T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANA BİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

EULER DENKLEM SİSTEMİNİN SÜREKSİZ FONKSİYONLAR SINIFINDA NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Zuhal UZUNALİ

İSTANBUL, 2009

T.C.

BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANA BİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

EULER DENKLEM SİSTEMİNİN SÜREKSİZ FONKSİYONLAR SINIFINDA NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Hazırlayan:
Zuhal UZUNALİ
070860005

Tez Danışmanı:
Yrd.Doç.Dr. Bahaddin SİNSOYSAL

İSTANBUL, 2009

ÖNSÖZ

Bu tez konusunu bana öneren, her türlü desteği ve kolaylığı sağlayan, hiç bir fedakarlıktan kaçınmayan tez danışmanım Sayın Yrd.Doç.Dr. Bahaddin SİNSOYSAL'a ve ayrıca tezimin her aşmasında yardımlarını esirgemeyen, yüksek lisans öğrenimim boyunca engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, değerli hocam Sayın Prof. Dr. Mahir RESULOV'a en içten saygılarımı sunar, teşekkür ederim. Ayrıca, yüksek lisans hocam Sayın Prof. Dr. Mehmet ERDOĞAN'a da teşekkür ederim.

Her zaman olduğu gibi, yüksek lisansım boyunca da maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen anneme, babama ve kardeşime şükranlarımı sunarım.

İstanbul-2009 Zuhal UZUNALİ

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Euler denklemler sistemi hidrodinamiğin temel denklem sistemlerinden biri olmanın yanı sıra, bir çok önemli problemleri de modellemektedir. Bilindiği gibi, Euler denklemler sisteminin çözümü, hatta bir boyutlu ve skaler şekilde yazıldığı halde bile, yeri önceden bilinmeyen sıçrayış noktalarına sahip olmaktadır. Bilindiği gibi bu tür özelliklere sahip olan fonksiyonlar zayıf çözüm kavramı içerilerek ifade edilebilinir. Dolayısıyla problemin zayıf çözümü söz konusu olmaktadır.

Sonraki işler için gereken kısmi türevli diferansiyel denklemler teorisinden bazı temel kavramlara tezin birinci bölümünde yer verilmiştir.

İkinci ve üçüncü bölümlerde, iki ve üç boyutlu Euler denklemler sisteminde bulunmayan diferansiyellenebilme özelliğine sahip özel yardımcı problemler içerilmiş ve söz konusu yardımcı problemlerin sırasıyla Euler denklemler sistemi için Bernoulli ve Cauchy integrali olduğu gösterilmiştir.

Tezin son bölümünde ise Euler denklemler sisteminin özel durumu olan ince tabaka problemi incelenmiştir. Bunun için Von-Mises dönüşümü kullanılarak ince tabaka problemi denklemi nonlineer dejenere olan denkleme indirgenmiş ve elde edilen denklemin gerçek çözümü bulunmuş ve çözümün diferansiyellenebilme özellikleri irdelenmiştir.

ABSTRACT

THE NUMERICAL SOLUTIONS OF THE EULER'S SYSTEM IN A CLASS OF DISCONTINUOUS FUNCTIONS

Euler's system of differential equations is one of the basic systems of hydrodynamics which models many important practical problems. As it is known that the solution of the Euler's system even in one dimensional case has the points of discontinuities whose locations are unknown beforehand. The function of this type can be expressed by the concept of a weak solution.

The necessary theoretical background for further investigations is given in the first section.

In the second and third sections, the auxiliary problems having some advantages over the main problem for both two and three dimensional Euler's system are introduced.

It is also proved that the suggested auxiliary problems are the first Bernoulli and Cauchy integrals of the two and three dimensional Euler's system of equations, respectively.

Finally, the boundary layer equations which are the special cases of the Euler's system of equations are investigated. Using the Von Mises transform, the boundary layer equations are reduced to the quasi linear parabolic equation in the (x,ψ) coordinates. Moreover, the exact solution of this problem is obtained, and the differentiable properties of this solution are studied.

1. GİRİŞ

Euler denklem sisteminin çıkarılışına değinmeden önce akışkanlar dinamiğinin çok önemli bir kavramını ele alalım. Herhangi bir t zamanında aynı parçacıkları içeren $\omega(t) \subset R^3$ bölgesine maddi hacim veya haraket eden hacim denir. Dolayısıyla maddi hacim derken, hareket zamanı aynı akışkan parçacıklarını içeren bölge kastedilmektedir. $f(x, y, z, t)$ akışkanın hareketini ifade edebilen belli bir büyüklük olsun. Bu büyüklük örneğin, sıvı hızının bir bileşeni veya ρ yoğunluğu olabilir. Öncelikle belirtelim ki, $\partial f / \partial t$ türevi f in uzayın herhangi bir sabit alınan (x, y, z) noktasındaki (zamandan bağımsız olmak suretiyle) değişim hızı anlamına gelmektedir. Tersine, Df / Dt ile gösterilen türev ise akışkanın total değişim hızı

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{d}{dt} f\left[x(t), y(t), z(t)\right]$$

olmaktadır. Burada $\left(x(t), y(t), z(t)\right)$ lokal akış hızı $\vec{u}$ olan sıvının zamana göre değişimi gibi anlaşılmaktadır, yani akış

$$\frac{dx}{dt} = u, \qquad \frac{dy}{dt} = v, \qquad \frac{dz}{dt} = w$$

denklemleriyle tanımlanmaktadır. Zincir kuralı uygulanarak

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

ve böylece

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z}$$

olmaktadır. ∇ operatörü kullanılarak son ifade için

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \left(u \cdot \nabla\right) f \tag{1.1}$$

elde edilir. (1.1) denklemini $\vec{u} = (u, v, w)$ vektörü için kullanırsak, akışın ivmesi için

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \left(u \cdot \nabla\right) u$$

ifadesini elde ederiz.

1.1 Euler Hareket Denklemleri

Akışkanın küçük δV hacmi için lineer momentum prensibini uygulayalım. g birim kütlesini etkileyen yerçekimi kuvveti hesaba katılırsa, söz konusu hacim üzerindeki toplam kuvvet

$$(-\nabla p + \rho g)\delta V$$

olmaktadır. Bu kuvvet V hacimli kütle ile ivmesinin çarpımına, yani

$$\rho \delta V \frac{Du}{Dt}$$

ye eşittir. Böylece, ideal bir akışkanın temel hareket denklemleri olarak

$$\begin{cases} \dfrac{Du}{Dt} = -\dfrac{1}{\rho}\nabla p + g, \\ \quad \nabla \cdot u = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

elde ederiz. Euler denklemleri olarak bilinen bu denklemleri *u*, *v*, *w* ve *p* bilinmeyenlerine göre açık olarak dört skaler denklem

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

şeklinde yazabiliriz. Yerçekimi terimi *z*-eksenine dikey yukarı doğru $g = (0,0,-g)$ şeklinde alınmıştır.

Yerçekimi kuvvetini, bir potansiyel fonksiyonunun gradiyenti

$$g = -\nabla \chi \tag{1.3}$$

cinsinden yazabiliriz (burada $\chi = gz$ olmaktadır). Akışkanın ivmesi için (1.1) ifadesini kullanarak, (1.2) denklemini

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = -\nabla\left(\frac{p}{\rho} + \chi\right)$$

biçiminde tekrar yazabiliriz. Burada $\rho = sabit$ olduğu varsayılmıştır. Ayrıca,

$$(u \cdot \nabla)u = (\nabla \wedge u) \wedge u + \nabla\left(\frac{1}{2}u^2\right)$$

özdeşliğinden faydalanılarak, momentum denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\nabla \wedge u) \wedge u = -\nabla\left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}u^2 + \chi\right) \tag{1.4}$$

formunda yazılabilir.

1.2 Bernoulli Akış Teoremi

Eğer akış sürekli ise (1.4)

$$(\nabla \wedge u) \wedge u = -\nabla H$$

denklemine indirgenir. Burada

$$H = \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}u^2 + \chi$$

olmaktadır. Skaler çarpımı dikkate alarak,

$$(u \cdot \nabla)H = 0$$

elde ederiz. Yani ideal akışkan sürekli akış içinde ise H bir akış çizgisi boyunca sabittir. Yerçekiminin ihmalinde sürekli akışta $p + \frac{1}{2}\rho u^2$ nin bir akış çizgisi boyunca sabit olduğu görülür.

Yukarıdaki teorem farklı akış çizgilerinin her biri boyunca H ın sabit kalacağını ifade eder, fakat aynı sabiti alacağı hakkında bir şey söylemez. Yani her akış çizgisinin kendi sabiti olmaktadır. Tüm akış alanı boyunca H ın sabit olması için gereken koşul aşağıda verilmiştir.
Tanım 1.1 $\nabla \wedge u = 0$ koşulunun sağlanması durumunda akışa girdapsız akış adı verilir.

Şimdi, sonraki işlerimiz için gereken bazı temel kavramları açıklayalım.

1.3 Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerden Genel Kavramlar

Kısmi türevli diferansiyel denklem (KTDD), $x_1, x_2, ..., x_n$ serbest değişkenlerine bağlı bilinmeyen $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ fonksiyonu ve onun n. mertebeye kadar kısmi türevlerini içeren bir bağıntıdır. Bu denklemin en genel formu,

$$F\left(x_1, x_2, x_3, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, ..., \frac{\partial^n u}{\partial x_1^{k_1} ... \partial x_n^{k_n}} \right) = 0$$

(1.5)

dır. Burada $n = k_1 + k_2 + ... + k_n$ olmaktadır. Diferansiyel denklemin içerdiği kısmi türevlerin en yüksek mertebesine denklemin basamağı (mertebesi) denir.

Örnek 1.1 $u_x = 0$ denkleminde yalnızca x e göre türev mevcut olduğundan, denklem birinci basamaktan kısmi türevli diferansiyel denklemdir.

Örnek 1.2 a ve b sabitler olmak üzere, $au_x + bu_y = 0$ birinci basamaktan kısmi türevli diferansiyel denklemdir.

Örnek 1.3 $u_t = \nu u_{xx}$ ikinci basamaktan kısmi türevli diferansiyel denklemdir.

Örnek 1.4 $(1 + x^2)u_x + u_y = 0$ birinci basamaktan kısmi türevli diferansiyel denklemdir.

Örnek 1.5 $u_t + uu_x = u_{xxx}$ üçüncü basamaktan denklemdir.

Bazı kavram ve işlemleri gerçekleştirebilmemiz için çoğu zaman kısmi türevli diferansiyel denklemleri operatör şeklinde yazmak gerekir. Eğer

$$L(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} \tag{1.6}$$

gösterirsek Örnek 1.1 deki denklemi $Lu = 0$ cinsinden yazabiliriz. Örnek 1.4 ü de $Lu = 0$ cinsinden yazmak mümkündür. Bu durumda $L(\cdot) = (1 + x^2)\frac{\partial(\cdot)}{\partial x} + \frac{\partial(\cdot)}{\partial y}$ olmaktadır.

Denklemlerin operatör yazılım formu kullanılarak, lineer olup olmadıkları kontrol edilebilir. Bunun için aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 1.2 Aşağıdaki koşulları

1) $L(au) = aL(u), \; a = sabit,$

2) $L(u + v) = L(u) + L(v)$

koruyan L operatörüne lineer operatör denir.

Eğer diferansiyel denklemi oluşturan operatör lineer ise, söz konusu denkleme de lineer denklem denir. Lineer olmayan denklemlere nonlineer denklemler denir.

Örnek 1.6 $u_t = \nu u_{xx}$ denkleminin lineer olduğunu gösterelim. Bunun için 1) ve 2) lineerlik koşullarının korunduğunu kontrol edelim. Bu durumda,

$$L(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} - \nu\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} \quad (1.3)$$

Olmaktadır. Önce $L(u+v)$ ifadesini göz önüne alalım

$$L(u+v) = \frac{\partial(u+v)}{\partial t} - \nu\frac{\partial^2(u+v)}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} - \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = L(u) + L(v).$$

Böylece birinci özelliğimiz sağlanmış oldu. Şimdi ikinci özelliğimizi de kontrol edelim. a sabit olmak üzere

$$L(au) = \frac{\partial(au)}{\partial t} - \nu\frac{\partial^2(au)}{\partial x^2} = a\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = aL(u)$$

elde ederiz. Böylelikle operatörümüzün lineer olduğunu görmüş oluruz.

Örnek 1.7 $u_x^2 + u_y = 0$ birinci basamaktan, derecesi 2 olan kısmi türevli diferansiyel denklemdir. Tanım 1.2 deki 1) ve 2) özellikleri gerçeklemediğinden denklem nonlineerdir.

Birinci basamaktan iki bağımsız değişkenli kısmi türevli diferansiyel denklem genel halde

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \qquad (1.7)$$

biçimindedir. Eğer F fonksiyonu u, u_x, u_y ye göre lineer bir fonksiyon ise (1.7) denklemine lineerdir denir. En genel 1. basamaktan lineer kısmi türevli diferansiyel denklem

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u + d(x,y) = 0$$

formundadır. Eğer F fonksiyonu u_x ve u_y ye göre lineer ise, (1.7) denklemine kuazi lineerdir denir. Kuazi lineer denklemin genel yazılım formu

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y + c(x,y,u) = 0$$

olmaktadır.

1.4 Birinci Basamaktan Homojen Lineer Denklemin Çözümü

Kolaylık için önce

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = 0 \qquad (1.8)$$

denklemini göz önüne alalım. xoy düzleminde parametrik denklemleri $(x = x(s), y = y(s))$

olan öyle bir eğri içerelim ki, bu eğri üzerinde (1.8) denklemini tam diferansiyel şeklinde yazabilelim. Eğer böyle eğriler bulanabilinir ise, bu tür eğrilere denklemin karakteristik eğrileri denir. Söz konusu karakteristik eğriler aşağıdaki

$$\frac{dx}{ds} = a(x,y)\,, \tag{1.9}$$

$$\frac{dy}{ds} = b(x,y) \tag{1.10}$$

adi diferansiyel denklemler sistemini koruduğu taktirde (1.8) denklemini de

$$\frac{du}{ds} = 0 \tag{1.11}$$

gibi yazılabiliriz. Ayrıca (1.9), (1.10) denklemleri

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)} \tag{1.12}$$

şekilde de yazılabilir. (1.11) ve (1.12) adi diferansiyel denklemlerinin genel çözümlerini

$$\varphi(x,y) = c_1,\ \psi(x,y) = c_2 \tag{1.13}$$

olarak gösterelim. Bunlara (1.8) denkleminin 1.aralık integralleri denilir.

Teorem 1.1 (1.13) ifadeleri (1.8) denkleminin 1.aralık integralleri olduğu taktirde

$$\Phi(c_1, c_2) = 0$$

ile tanımlanan kapalı fonksiyon (1.8) in genel çözümü olmaktadır.

Örnek 1.8 $xu_x + yu_y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulalım.

Karakteristik denklem

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{0}$$

olmaktadır. Buradan 1.aralık integrali, $du = 0$ denkleminden $u = c_1$ olarak bulunur. 2.aralık integralı ise $\frac{y}{x} = c_2$ olarak elde ederiz. Böylelikle gereken aralık integrallerimizi bulmuş olduk. Teorem 1.1 e göre denklemin genel çözümü

$$f(c_1, c_2) = 0$$

veya

$$f\left(u, \frac{y}{x}\right) = 0 \tag{1.14}$$

olmaktadır. (1.14) denkleminden

$$u = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

alırız, burada φ keyfi diferansiyellenebilen bir fonksiyon olmaktadır.

Örnek 1.9 $u_x - u_y = 1$ denkleminin genel çözümünü bulalım.

İlk olarak aralık integrallerimizi bulalım. bunun için karakteristik denklemimizi yazalım

$$dx = -dy = du.$$

Buradan

$$dx = -dy, \quad dx = du \tag{1.15}$$

yazabiliriz. (1.15) deki denklemleri integrallersek

$$c_1 = y + x, \; c_2 = u - x$$

alarız. Teorem 1.1 e göre

$$f(y + x, u - x) = 0$$

elde ederiz. Buradan çözüm için

$$u - x = \varphi(y + x)$$

veya

$$u = \varphi(y + x) + x$$

ifadesini elde ederiz.

1.5 Cauchy Problemi

Aşağıdaki n değişkenli birinci basamaktan kuazi lineer denklem için Cauchy problemini göz önüne alalım

$$X[f] \equiv X_1(x_1, x_2, ..., x_n, f)\frac{\partial f}{\partial x_1} + ... + X_n(x_1, x_2, ..., x_n, f)\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \tag{1.16}$$

$$f(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n^0) = \varphi(x_1, x_2, ..., x_{n-1}). \tag{1.17}$$

Burada $f = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ bilinmeyen fonksiyon, $\varphi(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ ise verilen bir fonsiyon olmaktadır.

Öncelikle karakteristik denklemleri

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = ... = \frac{dx_n}{X_n} \tag{1.18}$$

olarak yazalım. (1.18) denkleminin ilk integrallerinin

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, x_2, x_3, ..., x_n^0) = c_1 \\ \psi_2(x_1, x_2, x_3, ..., x_n^0) = c_2 \\ \vdots \\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, x_3, ..., x_n^0) = c_{n-1} \end{cases}$$

olduğunu varsayalım. Bunlar karakteristik denklemin özel çözümleridir. O halde, başlangıç koşulunu korumak zorundadırlar; yani

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n^0) = \overline{\psi}_1 \\ \psi_2(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n^0) = \overline{\psi}_2 \\ \vdots \\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n^0) = \overline{\psi}_{n-1} \end{cases} \tag{1.19}$$

olmalıdır. (1.19) deki ψ_i, $(i = 1,2,...,n-1)$ fonksiyonlarının her birinde $n-1$ tane değişken ve $n-1$ tane denklem vardır. O halde bu denklemler sistemine $n-1$ tane değişkene bağlı cebirsel denklemler sistemi gözüyle bakmak mümkündür. (1.19) denkleminin çözümlerini

$$\begin{cases} x_1 = W_1(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, ..., \overline{\psi}_{n-1}) \\ x_2 = W_2(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, ..., \overline{\psi}_{n-1}) \\ \vdots \\ x_{n-1} = W_{n-1}(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, ..., \overline{\psi}_{n-1}) \end{cases}$$

olarak gösterelim. Elde edilen ifadeleri (1.17) denkleminde yerine yazarsak (1.16)-(1.17) probleminin çözümünü

$$f = \varphi(W_1(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, ..., \overline{\psi}_{n-1}), W_2(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, ..., \overline{\psi}_{n-1}), ..., W_{n-1}(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, ..., \overline{\psi}_{n-1})) \tag{1.20}$$

şeklinde buluruz.

Örnek 1.10 Aşağıdaki denklemin

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{z}{2}\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \tag{1.21}$$

$x = 1$, $u = y + z^2$ başlangıç koşuluna göre çözümünü araştıralım.

Önce karakteristik denklemimizi yazalım

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z/2}.$$

Birinci aralık integral $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$ denkleminden $ln|x| = ln|y| + ln|c_1|$ olarak, buradan da

$\frac{y}{x} = c_1$ şeklinde bulunur. Bunu

$$c_1 = \frac{y}{x} \equiv \psi_1(x, y, z, u)$$

olarak gösterelim. İkinci aralık integral $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z/2}$ denkleminden $ln|x| = 2ln|z| = ln|c_2|$ olarak, buradan da $\frac{z^2}{x} = c_2$ şeklinde bulunur. Nihayet

$$c_2 = \frac{z^2}{x} \equiv \psi_2(x, y, z, u)$$

buluruz. Teorem 1.1 e göre (1.21) denkleminin genel çözümü

$$u(x, y, z) = F(c_1, c_2) = F\left(\frac{y}{x}, \frac{z^2}{x}\right)$$

olur. Burada F keyfi fonksiyon olmaktadır. Söz konusu fonksiyonu elde etmek için $x = 1$ noktasındaki başlangıç koşulunu kullanırsak

$$u(1, y, z) = y + z^2 = F(y, z^2)$$

olur ve buradan $F(s_1, s_2) = s_1 + s_2$ olarak belirlenir. (1.20) dikkate alınarak çözümü

$$u(x, y, z) = \frac{y}{x} + \frac{z^2}{x}$$

şeklinde yazabiliriz.

(1.21) denklemini başka bir yolla da çözebiliriz. Yukarıda gösterdiğimiz gibi 1.aralık integrali

$$c_1 \equiv \psi_1(x, y, z) = \frac{y}{x}$$

olmaktadır.

$$\psi(1, y, z) = \overline{\psi_1}$$

olsun. 2.aralık integralden

$$c_2 \equiv \psi_2(x, y, z) = \frac{z^2}{x}$$

olduğunu bulmuştuk. Buradan

$$\psi_2(1, y, z) = z^2$$

olmaktadır. Bu durumda

$$y = \overline{\psi}_1, \ \ z^2 = \overline{\psi}_2$$

denklemlerinden y ve z yi bulup, başlangıç fonksiyonunda yerine yazarsak

$$u(x, y, z) = \psi_1 + \psi_2 = \frac{y}{x} + \frac{z^2}{x}$$

elde ederiz.

Örnek 1.11 $xy = 1$ üzerinde $u = 0$ olması koşulu dahilinde

$$(y - u)u_x + (u - x)u_y = x - y$$

denkleminin çözümünü bulalım.

Karakteristiklerin denklemi

$$\frac{dx}{y-u} = \frac{dy}{u-x} = \frac{du}{x-y} = dt$$

olup, bu denklemler sistemini aşağıdaki gibi parametrik formda yazabiliriz

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (y - u), \\ \dfrac{dy}{dt} = (u - x), \\ \dfrac{du}{dt} = (x - y). \end{cases} \tag{1.22}$$

Bu denklemleri toplarsak

$$\frac{d(x + y + u)}{dt} = 0$$

veya

$$d(x + y + u) = 0$$

olup, 1.aralık integral için

$$x + y + u = c_1$$

elde ederiz. İkinci aralık integral olarak karakteristik denklemleri sırasıyla x, y ve u ile çarparak integrallersek 2.aralık integral olarak

$$x^2 + y^2 + u^2 = c_2$$

elde ederiz. İncelenen denklemin genel çözümü

$$F(c_1, c_2) = 0$$

veya

$$c_1 = \varphi(c_2)$$

olur. Aralık integrallerin ifadeleri yerine konursa

$$x + y + u = \varphi(x^2 + y^2 + u^2)$$

elde ederiz. Burada φ keyfi diferansiyellenebilen fonksiyon olmaktadır. Aralık integraller başlangıç koşulunu korumalıdır, yani $u = 0$ koşulundan

$$c_1 = x + y$$

ve

$$c_2 = x^2 + y^2$$

olmaktadır. c_1 i c_2 cinsinden ifade edersek

$$c_1^2 = c_2 + 2$$

alırız. Bulduğumuz c_1, c_2 değerlerini yerine yazarsak

$$(x + y + u)^2 = x^2 + y^2 + u^2 + 2$$

elde ederiz. Buradan

$$u = \frac{1 - xy}{x + y}$$

olmaktadır.

1.6 Birinci Basamaktan Homojen Olmayan Lineer Denklemin Çözümü

Aşağıdaki denklemi göz önüne alalım

$$P_1(x_1, x_2, ..., x_n)\frac{\partial z}{\partial x_1} + ... + P_n(x_1, x_2, ..., x_n)\frac{\partial z}{\partial x_n} = R(x_1, x_2, ..., x_n). \qquad (1.23)$$

Bu denklemin genel çözümünü

$$V(z, x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = 0, \qquad (1.24)$$

şeklinde arayalım. Burada V herhangi bir diferansiyellenebilen fonksiyon olmaktadır. Şimdi (1.23) denkleminden $x_1, x_2, ..., x_n$ değişkenlerine göre türev alalım

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1} = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_2} = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots.$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_n}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_n}=0.$$

Bu eşitliklerden

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}=-\frac{\partial V/\partial x_i}{\partial V/\partial z}, \quad (i=1,2,...,n)$$

bulunur. Bulduğumuz ifadeleri (1.23) denkleminde yerine yazarsak

$$-P_1(x_1,x_2,...,x_n)\frac{\partial V/\partial x_1}{\partial V/\partial z}-...-P_n(x_1,x_2,...,x_n)\frac{\partial V/\partial x_n}{\partial V/\partial z}=R(x_1,x_2,...,x_n) \qquad (1.25)$$

ve her iki tarafını $\partial V/\partial z$ ile çarparsak

$$P_1(x_1,x_2,...,x_n)\frac{\partial V}{\partial x_1}+...+P_n(x_1,x_2,...,x_n)\frac{\partial V}{\partial x_n}+R(x_1,x_2,...,x_n)\frac{\partial V}{\partial z}=0$$

elde ederiz. Böylece homojen olmayan (1.23) denklemini (1.25) homojen denklemine indirgemiş oluruz. Buradan karakteristiklerin denklemi

$$\frac{dx_1}{P_1}=\frac{dx_2}{P_2}=...=\frac{dx_n}{P_n}=\frac{dV}{R} \qquad (1.26)$$

olur.

Örnek 1.12 $x=2$ de $z=y-4$ koşulunu sağlayan

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+(y+x^2)\frac{\partial z}{\partial y}=z$$

denkleminin çözümünü bulalım.

Karakteristik denklem

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y+x^2}=\frac{dz}{z}$$

olup, ilk iki denklemden

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y+x^2}{x}$$

veya

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+x$$

buluruz. Önce homojen olmayan

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$$

denkleminin genel çözümünü bulalım. Bu denklemi değişkenlerine ayırıp integrallersek homojen denklemin genel çözümünü

$$\frac{y}{x}=c \quad \text{veya} \quad y=cx$$

olarak elde etmiş oluruz. Burada c keyfi bir sabittir. Şimdi c sabitini x e bağlı bir fonksiyon ($c(x)$) gibi düşünerek,

$$y'=c(x)+xc'(x)$$

türevini homojen olmayan ana denklemde yerine yazalım

$$c(x)+xc'(x)=\frac{xc(x)}{x}+x\,.$$

Buradan $c'(x)=1$ ve nihayet $c(x)=x+c_1$ elde edilir. Elde ettiğimiz $c(x)$ yerine konulursa 1.aralık integralini

$$c_1=\frac{y-x^2}{x}$$

şeklinde bulmuş oluruz. İkinci aralık integralini

$$\frac{dx}{x}=\frac{dz}{z}$$

denkleminin integrallenmesinden

$$c_2=\frac{z}{x}$$

olarak elde ederiz. Teorem 1.1 e göre $F(c_1,c_2)=0$ olmasından genel çözüm

$$F\left(\frac{y-x^2}{x},\frac{z}{x}\right)=0$$

veya

$$\frac{z}{x}=\varphi\left(\frac{y-x^2}{x}\right)$$

şeklinde bulunur. Her iki tarafı x ile çarparsak

$$z=x\varphi\left(\frac{y-x^2}{x}\right)$$

alırız. $x = 2$ deki $z = y - 4$ başlangıç koşulunu dikkate alırsak

$$y - 4 = 2\varphi\left(\frac{y-4}{2}\right)$$

veya

$$\frac{y-4}{2} = \phi\left(\frac{y-4}{2}\right)$$

olur. Buradan

$$\varphi(y) = y$$

elde edilir. φ fonksiyonunun bu özelliğini dikkate alırsak aradığımız problemin çözümünü

$$z(x, y) = x\varphi\left(\frac{y-x^2}{x}\right) = x\left(\frac{y-x^2}{x}\right) = y - x^2$$

şeklinde elde etmiş oluruz.

1.7 Birinci Basamaktan Diferansiyel Denklemin Geometrik Anlamı ve Charpit Denklemler Sistemi

Birinci basamaktan olan ve $u(x, y)$ fonksiyonu için yazılmış diferansiyel denklemler teorisini incelemek için bu denklemin geometrik anlamı önemli yer tutmaktadır.

$$F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0 \tag{1.27}$$

Denklemini göz önüne alalım. Burada, $p = \partial u/\partial x,\ q = \partial u/\partial y$ ve $F_p^2 + F_q^2 \neq 0$ dır.

Analizden bilinen bazı temel kavramları hatırlayalım. $f(x)$ Sürekli ve sürekli türeve sahip olmak üzere, xoy uzayında verilmiş $y = f(x)$ eğrisi her bir (x, y) noktasında eğim açısı $tg\alpha = Y'_\alpha = f'(x)$ olan teğete sahip olmaktadır. Bu teğetin denklemi, $Y - y = Y'_\alpha(X - x)$ şeklinde ifade edilebilir. Buradaki X ve Y eğri koordinatlarıdır. x ve y ise teğete dokunma noktasıdır. Eğer eğri $F(x, y)$ denklemi ile verilirse adi noktanın etrafında,

$$Y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$$

olur. Bu göz önüne alınırsa teğetin denklemi, $F'_x(x, y)(X - x) + F'_y(x, y)(Y - y) = 0$ olmaktadır. Nihayet eğri, parametrik olarak

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

biçiminde verilebilir. Bu takdirde, $\tan\alpha = \frac{Y_t'}{X_t'}$ dır ve teğetin denklemi $Y - y = \frac{Y_t'}{X_t'}(X - x)$

şeklindedir. Buradan

$$\frac{X - x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{Y - y}{\frac{dy}{dt}}$$

olup, bu ifadenin de paydalarını *dt* ile çarparsak

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy}$$

alırız. Üç boyutlu uzayda (1.27) denkleminin integral yüzeyinin keyfi (x, y, z) noktasının koordinatları ile bileşimleri $(p, q, -1)$ olan normallerin bir ilişkisi gibi de ele alabiliriz. Dolayısıyla integral yüzeyi öyle uzaya denir ki, bu uzayın keyfi noktasından geçmekte olan teğet düzlemin yönlendirici noktaları $(p, q, -1)$ ile aynı nokta olsunlar. (x, y, z, p, q) uzayında karakteristiklerin denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = q$$

Notasyonlarında (1.27) denkleminin F(x,y,u,p,q)=0 cinsinden yazılabilir.
Sonuncu denklemi x ve y ye göre diferansiyelle yelim

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y} = 0$$

Aşağıdaki notasyonları

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \mathrm{X} \ , \ \frac{\partial F}{\partial y} = \mathrm{Y} \ , \ \frac{\partial F}{\partial p} = \mathrm{P} \ , \ \frac{\partial F}{\partial q} = \mathrm{Q} \ , \ \frac{\partial F}{\partial u} = \mathrm{U}$$

dahil edelim. Bu notasyonlarda sonuncu denklemleri

$$\begin{aligned} &\mathrm{X} + Up + \mathrm{P}\frac{\partial p}{\partial x} + Q\frac{\partial q}{\partial x} = 0 \\ &\mathrm{Y} + Uq + \mathrm{P}\frac{\partial p}{\partial y} + Q\frac{\partial q}{\partial y} = 0 \end{aligned} \qquad (1.28)$$

cinsinde yazabiliriz.

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

olduğundan

$$\mathrm{X} + Up + \mathrm{P}\frac{\partial p}{\partial x} + Q\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\mathrm{Y} + Uq + \mathrm{P}\frac{\partial q}{\partial x} + Q\frac{\partial q}{\partial y} = 0 \tag{1.29}$$

elde ederiz. Sonuncu denklemler için Karakteristik denklemleri yazarsak

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\mathrm{P}}{\sqrt{\mathrm{P}^2 + Q^2}} \quad , \quad , \quad \frac{dy}{ds} = \frac{Q}{\sqrt{\mathrm{P}^2 + Q^2}}$$

$$\frac{dp}{ds} = -\frac{\mathrm{X} + pU}{\sqrt{\mathrm{P}^2 + Q^2}} \quad , \quad \frac{dq}{ds} = -\frac{\mathrm{Y} + qU}{\sqrt{\mathrm{P}^2 + Q^2}} \tag{1.30}$$

$$\frac{du}{ds} = \frac{p\mathrm{P} + qQ}{\sqrt{\mathrm{P}^2 + Q^2}}$$

alırız. Bu adi diferansiyel denklemler sistemine Charpit denklemler sistemi denir. Söz konusu sistemi kullanarak nonlineer kısmi türevli diferansiyel denklemin çözümünü elde edebiliriz.

Örnek 1.13

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1$$

denkleminin $x^2 + y^2 = 1,\ z = 0$ çemberinden geçmekte olan çözümünü araştıralım.

Herhangi bir ν parametresini kullanarak çemberin denklemini tekrar

$$x = \sin\nu, \quad y = \cos\nu, \quad z = 0$$

olarak ifade edelim. Karakteristik denklem sistemini yazalım.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q$$

notasyonlarında denklemi $p^2 + q^2 = 1$ olarak yazıp, x ve y ye göre diferansiyellersek

$$2p\frac{\partial p}{\partial x} + 2q\frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad p\frac{\partial p}{\partial y} + q\frac{\partial q}{\partial y} = 0$$

elde ederiz. $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$ olduğundan

$$p\frac{\partial p}{\partial x} + q\frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

$$p\frac{\partial q}{\partial x}+q\frac{\partial q}{\partial y}=0$$

olur. (x, y, p, q, z) bilinmeyenleri için karakteristik denklemi

$$\frac{dx}{ds}=p,\ \frac{dy}{ds}=q,\ \frac{dp}{ds}=0,\quad \frac{dq}{ds}=0$$

şeklinde yazabiliriz. Son denklem sistemine

$$\frac{dz}{ds}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{ds}=p^2+q^2$$

denklemini eklersek sistemi aşağıdaki gibi tamamlamış oluruz

$$\frac{dx}{2p}=\frac{dy}{2q}=\frac{dz}{2(p^2+q^2)}=\frac{dp}{0}=\frac{dq}{0}=ds\ .$$

Şimdi, elde ettiğimiz denklemleri çözelim. $p=c_1$ ve $q=c_2$ (c_1 ve c_2 keyfi sabitler) olduğundan

$$\frac{dx}{2c_1}=dt \quad \Rightarrow \quad x=2c_1t+c_3,$$

$$\frac{dy}{2c_2}=dt \quad \Rightarrow \quad y=2c_2t+c_4,$$

$$z=2(c_1^2+c_2^2)t+c_5$$

olarak elde ederiz. Burada c_3, c_4, c_5 keyfi sabitlerdir.

Göz önüne alınan denklemin sağlanması için

$$c_1^2+c_2^2=1, \quad z=2t+c_5$$

olması gerekmektedir. $t=0$ olduğu durumda

$$x=2c_1t+c_3\,,$$
$$y=2c_2t+c_4\,,$$
$$z=2t+c_5$$

olur. Çözümün eğrisi verilen çemberden geçmesi için

$$c_3=\sin\nu,\quad c_4=\cos\nu,\quad c_5=0$$

olması gerekmektedir. Bu takdirde denklemin verilmiş çemberden geçmekte olan çözümü,

$$\left.\begin{array}{c} x=2c_1t+\sin\nu\,, \\ y=2c_2t+c_3\sin\nu\,, \\ z=2t \end{array}\right\} \qquad (*)$$

dır. Burada t ve ν parametrelerdir. $t = 0$ da

$$\frac{\partial z}{\partial \nu} = p\frac{\partial x}{\partial \nu} + q\frac{\partial y}{\partial \nu}$$

olması için,

$$0 = p\cos\nu - q\sin\nu$$

veya

$$c_1\cos\nu = c_2\sin\nu,$$
$$c_1^2 + c_2^2 = 1$$

olması gerekmektedir. Buradan

$$c_1 = \varepsilon\sin\nu, \quad c_2 = \varepsilon\cos\nu, \quad \varepsilon = \pm 1 \qquad (**)$$

(**) ifadelerini (*) de yerine yazarsak

$$\begin{cases} x = (2t\varepsilon + 1)\sin\nu, \\ y = (2t\varepsilon + 1)\cos\nu, \\ \qquad z = 2t \end{cases}$$

elde ederiz. Bulduğumuz bu sonuncu ifadede t ve ν parametrelerini yok edersek,

$$x^2 + y^2 = (1 \mp z)^2$$

elde ederiz. Böylece iki tane integral eğrisi bulmuş oluruz.

Örnek 1.14 $p^2 + qy - u = 0$ denklemini çözünüz.

$F(x,y,u,p,q) = 0$, $p = \frac{\partial u}{\partial x}$, $q = \frac{\partial u}{\partial y}$

$F = p^2 + qy-u$ $F_p = 2p$, $F_q = y$, $F_u = -1$, $F_x = 0$, $F_y = q$

$$2p\frac{\partial p}{\partial x} + y\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$2p\frac{\partial p}{\partial y} + q + y\frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial u^2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$, denklemlerinde yerine yazarsak

$$2p\frac{\partial p}{\partial x} + y\frac{\partial p}{\partial y} - p = 0 \quad \text{ve} \quad 2p\frac{\partial q}{\partial x} + q + y\frac{\partial q}{\partial y} - q = 0$$

elde ederiz. Buradan

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{2p} = \frac{dy}{y} = \frac{dp}{p} = dt$$

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = 2p \equiv F_p \qquad , \qquad (2) \quad \frac{dy}{dx} = y \equiv F_q$$

$$(3) \quad \frac{dp}{dt} = p = -(F_x + pF_u) \quad , \qquad (4) \quad \frac{dq}{dt} = 0 \equiv -(F_y + qF_u)$$

$$(5) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = 2p^2 + qy \equiv pF_q + qF_q$$

(4) denkleminde q = sabit = a olsun. Denklemin kendisinden

$$\Rightarrow \quad p^2 = u - ay \quad , \quad p = (u-ay)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{2p} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{2p^2 + qy} = \frac{dp}{p} = \frac{dp}{0}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{2p} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{2p^2 + qy} = \frac{pdx + qdy}{2p^2 + qy}$$

$$\Rightarrow \quad du = pdx + qdy \quad \Rightarrow \quad P = (u-ay)^{1/2}$$

'i yerine yazarsak

$$\Rightarrow \quad du = (u-ay)^{1/2}dx + ady \quad \Rightarrow \quad du - ady = (u-ay)^{1/2}dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{du - ady}{(u-ay)^{1/2}} = dx \quad \Rightarrow \quad \frac{d(u-ay)}{(u-ay)^{1/2}} = dx$$

integral alırsak

$$\Rightarrow \quad 2(u-ay)^{1/2} = x + b \quad , \quad b = \text{sabit}$$

$$\Rightarrow \quad (u-ay)^{1/2} = \frac{1}{2}(x+b) \quad \Rightarrow \quad u = ay + \frac{1}{4}(x+b)^2$$

I. Şimdi varsayalım ki denklem yalnız p ve q 'ı içersin. Yani F(p, q) = 0 olsun.

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = F_p \\ \dfrac{dy}{dt} = F_q \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{du}{dt} = pF_p + qF_q$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dp}{dt} = 0 \qquad , \qquad \frac{dq}{dt} = 0 \qquad \text{ise}$$

Buradan p = q = sabit,   q = b = sabit

F(a,b) = 0 denkleminden   q = f (a) 'i yerine yazarsak du = adx + f(a*) dy* integral alırsak

$$\Rightarrow \qquad u = ax + f(a)y + b \qquad \text{olur.}$$

Örnek 1.15 $p^2q = 1$, $F(p, q) = 1 - p^2q$ denklemini çözünüz.

Karakteristik denklem sistemini yazalım

$$\frac{dx}{dt} = F_p = -2pq \quad , \quad \frac{dy}{dt} = F_q = -p^2 \quad , \quad \frac{dp}{dt} = 0 \quad , \quad \frac{dq}{dt} = 0$$

$$p = a = \text{sabit} \quad \Rightarrow \quad 1 - a^2 q = 0 \quad \Rightarrow \quad q = \frac{1}{a^2}$$

$$\Rightarrow \qquad du = adx + \frac{1}{a^2} dy \qquad \text{integral alırsak}$$

$$\Rightarrow \qquad u = ax + \frac{y}{a^2} + b = ax + \frac{1}{a^2}.y + b$$

Şimdi bu Cauchy problemini u(x, 0) = x için çözelim

$$\Rightarrow \qquad x = u\big|_{y=0} = \left(ax + \frac{1}{a^2} y + b\right)\Big|_{y=0} = ax + b$$

Buradan a = 1 ve b = 0 olur.

$$\Rightarrow \qquad u(x, y) = x + y \quad \text{dir.}$$

2. İKİ BOYUTLU EULER DENKLEM SİSTEMİ

Bu bölümde iki boyutlu Euler denklem sisteminin nümerik çözümü için bir sayısal algoritma geliştireceğiz. Bilindiği gibi herhangi bir diferansiyel denklemi veya diferansiyel denklemler sistemini sonlu farklara ayrıklaştırmak için çözümün yüksek mertebeden diferansiyellenebilir olması talep edilmektedir. Fakat, Euler sistemini oluşturan denklemlerin çözümü bu özelliklere sahip değildir. Bu nedenle, önce Euler denklem sistemine bilinen anlamda denk olan ve Euler denklem sisteminin sahip olmadığı özelliklere sahip özel yardımcı problem karşılık getirilecektir. Söz konusu yardımcı problemin avantajları kullanılarak nümerik çözüm için yüksek hassaslığa sahip algoritmalar geliştirilecek ve daha sonra yardımcı problemin çözümü vasıtasıyla esas problemin sayısal çözümü elde edilecektir.

2.1 İki Boyutlu Sistemin Koordinatlara Göre Ayrıklaştırılması. Bernoulli İntegrali

Her zaman olduğu gibi R^2 ile (x,y) noktalarının Euclid uzayını gösterelim. $R_+^3 = R^2 \times \left[0,T\right)$ $=\left\{ (x,y,t) \,|\, (x,y) \in R^2, T > t \geq 0 \right\}$ olsun. R_+^3 de

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0, \tag{2.3}$$

$$u(x,y,0) = u_0(x,y), \tag{2.4}$$

$$v(x,y,0) = v_0(x,y), \tag{2.5}$$

$$\rho(x,y,0) = \rho_0(x,y) \tag{2.6}$$

problemini göz önüne alalım. Burada $u = u(x,y,t)$ ve $v = v(x,y,t)$ fonksiyonları bilinmeyen $\vec{u}$ hız vektörünün bileşenlerini, yani $\vec{u} = \left(u(x,y,t), v(x,y,t)\right)$ yi; $p = p(x,y,t)$ ve $\rho = \rho(x,y,t)$ sırasıyla basınç ve yoğunluğu göstermektedir. $u_0(x,y)$, $v_0(x,y)$ ve $\rho_0(x,y)$

bilinen fonksiyonlar olmaktadır.

Akışta girdabın olmadığını varsayalım ve aşağıdaki potansiyel fonksiyonu

$$u = \Phi_x, \quad v = \Phi_y \tag{2.7}$$

dahil edelim. Akışta girdap olmadığı, matematiksel olarak

$$v_x - u_y = 0 \tag{2.8}$$

şeklinde ifade edilmektedir. (2.7) ve (2.8) dikkate alınarak, (2.1), (2.2) denklemler sistemi

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2+v^2}{2}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u^2+v^2}{2}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{2.10}$$

olarak yazılabilir. $\rho(x, y) = sabit$ olduğu taktirde (2.9), (2.10) dan

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{u^2+v^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right) = 0, \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{u^2+v^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right) = 0 \tag{2.12}$$

elde ederiz.

$$U^2 = u^2 + v^2 \tag{2.13}$$

ve

$$\Phi = \Phi^* + \int_0^t c(\tau)d\tau \tag{2.14}$$

notasyonlarını içerirsek, bu notasyonlarda (2.11) ve (2.12) denklemlerini

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial t} + \frac{1}{2}U^2 + \frac{p}{\rho} = 0 \tag{2.15}$$

şeklinde yazabiliriz. (2.15) denklemi (2.1), (2.2) için Cauchy veya I. aralık integrali olarak adlandırılır. $\vec{u} = (u, v)$ fonksiyonları t den bağımsız olduğu taktirde, (2.15) denklemi

$$\frac{1}{2}U^2 + \frac{p}{\rho} = 0$$

olarak yazılabilir. Bu bağıntı Bernoulli integrali olarak adlandırılır, [1].

Diğer bir deyimle, (2.15) denklemi (2.1), (2.2) denklemler sisteminin I. integralinin vektörel formudur. (2.1), (2.2) denklemlerinin her bir çözümünün (2.15) denklemini de sağladığı ve tersine, (2.15) in çözümlerinin (2.1), (2.2) nin de çözümleri olduğu açıktır.

Genel olarak, (2.14) denkleminde içerilen keyfi c sabiti t ye bağlıdır ve bu nedenle, (2.15) denklemi tek değerli olarak tanımlanamaz. (2.7) ve (2.13) notasyonları kullanılarak, (2.11), (2.12) denklemleri yeniden

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right)=0, \qquad (2.16)$$

$$\frac{\partial v(x,y,t)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{U^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right)=0$$

(2.17)

olarak yazılabilir. Dolayısıyla (2.1), (2.2) karışık denklemler sistemi x ve y koordinatına göre iki denkleme parçalanmış olur ki, söz konusu denklemlerin her birine bir boyutlu denklem gibi bakabiliriz.

Şimdi, ρ nun x ve y ye bağlı olduğu durumu göz önüne alalım ve aşağıdaki notasyonu içerelim

$$\Im=\int\frac{dp}{\rho}.$$

Bu durumda (2.11), (2.12) denklemler sistemi

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{u^2+v^2}{2}+\Im\right]=0, \qquad (2.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{u^2+v^2}{2}+\Im\right]=0 \qquad (2.19)$$

biçimini alır. (2.7) ve (2.13) dikkate alınırsa, (2.18), (2.19) denklemler sistemi

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{U^2}{2}+\Im\right]=0, \qquad (2.20)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{U^2}{2}+\Im\right]=0 \qquad (2.21)$$

olarak yazılabilir.

Böylece, (2.20), (2.21) (veya (2.16), (2.17)) den görüldüğü gibi, bu denklemler (2.1), (2.2) denklemler sisteminin koordinatlarına göre ayrılmış şeklidir. Problemin başlangıç fonksiyonları hem pozitif hem de negatif eğime sahip oldukları taktirde, bu sistemdeki her bir denklemin çözümü çok değerli fonksiyon olur. [3] ve [4] de belirtildiği üzere çok değerli fonksiyonlar fiziksel açıdan anlamsız çözümler olduğundan, çok değerli çözüm yerine 1. tür süreksizlik noktalarına sahip tek değerli çözüm inşa edebiliriz. Bu özelliklere sahip çözümler zayıf çözüm vasıtasıyla tanımlanabilir. Bu nedenle, $\vec{u}$ nun (u,v) bileşenlerinin zayıf çözümü aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Tanım 2.1 (2.4), (2.5) koşullarını ve $\varphi(x,y,T)=0$ özelliğine sahip olan herhangi bir $\varphi(x,y,t)=(\varphi_1(x,y,t),\varphi_2(x,y,t))\in H^1(\overset{\circ}{R}{}^3)$ test fonksiyonu için aşağıdaki integral eşitliklerini

$$\int_{R_x^2}\left\{u(x,y,t)\frac{\partial\varphi_1(x,y,t)}{\partial t}+\left(\frac{U^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right)\frac{\partial\varphi_1(x,y,t)}{\partial x}\right\}dxdt+\int_{-\infty}^{\infty}u(x,y,0)\varphi_1(x,y,0)dx=0, \tag{2.22}$$

$$\int_{R_y^2}\left\{v(x,y,t)\frac{\partial\varphi_2(x,y,t)}{\partial t}+\left(\frac{U^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right)\frac{\partial\varphi_2(x,y,t)}{\partial y}\right\}dydt+\int_{-\infty}^{\infty}v(x,y,0)\varphi_2(x,y,0)dy=0 \tag{2.23}$$

koruyan $u(x,y,t)$ ve $v(x,y,t)$ fonksiyonlarına (2.1)-(2.6) probleminin zayıf çözümü denir.

Burada $H^1(\overset{\circ}{R}{}^3)$, $\overset{\circ}{R}{}^3$ üzerinde Sobolev uzayıdır; R_x^2 ve R_y^2 sırasıyla R_+^3 ün xot, yot düzlemleri üzerindeki izdüşümünü göstermektedir.

2.2 Yardımcı Problem

(2.1), (2.2) sistemi için zayıf çözüm kavramını dahil ettiğimizde, süreksizlik noktalarının zamana göre evriminin ve yerinin bilinmemesi gibi yeni problemler ortaya çıkar. Diğer taraftan, süreksizlik noktalarının mevcudiyeti (2.1), (2.2) problemine bilinen klasik nümerik metotların uygulanmasında bir çok sorunlara neden olur. Zira, süreksizlik noktalarının civarında denklemin içerdiği türevler mevcut olmaya da bilirler.

[3] ve [4] e göre (2.1), (2.2) probleminin zayıf çözümünü belirlemek için,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int u(x,y,t)dx+\frac{U^2}{2}+\frac{p}{\rho}=C_1(t), \tag{2.24}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int v(x,y,t)dy+\frac{U^2}{2}+\frac{p}{\rho}=C_2(t), \tag{2.25}$$

$$u(x,y,0)=u_0(x,y), \tag{2.26}$$

$$v(x,y,0)=v_0(x,y) \tag{2.27}$$

yardımcı problemini içerelim. Burada $C_i(t),\ (i=1,2)$ ler keyfi sabitlerdir.

Not 2.1 (2.24) ve (2.25) denklemlerinde sırasıyla *y* ve *x* e parametre gözüyle bakılır.

(2.24)-(2.27) den açıkça görüldüğü gibi *u* ve *v* fonksiyonları süreksiz de olabilirler. Böylece, (2.24), (2.25) denklemlerinin çözüm sınıfı (2.22), (2.23) bağıntısıyla tanımlanan denklemlerin çözüm sınıfıyla çakışır.

$$\int u(x,y,t)dx + C_1(t) = {}^{x}u(x,y,t), \tag{2.28}$$

$$\int v(x,y,t)dy + C_2(t) = {}^{y}u(x,y,t) \tag{2.29}$$

notasyonlarını dahil edersek, (2.24), (2.25) sistemi bu notasyonlarda

$$\frac{\partial^{x}u}{\partial t} + \frac{U^2}{2} + \frac{p}{\rho} = 0, \tag{2.30}$$

$$\frac{\partial^{y}u}{\partial t} + \frac{U^2}{2} + \frac{p}{\rho} = 0 \tag{2.31}$$

olarak yazılabilir. (2.26), (2.27) başlangıç koşulları

$${}^{x}u(x,y,0) = {}^{x}u_0(x,y), \tag{2.32}$$

$${}^{y}u(x,y,0) = {}^{y}u_0(x,y)$$

(2.33)

olmaktadır. Burada, ${}^{x}u_0(x,y)$ ve ${}^{y}u_0(x,y)$ aşağıdaki denklemlerin keyfi sürekli çözümleri olmaktadır

$$\frac{\partial^{x}u_0(x,y)}{\partial x} = u_0(x,y),$$

(2.34)

$$\frac{\partial^{y}u_0(x,y)}{\partial y} = v_0(x,y). \tag{2.35}$$

Burada da yukarıda bahsettiğimiz gibi (2.34) ve (2.35) denklemlerinde sırasıyla *y* ve *x* e parametre olarak bakılmaktadır.

(2.30)-(2.33) yardımcı problemi aşağıdaki vantajlara sahiptir:

- ${}^{x}u(x,y,t)$ ve ${}^{y}u(x,y,t)$ fonksiyonlarının diferansiyellenebilme özelliği $u(x,y,t)$ ve $v(x,y,t)$ fonksiyonlarınınkinden bir mertebe daha yüksektir, yani daha pürüzsüz fonksiyon olmaktadırlar.

- (2.1)-(2.6) probleminin çözümleri $u(x,y,t)$ ve $v(x,y,t)$ fonksiyonlarının x, y ve t ye göre türelerini kullanmaksızın elde edilebilir.
- $u(x,y,t)$ ve $v(x,y,t)$ fonksiyonları süreksiz de olabilirler.

Teorem 2.1 Eğer ${}^{x}u(x,y,t)$ ve ${}^{y}u(x,y,t)$ fonksiyonları (2.30)-(2.33) yardımcı probleminin pürüzsüz çözümleri ise, bu taktirde

$$u(x,y,t) = \frac{\partial^{x} u(x,y,t)}{\partial x}, \tag{2.36}$$

$$v(x,y,t) = \frac{\partial^{y} u(x,y,t)}{\partial y} \tag{2.37}$$

fonksiyonları (2.1)-(2.6) probleminin Tanım 2.1 anlamında zayıf çözümleridir.

Önerilen yardımcı problem $u(x,y,t)$ ve $v(x,y,t)$ fonksiyonlarının x, y ve t ye göre türevlerini içermediğinden, (2.1)-(2.6) probleminin nümerik çözümü (2.30)-(2.33) probleminin nümerik çözümünden kolayca elde edilebilir.

(2.16), (2.17) (veya (2.20), (2.21)) in her bir denklemi birinci mertebeden nonlineer denklem olmaktadır ve ayrıca korunma kanunları ifade ederler. Bu nedenle, $\int u(x,y,t)dx$ ve $\int v(x,y,t)dy$ integralleri t den bağımsızdır. Burada da, birinci integralde y, ikincide ise x parametre rolünü oynamaktadır. Şimdi, aşağıdaki notasyonları içerelim

$$E_x(0) = \int_R u_0 dx,$$

$$E_y(0) = \int_R v_0 dy.$$

$E_x(0)$ ve $E_y(0)$ sayıları sırasıyla ${}^{x}u(x,y,t)$ ve ${}^{y}u(x,y,t)$ fonksiyonlarının kritik değerleri olarak adlandırılır.

Tanım 2.2

$${}^{x}u_{gen}(x,y,t) = \begin{cases} {}^{x}u(x,y,t), & {}^{x}u(x,y,t) < E_x(0), \\ E_x(0), & {}^{x}u(x,y,t) \geq E_x(0), \end{cases} \tag{2.38}$$

ve

$${}^{y}u_{gen}(x,y,t) = \begin{cases} {}^{y}u(x,y,t), & {}^{y}u(x,y,t) > E_y(0), \\ E_y(0), & {}^{y}u(x,y,t) \geq E_y(0) \end{cases} \tag{2.39}$$

ile tanımlanan fonksiyonlara (2.30)-(2.33) probleminin genişletilmiş çözümü denir.

Teorem 2.1 den, (2.1)-(2.6) probleminin zayıf çözümü için

$$u_{gen}(x, y, t) = \frac{\partial^x u_{gen}(x, y, t)}{\partial x}, \tag{2.40}$$

$$v_{gen}(x, y, t) = \frac{\partial^y u_{gen}(x, y, t)}{\partial y} \tag{2.41}$$

elde ederiz. Böylece,

$$u(x, y, t) = (u_{gen}(x, y, t), v_{gen}(x, y, t)) \tag{2.42}$$

ile tanımlı fonksiyon, (2.1)-(2.6) probleminin genişletilmiş (ya da zayıf) çözümü olur.

O halde, ${}^x u(x, y, t)$ ve ${}^y u(x, y, t)$ fonksiyonlarının kritik değerler aldığı noktaların geometrik yeri $u(x, y, t)$ vektörünün sıçrama yüzeyini tanımlar. Diğer bir ifadeyle, $u(x, y, t)$ vektörünün sıçrama noktaları, bu noktaların sağında $u(x, y, t)$ nin sıfır değerini aldığı noktalar olmaktadır.

2.3 Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Sonlu Farklar Yöntemi

(2.1)-(2.6) problemi için nümerik algoritma geliştirmek amacıyla ilk önce $R^3_{x,y,t}$ bölgesini

$$\Omega_{h_x, h_y, \tau} = \{(x_i, y_j, t_k) \mid x_i = ih_x,\ y_j = jh_y,\ t_k = k\tau;$$
$$i = \ldots - M, -(M-1), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, M, \ldots;\ j = \ldots - N, -(N-1), \ldots,$$
$$-1, 0, 1, \ldots, N, \ldots;\ k = 0, 1, 2, \ldots;\ h_x > 0,\ h_y > 0,\ \tau > 0\}$$

ağı ile örtelim. Burada, h_x, h_y ve τ sırasıyla x, y ve t değişkenlerine göre $\Omega_{h_x, h_y, \tau}$ ağının adımlarını göstermektedir.

$\Omega_{h_x, h_y, \tau}$ ağının keyfi (x_i, y_j, t_k) noktasında (2.30)-(2.33) denklemlerini aşağıdaki gibi sonlu farklara

$${}^x U_{i,j,k+1} = {}^x U_{i,j,k} - \frac{\tau}{2} \overline{U}^2_{i,j,k} - \frac{\wp_{i,j,k}}{\rho}, \tag{2.43}$$

$${}^y U_{i,j,k+1} = {}^y U_{i,j,k} - \frac{\tau}{2} \overline{U}^2_{i,j,k} - \frac{\wp_{i,j,k}}{\rho} \tag{2.44}$$

ayrıklaştıralım. Burada, ${}^x U_{i,j,k}$, ${}^y U_{i,j,k}$, $\overline{U}^2_{i,j,k}$ ve $\wp_{i,j,k}$ ağ fonksiyonları, (x_i, y_j, t_k) noktasında ${}^x u$, ${}^y u$, U^2 ve p fonksiyonlarının yaklaşık değerlerini göstermektedir.

(2.32), (2.33) başlangıç koşullarının da $\Omega_{h_x,h_y,\tau}$ ağının (x_i, y_j) noktalarında sonlu farklar karşılığı

$$^{x}U_{i,j,0} = {}^{x}u_0(x_i, y_j), \tag{2.45}$$

$$^{y}U_{i,j,0} = {}^{y}u_0(x_i, y_j) \tag{2.46}$$

olarak yazılmaktadır. Burada, $^{x}U_0(x_i, y_j)$, $^{y}U_0(x_i, y_j)$ ağ fonksiyonları

$$\frac{^{x}U_{i,j,0} - {}^{x}U_{i-1,j,0}}{h_x} = u_0(x_i, y_j),$$

(2.47)

$$\frac{^{y}U_{i,j,0} - {}^{y}U_{i,j-1,0}}{h_y} = v_0(x_i, y_j) \tag{2.48}$$

denklemleri ile tanımlanır. Böylece, aşağıdaki teorem sağlanır.

Teorem 2.2 Eğer $^{x}U_{i,j,k}$ ve $^{y}U_{i,j,k}$ (2.43)-(2.46) yardımcı probleminin nümerik çözümleri ise, bu taktirde

$$U_{i,j,k+1} = \frac{^{x}U_{i,j,k+1} - {}^{x}U_{i-1,j,k+1}}{h_x}, \tag{2.49}$$

$$V_{i,j,k+1} = \frac{^{y}U_{i,j,k+1} - {}^{y}U_{i,j-1,k+1}}{h_y} \tag{2.50}$$

ile tanımlanan bağıntılar (2.1)-(2.6) esas probleminin nümerik çözümleri olur.

(2.43), (2.44) fark şeması τ ya göre birinci mertebedendir. Ancak onun mertebesi, örneğin Runge-Kutta metodu uygulanarak daha yüksek yapılabilir.

(2.43)-(2.46) dan görüldüğü üzere, önerilen algoritmalar bilgisayar hesaplamaları açısından oldukça etkili ve ekonomiktir.

3. ÜÇ BOYUTLU EULER DENKLEM SİSTEMİ

3.1 Birinci Aralık İntegrali. Cauchy İntegrali

$\Omega \subset R^3$ sınırlı bir bölge olmak üzere $Q = \Omega \times [0,T)$ da aşağıdaki denklemler sistemini

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - g, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \tag{3.3}$$

başlangıç koşulları

$$u(x,y,z,0) = u_0(x,y,z), \tag{3.4}$$

$$v(x,y,z,0) = v_0(x,y,z), \tag{3.5}$$

$$w(x,y,z,0) = w_0(x,y,z) \tag{3.6}$$

çerçevesinde göz önüne alalım. Burada u_0, v_0 ve w_0 bilinen fonksiyonlardır. g-serbest ivme olmak üzere $\rho = sabit$ olsun.

$$u = \Phi_x, \;\; v = \Phi_y, \;\; w = \Phi_z \tag{3.7}$$

potansiyel fonksiyonunu dahil edelim. Akışta girdap olmadığını varsayalım yani

$$rot\, \vec{u} = \left(w_y - v_z, u_z - w_x, v_x - u_y\right) = 0 \tag{3.8}$$

olsun. (3.1) denklemini aşağıdaki şekilde yazarsak

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{w^2}{2}\right) + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right] - v\frac{\partial v}{\partial x} - w\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right]+v\left[u_y-v_x\right]+w\left[u_z-w_x\right]+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right]-v\left[v_x-u_y\right]+w\left[u_z-w_x\right]+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0$$

(3.7) ve (3.8) den

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right]+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0 \tag{3.9}$$

alırız. Eğer son denklemdeki ρ nun sabit olduğunu varsayarsak, (3.9) denklemini

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t}+\frac{u^2+v^2+w^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right]=0$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}+\frac{u^2+v^2+w^2}{2}+\frac{p}{\rho}=c(t) \tag{3.10}$$

buluruz. Aşağıdaki değişken dönüşümünü uygularsak,

$$\Phi=\Phi^*+\int_0^t c(\tau)\,d\tau \tag{3.11}$$

buradan

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}=\frac{\partial \Phi^*}{\partial t}+c(t) \tag{3.12}$$

olur. (3.12) ifadesini ve $\vec{u}^{\,2}=u^2+v^2+w^2$ olduğunu dikkate alırsak

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial t}+\frac{1}{2}\vec{u}^{\,2}+\frac{p}{\rho}=0 \tag{3.13}$$

elde ederiz. (3.13) denklemine Cauchy integrali denir.

Şimdi $\rho \neq sabit$ durumunu göz önüne alalım. Bu taktirde

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{dx}$$

olmaktadır ve

$$\mathrm{P}=\int\frac{dp}{\rho}$$

değişken dönüşümünü yaptıktan sonra (3.9) denklemini

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{u^2+v^2+w^2}{2}+\mathrm{P}\right]=0$$

şeklinde yazabiliriz.

Aynı işlemleri (3.2) denklemi için de yaparsak,

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right)-u\frac{\partial u}{\partial y}-w\frac{\partial w}{\partial y}+u\frac{\partial v}{\partial x}+w\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{p}{\rho}-gy\right]=0$$

veya

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right]+u\left[v_x-u_y\right]-w\left[w_x-v_z\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{p}{\rho}-gy\right]=0$$

olur. Buradan

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{u^2+v^2+w^2}{2}+\frac{p}{\rho}-gy=c(t) \tag{3.14}$$

bulunur. Benzer şekilde, (3.3) denkleminden de

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{u^2+v^2+w^2}{2}+\frac{p}{\rho}=c(t) \tag{3.15}$$

elde edilir.

3.2 Yardımcı Problem. Euler Sisteminin Yer Koordinatlarına Göre Parçalanması

(3.1)-(3.3) denklem sistemine karşılık gelen yardımcı denklemleri

$$\frac{u^2+v^2+w^2}{2}=\frac{U^2}{2}$$

olduğunu dikkate alarak,

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{U^2}{2}\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{p}{\rho}\right]=0, \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{U^2}{2}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{p}{\rho}-gy\right]=0, \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{U^2}{2}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\rho}\right)=0 \tag{3.18}$$

şeklinde veya

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{U^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right]=0, \tag{3.19}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{U^2}{2}+\frac{p}{\rho}-gy\right]=0, \tag{3.20}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{U^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right]=0 \tag{3.21}$$

olarak yazabiliriz. (3.19)-(3.21) denklem sisteminin başlangıç koşulu (3.4)-(3.6) olmaktadır. Buradan

$$\frac{\partial}{\partial t}\int udx+\frac{U^2}{2}+\frac{\rho}{\varphi}=c_1,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int vdy+\frac{U^2}{2}+\frac{\rho}{\varphi}-gy=c_2,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int wdz+\frac{U^2}{2}+\frac{\rho}{\varphi}=c_3$$

elde ederiz. Burada c_i, $(i=1,2,3)$ ler genelde t ye bağlı keyfi fonksiyonlardır.

[3] ve [4] den görüldüğü üzere (3.19)-(3.21) denklemler sisteminin çözümü yer eksenlerinin sayısı bir tane olduğu durumda bile süreksizlik noktalarına sahiptir ve söz konusu süreksizlik noktalarının yerini önceden bilmek mümkün olmayabilir. Diğer bir deyişle, söz konusu denklemler sistemi klasik çözüme sahip değildir. Bundan dolayı [2] deki zayıf çözüm kavramını içerelim.

Tanım 3.1 (3.4)-(3.6) koşullarını sağlayan ve $\varphi(x,y,z,T)=0$ özelliğine sahip keyfi $\varphi(x,y,z,t)\in \overset{0}{C^1}(Q)$ test fonksiyonları için

$$\int_{Q_x}\left\{u\varphi_t+\left(\frac{U^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right)\varphi_x\right\}dxdt+\int u_0(\xi,y,z)\varphi(\xi,y,z,0)\;d\xi\;=0, \tag{3.22}$$

$$\int_{Q_y}\left\{v\varphi_t+\left(\frac{U^2}{2}+\frac{p}{\rho}-gy\right)\varphi_y\right\}dydt+\int v_o(x,\eta,z)\varphi(x,\eta,z,0)\;d\eta=0, \tag{3.23}$$

$$\int_{Q_z}\left\{w\varphi_t+\left(\frac{U^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right)\varphi_z\right\}dzdt+\int w_0(x,y,\zeta)\varphi(\mathrm{x,y},\zeta,0)\;\mathrm{d}\zeta=0 \tag{3.24}$$

integral eşitliklerini koruyan u, v ve w fonksiyonlarına zayıf çözüm denir.

Buradaki Q_x, Q_y ve Q_z, Q bölgesinin sırasıyla xot, yot ve zot düzlemleri üzerindeki izdüşümlerini göstermektedir.

(3.22)-(3.24) den de görüldüğü gibi burada *u*, *v* ve *w* fonksiyonları süreksiz de olabilirler.

Zayıf çözümleri içerirken ortaya çıkan en önemli problem *u*, *v* ve *w* fonksiyonlarının süreksizlik noktalarının yerinin belirlenmesi ve onların zamana göre sonraki evrimlerinin incelenmesidir. Diğer taraftan süreksizlik noktalarının varlığı, çözümlerin bulunması için klasik çözüm yöntemlerinin uygulanmasına da engel olur. Çünkü süreksizlik noktaları etrafında denklemlerin içerdiği türevlerin hiç biri mevcut olmamaktadır.

Zayıf çözümlerin bulunması için [3] ve [4] de olduğu gibi, aşağıdaki şekilde yazılmış yardımcı denklemler sistemini içerelim.

$$\int u dx + c_1 = {}^{x}U \ , \ \int v dy + c_2 = {}^{y}V \ , \ \int w dz + c_3 = {}^{z}W \tag{3.25}$$

notasyonlarını dahil ederek elde edilen

$$\frac{\partial\, {}^{x}U}{\partial t} + \frac{U^2}{2} + \frac{\rho}{\varphi} = 0, \tag{3.26}$$

$$\frac{\partial\, {}^{y}V}{\partial t} + \frac{U^2}{2} + \frac{\rho}{\varphi} - gy = 0, \tag{3.27}$$

$$\frac{\partial\, {}^{z}W}{\partial t} + \frac{U^2}{2} + \frac{\rho}{\varphi} = 0 \tag{3.28}$$

(3.26)-(3.28) denklem sistemine (3.1)-(3.3) denklem sistemine karşılık gelen yardımcı sistem diyelim. (3.26)-(3.28) denklem sisteminden açıkça görüldüğü üzere *u*, *v* ve *w* fonksiyonları süreksiz de olabilirler. Bu denklemler sisteminin diğer bir özelliği de, buradaki hiç bir fonksiyonun yer eksenlerine göre türevlerinin hesaplanmasını gerektirmemesidir.

Teorem 3.1 Eğer (3.25) ifadeleriyle tanımlanan fonksiyonlar (3.26)-(3.28) yardımcı probleminin çözümleri ise

$$u = {}^{x}U_x, \quad v = {}^{y}V_y, \quad w = {}^{z}W_z$$

ifadeleri ile tanımlanan *u*, *v*, *w* fonksiyonları esas problemin zayıf çözümleri olmaktadır.

(3.26)-(3.28) denklem sistemi için başlangıç koşullarını, (3.4)-(3.6) koşullarından

$$u(x, y, z, 0) = u_0(x, y, z) = {}^{x}U_x^{(0)}$$

$$v(x, y, z, 0) = v_0(x, y, z) = {}^{x}V_x^{(0)}$$

$$w(x,y,z,0)=w_0(x,y,z)={}^xW_x^{(0)}$$

olarak veya (3.25) notasyonlarını dikkate alarak

$$^xU^{(0)}=\int u_0(\xi,y,z)dx,$$

$$^yV^{(0)}=\int v_o(x,\eta,z)d\eta,$$

$$^zW^{(0)}=\int w_0(x,y,\zeta)d\zeta$$

buluruz. Bu taktirde, (3.26)-(3.28) denklem sistemi için başlangıç koşulları

$$^yV(x,y,z,0) = {}^yV^{(0)}(x,y,z), \tag{3.29}$$

$$^xU(x,y,z,0) = {}^xU^{(0)}(x,y,z), \tag{3.30}$$

$$^zW(x,y,z,0) = {}^zW^{(0)}(x,y,z) \tag{3.31}$$

olmaktadır. Burada $^xU(x,y,z,0)$, $^yV(x,y,z,0)$ *ve* $^zW(x,y,z,0)$ bilinen fonksiyonlardır.

(3.26)-(3.28) denklem sisteminin aşağıdaki avantajları vardır;

- ^xU , ^yV ve ^zW fonksiyonlarının diferansiyellenebilme özelliği *u*, *v* ve *w* fonksiyonlarının diferansiyellenebilme özelliğinden yüksektir.

- (3.26)-(3.31) problemi *U*, *V* ve *W* fonksiyonlarının yer değişiklerine göre hiç bir türevlerini içermez.

(3.19)-(3.21) sisteminin her bir denklemi sırasıyla *x*, *y* ve *z* eksenlerine göre diverjans şekilde yazılmış denklemlerdir ve bunlar korunma kanununun *x*, *y*. *z* eksenleri üzerine izdüşümleridir.

Buradan $\int u(\xi,y,z,t)d\xi$, $\int v(x,\eta,z,t)d\eta$, $\int w(x,y,\zeta,t)d\zeta$ integralleri keyfi *t* için sabit olmaktadırlar.

Aşağıdaki ifadelerle tanımlanan

$$E_u^{(y,z)}(0)=\int u_o(\xi,y,z)d\xi,$$

$$E_v^{(x,z)}(0)=\int v_o(x,\eta\ ,z)d\eta,$$

$$E_w^{(x,y)}(0)=\int w_o(x,y,\zeta\ )d\zeta$$

fonksiyonlarını içerelim. Burada $E_u^{(y,z)}(0)$, $E_v^{(x,z)}(0)$ ve $E_w^{(x,y)}(0)$ sırasıyla $^xU(x,y,z,t)$, $^yV(x,y,z,t)$ ve $^zW(x,y,z,t)$ fonksiyonlarının kritik değerleri olmaktadır.

Tanım 3.2

$$
{}^{x}U_{gen}(x,y,z,t)=\begin{cases} {}^{x}U(x,y,z,t), & {}^{x}U(x,y,z,t)<E_u^{(y,z)}(0), \\ E_u^{(y,z)}(0), & {}^{x}U(x,y,z,t)\geq E_u^{(y,z)}(0), \end{cases}
$$

$$
{}^{y}V_{gen}(x,y,z,t)=\begin{cases} {}^{y}V(x,y,z,t), & {}^{y}V(x,y,z,t)<E_v^{(x,z)}(0), \\ E_v^{(x,z)}(0), & {}^{y}V(x,y,z,t)\geq E_v^{(x,z)}(0) \end{cases}
$$

ve

$$
{}^{z}W_{gen}(x,y,z,t)=\begin{cases} {}^{z}W(x,y,z,t), & {}^{z}W(x,y,z,t)<E_w^{(x,y)}(0), \\ E_w^{(x,y)}(0), & {}^{z}W(x,y,z,t)\geq E_w^{(x,y)}(0) \end{cases}
$$

ile tanımlanan fonksiyonlara (3.26)-(3.28) probleminin genişletilmiş çözümü denir.

Teorem 3.1 e göre de, esas problemin zayıf çözümü için

$$
u_{gen}(x,y,z,t)=\frac{\partial^{x}U_{gen}(x,y,z,t)}{\partial x},
$$

$$
v_{gen}(x,y,z,t)=\frac{\partial^{y}V_{gen}(x,y,z,t)}{\partial y}
$$

ve

$$
w_{gen}(x,y,z,t)=\frac{\partial^{z}W_{gen}(x,y,z,t)}{\partial z}
$$

elde ederiz.

3.3 Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Sonlu Fark Algoritmaları

R_+^4 ile $\{\ x,y,z,t\geq 0\ \}$ evrim uzayını gösterelim ve R_+^4 ü

$\Omega_{h_xh_yh_z,\tau}=\{x_i=ih_x,\ y_j=jh_y,\ z_\gamma=\nu h_z,\ t_k=k\tau,\ (i,j,\nu=\ -\infty,...,-1,0,1,...,\infty),\ k=0,1,2...\ \}$

şebekesiyle örtelim. Burada h_x, h_y, h_z ve τ sırasıyla *x*, *y*, *z* ve *t* değişkenlerine göre adımları göstermektedir.

(3.26)-(3.31) problemini $\Omega_{h_xh_yh_z,\tau}$ şebekesinde aşağıdaki biçimde ayrıklaştıralım

$$
{}^{x}U_{i,j,\gamma}^{k+1}={}^{y}U_{i,j,\nu}^{k}-\frac{1}{2}\left[\left(U_{i,j,\nu}^{k}\right)^2+\left(V_{i,j,\nu}^{k}\right)^2+\left(W_{i,j,\nu}^{k}\right)^2\right]-P_{i,j,\nu}^{k}\Big/\rho\,, \tag{3.32}
$$

$$
{}^{y}V_{i,j,\nu}^{k+1}={}^{y}V_{i,j,\nu}^{k}-\frac{1}{2}\left[\left(U_{i,j,\nu}^{k}\right)^2+\left(V_{i,j,\nu}^{k}\right)^2+\left(W_{i,j,\nu}^{k}\right)^2\right]-P_{i,j,\nu}^{k}\Big/\rho+gy_j\,, \tag{3.33}
$$

$$ {}^{z}W_{i,j,\nu}^{k+1} = {}^{z}W_{i,j,\nu}^{k} - \frac{1}{2}\left[\left(U_{i,j,\nu}^{k}\right)^{2} + \left(V_{i,j,\nu}^{k}\right)^{2} + \left(W_{i,j,\nu}^{k}\right)^{2}\right] - P_{i,j,\nu}^{k}\Big/\rho\,, \tag{3.34} $$

$$ {}^{x}U_{i,j,k}^{0} = {}^{x}U^{(0)}\left(x_i, y_j, z_\nu\right), \tag{3.35} $$

$$ {}^{y}V_{i,j,k}^{0} = {}^{y}V^{(0)}\left(x_i, y_j, z_\nu\right), \tag{3.36} $$

$$ {}^{z}W_{i,j,k}^{0} = {}^{z}W^{(0)}\left(x_i, y_j, z_\nu\right). \tag{3.37} $$

Teorem 3.2 Keyfi $i,\ j,\ \nu$ ve k için

$$ {}^{x}U_{\bar{x}}^{k+1} = U^{k+1}, $$

$$ {}^{y}V_{\bar{y}}^{k+1} = V^{k+1}, $$

$$ {}^{z}W_{\bar{z}}^{k+1} = W^{k+1} $$

dir.

Görüldüğü üzere, (3.32)-(3.37) sonlu fark denklem sistemi hesaplama açısından çok ekonomik ve çok da sade olmaktadır. Ayrıca da (3.26)-(3.31) denklem sistemi için τ ya göre Runge-Kutta yönteminde olduğu gibi daha yüksek mertebeden sonlu fark sistemleri yazmak mümkündür.

4. YARI EKSENDE İNCE SINIR TABAKA PROBLEMİ

4.1 Problemin Koyuluşu ve R. von Mises Dönüşümü

Aşağıdaki problemi göz önüne alalım

$$u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+v\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{4.2}$$

$$u(x,0)=0 \;\;,\;\; u(x,\infty)=u_\infty(x). \tag{4.3}$$

Burada $u_\infty(x)=u_0x^n$ olmaktadır. (4.1), (4.2) denklem sisteminin çözümünün yapısını incelemek için onu bir boyutlu parabolik tür denkleme indirgeyelim. Bu amaçla,

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

değişken dönüşümünü uygulayalım. Bu notasyonda (4.1), (4.2) denklemler sistemi

$$\psi_x\psi_{xy}-\psi_x\psi_{yy}=u_\infty u_{xx}+\nu\psi_{yyy}$$

denklemine dönüşür.

(4.1), (4.2) sistemine aşağıdaki R. von Mises dönüşümünü

$$u=u(x,y),\quad \psi=\psi(x,y)$$

uygulayalım. (4.1) denklemini (x,ψ) değişkenlerinde yazalım,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y+\left(\frac{\partial u}{\partial\psi}\right)_x\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_y=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y-\nu\left(\frac{\partial u}{\partial\psi}\right)_x \tag{4.4}$$

$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y$ türevi hesaplanırken u fonksiyonunda y ye parametre gözüyle bakılmıştır. Benzer yolla

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x=\left(\frac{\partial u}{\partial\psi}\right)_x\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_x=u\left(\frac{\partial u}{\partial\psi}\right)_x$$

ve

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_x = \frac{\partial}{\partial y}\left[u\left(\frac{\partial u}{\partial \psi}\right)_x\right]_x = \frac{\partial}{\partial \psi}\left[u\left(\frac{\partial u}{\partial \psi}\right)_x\right]_x \frac{\partial \psi}{\partial y} = u\frac{\partial}{\partial \psi}\left[u\left(\frac{\partial u}{\partial \psi}\right)_x\right]_x \tag{4.5}$$

türevlerini de hesaplayabiliriz. (4.4) ve (4.5) i, (4.1) de yerine yazarsak

$$u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_\psi - uv\left(\frac{\partial u}{\partial \psi}\right)_x + vu\left(\frac{\partial u}{\partial \psi}\right)_x = vu\frac{\partial}{\partial \psi}\left[u\left(\frac{\partial u}{\partial \psi}\right)_x\right]_x$$

elde ederiz. Böylelikle von Mises dönüşümü (4.1), (4.2) denklemlerini

$$u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_\psi = vu\frac{\partial}{\partial \psi}\left[u\left(\frac{\partial u}{\partial \psi}\right)_x\right]_x$$

veya (x,ψ) koordinatlarında nonlineer ısı iletim

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_\psi = v\frac{\partial}{\partial \psi}\left[u\left(\frac{\partial u}{\partial \psi}\right)_x\right]_x \tag{4.6}$$

denklemine indirger.

(4.6) $u = u(x,\psi)$ fonksiyonuna göre dejenere olan nonlineer parabolik tür diferansiyel denklem olmaktadır. (4.6) denkleminin (4.3) koşulları çerçevesinde çözümünün bulunmasını esas problem olarak adlandıracağız.

4.2 Esas Problemin Stasyoner Çözümü

Şimdi (4.6), (4.3) probleminin gerçek çözümünü bulalım. (4.6), (4.3) probleminin çözümünü koşan dalga şeklinde

$$u(x,\psi) = f(Dx-\psi) = f(\xi) \tag{4.7}$$

olarak arayalım. Burada, D koşan dalganın henüz bilinmeyen hızını gösterir ve f diferansiyellenebilen bilinmeyen fonksiyon olmaktadır.

$$\xi = Dx - \psi \tag{4.8}$$

değişkenine hareket eden koordinat denir. (4.7) den, gereken türevleri

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_\xi'(D)\,, \quad \frac{\partial u}{\partial \psi} = -f_\xi'\,, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} = f_{\xi\xi}'' \tag{4.9}$$

alıp, (4.7) ve (4.9) ifadelerini (4.6) da yerine yazarsak,

$$D\frac{df}{d\xi}=\nu\frac{d}{d\xi}\left[f\frac{df}{d\xi}\right]$$

elde ederiz. Son denklemi integrallersek

$$Df=\nu f\frac{df}{d\xi}+c$$

alırız. $c=0$ kabul edersek,

$$Df=\nu f\frac{df}{d\xi}$$

olur. Buradan, son denklemin genel çözümü

$$f(\xi)=c-\frac{D}{\nu}\xi$$

şeklinde bulunur. Keyfi *c* sabitini

$$\psi=x=0\Rightarrow\xi=0,\quad f=0\Rightarrow c=0$$

olarak elde ederiz. Nihayet, (4.6), (4.3) probleminin çözümünü

$$u(x,\psi)=f(\xi)=\frac{D}{\nu}(Dx-\psi)$$

olarak buluruz. $u(x,\psi)$ fonksiyonu $\psi=Dx$ cephe noktasının sağında sıfıra eşit olduğundan (4.6), (4.3) probleminin çözümünü

$$u(x,\psi)=\begin{cases}\frac{D}{\nu}(Dx-\psi), & \psi\le Dx\\ 0, & \psi>Dx\end{cases}\tag{4.10}$$

şeklinde yazabiliriz. (4.3) deki sınır koşulunu ve (4.10) çözümünü dikkate alırsak

$$\left.\frac{D}{\nu}(Dx-\psi)\right|_{\psi=0}=u_0x^n$$

elde ederiz. Buradan

$$D=\mp\sqrt{\nu u_0}\ ,\quad n=1\tag{4.11}$$

olarak elde ederiz. (4.11) ifadesinden *u* fonksiyonunun dağılma hızının sonlu olduğu görülür ve $\mp\sqrt{\nu u_0}$ a eşit olur. Dolayısıyla $supp\ u(x,\psi)=\{0\le\psi\le Dx\}$ olmaktadır. (4.10) dan görüldüğü gibi (4.6), (4.3) probleminin çözümü sürekli, $u_\psi(x,\psi)$ parça-parça sürekli, $u_{\psi\psi}$ ise sıfıra eşit olmaktadır. Dolayısıyla (4.1) denklemi dejenere olur ve

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \nu \left(\frac{\partial u}{\partial \psi} \right)^2 \tag{4.12}$$

halini alır. (4.12) birinci basamaktan nonlineer denklem olmaktadır ve onun çözümünü bulmak için Charpit denklemler sistemini yazalım. Bu amaçla

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p, \qquad \frac{\partial u}{\partial \psi} = q \tag{4.13}$$

olarak gösterelim. (4.13) notasyonlarında (4.12) denklemini

$$\pi(p,q) = p - \nu q^2 = 0 \tag{4.14}$$

şeklinde yazalım. (4.14) ü x ve ψ ye göre diferansiyelleyelim

$$\frac{\partial p}{\partial x} - 2\nu q \frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial \psi} - 2\nu q \frac{\partial q}{\partial \psi} = 0.$$

$\frac{\partial p}{\partial \psi} = \frac{\partial q}{\partial x}$ olduğunu dikkate alırsak, son denklemleri

$$\frac{\partial p}{\partial x} - 2\nu q \frac{\partial p}{\partial \psi} = 0,$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} - 2\nu q \frac{\partial q}{\partial \psi} = 0$$

olarak yazabiliriz. Bilinmeyen (x, ψ, p, q, u) değişkenlerini bulmak için aşağıdaki Charpit denklem sistemini

$$\frac{dx}{1} = \frac{d\psi}{-2\nu q} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{0} = \frac{du}{p - 2\nu q^2} \tag{4.15}$$

elde ederiz. Buradan $p = a = sabit$ olduğundan (4.14) den $q = \pm\sqrt{\frac{a}{\nu}}$ olmaktadır.

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial \psi} d\psi$$

veya

$$du = p dx + q d\psi$$

ifadesinden

$$u = ax \pm \sqrt{\frac{a}{\nu}}\psi + c$$

elde ederiz. Buradaki c integralleme sabitini, $x = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \psi = 0$ olmasından ve başlangıç koşulunun dikkate alınmasından $c = 0$ olarak buluruz. Böylece,

$$u = ax \pm \sqrt{\frac{a}{\nu}}\psi \tag{4.16}$$

çözümünü elde ederiz. (4.16) sınır koşulunu dikkate alırsak

$$u_0 x = ax$$

yazabiliriz. Buradan $a = u_0$ olur. D nin önünde “-” işareti olduğunda D hızıyla sağ tarafa, “+” işareti olduğunda sol tarafa dağılan dalga elde edilmektedir. a nın bu değeri (4.16) da yerine (“-” işaretiyle) konulursa

$$u(x,\psi) = \frac{D}{\nu}(Dx - \psi)$$

buluruz. $Dx \geq \psi$ değerlerinde $u(x,\psi) = 0$ olduğundan (4.12), (4.3) probleminin çözümü için

$$u(x,\psi) = \begin{cases} \dfrac{D}{\nu}(Dx - \psi), & Dx \leq \psi \\ 0, & Dx > \psi \end{cases} \tag{4.17}$$

ifadesini elde ederiz. Söz konusu ifade (4.10) çözümü ile çakışmaktadır.

4.3 Yardımcı Problem ve Çözümü

(4.10) veya (4.17) ifadelerinden görüldüğü gibi (4.6), (4.3) probleminin çözümü sürekli, birinci türevi ise zayıf süreksizlik noktasına sahip olmaktadır. Dolayısıyla, söz konusu problemin klasik çözümü mevcut değildir. O halde zayıf çözümü aşağıdaki gibi tanımlayalım.

Tanım 4.1 (4.3) koşullarını ve $f_\psi(Dx,\psi) = 0$ koşuluna sahip temel fonksiyonlar sınıfından olan herhangi bir $f(x,\psi)$ fonksiyonu için aşağıdaki integral

$$\int_D \left\{ uf_x - \frac{\nu}{2}u^2 f_{\psi\psi} \right\} dx d\psi - \int_0^{\ell_f(x)} \nu \frac{u_0^2}{2} x^2 f_\psi(x,0) dx = 0$$

eşitliğini koruyan $u(x,\psi)$ fonksiyonuna (4.6), (4.3) probleminin zayıf çözümü denir.

(4.6), (4.3) probleminin zayıf çözümünü elde etmek için önce (4.6) denklemini

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\nu}{2}\frac{\partial^2 u^2}{\partial \psi^2}$$

şeklinde yazalım. [3] ve [4] ü takip ederek (4.6), (4.3) problemine bilinen anlamda denk olan yardımcı problem önerelim. Bunun için A ile $A(\cdot)=\dfrac{\partial^2(\cdot)}{\partial \psi^2}$ operatörünü gösterelim. A^{-1} in mevcut olduğunu varsayarak (4.6) nın her iki tarafına A^{-1} i uygularsak

$$A^{-1}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\nu}{2}A^{-1}Au^2$$

alırız. Son denklemi

$$\frac{\partial A^{-1}u}{\partial x}=\frac{\nu}{2}u^2$$

gibi de yazabiliriz.

$$A^{-1}u=v(x,\psi) \tag{4.18}$$

olsun. (4.18) den

$$u=Av(x,\psi) \tag{4.19}$$

elde ederiz. (4.19) u dikkate alırsak yardımcı denklemi

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\nu}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 \tag{4.20}$$

olarak da yazabiliriz.

(4.20) denklemi için başlangıç ve sınır koşulları

$$v(0,\psi)=v_0(x),\quad u(x,0)=u_0 x \tag{4.21}$$

olmaktadır. Burada $v_0(x)$,

$$\frac{d^2 v_0(x)}{dx^2}=u(x,0)$$

denklemini koruyan herhangi bir fonksiyon olmaktadır.

Teorem 4.1 Eğer $v(x,\psi)$ fonksiyonu (4.20), (4.21) probleminin çözümü ise (4.19) eşitliği ile tanımlanan $u(x,\psi)$ fonksiyonu da (4.6), (4.3) probleminin zayıf çözümü olmaktadır.

Şimdi, (4.20), (4.21) probleminin çözümünü bulalım. Bunun için denklemin çözümünü

$$v(x,\psi)=\varphi(Dx-\psi) \tag{4.22}$$

şeklinde arayalım. Gereken türevleri hesaplayıp elde edilen ifadeleri (4.20) de yerine yazarsak

$$D\varphi_\xi = \frac{\nu}{2}\left(\varphi_{\xi\xi}\right)^2$$

alırız.

$$\varphi_\xi = z$$

değişken dönüşümü yaparsak, bu notasyonda son denklem

$$Dz = \frac{\nu}{2} z_\xi^{\ 2}$$

şeklini alır. Değişkenlerine ayırırsak

$$\left(\frac{2D}{\nu}\right)^{1/2} d\xi = \frac{dz}{z^{1/2}}$$

olup, buradan

$$z = \left[\left(\frac{D}{2\nu}\right)^{1/2} \xi + c_1\right]^2$$

elde ederiz. Buradan,

$$v(x,\psi) = \varphi(\xi) = \frac{\left[\left(\frac{D}{2\nu}\right)^{1/2} \xi + c_1\right]^3}{3\left(\frac{D}{2\nu}\right)^{1/2}} + c_2$$

veya

$$v(x,\psi) = \frac{1}{3}\left(\frac{D}{2\nu}\right)^{-1/2}\left[\left(\frac{D}{2\nu}\right)^{1/2}\left(Dx - \psi\right) + c_1\right]^3 + c_2 \tag{4.23}$$

buluruz. (4.23) den kolayca gösterilebilir ki,

$$\frac{\partial^2 v(x,\psi)}{\partial \psi^2} = u(x,\psi) \tag{4.24}$$

olmaktadır. (4.23) den görüldüğü gibi yardımcı problemin çözümü tek değildir. Söz konusu yardımcı problemin aşağıdaki avantajları vardır:

1. $v(x,\psi)$ fonksiyonunun diferansiyellenebilme özelliği $u(x,\psi)$ fonksiyonunun diferansiyellenebilme özelliğinden 2 mertebe yüksektir.

2. $u(x,\psi)$ çözümünü yardımcı problem aracılığıyla elde etmek için önerilen algoritmada $u(x,\psi)$ fonksiyonunun hiçbir değişkene göre türevleri kullanılmamaktadır.

Bunun yanı sıra, yardımcı problemin çözümünü kullanarak $u(x,\psi)$ fonksiyonunun türevlenebilme özelliğini de incelemek mümkündür.

(4.24) ifadesinden

$$v(x,\psi) = \frac{1}{\Gamma(0)} \int_0^{\psi} (\psi - \xi) u(x,\xi) d\xi \tag{4.25}$$

yazabiliriz. Burada $\Gamma(x)$ 1.tür Euler fonksiyonu olmaktadır. (4.25) den görüldüğü gibi, eğer $u(x,\psi)$ fonksiyonu iki kez diferansiyellenebilen fonksiyon ise (4.24) eşitliği gerçek olurdu. Fakat $u(x,\psi)$ fonksiyonunun diferansiyellenebilme özelliği birden az olmaktadır, yani $u(x,\psi)$ nun diferansiyellenebilme özelliği $0 < \alpha < 1$ mertebeden olmaktadır.

$u(x,\psi)$ fonksiyonunun x ve ψ değişkenlerine göre türevlerini

$$D_x^{\alpha} u(x,\psi) = \frac{\partial^{\alpha} u}{\partial x^{\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^{x} (\xi - \psi)^{-\alpha} \frac{\partial u(\xi,\psi)}{\partial \xi} d\xi, \quad 0 < \alpha < 1$$

ve

$$D_{\psi}^{\beta} u(x,\psi) = \frac{\partial^{\beta} u}{\partial \psi^{\beta}} = \frac{1}{\Gamma(-\beta)} \int_0^{\psi} (x - \eta)^{-\beta} \frac{\partial u(x,\eta)}{\partial \eta} d\eta, \quad 0 < \beta < 1$$

olarak ifade edebiliriz. Burada $D_x^{\alpha} u(x,\psi)$ ve $D_{\psi}^{\beta} u(x,\psi)$ sırasıyla x ve ψ değişkenlerine göre Caputo anlamında türevler olmaktadır, [5].

5. SONUÇLAR

Tezde aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

1. İki ve üç boyutlu Euler denklemler sistemi koordinatlara ayrıklaştırılmıştır.

2. İki boyutlu Euler denklem sisteminin süreksiz fonksiyonlar sınıfında sonlu fark algoritmalarının yazılması için özel yolla önerilmiş yardımcı problem sunulmuştur ve söz konusu yardımcı problemin Euler denklem sistemi için birinci aralık integrali olduğu ispatlanmıştır.

3. Üç boyutlu Euler denklem sistemi için birinci aralık integrali, Cauchy integrali elde edilmiş ve söz konusu aralık integrali (yardımcı problemi) kullanarak süreksiz fonksiyonlar sınıfında özel nümerik yöntem önerilmiştir.

4. Euler denklemler sisteminin özel durumu olan ince sınır tabaka probleminin gerçek çözümü elde edilmiş ve çözümün diferansiyellenebilme mertebesi incelenmiştir.

5. İnce tabaka problemi dejenere olan nonlineer kısmi türevli diferansiyel denkleme indirgenmiş ve elde edilen denklemlerin stasyoner çözümleri de bulunmuştur.

6. KAYNAKLAR

[1] Acheson, D.J., Elementary Fluid Dynamics, Clarendon Press, Oxford, 1990.

[2] Courant, R., Methods of Mathematical Physics, Vol.II, Interscience Publishers, Inc., New-York, 1966.

[3] Rasulov, M.A., Karaguler, T., Finite Differences Scheme for the Euler Sistem of Equations in a Class of Discontinuous Functions, Numerical Analysis and its Applications, NAA, 2004, LNCS 3401, pp. 471-477, 2005.

[4] Rasulov, M. A. On a Method of Solving the Cauchy Problem for a First Order Nonlinear Equation of Hyperbolic Type with a Smooth Initial Condition. Soviet Math. Dok. 43, No.1, 1991.

[5] Kilbas, A.A., Srivastava, H.M., Trujillo, J.J., Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier Inc., 2006.

ÖZGEÇMİŞ