eğrilikli düzlemsel uzaysal olan eğrileri elde edelim

1) $P = \langle e_1, e_2 \rangle$ olduğunu kabul edelim. Lorentz metriğinin *P* düzlemine indirgenmişi Öklid metriği ile uyuşur. Dolayısıyla, genel olarak uzaysal bir düzlemde sabit eğrilikli olmayan eğrilerin Öklid ve Lorentz eğrilikleri uyuşmak zorunda olmamasına karşın sabit eğrilikli eğriler için her iki anlamdaki eğrilikler çakışacaktır, o nedenle α eğrisi bir Öklid çemberidir.

2) Düzlem zamansal olsun, $x = 0$ düzlemini alabiliriz. Böylece $x'(s)^2 - z'(s)^2 = 1$ olmak üzere $\alpha(s) = \left(x(s), 0, z(s)\right)$ alabiliriz. Buna göre $x'(s) = \cosh(\theta(s)), \quad z'(s) = \sinh(\theta(s))$ olacak biçimde bir $\theta \in$ fonksiyonu vardır. Yukarıda ifade ettiğimiz düşünceyle

$$\alpha(s)=\left(x(s),z(s)\right)=\left(\frac{1}{a}\sinh(as+b),\frac{1}{a}\cosh(as+b)\right)=\frac{1}{a}\left(\sinh(as+b),\cosh(as+b)\right)$$

elde ederiz. O halde, eğri bir Öklid hiperbolüdür.

3) Düzlemin ışıksal olduğunu farzedelim.Bu halde bir eğrinin eğriliği kavramı tanımsızdır. Bir katı hareket ile eğriyi kapsayan düzlemin $y-z=0$ denklemi ile verilen düzlem olduğunu kabul edebiliriz. Böylece eğriyi, $\alpha(s)=\left(x(s),y(s),y(s)\right)$ biçiminde yazarız. Eğri yay uzunluğu parametreli uzaysal bir eğri olduğundan $x'(s)^2=1$ dir. O halde $x(s)=s$ yazabiliriz. Bu durumda $T(s)=\left(1,y'(s),y'(s)\right)$ şeklindedir. $T'(s)$ nin ışıksal olduğunu biliyoruz ve düzlem sadece bir tek ışıksal doğrultu içereceğinden $T'(s)$ ile sabit $v=(0,1,1)$ gibi bir vektör lineer bağımlı olur. O halde $\tau=0$ iken α eğrisinin sabit eğrilikli olacağını söyleyebiliriz. Sonuç olarak $T'(s)=v$ alabiliriz. Bu denklemi integre edersek ω uzaysal bir birim vektör olmak üzere

$$\alpha(s)=p_{\circ}+sw+\frac{s^2}{2}(e_2+e_3)$$

buluruz. Ayrıca $\langle w,w\rangle=1$ olduğundan $c\in\mathbb{R}$ için $w=e_1+c(e_2+e_3)$ almak suretiyle

$$\alpha(s)=p_{\circ}+se_1+\left(cs+\frac{s^2}{2}\right)(e_2+e_3)$$

elde ederiz, o halde eğri bir yeniden parametrelendirmeye kadar ekseni ışıksal doğrultuya paralel olan *P* düzlemi içinde bir parabol eğrisidir.

c) Sabit eğrilikli ışıksal eğriler

α eğrisi bir *P* düzleminde kapsanan ışıksal bir eğri olsun. *P* düzlemi ışıksal veya zamansal olabilir. O nedenle iki durumu ayrı ayrı ele alalım:

1) Düzlem ışıksal olsun. $P = \langle e_1, e_2 + e_3 \rangle$ şeklinde olsun. $\alpha'(s)$ ışıksal olduğundan ve düzlemde bir tek ışıksal doğrultu bulunacağından diferansiyellenebilir bir *f* fonksiyonu için $\alpha'(s) = f(s)(e_2 + e_3)$ yazabiliriz. Böylece α eğrisi bir doğrudur.

2) Düzlem zamansal olsun. $P = \langle e_2, e_3 \rangle$ şeklinde olsun. Düzlemde lineer bağımsız sadece iki doğrultu olduğundan onları $e_2 + e_3$ ve $e_2 - e_3$ doğrultuları olarak alabiliriz ve böylece $\alpha'(s) = f(s)(e_2 \pm e_3)$ yazabiliriz. Diğer taraftan $v = 0$ ışıksal olmadığından *I* aralığı üstünde ya $\alpha'(s) = f(s)(e_2 + e_3)$ veya $\alpha'(s) = f(s)(e_2 - e_3)$ olmalıdır. Sonuç olarak eğri bir doğru olur.

Benzer düşünceyi α eğrisini uzaysal ve *N* asal normalini de ışıksal alırsak $\tau = 0$ iken eğrinin I üstünde sabit eğrilikli olacağını gösterebiliriz. Bu durumda $N'(s) = 0$ olur ve bunu integre edersek $N(s) = v$ uzaysal bir vektör olmak üzere $\alpha'(s) = sv + w$ elde ederiz. Ancak $\langle T, N \rangle = 0$ olduğundan $\forall s$ için $s + \langle v, w \rangle = 0$ bulunur ki bu bir çelişmedir, o halde sadece $v = 0$ dır, yani eğri bir doğrudur.

Sonuç olarak, E_1^3 de katı hareketler dışında sıfırdan farklı sabit eğriliğe sahip olan düzlemsel eğriler Öklidye çemberler, hiperboller ve parabollerdir.

4. E_1^3 MINKOWSKI UZAYINDA EĞRİLERİN ELASTİK OLMAYAN HAREKETLERİ

4.1 Minkowski uzayında uzay eğrilerinin elastik olmayan hareketleri

E_1^3 Minkowski uzayında $\alpha(s)$, $s \in I$, eğrisi yay uzunluğu ile parametrelendirilmiş olsun.

Bu kısımda (2.1) de tanımladığımız metriği

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

şeklinde yazalım, burada $1 \leq i, j \leq 3$ ve $x = \left(x^1, x^2, x^3\right) = \left(x, y, z\right)$ olarak alacağız ve

$g = diag\left(1, -1, -1\right)$ yani diğer bir gösterimle Minkowski metriğini

$$ds^2 = dx^2 - dy^2 - dz^2 \qquad (4.1)$$

şeklinde alacağız. Böylece, $\alpha(s)$ eğrisinin her noktasında ortonormal $\{T, N, B\}$ çatısının

$$g_{ij} T^i T^j = 1, \quad g_{ij} N^i N^j = -1, \quad g_{ij} B^i B^j = -1 \qquad (4.2)$$

koşullarını sağlayacağı açıktır. Burada $T = \dfrac{d\alpha}{ds}$ alıyoruz. $\alpha(s)$ eğrisinin herhangi bir s

noktasında eğrilik ve burulma fonksiyonları sırasıyla κ ve τ olmak üzere Frenet-Serre denklemleri

$$\begin{aligned} \frac{dT^i}{ds} &= \kappa N^i, \\ \frac{dN^i}{ds} &= \kappa T^i - \tau B^i, \\ \frac{dB^i}{ds} &= \tau N^i \end{aligned} \qquad (4.3)$$

denklemleriyle verilir.

Burada T, N ve B sırasıyla $\alpha(s)$ eğrisinin herhangi bir s noktasındaki teğet, normal ve binormal vektörleridir, [1].

Şimdi, E_1^3 Minkowski uzayında başlangıç eğrisinin yay uzunluğu l olmak üzere

$$F:[0,l]\times[0,\omega]\to E_1^3 \qquad (4.4)$$

şeklinde düzgün zamansal eğrilerin 1-parametreli bir ailesini göz önüne alalım. u eğrilerin değişken parametreleri ve $0\le u\le l$ dir. F nin yay uzunluğu

$$s(u)=\int_0^u\left|\frac{\partial F}{\partial u}\right| du \qquad (4.5)$$

şeklinde verilir. Burada, $\left|\frac{\partial F}{\partial u}\right|=\left|\left\langle\frac{\partial F}{\partial u},\frac{\partial F}{\partial u}\right\rangle\right|^{1/2}$ dir. Ayrıca, $v=\left|\frac{\partial F}{\partial u}\right|$ olmak üzere $\frac{\partial}{\partial s}$, u cinsinden

$$\frac{\partial}{\partial s}=\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial u} \qquad (4.6)$$

şeklindedir. Böylece s yay uzunluğu parametresi için $ds=vdu$ yazılabilir. Böylece, F nin bir akışı

$$\frac{\partial F}{\partial t}=fT+gN+hB \qquad (4.7)$$

şeklinde tanımlanır.Yay uzunluğunun varyasyonu ise

$$s(u,t)=\int_0^u v\, du$$

Şeklinde verilir, ayrıca eğrinin herhangi bir dış etkiye sahip olmaması $\forall u\in[0,l]$ olmak üzere

$$\frac{\partial}{\partial t}s(u,t)=\int_0^u\frac{\partial v}{\partial t}\, du=0 \qquad (4.8)$$

koşulunu sağlaması ile garanti edilir.

Tanım 4.1.1 Bir $F(u,t)$ eğri evolüsyonu ve E_1^3 de bunun $\dfrac{\partial F}{\partial t}$ hareketi (akışı) $\dfrac{\partial}{\partial t}\left|\dfrac{\partial F}{\partial u}\right| = 0$ koşulunu sağlıyorsa bu evolüsyona elastik olmayan bir evolüsyondur deriz.

Teorem 4.1.1 $\dfrac{\partial F}{\partial t} = fT + gN + hB$ denklemi ile verilen zamansal bir düzgün F varyasyonel eğri hareketinin elastik olmayan bir hareket olması için gerek ve yeter koşul $\dfrac{\partial f}{\partial s} = -g\kappa$ eşitliğinin sağlanmasıdır, burada κ eğriliği ve s de yay uzunluğunu göstermektedir.

Kanıt F bir zamansal bir eğri varyasyonu olduğundan $\left\langle \dfrac{\partial F}{\partial u}, \dfrac{\partial F}{\partial u} \right\rangle = v^2$ dir. Diğer taraftan u ve t lineer bağımsız koordinatlar olduğundan $\dfrac{\partial}{\partial u}$ ile $\dfrac{\partial}{\partial t}$ değişimlidir. Böylece,

$$
\begin{aligned}
2v\frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left\langle \frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial u} \right\rangle \\
&= 2\left\langle \frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right) \right\rangle \\
&= 2\left\langle \frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}\left(fT + gN + hB\right) \right\rangle \\
&= 2v\left\langle T, \frac{\partial f}{\partial u}T + fv\kappa N + \frac{\partial g}{\partial u}N + g(\kappa vT - v\tau B) + \frac{\partial h}{\partial u}B + hv\tau N \right\rangle \\
&= 2v\left(\frac{\partial f}{\partial u} + gv\kappa\right)
\end{aligned}
$$

elde ederiz, [12]. Böylece,

$$
\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u} + gv\kappa \qquad (4.9)
$$

elde etmiş oluruz. Şimdi $\dfrac{\partial F}{\partial t}$ nin elastik olduğunu varsayalım. (4.9) dan $\forall u \in [0,l]$ için

$$
\frac{\partial}{\partial t}s(u,t) = \int_0^u \frac{\partial v}{\partial t}\, du
$$

$$= \int_0^u \left(\frac{\partial f}{\partial u} + gv\kappa \right) du$$
$$= 0$$

buluruz. Bu sonuç $\frac{\partial f}{\partial u} = -gv\kappa$ veya $\frac{\partial f}{\partial s} = -g\kappa$ olmasını gerektirir. Böylece teoremin gerek koşulunu kanıtlamış oluruz. Tersine hareketle teoremin yeter koşulunu da kanıtlayabiliriz. Şimdi eğrilerin yay uzunluğu cinsinden parametrelendirildiklerini kabul edelim, yani $v = 1$ olsun, böylece *u* koordinatı eğrinin *s* yay uzunluğuna eşit olur.

Teorem 4.1.2 $\{T, N, B\}$ Frenet-Serre çatısının diferansiyel ifadelerinin $\{T, N, B\}$ çatısı cinsinden yazılması ile elde edilecek olan Frenet-Serre denklemleri

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} &= \left(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s} + h\tau \right) N + \left(-g\tau + \frac{\partial h}{\partial s} \right) B, \\
\frac{\partial N}{\partial t} &= \left(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s} + h\tau \right) T + \lambda B, \\
\frac{\partial B}{\partial t} &= \left(\frac{\partial h}{\partial s} - g\tau \right) T - \lambda N
\end{aligned} \tag{4.10}$$

şeklindedir, burada $\lambda = \left\langle \frac{\partial N}{\partial t}, B \right\rangle$ dir.

Kanıt Teorem 4.1.1 ve (4.3) Frenet-Serre denklemlerini kullanarak

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\left(fT + gN + hB \right)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial s} T + f\kappa N + \frac{\partial g}{\partial s} N + g(\kappa T - \tau B) + \frac{\partial h}{\partial s} B + h\tau N$$
$$= \left(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s} + h\tau \right) N + \left(-g\tau + \frac{\partial h}{\partial s} \right) B$$

yazabiliriz. Frenet çatısı ortogonal olduğu için $\langle T, N \rangle = \langle T, B \rangle = \langle N, B \rangle = 0$ ifadeleri mevcuttur. Bunları *t* ye göre türetirsek,

$$0=\frac{\partial}{\partial t}\langle T,N\rangle=\left\langle\frac{\partial T}{\partial t},N\right\rangle+\left\langle T,\frac{\partial N}{\partial t}\right\rangle=-\left(f\kappa+\frac{\partial g}{\partial s}+h\tau\right)+\left\langle T,\frac{\partial N}{\partial t}\right\rangle$$
$$0=\frac{\partial}{\partial t}\langle T,B\rangle=\left\langle\frac{\partial T}{\partial t},B\right\rangle+\left\langle T,\frac{\partial B}{\partial t}\right\rangle=g\tau-\frac{\partial h}{\partial s}+\left\langle T,\frac{\partial B}{\partial t}\right\rangle$$
$$0=\frac{\partial}{\partial t}\langle N,B\rangle=\left\langle\frac{\partial N}{\partial t},B\right\rangle+\left\langle N,\frac{\partial B}{\partial t}\right\rangle=\lambda+\left\langle N,\frac{\partial B}{\partial t}\right\rangle$$

buluruz.

Yukarıdaki ifadelerden $\left\langle\frac{\partial N}{\partial t},N\right\rangle=\left\langle\frac{\partial B}{\partial t},B\right\rangle=0$ olduğundan istenen

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\left(f\kappa+\frac{\partial g}{\partial s}+h\tau\right)N+\left(-g\tau+\frac{\partial h}{\partial s}\right)B,$$
$$\frac{\partial N}{\partial t}=\left(f\kappa+\frac{\partial g}{\partial s}+h\tau\right)T+\lambda B,$$
$$\frac{\partial B}{\partial t}=\left(\frac{\partial h}{\partial s}-g\tau\right)T-\lambda N$$

denklemleri elde edilmiş olur.

Şimdide, eğrinin hareketinin yani $F(s,t)$ nin elastik olmayan bir evolüsyon olması için eğrilik ve burulma fonksiyonlarının sağlaması gereken koşulları elde edelim:

Teorem 4.1.3 Kabul edelimki $\frac{\partial F}{\partial t}=fT+gN+hB$ eğri akışı elastik değildir. O takdirde aşağıdaki kısmi türevli denklemler sağlanır:

$$\frac{\partial\kappa}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial s}(f\kappa)+\frac{\partial^2 g}{\partial s^2}+\frac{\partial}{\partial s}(h\tau)-g\tau^2+\tau\frac{\partial h}{\partial s} \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial t}=\kappa\left(\frac{\partial h}{\partial s}-g\tau\right)-\frac{\partial\lambda}{\partial s} \tag{4.12}$$

$$\kappa\lambda=-\tau\left(f\kappa+\frac{\partial g}{\partial s}+h\tau\right)-\frac{\partial}{\partial s}(g\tau)+\frac{\partial^2 h}{\partial s^2}. \tag{4.13}$$

Kanıt $\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial s}$ şeklindeki integrallenebilme koşulunu kullanarak

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s}\left\{\left(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s} + h\tau\right)N + \left(-g\tau + \frac{\partial h}{\partial s}\right)B\right\}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial s}(f\kappa) + \frac{\partial^2 g}{\partial s^2} + \frac{\partial}{\partial s}(h\tau)\right)N + \left(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s} + h\tau\right)(\kappa T - \tau B)$$
$$+\left(-\frac{\partial}{\partial s}(g\tau) + \frac{\partial^2 h}{\partial s^2}\right)B + \left(-g\tau + \frac{\partial h}{\partial s}\right)\tau N,$$

buluruz. Diğer taraftan

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial t}(\kappa N) = \frac{\partial \kappa}{\partial t}N + \left\{\left(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s} + h\tau\right)T + \lambda B\right\}$$

olduğundan

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s}(f\kappa) + \frac{\partial^2 g}{\partial s^2} + \frac{\partial}{\partial s}(h\tau) - g\tau^2 + \tau\frac{\partial h}{\partial s}$$

ve

$$\kappa\lambda = -\tau\left(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s} + h\tau\right) - \frac{\partial}{\partial s}(g\tau) + \frac{\partial^2 h}{\partial s^2}$$

elde ederiz. Benzer şekilde $\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial B}{\partial s}$ şeklindeki integrallenebilme koşulunu kullanarak

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s}\left\{\left(\frac{\partial h}{\partial s} - g\tau\right)T - \lambda N\right\}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 h}{\partial s^2} - \frac{\partial}{\partial s}(g\tau)\right)T + \left(\frac{\partial h}{\partial s} - g\tau\right)\kappa N$$
$$+ -\frac{\partial \lambda}{\partial s}N - \lambda(\kappa T - \tau B),$$

elde ederiz. Diğer taraftan,

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial B}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial t}(\tau N) = \frac{\partial \tau}{\partial t}N + \tau\left\{\left(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s} + h\tau\right)T + \lambda B\right\}$$

olduğundan

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \kappa\left(\frac{\partial h}{\partial s} - g\tau\right) - \frac{\partial \lambda}{\partial s}$$

koşulunu elde ederiz.

4.2 Minkowski uzayında düzlem eğrilerinin elastik olmayan hareketleri

Şimdi de E_1^3 Minkowski uzayında düzlemsel yani burlması sıfır olan zamansal eğrilerin elastik olmayan hareketlerini inceleyelim.

$F(s,t)$ eğri evolüsyonunun (x,y)-düzleminde gerçekleştiğini kabul edelim. Böylece (4.3) Frenet-Serre denklemleri aşağıdaki biçime indirgenir:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{ds} &= \kappa N, \\ \frac{dN}{ds} &= \kappa T, \\ \frac{dB}{ds} &= 0 \end{aligned} \qquad (4.14)$$

Eğer *B* vektör alanını (x,y)-düzlemine normal olan birim vektör alanı olarak seçersek geriye sadece *T* ve *N* ye göre iki boyutlu halde bir diferansiyel denklem sistemini çözmek kalır, yani (4.14) sisteminin genel çözümünü, *a* , *b* ve *c* keyfi sabitler ve $\theta(s) = \int_0^s \kappa(s)\, ds + c$ olmak üzere

$$F(s,t) = \left(\int_0^s \cosh(\theta(s))\, ds + a,\ \int_0^s \sinh(\theta(s))\, ds + b,\ 0 \right) \qquad (4.15)$$

olarak buluruz.

5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu bölümde önceki bölümlerde incelediğimiz hususların bir değerlendirmesini yapacağız. Elastik olmayan düzlem eğrilerinin hareketleri mühendislik uygulamalarında son günlerde yoğun biçimde kullanılmaktadır. Biz bu tez çalışmasında E_1^3 Minkowski uzayındaki eğrilerin zaman evolüsyonunu çalıştık. Bilindiği üzere E^3 de düzlemsel kapalı eğrilerin zaman evolüsyonu limit durumda bir çembere dönüşmektedir. Ancak kapalı düzlemsel eğri hali Minkowski uzayında her zaman gerçekleşmeyeceği için bir zorluk ortaya çıkarmaktadır. Bu durum özellikle zamansal eğriler için söz konusudur. Diğer taraftan ışıksal eğriler içinde durum beklendiği kadar açık değildir. Işıksal eğrilerin hareketleri kısıtlı şekilde ele alınmıştır. Bu konuda K. Honda ve J.I.Inoguchi [8] tarafından yapılan “ Deformations of Cartan framed null curves preserving the torsion” başlıklı çalışma dikkat çekmektedir. Bu çalışmada Cartan çatısına sahip iki ışıksal eğrinin binormal doğrultuları çakışacak biçimde ve karşılıklı noktalarda da burulmalarının eşit olacağı kanıtlanmaktadır. Bu konuda diğer bir çalışma ise J. B. Formiga ve C. Romera [2], tarafından yapılmış ve aşağıdaki teoremler kanıtlanmıştır.

Teorem 5.1 Diferansiyellenebilir $\kappa(s) > 0$ ve $\tau(s)$ fonksiyonları verilsin. Bu durumda eğrilikleri verilen κ ve τ fonksiyonları tarafından tanımlanan zamansal bir düzgün α eğrisi vardır ve aynı koşulları gerçekleyen bir diğer $\tilde{\alpha}$ eğrisi α dan bir Poincare fonksiyonu ile fark eder, yani $\tilde{x} = Lx + a$ olacak şekilde bir uygun L Lorentz matrisi ve sabit bir a vektörü bulunabilir.

Teorem 5.2 Eğriliği sıfır olmayan zamansal bir α eğrisinin bir düzlemde kapsanması için gerek ve yeter koşul $\tau(s) \equiv 0$ olmasıdır.

KAYNAKLAR

[1] M. Do Carmo, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice- Hall Inc., Englewood, New Jersey, 1976.

[2] J. B. Formiga and C. Romero, On the differential geometry of curves in Minkowski space, arXiv: gr-qc/0601002v1, 2005.

[3] M.E. Gage, Curve Shortening Makes Convex Curves Circular, Invent. Math., 76(1984), 357-364.

[4] M.E. Gage, On an Area-preserving Evolution Equation for Plane Curves, in " Nonlinear Problems in Geometry" (D. M. DeTurck edited), Contemp. Math., Vol. 51(1986),51-62.

[5] M.E. Gage & R.S.Hamilton, The Heat Equation Shrinking Convex Plane Curves, J. Diff. Geom., 23(1986), 69-96.

[6] M. Grayson, The heat equation shrinks embedded plane curve to round points, J. Diff. Geom. 26 (1987), 285-314.

[7] H. Hasimoto, A Soliton on a Vertex Filament, J. Fluid Mech., 51(1972), 477-485.

[8] K. Honda and J.I.Inoguchi, Deformations of Cartan framed null curves preserving the torsion, Diff. Geo.- Dyn. Syst., vol.5, No.1 (2003), 31-37.

[9] D.Y. Kwon,F. C. Park, Evolution of in elastic plane curves, Appl. Math. Lett.,12(1999), 115-119.

[10] D.Y. Kwon, F. C. Park, , D.P. Chi, Inextensible flows of curves and developable surfaces, Appl. Math. Lett., 18(2005), 1156-1162.

[11] W.W.Mullins, Theory of thermal grooving, J. Appl. Physc., 28(1957), 333-339.

[12] K. Nakayama, H. Segur, M. Wadati, Integrability and the Motion of Curves, Phys. Rev. Lett., 69 (1992), 2603-2606.

ÖZ GEÇMİŞ

23.06.1967 tarihinde İstanbul ili Fatih ilçesinde doğdum. İlk ve orta tahsilimi sırasıyla Zübeyde Hanım İlkokulu ve Ümraniye Ortaokulunda ve liseyi yine Ümraniye Lisesinde tamamlayıp Trakya Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü'nden 1988-1989 eğitim-öğretim yılında mezun oldum. 1992 yılından beri Milli Eğitim Bakanlığına bağlı okullarda Matematik Öğretmeni olarak çalışmaktayım, halen İstanbul Atatürk Fen Lisesinde matematik öğretmeni olarak görev yapmaktayım. Beykent Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Uygulamalı Matematik Programına Eylül 2007 tarihinde yüksek lisans öğrencisi olarak kaydoldum.