T.C.

BEYKENT ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANA BİLİM DALI

UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

İLETİM HATTI DENKLEMLERİ İÇİN BAŞLANGIÇ-SINIR DEĞER PROBLEMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ethem İlhan ŞAHİN

070860001

İSTANBUL, 2009

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANA BİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

ŞLANGIÇ-SINIR DEĞER PROBLEMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ethem İlhan ŞAHİN
Öğrenci No: 070860001

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mahir RESULOV

İSTANBUL, 2009

ÖNSÖZ

Bu tez konusunu bana öneren, tezimin her aşamasında yardımlarını esirgemeyen, yüksek lisans öğrenimim boyunca engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, her türlü desteği ve kolaylığı sağlayan tez danışmanım değerli hocam Sayın Prof. Dr. Mahir RESULOV' a en içten saygılarımı sunar, teşekkür ederim. Ayrıca, yüksek lisans hocalarım Sayın Prof. Dr. Mehmet ERDOĞAN ile Yrd.Doç.Dr. Bahaddin SİNSOYSAL' a da teşekkür ederim. Maddi ve manevi olsun her zaman desteğini esirgemeyen annem Emsal ŞAHİN ile babam Salim ŞAHİN'e ve kardeşlerime sonsuz şükranlarımı sunarım.

İstanbul, 2009 Ethem İlhan ŞAHİN

ÖZET

Tezde genelde iletim hattı problemleri için yazılmış başlangıç-sınır değer probleminin çözümü incelenmiştir. Bilindiği gibi, iletim hattı (veya telgraf) denklemleri birinci basamaktan kısmi türevli diferansiyel denklemler sistemi olmaktadır. Söz konusu sistemin çözümü için önce gerçek çözüm, sonra ise sayısal çözüm elde edilmiştir.

Dört bölümden oluşan tezin ilk bölümünde, iletim hattı denklemlerinin çözümünü elde etmek için gereken alt yapı incelenmiş, gerekli bilgi ve bazı kavramlar içerilmiştir.

Telgraf denklemi ikinci basamaktan hiperbolik tür denklem olmaktadır. Literatürden bilindiği üzere, ikinci basamaktan kısmi türevli diferansiyel denklemin çözümü sürekli, birinci basamaktan (x değişkenine göre) türevi karakteristikler üzerinde süreksiz olmaktadır. Dolayısıyla, söz konusu denklemin klasik çözümü mevcut olmayabilir. Bu nedenle tezin birinci bölümünde ayrıca kısmi türevli diferansiyel denklemler teorisinden bazı kavramlar, zayıf çözümün tanımı vs. gibi bilgiler verilmiştir. Bunun yanı sıra zayıf çözümü elde etmek için özel yolla içerilmiş yardımcı problem önerilmiştir.

İkinci bölümde hiperbolik tür denklemler sisteminin tanımı ve karakteristikleri detaylı şekilde incelenmiştir.

Üçüncü bölümde ise, ikinci bölümdeki sonuçları ve önerilen yardımcı problemi kullanarak hidrodinamiğin model denklemler sistemi olarak bilinen nonlineer denklemler sisteminin gerçek çözümleri elde edilmiştir.

Nihayet son bölümde iletim hattı denklemleri çıkarılmış ve Riemann invaryantları elde edilmiştir. Bunun yanı sıra iletim hattı denklemler sistemi için yazılmış başlangıç-sınır değer problemi için süreksiz fonksiyonlar sınıfında sonlu fark yöntemi incelenmiştir.

ABSTRACT

THE INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR TRANSMISSION LINE EQUATIONS

In this thesis the initial-boundary value problem for the transmission line problem is investigated. As it is known that the transmission line (or telegraph) equations are first order partial differential equations. For these system of equations both exact and numerical solutions are obtained.

In the first section, in order to find the solution of the transmission line equations necessary basic concept are given too. It is known that the telegraph equation is second order. Moreover the solution of the second order equation of hyperbolic type is continuous but the first order derivatives of the solution with respect to x is discontinuous function on the along characteristics. Since the classical solution of this problem does not exist, the concept of the weak solution and some notions associated with it are given.

In the second section, the definition of the hyperbolic type equation and the characteristics are investigated.

In the third section, on basis of the suggested auxiliary problem the exact solution of model of the nonlinear differential equation of hydrodynamics is obtained.

Finally, the Riemann invariants of the transmission line equation are found. Besides, the simple algorithm for the numerical solution of the transmission line equations in a class of discontinuous function is developed.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Genelde, kısmi türevli diferansiyel denklemler doğadaki fundamental kanunları matematiksel ifade ederken, uygulamalı matematiğin, fiziğin ve mühendisliğin bir çok önemli problemlerinin modellenmesi ve çözülmesi süreçlerinde karşımıza çıkmaktadırlar. Bu bilim dalı modern matematiğin tüm alanlarında, özellikle fizikte, geometri ve analizde önemli rol oynamaktadır. Fiziksel önem taşıyan bir çok olay kısmi türevli diferansiyel denklemler ve onlar için yazılmiş uygun başlangıç ve başlangıç sınır değer problemlerinin çözümünün bulunmasına indirgenmektedir. Matematiksel modeller çerçevesinde fiziksel olayların dinamiği incelenebilir, ayrıca da zor koşullarda yapılması gereken fiziksel deneyin yerine kolayca ve hızlı bir şekilde sonuca varılabilen bilgisayar deneyleri yapılabilir.

1.1 Temel Kavramlar

R^m ile $(x_1, x_2, ..., x_m)$ noktalarının Euclid uzayını gösterelim. Q $\subseteq R^m$ bir bölge ve $u(x_1, x_2, ..., x_m)$ ise Q da tanımlı ve *n*. basamaktan sürekli türevlere sahip fonksiyon olsun. *n*. basamaktan KTDD lerin genel yazılım formu aşağıdaki

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_m, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_m}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}, ..., \frac{\partial^n u}{\partial x_m^n}\right) = 0 \qquad (1.1)$$

gibi olmaktadır. Burada, $x_1, x_2, ..., x_m$ bağımsız değişkenler, F tüm argümanlarına göre tanımlı ve bilinen, $u(x_1, x_2, ..., x_{\mathrm{m}})$ ise bilinmeyen fonksiyon olmaktadır.

Diferansiyel denklemin içerdiği bilinmeyen fonksiyonun türevlerinin en yüksek mertebesine denklemin *mertebesi* (veyahut *basamağı*) denir.

n =1 olduğu taktirde (1.1) denklemi 1. basamaktan KTDD olmaktadır ve genel yazılım formu

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_m, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_m}\right) = 0 \qquad (1.2)$$

şeklini alır.

Genelde biz 2. basamaktan olan KTDD i inceleyeceğiz. Kolaylık için $m = 2$ olsun. Yer eksenlerinin sayısı iki olduğu durumda 2. basamaktan olan KTDD genel yazılım formu aşağıdaki

$$F\left(x_1, x_2, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) = 0 \qquad (1.3)$$

gibi olmaktadır. Kolaylık için bazı durumlarda x_1, x_2, x_3 değişkenlerini (x, y, z) gibi de göstereceğiz. Zamana bağlı değişen büyüklükleri ifade etmek için zaman değişkenini özel olarak t harfi ile göstereceğiz.

Eğer, F bilinmeyen fonksiyon ve onun tüm türevlerine göre lineer fonksiyon olursa, böyle denklemlere *lineer* KTDD denir. Diferansiyel denklemlerin lineerlik özelliğini denklemin operatör yazılım formunu kullanarak ifade edelim. Bundan dolayı, aşağıdaki şekilde yazılmış

$$\Im(u) = f(x) \qquad (1.4)$$

denklemini göz önüne alalım. Burada, $\Im(u) = \Im\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ değişkenlerine bağlı polinomyal bir bilinen fonksiyon ve ($\mathrm{x} = x_1, \mathrm{x}_2, ..., \mathrm{x}_\mathrm{m}$) olmaktadır.

Aşağıdaki iki koşulu

1^0. $\Im(u+v) = \Im(u) + \Im(u)$,

2^0. $\Im(cu) = c\Im(u)$

sağlayan $\Im$ operatörüne *lineer operatör* denir. Burada, u ve v Q da tanımlı fonksiyonlar, c ise keyfi bir sabit olmaktadır.

Örnek 1.

1) $u_x + u_y = 0$,

2) $x\ u_x + y^2 u_y = \sin x$,

3) $u_t - u_x = u$

1.basamaktan ,

4) $u_t + cu_x = \mu u_{xx}$,

5) $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$

2.basamaktan,

6) $u_t + cu_x = \mu u_{xxx}$,

7) $u_{tt} - c^2 u_{xxxx} = 0$

ise sırasıyla ücüncü ve dördüncü basamaktan olan lineer kısmi türevli diferansiyel denklemler olmaktadırlar.

Birinci ve ikinci basamaktan lineer KTDD lerin genel yazılım formu aşağıdaki

$$a(x_1, x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1} + b(x_1, x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2} + c(x_1, x_2)u = d(x_1, x_2), \tag{1.5}$$

$$A(x_1, x_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + B(x_1, x_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_2} + C(x_1, x_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + D(x_1, x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \tag{1.6}$$

$$E(x_1, x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2} + F(x_1, x_2)u = G(x_1, x_2)$$

gibi olur.

Lineer olmayan denklemlere nonlineer denklemler denir. Eğer, *F* bilinmeyen fonksiyonun yüksek basamaktan olan türevlerine göre nonlineer fonksiyon olursa, böyle denklemlere ciddi *nonlineer* KTDD denir.

Örnek 2.

1) $u_x^2 + u_y^2 = 1$,

2) $\mathrm{v}_t + \frac{1}{2}(v_x)^2 = 0$,

3) $(u_x)^2 + yu_y - u = 0$,

4) $u_x^2 u_y = 1$

lineer olmayan denklemlerdir.

Eğer, *F* bilinmeyen *u* fonksiyonunun yüksek basamaktan olan türevlerine göre lineer fonksiyon ise, böyle denklemlere *kuazilineer* KTDD denir.

Örnek 3.

$$1)\quad \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+u^2=0,$$

$$2)\quad u_t+uu_x=u,$$

$$3)\quad \frac{\partial u}{\partial t}+6u\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$

kuazilineer denklemlerdir.

Birinci ve ikinci basamaktan kuazilineer olan denklemlerin genel yazılım formu surasıyla

$$a(x_1,x_2,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+b(x_1,x_2,u)\frac{\partial u}{\partial x_2}=d(x_1,x_2,u),$$

$$A\left(x_1,x_2,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+B\left(x_1,x_2,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_2}+$$

$$C\left(x_1,x_2u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=D\left(x_1,x_2,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)$$

olmaktadırlar.

$$a(x_1,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}+b(x_1,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2}+c(x_1,x_2,u)=0$$

şeklinde olan denklemlere hemi (veya yarı) lineer denklemler denir.

Örnek 4.

$$1)\ u_t-u_{xx}=u^2,$$

$$2)\quad u_t-u_{xx}=u(1-u)$$

yarı lineer denklemler olmaktadırlar.

Eğer, tüm değişkenlere göre n kez sürekli diferansiyellere sahip $u=\varphi(x_1,x_2,...,x_m)$ fonksiyonu (1.1) de yerine konduğunda denklemi özdeş eşitliğe dönüştürürse, böyle fonksiyonlara diferansiyel denklemin *çözümü* (*veya integrali*) denilir.

Örnek 5.

a) $f, g \in C^2(D), \quad (D \subset R^2)$ herhangi bir fonksiyon olmak üzere

$$z = f(x-2y) + g(x+2y)$$

yüzey ailesi

$$4z_{xx} - z_{yy} = 0$$

ikinci basamaktan sabit katsayılı lineer denklemin genel çözümüdür.

b) $z = \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x+y}}$ fonksiyonu $xz_x + yz_y = \dfrac{3}{2}z$ denklemini sağlar. Bu yüzey keyfi fonksiyon veya parametre kapsamadığından denklemin bir özel çözümüdür.

c) Aynı şekilde $z = In(x^2+y^2)$ fonksiyonu da

$$z_{xx} + z_{yy} = 0$$

denklemini sağladığından bu da bir özel çözüm olmaktadır.

1.2. İkinci Mertebeden Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

İkinci basamaktan olan KTDD sınıflandırılması için baş kısmı lineer olan

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \tag{1.7}$$

denklemini göz önüne alalım. Burada *x, y* serbest değişkenler, *a,b,c* ve *F* kendi argümanlarına göre bilinen fonksiyonlar olmaktadırlar.

a,b ve *c* katsayıları için öyle koşullar bulalım ki, (1.7) denklemi kanonik şekilde yazılmış ısı dağılımı, dalga ve Laplace denklemlerinden birisiyle aynı olsun. Varsayalım ki, *a,b* ve *c* katsayıları aynı zamanda sıfır olamazlar ve *u(x,y)* fonksiyonu her iki değişkene göre de

2.basamaktan sürekli türevlere sahip olmaktadır.

Amacımıza ulaşmak için x,y değişkenlerinden yeni ξ ve η değişkenlerine aşağıdaki gibi

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y), \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases} \tag{1.8}$$

dönüşüm yapalım. Varsayalım ki , ξ ve η fonksiyonları x ve y ‘ye göre iki kez diferansiyellenebilen fonksiyonlardır ve ayrıca da aşağıdaki Jacobian tanım bölgesinde

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Böyle durumda (1.8) sistemi x ve y değişkenlerine göre çözülebilir ve

$$\begin{cases} x = x(\xi,\eta), \\ y = y(\xi,\eta) \end{cases}$$

fonksiyonları da sürekli olmaktadırlar.

(1.7) denklemini yeni, ξ ve η değişkenlerinde yazalım. Bunun için denkleme dahil olan türevleri ξ ve η cinsinden ifade edelim

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}.$$

Bu ifadeler (1.7) de yerine konursa

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + C\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \quad F\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0 \tag{1.9}$$

alırız. Burada,

$$\mathrm{A} = a(x,y)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2b(x,y)\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + c(x,y)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2,$$

$$\mathrm{B} = a(x,y)\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + b(x,y)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + c(x,y)\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y},$$

$$\mathrm{C} = a(x,y)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + 2b(x,y)\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + c(x,y)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2$$

olmaktadır.

ξ(x,y) ve η(x,y) öyle seçilebilir ki, (1.9) denklemi *Q* bölgesinin herhangi bir *(x,y)* noktasının civarında en basit, yani

1) A = C = 0;
2) A = B = 0;
3) A = C, B = 0

olsun. Bu amaçla $B^2 - AC > 0$; $B^2 - AC < 0$; $B^2 - AC = 0$ olan durumları ayrı ayrı inceleyelim. D = $B^2 - AC$ ifadesine (1.9) denkleminin diskriminantı denilir.

1. $B^2 - AC > 0$ olduğu durumda (1.7) denklemi hiperbolik türe mensup olmaktadır.

$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ dalga denkleminin hiperbolik tür bir denklem olduğunu gösterelim.

Çözüm. Bu durumda $A = 1,\quad B = 0,\quad C = -a^2$ ve $B^2 - 4AC = 4a^2 > 0$ olduğundan dalga denklemi her yerde hiperboliktir.

2. $B^2 - AC = 0$ oluğu durumda (1.7) denklemi parabolik türe aittir.

$u_t - k^2 u_{xx} = 0$ $(k^2 = sabit)$ ısı veya difüzyon denkleminin parabolik olduğunu gösterelim.

Çözüm. Burada $A = 0,\ B = 0,\ C = -k^2$ ve $B^2 - 4AC = 0$ olup, difüzyon denklemi her yerde parabolik olur.

3. $B^2 - AC < 0$ olan durum da ise eliptik türe mensuptur.

$u_{xx} + u_{yy} = 0$ Laplace denkleminin eliptik olduğunu gösterelim.

Çözüm. $A = 1,\ B = 0,\ C = 1$ ve $B^2 - 4AC = -4 < 0$ olduğundan Laplace denklemi her yerde eliptiktir.

1.3 Zayıf Çözüm

Doğadaki bir çok pratik problemin matematiksel modelleri kısmi türevli diferansiyel denklem veya denklem sistemi için yazılmış başlangıç ve sınır değer probleminin çözümünün bulunmasına indirgenilir. Çoğu zaman problemin söz konusu verileri süreksiz fonksiyonlar olabilir. Bazı durumlarda ise matematiksel problemin çözümünde, diğer deyişle fiziksel olayın dinamiğinde süreksizlik ortaya çıkmaktadır. Genel olarak bir çok nonlineer problemin çözümünde bazı özellikler ortaya çıkmaktadır. Nonlineer problemlerde ortaya çıkan yeni karakteristik özellikler (örneğin, heyecanlanmış cephenin sonlu hızla dağılımı, darbe dalgası, dahili sıçrayışları vs. gibi fiziksel özellikler) zayıf çözüm kavramı yardımıyla ifade edilebilirler.

Söz konusu zayıf çözümü tanımlamak için göz önüne alınan diferansiyel denkleme karşılık gelen integral gösterim yazmak gerekmektedir. Genelde, kısmi türevli diferansiyel denklem için zayıf çözüm kavramı farklı yollarla yazılabilir.

Kısmi türevli diferansiyel denklemler için zayıf çözüm kavramı 1930 yıllarında Sobolev tarafından verilmiştir. Sobolev anlamındaki zayıf çözüm, integral eşitlik yardımı ile tanımlanmaktadır. Bu tanımı açıklamak için, $Q_T \subset R^{n+1}$ Euklid uzayında konveks bir bölge,

$u = u(x_1, x_2, ... x_n, t)$ ve $f(x_1, x_2, ... x_n, t)$ Q_T de ölçülebilir fonksiyonlar olmak üzere operatör biçimde verilmiş

$$Lu=f \tag{1.10}$$

lineer kısmi türevli diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Burada L sürekli diferansiyellenebilen katsayılara sahip self-adjoint (öz eşlenik) diferansiyel ifadeyi göstermektedir.

Tanım 1. Test fonksiyonlar sınıfından keyfi $\varphi(x_1, x_2, ... x_n, t)$ fonksiyonları için

$$\int_{Q_T} \{ uM\varphi - f\varphi \} dxdt = 0, \quad x = (x_1, ..., x_n) \tag{1.11}$$

integral eşitliğini sağlayan u fonksiyonuna (1.10) denkleminin zayıf (veya genelleştirilmiş) çözümü denir. Burada $M = L^*$ dir; yani M, L operatörüne karşılık gelen adjoint operatör olmaktadır.

Tanım 1 den görüldüğü gibi (1.10) denkleminin herhangi bir klasik çözümü (1.11) eşitliğini korumak zorundadır. Ama (1.11) eşitliğini sağlayan $u(x_1, x_2, ... x_n, t)$ fonksiyonları daha geniş bir sınıf oluşturur. Çünkü (1.11) in içerdiği u fonksiyonlarının klasik anlamda türevlenebilir olması gerekmiyor.

Zayıf çözümler göz önüne alındığında, denklem için başlangıç ve sınır değer koşullarının hangi anlamda verileceğini özel olarak belirtmek gerekmektedir.

1.4. Yardımcı Problem ve Yapısı

Nonlineer denklemler için (1.11) cinsinden olan tanımların verilmesi her zaman mümkün olmamaktadır. Çünkü nonlineer denklemler için adjoint denklemi yazmak her zaman mümkün olmuyor.

Bazı sınıf nonlineer denklemlerde zayıf çözümün bulunması için [1] de bir yöntem önerilmiştir. Söz konusu yöntemin temel yapısını açıklamak için, aşağıdaki nonlineer kısmi türevli denklemi göz önüne alalım

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu \tag{1.12}$$

Burada L diferansiyel operatörü u ya uygulanmakta olan, aşikar olarak x ve t ye bağlı olmayan bir diferansiyel ifade olmaktadır.

L operatörüne karşılık gelen ve özel yolla kurulmuş öyle M ve $\Im$ operatörlerin içerelim ki,

$$L = M\Im$$

eşitliği korunsun. Burada M ve $\Im$, L operatörünü faktörize eden operatörler olup, aşağıdaki özelliklere sahiptirler:

(i) M operatörünün tersi vardır, yani M^{-1} mevcuttur,

(ii) $\Im(Mv) \in C^1(Q_T)$.

Aşağıdaki tür tanımlanmış denkleme

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \Im(Mv)$$

yardımcı denklem ismini verelim.

Kolayca göstermek olur ki, yardımcı denklemin çözümü ile esas denklemin çözümü arasındaki bağımlılık

$$v = M^{-1}u \qquad (1.13)$$

eşitliği ile ifade edilmektedir. (1.13) den göründüğü gibi içerdiğimiz yardımcı problem tek olarak tanımlanmamaktadır.

Altını çizmek gerekir ki, herhangi bir pratik problemi incelerken yardımcı problemin çözümlerinden fiziksel yararlı olan tek bir çözümü özel olarak belirtmek şarttır. Ayrıca da (1.13) formülünün özel olarak ispatlanması gerekmektedir.

1.5 Bazı Sınıf Dalga Denklemleri

Matematik fizikte kullanılan klasik operatörlerden olan Δ laplace operatörü

$$\Delta\cdot = \frac{\partial^2 \cdot}{\partial x^2}, \quad \Delta\cdot = \frac{\partial^2 \cdot}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \cdot}{\partial y^2}, \quad \Delta\cdot = \frac{\partial^2 \cdot}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \cdot}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \cdot}{\partial z^2} \qquad (1.14)$$

şeklinde tanımlanır ve bunlara sırasıyla 1- boyutlu, 2- boyutlu, 3- boyutlu Laplace operatörü denir. Benzer şekilde n-boyutlu Laplace operatörüde tanımlanabilir.

$\square(\cdot)$ sembolünü kullanarak telin titreşim denklemini

$$\square(\cdot)=\frac{\partial u^2}{\partial t^2}-c\ \Delta u=0 \tag{1.15}$$

şeklinde yazabiliriz. $\square(\cdot)$ operatörüne Sobolev operatörü denir.

(1.15) denklemindeki c pozitif bir reel sabit ve genellikle, aksi söylenmedikçe, *t* zaman değişkenini göstermektedir. Buna göre de 1,2,3-boyutlu dalga denklemleri sırasıyla

$$u_{tt}-c^2u_{xx}=0,$$

$$u_{tt-}c^2(u_{xx}-u_{yy})=0,$$

$$u_{tt}-c^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})=0$$

formunda olmaktadır.

Dalga denklemlerinin çözümleri fiziksel olarak elektrik veya manyetik kuvvetlerin dalgasını, bir ortamdaki ses yayılmasını, katılarda enine ve boyuna yer değiştirme dalgalarını v.s ifade eder.

Dalga denklemlerinin çözümlerine dalga fonksiyonu denir. $u_{tt}-c^2\Delta u=F$ şeklindeki dalga denklemine homojen olmayan dalga denklemleri denir. Burada F fonksiyonu, sadece bağımsız değişkenlerin bir fonksiyonu olup bilinen bir dış kuvveti veya bir dalganın kaynağını ifade eder.

$$u_{tt}+\gamma u_t-c^2\Delta u=F\ , \tag{1.16}$$

türünden olan denkleme telgraf dalga denklemi denilir. Burada, c,γ reel sabitler olmaktadır.

Uygulamada $t\geq\ 0$ olmak üzere dalga denkleminin genel çözümünü veya parametrelere bağlı çözümlerini bulmaktan çok, $t=0$ için u ve u_t nin değerlerinin denklemle birlikte önceden verilmesi ve bu başlangıç verilerini sağlayan çözümün bulunması önemlidir. Çünkü çoğunlukla uygulamalı bilim dallarının ortaya koyduğu diferansiyel denklemlerle birlikte bazı başlangıç ve sınır koşulları doğal olarak ortaya çıkar. Bu türlü problemlere Cauchy problemi de denir. Bu kesimde dalga denklemi için bu tür problemleri inceleyeceğiz.

2. 1.BASAMAKTAN KUAZİ LİNEER K.T.D DENKLEMLER SİSTEMİ

Skaler denklem için geliştirilmiş karakteristikler yönteminin mantığını direkt olarak kısmi türevli diferansiyel denklemler sistemine uygulamak mümkün değildir. Çünkü, sistemin her bir denklemi, farklı bilinmeyen fonksiyonların çeşitli yönlerde türevlerini içermektedir. Karakteristikler yöntemini diferansiyel denklemler sistemine uygulayabilmemiz için özel şekilde karakteristik eğriler bulunur ki, bu karakteristikler üzerinde invaryant kalan ifadeler elde etmek mümkün olsun. Bunlara Riemann invaryantları denir. Riemann invaryantları dikkate alınarak göz önüne aldığımız sistemin her bir denklemini uygun karakteristikler üzerinde tam diferansiyel şeklinde ifade etmek mümkün olabilir. Dolayısı ile, yine de kısmi türevli diferansiyel denklemler sistemi adi diferansiyel denklemler sistemine indirgenebilir. Söz konusu adi diferansiyel denklemler sistemini (en azından herhangi bir nümerik yöntem uygulamayla) çözerek, verilmiş problemin çözümlerini elde ederiz.

2.1 Hiperbolik Denklemler Sistemi

Günümüzde bir çok fiziksel problem skaler diferensiyel denklemden ziyade birinci basamaktan kuazi lineer kısmi türevli diferansiyel denklemler sistemi şeklinde ifade edilebilmektedir. Böyle denklemler bilinmeyen fonksiyonların türevlerine göre lineer olup, katsayıları ise bilinmeyen fonksiyonlara ve serbest değişkenlere bağlı olabilir. Eğer böyle denklemler dalgaların dağılım durumlarını ifade ederse, bir çok problemin çözümüne dalga denklemlerini çözmeyle ulaşabiliriz.

Bu bölümde biz iki boyutlu problemleri göz önüne alacağız. Değişkenlerden biri x-yer ekseni, diğeri ise t-zaman değişkeni olacaktır. Eğer bilinmeyen fonksiyonlar $u_i(x,t)$, $(i=1,2)$ olursa, birinci mertebeden kuazi lineer diferensiyel denklemler sisteminin genel yazılım formu

$$\sum_{j=1}^{2}\left(a_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial t}(x,t)+b_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x}(x,t)\right)+c_i=0, \quad (i=1,2) \tag{2.1}$$

biçiminde olmaktadır. Burada, $a_{ij},(i,j=1,2)$ ler x ve t ye bağlı bilinen fonksiyonlardır.

Öncelikle (2.1) sisteminin hiperbolik sistem olması için bir koşul bulalım. Birinci mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemin çözümünü ararken öncelikle bu denklemin karakteristiklerini bulup söz konusu denklemi adi diferansiyel denklemler sistemine dönüştürüyorduk. Bazı durumlarda, elde ettiğimiz adi diferensiyel denklemlerin çözümünü bulabiliyorduk. En azından ele aldığımız diferansiyel denklemler sistemini sayısal olarak çözmek mümkündür. Her iki durumda da göz önünde bulunan kısmi türevli diferansiyel denklem "yerel" olarak çözülür. Bu ise genelde dalgaların dağılım durumlarına denk gelmektedir. Gerçekten de küçük bir zaman diliminde keyfi bir noktanın hareketine, o noktaya yakın olan noktanın etkisi olabilir. Doğal olarak karşımıza şöyle bir soru çıkar. "(2.1) denklemler sistemi için de böyle bir yerel hesaplama işlemleri yapılabilir mi ?" Bu işlemler yapıldığı taktirde sistem hiperbolik türe ait olur.

Hiperbolik sistemin tanımını vermeden önce bazı bilgilere göz atalım. Genelde (2.1) sisteminde her bir denklem keyfi u_j fonksiyonları ile $\frac{\partial u_j}{\partial t}$ ve $\frac{\partial u_j}{\partial x}$ türevlerinin keyfi kombinasyonlarını içermektedir. Bu, şu anlama gelir, denklemler keyfi u_j fonkiyonunun çeşitli yönlerdeki değişim hızı hakkında bilgi verir ve bu denklemlerden keyfi u_j fonksiyonunun söz konusu değişim hızlarının bilinen bir yönde değişmesi hakkında herhangi bir bilgi almak mümkün değildir. (2.1) denklemler sistemi üzerinde çeşitli dönüşümler yapsak acaba yukarıda bahsettiğimiz bilgileri elde edebilir miyiz? Bunu araştıralım.
(2.1) denklem sistemini henüz bilinmeyen

$$\vec{l} = (l_1(x,t,u), l_2(x,t,u))$$

vektörü ile çarpıp toplayalım

$$\sum_{i=1}^{2} l_i \left(\sum_{j=1}^{2} \left(a_{ij} \frac{\partial u_j(x,t)}{\partial t} + b_{ij} \frac{\partial u_j(x,t)}{\partial x} \right) + c_i \right) = 0. \tag{2.2}$$

Acaba (2.1) sistemini

$$\sum_{j=1}^{2} m_j \frac{du_j}{d\eta} + b_j l_j = 0 \qquad (2.3)$$

şekline dönüştürebilen $\vec{l}$ vektörünü bulmak mümkün müdür?

Bu tür dönüşüm mümkün olduğu taktirde, (2.3) denklemi u_j nin tüm türevlerini tek bir (α,β) yönündeki ilişkileri gösterebilir. Bu durumda (x,t) düzleminde (α,β) vektör alanı ile tanımlanan eğrinin bulunması gerekir. Varsayalım ki, bu tür eğrilerden birinin parametrik denklemleri $\left(x = x'(\eta),\, t = t'(\eta)\right)$ olmaktadır. Bu taktirde

$$\frac{du_j}{d\eta} = t' \frac{\partial u_j}{\partial t} + x' \frac{\partial u_j}{\partial x} \qquad (2.4)$$

olur. Genelliği bozmadan $\alpha = x'(\eta),\ \beta = t'(\eta)$ alabiliriz ve denklemi (2.3) şeklinde yazabiliriz. Gerçekten de (2.2) ifadesini düzenlersek

$$(l_1 a_{11} + l_2 a_{21}) \frac{\partial u_1}{\partial t} + (l_1 b_{11} + l_2 b_{21}) \frac{\partial u_1}{\partial x} + (l_1 a_{12} + l_2 a_{22}) \frac{\partial u_2}{\partial t} +$$
$$+ (l_1 b_{12} + l_2 b_{22}) \frac{\partial u_2}{\partial x} + l_1 c_1 + l_2 c_2 = 0$$

formunu elde ederiz. Buradan

$$l_1 a_{11} + l_2 a_{21} = m_1 \beta, \quad l_1 a_{12} + l_2 a_{22} = m_2 \beta, \qquad (2.5)$$
$$l_1 b_{11} + l_2 b_{21} = m_1 \alpha, \quad l_1 b_{12} + l_2 b_{22} = m_2 \alpha \qquad (2.6)$$

olarak tanımlanırsa (2.2) sistemini

$$\sum_{j=1}^{2} \left[m_j \left(\beta \frac{\partial u_j}{\partial t} + \alpha \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) + l_i c_i \right] = 0 \qquad (2.7)$$

biçiminde yazabiliriz. (2.5) ve (2.6) sisteminde eşitliğin her iki yanını sırasıyla α ve β ile çarpıp birbirine eşitlersek

$$\begin{cases} l_1(\alpha a_{11} - \beta b_{11}) + l_2(\alpha a_{21} - \beta b_{21}) = 0, \\ l_1(\alpha a_{12} - \beta b_{12}) + l_2(\alpha a_{22} - \beta b_{22}) = 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

elde ederiz. Sonuncu sistemin tek bir çözümü olması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{11} - \beta b_{11} & \alpha a_{21} - \beta b_{21} \\ \alpha a_{12} - \beta b_{12} & \alpha a_{22} - \beta b_{22} \end{vmatrix} = 0 \tag{2.9}$$

olmasıdır.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ & \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ & \end{pmatrix}$$

olsun. Bu notasyonlarda (2.9) denklemini

$$| A_{ij} X' - B_{ij} T' | = 0 \tag{2.10}$$

olarak da yazabiliriz. Bu koşul, yukarıda sözünü ettiğimiz eğrinin yönünü belirler ve bu tür eğrilere karakteristik eğriler denir. (2.3) denklemine ise karakteristik formda yazılmış denklem denir. Karakteristik formda yazılmış denklemin her biri $u_j, (j = 1,2)$ fonksiyonlarının iki türevleri arasındaki yalnız bir bağlantıyı göstermektedir. İleride göreceğiz ki, problemin lokal çözümünün bulunması için karakteristik formda yazılmış iki denklem gerekmektedir. Bu koşul, sistemin hiperbolik olması koşuludur.

Şimdi (2.1) sisteminin karakteristiklerinin bulunması problemini detaylı şekilde inceleyelim.

2.2 Karakteristikler

Aşağıdaki sistemi göz önüne alalım

$$\begin{cases} A_{11}(x,t)\dfrac{\partial u_1}{\partial t} + A_{12}(x,t)\dfrac{\partial u_2}{\partial t} + B_{11}(x,t)\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + B_{12}(x,t)\dfrac{\partial u_2}{\partial x} = f_1(x,t)\,, \\ A_{21}(x,t)\dfrac{\partial u_1}{\partial t} + A_{22}(x,t)\dfrac{\partial u_2}{\partial t} + B_{21}(x,t)\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + B_{22}(x,t)\dfrac{\partial u_2}{\partial x} = f_2(x,t). \end{cases} \tag{2.11}$$

(2.11) sistemini

$$A\frac{\partial u}{\partial t} + B\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,t) \tag{2.12}$$

matris şeklinde yazalım. Burada, A, B, u ve f

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

olmaktadır.

(2.12) sisteminin herhangi bir Q bölgesinde herhangi bir (x,t) noktasında pürüzsüz (yeteri kadar türevlenebilir) çözümünün mevcut olduğunu varsayalım. Q bölgesinde bulunan bir (x_0,t_0) noktasını göz önüne alalım ve bu noktadan bir γ eğrisi geçirelim. Bu eğri üzerinde olan (x_0,t_0) noktasındaki küçük kaydırma vektörünü (dx,dt) ile gösterelim. Varsayalım ki, (2.12) sisteminin çözümleri γ eğrisi üzerinde verilmiştir. Amacımız γ eğrisi üzerinde verilen u_1 ve u_2 nin değerlerine ve sağladıkları (2.12) sistemine göre çözümü γ eğrisinin civarında bulmaktadır.

Verilmiş değerlere göre γ eğrisinin etrafında (2.12) sisteminin çözümünün bulunmasına "Cauchy problemi" denilir.

u_1 ve u_2 fonksiyonları γ eğrisi üzerinde bilindikleri için, bu eğri üzerinde onların türevleri de bilinmektedir. Dolayısıyla

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial t}, \frac{\partial u_2}{\partial x}$$

normal türevlerin varlığı, eğrinin tüm noktalarında keyfi yön boyunca olan türevlerini bulmaya imkan sağlamaktadır. Tersine, bu dört türev biliniyorsa, keyfi yön ve normal üzere türevleri de bulabiliriz. Bu taktirde problemi, u fonksiyonunun γ eğrisi üzerinde bilindiğini varsayarak, bu eğrinin tüm noktalarında $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ türevlerini bulma olarak ifade edelim.

Söz konusu türevleri, u fonksiyonunun (x_0, t_0) noktasında bilindiğini ve onların (dx, dt) vektörü boyunca tam diferansiyellerinin de bilindiğini varsayarak hesaplamaya çalışacağız. du diferansiyellerini türevler yardımıyla

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} dt + \frac{\partial u_1}{\partial x} dx = du_1, \qquad \frac{\partial u_2}{\partial t} dt + \frac{\partial u_2}{\partial x} dx = du_2 \tag{2.13}$$

olarak yazalım. (2.13) ifadelerini (2.1) denklemler sistemine ekleyerek, $\frac{\partial u_1}{\partial t}$, $\frac{\partial u_1}{\partial x}$, $\frac{\partial u_2}{\partial t}$, $\frac{\partial u_2}{\partial x}$ bilinmeyen fonksiyonları elde etmek için

$$\begin{cases} A_{11} \frac{\partial u_1}{\partial t} + A_{12} \frac{\partial u_2}{\partial t} + B_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x} = f_1, \\ A_{21} \frac{\partial u_1}{\partial t} + A_{22} \frac{\partial u_2}{\partial t} + B_{21} \frac{\partial u_1}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x} = f_2, \\ dt \frac{\partial u_1}{\partial t} + dx \frac{\partial u_1}{\partial x} = du_1, \\ dt \frac{\partial u_2}{\partial t} + dx \frac{\partial u_2}{\partial x} = du_2 \end{cases} \tag{2.14}$$

denklemler sistemini elde ederiz. Bu sistemi

$$\begin{cases} A \frac{\partial u}{\partial t} + B \frac{\partial u}{\partial x} = f, \\ dtE \frac{\partial u}{\partial t} + dxE \frac{\partial u}{\partial x} = du \end{cases} \tag{2.15}$$

matris şeklinde yazalım. Burada, E birim matris olmaktadır. (2.15) sisteminin bilinmeyenlerini bulmak için gerek ve yeter koşul

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ dtE & dxE \\ & \end{pmatrix} \neq 0 \tag{2.16}$$

olmasıdır. Burada

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ dtE & dxE \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & B_{11} & B_{12} \\ A_{21} & A_{22} & B_{21} & B_{22} \\ dt & 0 & dx & 0 \\ 0 & dt & 0 & dx \end{vmatrix} \tag{2.17}$$

olmaktadır.

Aşağıdaki eşitliği

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ dtE & dxE \end{pmatrix} = 0$$

sağlayan eğrilere (2.1) sisteminin karakteristikleri denir.

Varsayalım ki, γ eğrisinin kendisi karakteristik eğridir. (2.15) sisteminin determinantı sıfıra eşit olmasına rağmen, bu sistemin çözümü vardır. Varsayımımıza göre (2.15) sisteminin γ eğrisi üzerinde tanımlanan bir çözümü vardır. Bu ise

$$\begin{pmatrix} A & B & f \\ dtE & dxE & du \end{pmatrix}$$

genişletilmiş matrisin rankının matrisinin dejenere olan

$$\begin{pmatrix} A & B \\ dtE & dxE \end{pmatrix}$$

matrisin rankına eşit olması anlamına gelir. Böylelikle du vektörü, karakteristikler boyunca keyfi olamaz ve aşağıdaki koşulu

$$rank\begin{pmatrix} A & B & f \\ dtE & dxE & du \end{pmatrix} = rank\begin{pmatrix} A & B \\ dtE & dxE \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

sağlamak zorundadır. (2.18) ifadesine, karakteristiklerin koşulu denir. Karakteristikleri daha iyi anlayabilmek için şöyle bir örneğe dikkat edelim.

Örnek 6. Ses dalgalarını ifade eden

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{2.19}$$

denklem sistemini göz önüne alalım. (2.19) sistemini matris şeklinde

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1/\rho_0 \\ \rho_0 c_0^2 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

olarak ifade edelim. Bu örnek için (2.14) sistemini

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/\rho_0 \\ 0 & 1 & \rho_0 c_0^2 & 0 \\ dt & 0 & dx & 0 \\ 0 & dt & 0 & dx \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial t} \\ \dfrac{\partial p}{\partial t} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial p}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ du \\ dp \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

şekilde yazabiliriz. Karakteristikler denklemi ise

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/\rho_0 \\ 0 & 1 & \rho_0 c_0^2 & 0 \\ dt & 0 & dx & 0 \\ 0 & dt & 0 & dx \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \rho_0 c_0^2 & 0 \\ 0 & dx & 0 \\ dt & 0 & dx \end{vmatrix} + dt \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1/\rho_0 \\ 1 & \rho_0 c_0^2 & 0 \\ dt & 0 & dx \end{vmatrix}$$

$$= dx \begin{vmatrix} 1 & \rho_0 c^2 \\ 0 & dx \end{vmatrix} + dt \begin{vmatrix} 1 & \rho_0 c_0^2 \\ dt & 0 \end{vmatrix} \frac{1}{\rho_0} = (dx)^2 - c_0^2 (dt)^2 = 0 \qquad (2.22)$$

olmaktadır. Böylelikle, karakteristikler için $x \mp c_0 t = sabit$ elde ederiz. Şimdi, karakteristikler için olan koşulu ele alalım. Yukarıda ifade ettiğimiz gibi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/\rho_0 & 0 \\ 0 & 1 & \rho_0 c_0^2 & 0 & 0 \\ dt & 0 & dx & 0 & du \\ 0 & dt & 0 & dx & dp \end{pmatrix}$$

matrisinin rankı ile bu matrisin keyfi dört sütunundan düzenlenmiş olan yeni matrisin rankı aynı olmak zorundadır ve söz konusu determinant sıfıra eşit olmaktadır. Örneğin,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \rho_0 c_0^2 & 0 \\ dt & 0 & dx & du \\ 0 & dt & 0 & dp \end{vmatrix} = 0$$

dır. Buradan,

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & \rho_0 c_0^2 & 0 \\ 0 & dx & du \\ dt & 0 & dp \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} dx & du \\ 0 & dp \end{vmatrix} - \rho_0 c_0^2 \begin{vmatrix} 0 & du \\ dt & dp \end{vmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$dxdp + dtdu\rho_0 c_0^2 = 0 \qquad (2.23)$$

olur. Birinci karakteristik üzerinde,

$$\frac{dx}{dt} = c_0 \text{ ve } dx = c_0 dt$$

dır. Son ifade (2.23) de yerine konursa

$$d\left(u + \frac{p}{\rho_0 c_0}\right) = 0$$

elde ederiz. Buradan

$$u + \frac{\rho}{\rho_0 c_0} = sabit \tag{2.24}$$

olmaktadır. İkinci karakteristik üzerinde

$$\frac{dx}{dt} = -c_0 \text{ ve } dx = -c_0 dt$$

olmaktadır. Bu ifadeyi (2.23) de yerine yazarsak

$$d\left(u - \frac{p}{\rho_0 c_0}\right) = 0$$

veya

$$u - \frac{\rho}{\rho_0 c_0} = sabit \tag{2.25}$$

elde ederiz. (2.24) ve (2.25) ifadelerine Riemann invaryantları denir.

Örnek 7. İkinci bir örnek olarak aşağıdaki Cauchy-Riemann sistemini göz önüne alalım

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0. \end{cases} \tag{2.26}$$

Bu sistemi de matris şeklinde

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0$$

olarak ifade edelim.

Şimdi karakteristik determinantı yazarsak,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ dx & 0 & dy & 0 \\ 0 & dx & 0 & dy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & dy & 0 \\ dx & 0 & dy \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ dx & 0 & dy \\ 0 & dx & 0 \end{vmatrix}$$

$$= dy \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ dx & dy \end{vmatrix} - dx \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ dx & dy \end{vmatrix} = (dy)^2 + (dx)^2 = 0,$$

$$\Rightarrow dy = \mp i dx \tag{2.27}$$

olur. Dolayısıyla Cauchy-Riemann sistemi reel karakteristiklere sahip değildir.

$ox-$ekseninin karakteristik eğri olmadığını, yani $u(x,0)$ keyfi değerlerine göre, sistemin t ye göre türevlerinin bulunmasına olanak sağlamadığını varsayalım. Buna göre aşağıdaki sistemi göz önüne alalım

$$A\frac{\partial u}{\partial t} + B\frac{\partial u}{\partial x} = f.$$

Burada $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ olmaktadır ve $detA \neq 0$ dır. O halde,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A^{-1}B\frac{\partial u}{\partial x} = A^{-1}f$$

veya $A^{-1}B = C$, $A^{-1}f = g$ olarak ifade edilirse son denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + C\frac{\partial u}{\partial x} = g$$

şeklinde ifade edebiliriz.

Bu sistem için karakteristik determinantı aşağıdaki gibi yazalım

$$\begin{vmatrix} E & C \\ dtE & dxE \end{vmatrix}_{4\times 4} = (dt)^2 \begin{vmatrix} E & C \\ E & \dfrac{dx}{dt}E \end{vmatrix}$$

$$= (dt)^2 \begin{vmatrix} 0 & C - \dfrac{dx}{dt}E \\ E & \dfrac{dx}{dt}E \end{vmatrix} = (-1)^2(dt)^2 \; det\left| C - \frac{dx}{dt}E \right|.$$

Böylelikle sistemin karakteristikleri, eğimi $det(C - KE) = 0$ denkleminden bulunan $k_i(x,t)$ kökleri olup,

$$\frac{dx_i}{dt} = k_i(x,t)$$

denklemlerini sağlamaktadır. $k_i(x,t)$ lere karakteristik hızlar denir.

Yukarıda söylediklerimizin hepsi aşağıdaki şekilde yazılmış

$$A(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial t} + B(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,t,u) \tag{2.28}$$

kuazi lineer denklem sistemi için de geçerlidir. Bu durumda karakteristikler çözümlere de bağlı olacaktır. Bir çözüm için elde edilen karakteristikler diğer çözüm için uygun olmayacaktır. Örneğin, gaz dinamiğindeki bir sistemi göz önüne alalım.

Örnek 8. İdeal gazların izentropik akışını ifade eden

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{p'(\rho)}{\rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + u\dfrac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{2.29}$$

denklemler sisteminin karakteristiklerini ve Riemann invaryantlarını bulalım.

Bu son sistemi matris şeklinde

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u \\ \rho \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & \dfrac{p'}{\rho} \\ \rho & u \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} u \\ \rho \end{pmatrix} = 0$$

olarak yazalım. Karakteristiklerin denklemi

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & u & \dfrac{p'}{\rho} \\ 0 & 1 & \rho & u \\ dt & 0 & dx & 0 \\ 0 & dt & 0 & dx \end{vmatrix} = 0 \tag{2.30}$$

biçiminde olur. Buradan

$$(dx)^2 - udxdt + dt[-udx + dt(u^2 - p')] = 0$$

elde ederiz. Son denklemin kökleri

$$\frac{dx}{dt} = u + \sqrt{p'}, \quad \frac{dx}{dt} = u - \sqrt{p'} \tag{2.31}$$

olmaktadır.

Şimdi Riemann invaryantlarını bulalım. Bunun için genişletilmiş matrisin

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & u & \dfrac{p'}{\rho} & o \\ 0 & 1 & \rho & u & 0 \\ dt & 0 & dx & 0 & du \\ 0 & dt & 0 & dx & d\rho \end{vmatrix}$$

keyfi 4×4 minörü sıfıra eşit olmalıdır, örneğin,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & u & 0 \\ 0 & 1 & \rho & 0 \\ dt & 0 & dx & du \\ 0 & dt & 0 & d\rho \end{vmatrix} = 0.$$

Bu denklemden

$$dxd\rho + \rho dtdu - udtd\rho = 0 \tag{2.32}$$

bulunur.

Birinci karakteristik üzerinde $dx = (u + \sqrt{p'(\rho)})dt$ ve (2.32) denkleminden

$$\frac{du}{d\rho} = -\frac{\sqrt{p'(\rho)}}{d\rho}$$

elde ederiz. İkinci karakteristik üzerinde ise, $\dfrac{dx}{dt} = u - \sqrt{p'(\rho)}$ ve

$$\frac{du}{d\rho} = \frac{\sqrt{p'(\rho)}}{d\rho}$$

elde edilir. Böylelikle (2.29) denklemler sistemini

$$\frac{dx}{dt} = u + \sqrt{p'(\rho)},$$

$$\frac{du}{d\rho} = -\frac{\sqrt{p'(\rho)}}{d\rho}$$

ve

$$\frac{dx}{dt} = u - \sqrt{p'(\rho)},$$

$$\frac{du}{d\rho} = \frac{\sqrt{p'(\rho)}}{d\rho}$$

adi diferansiyel denklemler sistemine indirgemiş oluruz.

3. GAZ DİNAMİĞİNİN MODEL DENKLEMLERİ

Bu bölümde gaz dinamiğinde sık rastlanan ve gaz dinamiğinin model denklemler sistemi olarak adlanan sistemi inceleyeceğiz. Kolaylık için önce ses dalgalarını ifade eden denklemi göz önüne alalim.

3.1 Lineerleştirilmiş Gaz Dinamiği Denklemi

Yukarıdaki yöntemi aşağıdaki lineerleştirilmiş

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \tag{3.1}$$

gaz dinamiği denklemi için uygulayalım. (3.1) denkleminde

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \rho, \qquad -\frac{a^2}{\rho_0}\frac{\partial v}{\partial x} = u$$

değişken dönüşümlerini yapalım. Bu durumda (3.1) denklemi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{a^2}{\rho_0}\dfrac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

1.basamaktan denklemler sistemine dönüşür. Sonuncu sistemi aşağıdaki gibi matris şeklinde yazalım

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{3.2}$$

Burada

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \rho_0 \\ \dfrac{a^2}{\rho_0} & 0 \end{pmatrix}$$

olmaktadır. (3.2) sistemini

$$\rho(x,0) = \begin{cases} \rho_L, & x < 0 \\ \rho_R, & x > 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

ve

$$u(x,0) = \begin{cases} u_L, & x < 0 \\ u_R, & x > 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

başlangıç koşulları çerçevesinde inceleyelim.

A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = -a, \lambda_2 = a$ olmaktadır. Bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler ise

$$K^{(1)} = \begin{pmatrix} \rho_0 \\ -a \end{pmatrix}, \qquad K^{(2)} = \begin{pmatrix} \rho_0 \\ a \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. Önce, $U_L = (\rho_L, u_L)^T$ sol başlangıç verilerinin özvektörler üzerinden ayrılışını

$$U_L = \begin{pmatrix} \rho_L \\ u_L \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i K_L^{(i)} = \alpha_1 \begin{pmatrix} \rho_0 \\ -a \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \rho_0 \\ a \end{pmatrix}$$

olarak yazalım. Son cebirsel denklemler sisteminin çözümü

$$\alpha_1 = \frac{\rho_L a - \rho_0 u_L}{2a\rho_0} \quad \text{ve} \quad \alpha_2 = \frac{\rho_L u_L + a\rho_L}{2a\rho_0}$$

olur. Şimdi, $u_R = (\rho_R, u_R)^T$ sağ başlangıç verilerinin $K^{(i)}$ ler üzerinden ayrılışını

$$U_R = \begin{pmatrix} \rho_R \\ u_R \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{2} \beta_i K_L^{(i)} = \beta_1 \begin{pmatrix} \rho_0 \\ -a \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} \rho_0 \\ a \end{pmatrix}$$

şeklinde yazarak

$$\beta_1 = \frac{a\rho_R - \rho_0 u_R}{2a\rho_0} \qquad \text{ve} \qquad \beta_2 = \frac{a\rho_R - \rho_0 u_R}{2a\rho_0}$$

ifadelerini buluruz. Yıldız bölgesinde, yani $x + at = c_1$ ve $x - at = c_2$ karakteristikleri arasında yerleşen bölgede,

$$U^*(x,t) = \beta_1 K^{(1)} + \alpha_2 K^{(2)}$$

olduğunu dikkate alırsak göz önüne aldığımız problemin çözümü için

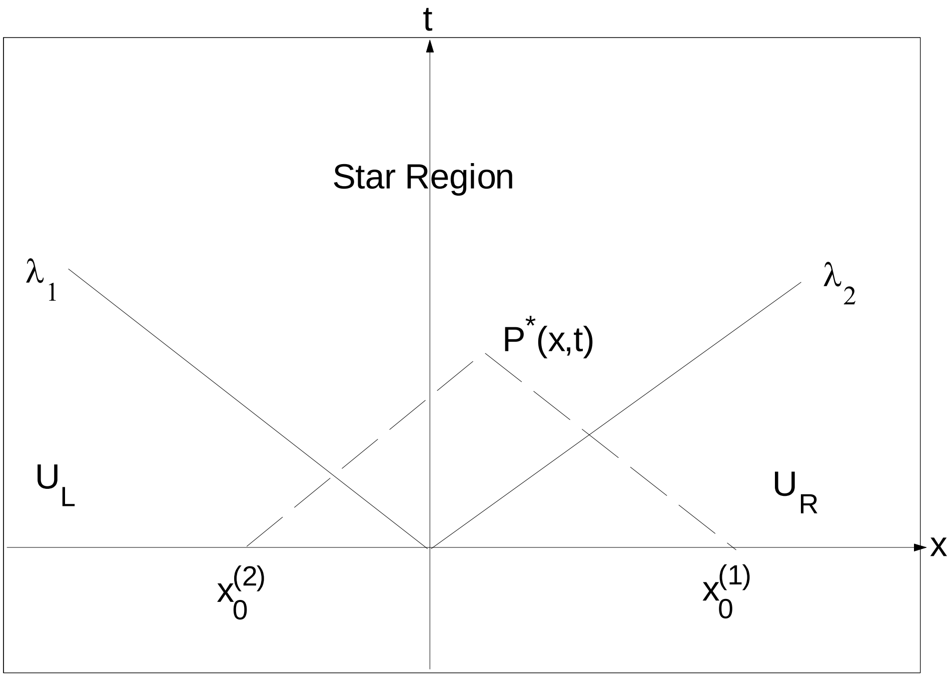
$$U^*(x,t) = \begin{pmatrix} \rho^* \\ a^* \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} \rho_0 \\ -a \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \rho_0 \\ a \end{pmatrix}$$

elde ederiz. Buradan sonuç olarak,

$$\rho^* = \frac{1}{2}(\rho_L + \rho_R) - \frac{\rho_0}{2a}(u_R - u_L)\,,$$

$$u^* = \frac{1}{2}(u_L - u_R) - \frac{a}{2\rho_0}(\rho_R - \rho_L)$$

olduğunu görürüz.



Şekil 1 Yıldız Bölge

Örnek 9. $\rho_0 = 1$, $a = 1$, $\rho_L = 1$, $\rho_R = \frac{1}{2}$, $u_L = 0$, $u_R = 0$ verileri için (3.2)-(3.4) probleminin çözümünü araştıralım. Bu durum için başlangıç fonksiyonlar

$$\rho(x,0) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x > 0 \end{cases}, \qquad u(x,0) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

olmaktadır. Söz konusu problemin çözümleri ise

$$\rho(x,t) = \begin{cases} \rho_L\,, & \dfrac{x}{t} < \lambda_1 \\ \rho^*, & \lambda_1 < \dfrac{x}{t} < \lambda_2 \\ \rho_R\,, & \dfrac{x}{t} > \lambda_2 \end{cases}$$

$$u = \begin{cases} u_L\,, & \dfrac{x}{t} < \lambda_1 \\ u^*, & \lambda_1 < \dfrac{x}{t} < \lambda_2 \\ u_R, & \dfrac{x}{t} > \lambda_2 \end{cases}$$

olmaktadır.

3.2 Hidrodinamiğin Model Denklemler Sistemi

Bu bölümde amacımız, hidrodinamiğin sabit basınclı sıkışabilen izenterik sıvıların haraketini modelleyen denklemler sistemi için yazılmış Cauchy probleminin gerçek çözümünü elde etmek ve çözümün bazı özelliklerini incelemek olacaktır. Bu amaçla aşağıdaki

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, \\ \rho_t + (\rho u)_x = 0, \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x), \\ \rho(x,0) = g(x) \end{cases} \tag{3.6}$$

Cauchy problemini göz önüne alalım. Burada, $g(x)$ bir kez, $f(x)$ ise iki kez türevlenebilir fonksiyonlardır. Ayrıca fiziksel bakış açısından bu fonksiyonların kompakt taşıyıcıya sahip olduğunu varsayarız.

3.2.1 Sürekli Başlangıc Koşul

Görüldüğü gibi, (3.5) denklemler sisteminin 1. denklemi diğer $\rho(x,t)$ bilinmeyeninden bağımsızdır, ikinci denklem ise u ve ρ ya bağlı olmaktadır. [1],[2] de gösterildiği gibi eğer, $f(x)$ fonksiyonu hem pozitif, hem de negativ eğime sahip fonksiyon ise (3.5) nin 1. denkleminin $u(x,t)$ çözümü yeri önceden bilinmeyen sıçrayış noktalarına sahip olmaktadır. Dolayısıyla, (3.5),(3.6) probleminin klasik anlamda çözümü mevcut değildir. Zayıf çözümlerin tanımını verelim.

Tanım 2. (3.6) başlangıç koşullarını sağlayan ve $\varphi(x,T)=0$ koşuluna sahip olan keyfi test fonksiyonları için

$$\iint_D \left\{\varphi_t(x,t)u(x,t)+\varphi_x(x,t)\frac{u^2(x,t)}{2}\right\}dxdt+\int_{-\infty}^{\infty}u(x,0)\varphi(x,0)dx=0,$$

$$\iint_D \left\{\varphi_t(x,t)u(x,t)+\varphi_x(x,t)u(x,t)\rho(x,t)\right\}dxdt+\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x,0)\varphi(x,0)dx=0$$

integral eşitliklerini koruyan $u(x,t)$ ve $\rho(x,t)$ fonksiyonlarına (3.5),(3.6) probleminin zayıf çözümü denir.

Tanım 2 den görüldüğü üzere, (3.5) denklemlerinde $u(x,t)$ ve $\rho(x,t)$ fonksiyonları süreksiz de olabilir.

(3.5),(3.6) probleminin zayıf çözümlerini elde etmek için

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right)^2=0, \\ \dfrac{\partial \omega(x,t)}{\partial t}+u(x,t)\dfrac{\partial \omega(x,t)}{\partial x}=0, \end{cases} \tag{3.7}$$

$$\begin{cases} v(x,0)=v_0(x), \\ \omega_0(x,0)=\omega_0(x) \end{cases} \tag{3.8}$$

yardımcı problemini içerelim. Burada $v_0(x)$ ve $\omega_0(x)$ sırası ile

$$\frac{dv_0(x)}{dx} = f(x), \qquad \frac{d\omega_0(x)}{dx} = g(x)$$

denklemlerinin herhangi bir sürekli çözümü olmaktadır.

Teorem 1. Eğer $v(x,t)$ ve $\omega(x,t)$ (3.7),(3.8) probleminin çözümleri ise,

$$u(x,t) = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x}, \ \ \rho(x,t) = \frac{\partial \omega(x,t)}{\partial x}$$

ile tanımlanan $u(x,t)$ ve $\rho(x,t)$ fonksiyonları esas problemin zayıf çözümleri olmaktadır.

Teorem 1 den

$$v(x,t) = \int_{-\infty}^{x} u(\xi,t)d\xi + c_1(t),$$

$$\omega(x,t) = \int_{-\infty}^{x} \rho(\xi,t)d\xi + c_2(t)$$

olduğu görülmektedir. Dolayısıyla yardımcı problemin çözümü tek değildir. Bunun yanısıra $v(x,t)$ ve $\omega(x,t)$ fonksiyonları mutlak sürekli olmaktadır. Karakteristikler yöntemini kullanarak (3.7),(3.8) sisteminin çözümlerini yazalım. [3] de yardımcı problemin çözümü

$$v(x,t) = \frac{1}{2}u_0^2 t + v_0(\xi), \ \ \xi = x - ut$$

olarak elde edilmişti. Sade hasaplamalar yolu ile

$$u(x,t) = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = f(x-ut) \qquad (3.9)$$

olduğu gösterilebilir.

(3.7),(3.8) probleminin 2. denkleminin çözümünü

$$\omega(x,t) = \omega_0(\xi)$$

şeklinde elde ederiz. Yukarıdaki teoreme göre

$$\rho(x,t) = \frac{\partial \omega(x,t)}{\partial x}$$

olmaktadır. Buradan

$$\rho(x,t) = \frac{\partial \omega}{\partial x} = \omega'_\xi \left(1 - t\frac{\partial u}{\partial x}\right) = g(\xi)\left(1 - \frac{tf'(\xi)}{1+tf'(\xi)}\right) = \frac{g(\xi)}{1+tf'(\xi)} \qquad (3.10)$$

olarak elde ederiz. Böylelikle aşağıdaki teoremleri ispatlamış oluruz.

Teorem 2. Eğer $v(x,t)$ ve $\omega(x,t)$ fonksiyonları (3.7),(3.8) yardımcı probleminin çözümleri ise (3.9) ve (3.10) ile tanımlanan $u(x,t)$ ve $\rho(x,t)$ fonksiyonları esas problemin yumuşak (soft) çözümleri olmaktadır.

Yardımcı çözümlerin aşağıdaki gibi avantajları vardır:

1. $v(x,t)$ ve $\omega(x,t)$ fonksiyonlarının diferansiyellenebilme özelliği $u(x,t)$ ve $\rho(x,t)$ fonksiyonlarının diferansiyellenebilme özelliğinden bir mertebe fazladır.

2. Esas problemin çözümlerini $\frac{\partial u}{\partial x}$ ve $\frac{\partial \rho}{\partial x}$ türevlerini kullanmadan da elde etmek mümkündür. Zaten bu türevler sıçrayış noktalarında mevcut değillerdir.

3. $v(x,t)$ ve $\omega(x,t)$ fonksiyonları mutlak sürekli fonksiyonlardır.

(3.10) çözümünü başka yolla da bulabiliriz. (3.7) deki ikinci denklemde

$$\begin{cases} a = a(x,t) = x - ut \\ \tau = t \end{cases}$$

değişken dönüşümü yapalım. Bu dönüşümün jacobiyeninin

$$J = \frac{D(a,\tau)}{D(x,t)} = \left(1 + f_a' t \right)$$

olduğunu dikkate alarak, denklemi

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \frac{1}{J} \frac{dJ}{dt}$$

şeklinde yazabiliriz. Sonuncu denklemden

$$\rho(x,t)J(x,t) = \rho(a,0)J(a,0)$$

alırız. $J(a,0) = 1$ olduğunu varsayarsak, söz konusu denklemin çözümünü

$$\rho(x,t) = \frac{\rho(a,0)}{J(a,t)} = \frac{g(x-ut)}{1+tf'(x-ut)} \tag{3.11}$$

olarak elde ederiz. (3.9) ve (3.11) ifadelerinden $t = -\frac{1}{f'(u)}$ değerlerinde

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \infty, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial x} = \infty$$

olduğu kolayca görülmektedir. Dolayısıyla (3.7),(3.8) probleminin klasik çözümü mevcut değildir.

$u(x,t)$ ve $\rho(x,t)$ fonksiyonlarındaki sıçrayış noktalarını belirlemek için

$$E_1(t) = \int_R u(x,t)dx, \quad E_2(t) = \int_R \rho(x,t)dx \tag{3.12}$$

enerji integrallerini göz önüne alalım. (3.12) integralleri hem sürekli, hem de süreksiz fonksiyonlar için mevcut olmaktadır. Ayrıca $E_1(t)$ ve $E_2(t)$ nin zamandan bağımsız olduğu kolayca görülmektedir.

Tanım 3. Aşağıdaki şekilde tanımlanan

$$E_1(0) = \int_R u(x,0)dx, \qquad E_2(0) = \int_R \rho(x,0)dx$$

$E_1(0)$ ve $E_2(0)$ sayılarına $v(x,t)$ ve $\omega(x,t)$ fonksiyonlarının kritik değerleri denir.

Şimdi $u(x,t)$ ve $\rho(x,t)$ fonksiyonlarının süreksizlik noktalarının yerlerini tespit etme problemini ve bu noktaların zamanla değişimini inceleyeceğiz. Daha önce sözü edildiği üzere yardımcı problemin çözümü tek değildir. Fiziksel bağlamda yararlı bir tek çözüm elde etmek için bazı ilave koşullar gerekmektedir.

Tanım 4. Herhangi bir t için $v(x,t)$ nin kritik değer aldığı noktaların geometrik yerine front (cephe) noktası diyelim ve $x_f^{(v)}(t)$ şeklinde gösterelim.

Tanım 5. Herhangi t için $\rho(x,t)$ nun kritik değerler aldığı noktaların geometrik yerine $\rho(x,t)$ fonksiyonunun front (cephe) noktası diyelim ve $x_f^{(\rho)}(t)$ ile gösterelim. Tanım 3 den

$$v\left(x_f^{(v)}(t)\right)=\int_{-\infty}^{x_f^{(v)}(t)}u(x,t)dx=E_1(0)$$

elde ederiz. Buradan, $x_f^{(v)}(t)$ için

$$\frac{dx_f^{(v)}(t)}{dt}=\left.\frac{[u^2]}{[u]}\right|_{x=x_f^{(v)}(t)}$$

denklemini ele alırız. Benzer şekilde, Tanım 4 den

$$\frac{dx_f^{(\rho)}(t)}{dt}=\left.\frac{[u\rho]}{[\rho]}\right|_{x=x_f^{(\rho)}(t)}$$

elde ederiz. Burada, $[\varphi]\big|_{x=x_0}$ notasyonu ile $\varphi(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasındaki sıçrayışı gösterilmektedir, yani

$$[\varphi]\big|_{x_0}=\varphi(x_0+0)-\varphi(x_0-0)$$

dır. Böylece, u ve ρ fonksiyonlarının sıçrayış noktalarının denklemin karakteristikleri üzerinde olduğunu gördük.

Tanım 6. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan

$$v_{gen}(x,t)=\begin{cases} v(x,t), & v<E_1(0) \\ E_1(0), & v\geq E_1(0) \end{cases} \tag{3.13}$$

$$\omega_{gen}(x,t)=\begin{cases} \omega(x,t), & \omega<E_1(0), \\ E_2(0), & \omega\geq E_2(0) \end{cases} \tag{3.14}$$

fonksiyonlarına yardımcı problemin genişletilmiş çözümleri denir.

Esas problemin zayıf çözümü için aşağıdaki ifadeleri

$$u_{gen}(x,t)=\frac{\partial v_{gen}(x,t)}{\partial x}, \tag{3.15}$$

$$\rho_{gen}(x,t)=\frac{\partial \omega_{gen}(x,t)}{\partial x} \tag{3.16}$$

buluruz. (3.13) ve (3.14) dan görüldüğü üzere, $\frac{\partial v_{gen}(x,t)}{\partial x}$ ve $\frac{\partial \omega_{gen}(x,t)}{\partial x}$ türevlerinin 0 a eşit olduğu noktalar $u(x,t)$ ve $\rho(x,t)$ fonksiyonlarının sıçrayış noktaları olmaktadır.

$$t=\int_0^{x_f(t)}\frac{dx_f(t)}{u}<\infty$$

eşitsizliği $u(x,t)$ ve $\rho(x,t)$ fonksiyonlarında sıçrayışların oluşabilmesi için gerekli ve yeterli bir koşuldur.

Şimdi de esas ve yardımcı problemler arasındaki ilişkiyi açıklayan diğer bir bağlantıyı gösterelim. Bunu yapabilmemiz için gerekli olan

$$L^1(p,q)=q_xF(p,q)=q_x(p+0.5q^2),$$

$$L^2(q, p_{1,}q_1) = (q_1)_x F_1(p_{1,}q_1) = (q_1)_x(p_1 + qq_1)$$

Lagrange fonksiyonlarını göz önüne alalım. Burada $p_1 = \dfrac{\partial\omega}{\partial t}$, $q_1 = \dfrac{\partial\omega}{\partial x}$ olmaktadır.

Teorem 3. (3.7) denklemlerinin çözümleri, sırasıyla $L^1(p,q)$ ve $L^2(q, p_1, q_1)$ fonksiyonlarının ekstramumları olmaktadır.

İspat. $L^1(p,q)$ ve $L^2(p,q)$ için Euler-Lagrange denklemini yazarsak

$$\frac{\partial L_p^1}{\partial t} + \frac{\partial L_q^1}{\partial x} = 0,$$

$$L_p^1 = q_x, L_q^1 = qq_x,$$

$$\frac{\partial q_v}{\partial t} + q_x \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right) + q_x \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

elde ederiz. Benzer şekilde, $L^2(q, p_1, q_1)$ den

$$L_{p_1}^2 = (q_1)_x, L_{q_1}^2 = q(q_1)_x,$$

$$\frac{\partial L_{p_1}^2}{\partial t} + \frac{\partial L_{q_1}^2}{\partial x} = \frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u\rho) = 0$$

alırız. Böylelikle, Teorem 3 ü ispatlamış oluruz.

Görüldüğü üzere skaler denklemde olduğu gibi kuazi lineer denklemler sisteminin de gerçek çözümü önerilen yardımcı problem aracılığıyla elde edilebilir. Diğer taraftan da önerilmiş yardımcı problem söz konusu denklemler sisteminin sayısal çözümünü elde etmek için sonlu farklar yöntemini uygulamaya da imkan sağlamaktadır.

Diğer problemler, örneğin, sıkışabilir sıvıların sabit basınçlı, zamana bağlı bir boyutlu hareketini modelleyen nonlineer denklemler sisteminin gerçek çözümü de benzer yolla elde edilebilir. Eğer u sıvının hızı, ρ sıvının yoğunluğu ve e birim hacimdeki iç enerjiyi ifade ederse, hidrodinamiğin temel denklemler sistemini

$$u_t + uu_x = 0, \tag{3.17}$$

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \tag{3.18}$$

$$e_t + (eu)_x + \rho u_x = 0 \tag{3.19}$$

şeklinde yazabiliriz. $\varepsilon = e + p$ değişken dönüşümünün sonucu (3.19) u

$$\varepsilon_t + (\varepsilon u)_x = 0, \tag{3.20}$$

şeklinde de yazabiliriz. (3.17)-(3.19) denklemler sistemini

$$u(x,0) = f(x), \tag{3.21}$$

$$\rho(x,0) = g(x), \tag{3.22}$$

$$\varepsilon(x,0) = h(x) \tag{3.23}$$

başlangıç koşulları çerçevesinde inceleyelim. Burada f, g ve h bilinen fonksiyonlardır.

Teorem 4. $g(x)$ ve $h(x)$ bir kez, $f(x)$ ise iki kez diferansiyellenebilen fonksiyonlar ise,

$$\rho(x,t) = \frac{g(x-tu)}{1+tf'(x-tu)}, \tag{3.24}$$

$$\varepsilon(x,t) = \frac{h(x-tu)}{1+tf'(x-tu)} \tag{3.25}$$

fonksiyonları (3.18) ve (3.20) denklemlerinin yumuşak çözümleri olmaktadır.

İspat. (3.24) formülü ile tanımlanan $\rho(x,t)$ fonksiyonunun (3.18) denklemini koruduğunu gösterelim. Teoremin diğer hükmü de benzer yolla ispatlanır. Kolaylık için, $\omega = x - tu(x,t)$ olsun. Bu ifadeden t ye göre türev alırsak,

$$\rho_t = -[1+tf'(\omega)]^{-2} \times$$
$$\{[1+tf'(\omega)\ ](u+tu_t)g'(\omega) + g(\omega)f'(\omega) - tg(\omega)f''(\omega)(u+tu_t)\ \}$$

olarak elde ederiz.

$$u + tu_t = f - \frac{tff'}{1+tf'} = \frac{f}{1+tf'}$$

ifadesini göz önünde bulundurarak

$$\rho_t = -[1+tf'(\omega)]^{-3}\{fg)'(1+tf') - tgff''\}$$

elde ederiz. (3.24) yı u ile çarpıp ve x e göre türevlersek

$$(pv)_x = [1+tf'(\omega)]^{-2} \times$$
$$\{(1+tf'(\omega))gu_x + ug'(\omega)(1-tu_x) - ug(\omega)((1+tu_x)tf''(\omega))\}$$

elde ederiz.

$$1 - tu_x = 1 - \frac{tf'(\omega)}{1+tf'(\omega)} = \frac{1}{1+tf'(\omega)}$$

göz önünde bulundurarak,

$$(pu)_x = [1+tf'(\omega)]^{-3}\{(fg)'(1+tf') - tgff''\}$$

olmaktadır. Bu durumda $\rho_t = -(\rho_u)_x$ olur.

Açıkça görülüyor ki, $u, \rho, \varepsilon, f, g$ ve h fonksiyonları (3.9),(3.24) ve (3.25) ifadelerinde tanımlanan fonksiyonlar (3.17),(3.18) ve (3.20) denklemlerini koruduğu halde bile, halen bunlara denklemlerin çözümü olduğu söylenemez. Bu durum aşağıdaki kavramları ele alma zorunluluğunu ortaya koyar.

Tanım 7. (3.9),(3.24) ve (3.25) fonksiyonel denklemlerini koruyan $u(x,t), \rho(x,t)$ ve $\varepsilon(x,t)$ fonksiyonlarına (3.17),(3.18) ve (3.20) denklemlerinin (3.21)-(3.23) başlangıç koşulları çerçevesinde yumuşak çözümleri denir.

3.2.2 Süreksiz Başlangıç Koşul

Şimdi, $f(x)$ ve $g(x)$ başlangıç fonksiyonlarının süreksiz olduklarını varsayalım, yani

$$u(x,0) = \begin{cases} u_1, & x > 0 \\ u_2, & x < 0, \end{cases} \tag{3.26}$$

$$\rho(x,0) = \begin{cases} \rho_1, & x > 0 \\ \rho_2, & x < 0 \end{cases} \tag{3.27}$$

gibi olsun. Burada u_1, u_2, ρ_1 ve ρ_2 bilinen sabitler olmaktadır ve aşağıdaki durumlar olabilir:

(i) $u_1 > u_2, \quad \rho_1 < \rho_2$;

(ii) $u_1 < u_2, \quad \rho_1 > \rho_2$;

(iii) $u_1 > u_2, \quad \rho_1 > \rho_2$;

(iv) $u_1 < u_2, \quad \rho_1 < \rho_2$.

(3.5) sisteminin (3.26),(3.27) koşulları çerçevesinde karakteristikler yöntemi ile elde edilen çözümü

$$u(x,t) = \begin{cases} u_1, & \frac{x}{t} > u_1 \\ \frac{x}{t}, & u_2 < \frac{x}{t} < u_1 \\ u_2, & \frac{x}{t} < u_2 \end{cases} \tag{3.28}$$

olmaktadır.

(3.28) ı dikkate alırsak, $\rho(x,t)$ için de açık şekilde

$$\rho(x,t) = \frac{g(x-ut)}{1+tf'(x-ut)} \tag{3.29}$$

ifadesini elde ederiz.

(3.28) formülünden görüldüğü gibi $u_1 < u_2$ olduğunda $u(x,t)$ fonksiyonu parça-parça sürekli, $u_1 > u_2$ olduğunda ise 1. tür sıçrayışa sahip fonksiyon olmaktadır. $\rho(x,t)$ fonksiyonu ise iki tane 1. tür sıçrayış noktalarına sahip olmaktadır.

Süreksiz fonksiyonlarla çalışma zorunluluğu, problemin çözümü için zayıf çözüm kavramının ele alınmasını teşvik etmektedir.

Tanım 8. (3.26) ve (3.27) başlangıç koşullarını sağlayan ve temel (test) fonksiyonlar sınıfından $\varphi(x,T)=0$ koşuluna sahip keyfi $\varphi(x,t)$ fonksiyonları için

$$\iint_D \left\{\varphi_t(x,t)u(x,t)+\varphi_x(x,t)\frac{u^2(x,t)}{2}\right\}dxdt + \int_{-\infty}^{0} u_2\varphi(x,0)dx + \int_0^{\infty} u_1\varphi(x,0)dx = 0,$$

$$\iint_D \{\varphi_t(x,t)u(x,t)+\varphi_x(x,t)u(x,t)\rho(x,t)\}dxdt + \int_{-\infty}^{0}\rho_2\varphi(x,t)dx + \int_0^{\infty}\rho_1\varphi(x,0)dx = 0$$

integral eşitliklerini koruyan $u(x,t)$ ve $\rho(x,t)$ fonksiyonlarına problemin zayıf çözümü denir.

Esas problemin zayıf çözümünü elde etmek için [3] i takip ederek aşağıdaki

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right)^2 = 0, \tag{3.30}$$

$$\frac{\partial \omega(x,t)}{\partial t}+u(x,t)\frac{\partial \omega(x,t)}{\partial x} = 0, \tag{3.31}$$

$$v(x,0) = \begin{cases} u_1 x, & x > 0 \\ u_2 x, & x < 0, \end{cases} \tag{3.32}$$

$$\omega(x,0) = \begin{cases} \rho_1 x, & x > 0 \\ \rho_2 x, & x < 0 \end{cases} \tag{3.33}$$

yardımcı problemini göz önüne alalım.

İkinci bölümde olduğu gibi $u_1 < u_2$ olduğu durum için (3.5),(3.26) Rieamann probleminin çözümünü

$$u(x,t) = \begin{cases} u_1, & \dfrac{x}{t} > U, \\ u_2, & \dfrac{x}{t} < U, \end{cases} \tag{3.34}$$

şeklinde elde ederiz. Burada,

$$U = \frac{u_1 + u_2}{2} t$$

olmaktadır. (3.7),(3.33) probleminin çözümünü ise

$$\omega(x,t) = \begin{cases} \omega_-, & \xi < 0, \\ \omega_+, & \xi > 0 \end{cases} \tag{3.35}$$

şeklinde elde ederiz. Burada, $\omega_- = \rho_1(x - u_1 t)$ ve $\omega_+ = \rho_2(x - u_2 t)$ dır. Sonuncu ifadeden

$$\frac{dx_f^{(\rho)}(t)}{dt} = u_2 + \rho_2 \left| \frac{u_1 - u_2}{\rho_1 - \rho_2} \right| \equiv U_\rho \tag{3.36}$$

elde ederiz. (3.10) yi göz önüne alarak $\rho(x,t)$ için

$$\rho(x,t) = \begin{cases} \rho_1, & \dfrac{x}{t} > U_\rho \\ \rho_2, & \dfrac{x}{t} < U_\rho \end{cases} \tag{3.37}$$

elde ederiz.

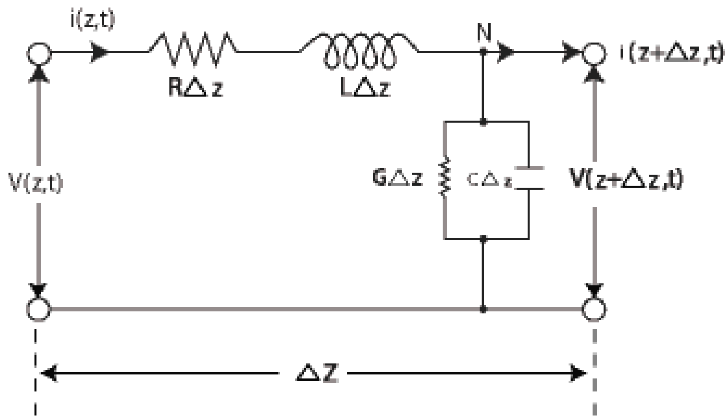
4. İLETİM HATTI DENKLEMLERİ İÇİN BAŞLANGIÇ-SINIR DEĞER PROBLEMİ

Bu bölümde İletim hattı denklemler sistemi için başlangıç değer problemini inceleyeceğiz. Bu amaçla önce iletişim hattı denklemlerini çıkaralım.

4.1 İletişim Hattında Potansiyel Gerilim Denklemleri

Önce paralel levhalı, iki telli ve aynı eksenli hatları içine alan iki iletkenli düzgün iletim hatları için genel denklemleri çıkaralım. İletim hatları normal elektrik devre ağlarından bir önemli özellikle ayrılır. Elektrik devre ağlarının fiziksel boyutları, çalışma dalga boyundan çok küçük olduğu halde, iletim hatları genellikle bir dalga boyunun önemli bir kesri, bazen bir çok dalga boyu uzunluğunda bile olabilirler. Normal bir elektrik devrede aşağıdaki devre öğeleri kesikli olarak düşünülebilirler ve dolayısıyla toplu parametrelerle betimlenebilirler. Toplu devre öğelerindeki akımların öğeler üzerinde uzaysal konumla değişmedikleri ve duran dalgaların bulunmadığı varsayılır. Bir iletim hattı ise, yaygın parametreli bir ağdır ve uzunluğu boyunca yayılmış olan devre parametreleriyle betimlenmelidir. Uyum koşulları dışında bir iletim hattında duran dalgalar vardır.

Bir iletim hattının, aşağıdaki dört parametreyle betimlenen bir Δz diferansiyel uzunluğunu göz önüne alalım.



Şekil 1. İki iletkenli bir iletim hattının Δz diferansiyel uzunluğunun eşdeğer devresi

R, birim uzunluğun direnci (her iki iletken), Ω/m cinsinden

L, birim uzunluğun indüktansı (her iki iletken), H/m cinsinden

G, birim uzunluğun iletkenliği, S/m cinsinden

C, birim uzunluğun sığası, F/m cinsinden

R ve L seri, G ve C paralel öğelerdir. $v(z,t)$ ve $v(z+\Delta z)$ sırasıyla z ve $z+\Delta z$ deki anlık voltajları göstermektedir. Benzer biçimde, $i(z,t)$ ve $i(z+\Delta z,t)$ sırasıyla z ve $z+\Delta z$ deki anlık akımları göstermektedir. Kirchoff'un voltaj yasası uygulandığında

$$v(z,t) - R\Delta z i(z,t) - L\Delta z \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} - v(z+\Delta z,t) = 0$$

elde ederiz. Buradan

$$-\frac{v(z+\Delta z,t) - v(z,t)}{\Delta z} = Ri(z,t) + L\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}$$

olmaktadır. $\Delta z \to 0$ limitinde ise

$$-\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = Ri(z,t) + L\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \qquad (4.1)$$

alırız.

Benzer yolla Kirchoff'un akım yasası Şekil 1 deki N kavşağına uygulandığında

$$i(z,t) - G\Delta z v(z+\Delta z,t) - C\Delta z \frac{\partial v(z+\Delta z,t)}{\partial t} - i(z+\Delta z,t) = 0$$

elde ederiz. Son ifadeyi Δz bölüp $\Delta z \to 0$ limit alırsak

$$-\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = Gv(z,t) + C\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} \qquad (4.2)$$

elde ederiz.

(4.1) ve (4.2) denklemlerine, genel iletim hattı (veya telgraf) denklemleri denir.

4.2 İletim Hattı Denklemleri Riemann İnvaryantları

(4.1) ve (4.2) denklemler sistemini aşağıdaki gibi

$$A_1U_t + A_2U_x + A_3U = 0 \tag{4.3}$$

matris şeklinde yazalım. Burada

$$A_1 = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} i \\ v \end{pmatrix}$$

olmaktadır. (4.3) denklemini A_1^{-1} ile çarpalım

$$A_1^{-1}A_1U_t + A_1^{-1}A_2U_x + A_1^{-1}A_3U = 0$$

ve

$$A = A_1^{-1}A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/L \\ 1/C & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } B = \begin{pmatrix} R/L & 0 \\ 0 & G/C \end{pmatrix}$$

olduğunu dikkate alarak son denklemi

$$U_t + AU_x + BU = 0 \tag{4.4}$$

şeklinde yazabiliriz. $R = G = 0$ olduğu durumda (4.4) denklemi normal dalga denklemine dönüşmektedir. Bu durum için Riemann invaryantlarını bulalım. A matrisinin özdeğerlerini bulalım

$$\det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1/L \\ 1/C & 0 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1/L \\ 1/C & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - \frac{1}{CL} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm a \equiv \pm (LC)^{-1/2}.$$

Şimdi (4.4) denkleminin karakteristiklerini bulalım. Bu amaçla karakteristik determinantı yazalım

$$0 = \begin{vmatrix} L & 0 & 0 & 1 \\ 0 & C & 1 & 0 \\ dt & 0 & dx & 0 \\ 0 & dt & 0 & dx \end{vmatrix} = dt \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ C & 1 & 0 \\ dt & 0 & dx \end{vmatrix} + dx \begin{vmatrix} L & 0 & 1 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & dt & dx \end{vmatrix} = dt \begin{vmatrix} C & 1 \\ dt & 0 \end{vmatrix} + Ldx \begin{vmatrix} C & 0 \\ dt & dx \end{vmatrix}.$$

Buradan karakteristiklerin deklemi için

$$-(dt)^2 + LC(dx)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \pm \frac{1}{\sqrt{CL}}$$

elde ederiz. Görüldüğü üzere, dalgalardan biri $1/\sqrt{CL}$, diğeri ise $-1/\sqrt{CL}$ hızı ile haraket etmektedir.

Şimdi karakteristikler için olan koşulu çıkaralım. Genel teoriye dayanarak

$$\begin{pmatrix} L & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & C & 1 & 0 & 0 \\ dt & 0 & dx & 0 & di \\ 0 & dt & 0 & dx & dv \end{pmatrix}$$

matrisinin rankı ile bu matrisin keyfi dört sütunundan düzenlenmiş olan yeni matrisin rankının aynı olması gerekmektedir. Örneğin,

$$\begin{vmatrix} L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 1 & 0 \\ dt & 0 & dx & di \\ 0 & dt & 0 & dv \end{vmatrix} = L \begin{vmatrix} C & 1 & 0 \\ 0 & dx & di \\ dt & 0 & dv \end{vmatrix} = L\left[C \begin{vmatrix} dx & di \\ 0 & dv \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & di \\ dt & dv \end{vmatrix} \right] = L[Cdxdv + didt] = 0$$

olmak zorundadır.

1. karakteristik üzerinde $dx = \frac{1}{\sqrt{CL}} dt$ olduğundan

$$C \frac{1}{\sqrt{CL}} dtdv + didt = 0$$

elde ederiz. Buradan,

$$i + \frac{C}{\sqrt{CL}} v = sabit \tag{4.5}$$

elde ederiz.

2. karakteristik üzerinde $dx = -\frac{1}{\sqrt{CL}} dt$ olduğundan $Cdxdv + didt = 0$ denkleminden

$$i - \frac{C}{\sqrt{CL}} v = sabit \tag{4.6}$$

alırız. (4.5), (4.6) ifadelerine Riemann invaryantları denilir.

Şimdi, R ve G nin sıfırdan farklı durumu için karakteristikleri ve Riemann invaryantlarını bulalım.

$$L\frac{\partial i}{\partial t} + 0\frac{\partial v}{\partial t} + 0\frac{\partial i}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} + Ri = 0\,, \tag{4.7}$$

$$0\frac{\partial i}{\partial t} + C\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial i}{\partial x} + 0\frac{\partial v}{\partial x} + Gv = 0 \tag{4.8}$$

(4.7) ve (4.8) denklemlerini sırasıyla henüz bilinmeyen ℓ_1 ve ℓ_2 ile çarpıp toplayalım

$$\ell_1 L\frac{\partial i}{\partial t} + \ell_1 0\frac{\partial v}{\partial t} + \ell_1 0\frac{\partial i}{\partial x} + \ell_1\frac{\partial v}{\partial x} + \ell_1 Ri +$$
$$+ \ell_2 0\frac{\partial i}{\partial t} + \ell_2 C\frac{\partial v}{\partial t} + \ell_2\frac{\partial i}{\partial x} + \ell_2 0\frac{\partial v}{\partial x} + \ell_2 Gv = 0\,.$$

Son denklemi aşağıdaki gibi yazalım

$$\left(\ell_1 L+\ell_2 0\right)\frac{\partial i}{\partial t}+\left(\ell_1 0+\ell_2 1\right)\frac{\partial i}{\partial x}+\left(\ell_1 0+\ell_2 C\right)\frac{\partial v}{\partial t}+\left(\ell_1+\ell_2 0\right)\frac{\partial v}{\partial x}+\ell_1 Ri+\ell_2 Gv=0\,. \quad (4.9)$$

Eğer,

$$\begin{cases}\ell_1 L+\ell_2 0=m_1\beta\\ \ell_1 0+\ell_2 1=m_1\alpha\end{cases} \qquad (4.10)$$

$$\begin{cases}\ell_1 0+\ell_2 C=m_2\beta\\ \ell_1+\ell_2 0=m_2\alpha\end{cases} \qquad (4.11)$$

olduğu taktirde (4.9) denklemi

$$m_1\beta\frac{\partial i}{\partial t}+m_1\alpha\frac{\partial i}{\partial x}+m_2\beta\frac{\partial v}{\partial t}+m_2\alpha\frac{\partial v}{\partial x}+\ell_1 Ri+\ell_2 Gv=0$$

veyahut

$$m_1\left(\beta\frac{\partial i}{\partial t}+\alpha\frac{\partial i}{\partial x}\right)+m_2\left(\beta\frac{\partial v}{\partial t}+\alpha\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\ell_1 Ri+\ell_2 Gv=0$$

şeklinde yazılabilir. (4.10) ve (4.11) eşitliklerinde her iki tarafı sırasıyla α ve β ile çarpalım

$$\alpha\ell_1 L+\alpha\ell_2 0=m_1\alpha\beta$$

$$\beta\ell_1 0+\beta\ell_2 =m_1\alpha\beta$$

$$\alpha\ell_1 0+\alpha\ell_2 C=m_2\alpha\beta$$

$$\beta\ell_1+\beta\ell_2 0=m_2\alpha\beta\,.$$

Bu eşitliklerden

$$\begin{cases}\alpha\ell_1 L+\alpha\ell_2 0=\beta\ell_1 0+\beta\ell_2\\ \alpha\ell_1 0+\alpha\ell_2 C=\beta\ell_1+\beta\ell_2 0\end{cases} \qquad (4.12)$$

elde ederiz. (4.12) sistemini normal şekilde yazarsak

$$\begin{cases} \ell_1(\alpha L - \beta 0) + \ell_2(\alpha 0 - \beta) = 0 \\ \ell_1(\alpha 0 - \beta) + \ell_2(\alpha C - \beta 0) = 0 \end{cases} \tag{4.13}$$

alırız. (4.13) sisteminin tek bir çözümü olması için

$$\begin{vmatrix} \alpha L - \beta 0 & \alpha 0 - \beta \\ \alpha 0 - \beta & \alpha C - \beta 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{4.14}$$

olması gerek ve yeter koşul olmaktadır. (4.14) determinantını

$$\begin{vmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{vmatrix} \alpha - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \beta = 0$$

gibi de yazabiliriz. Dolayısıyla

$$\left| A_1 \alpha - A_2 \beta \right| = 0 \tag{4.15}$$

determinantından α ve β ları elde edebiliriz. Söz konusu (α, β)larda karakteristik eğrileri belirlemektedir. (4.15) öz vektörleri $(1, -LC)$ olarak elde ederiz. Diğer özvektörün de $(1, LC)$ olduğu benzer yolla ispatlanabilir.

Şimdi (4.1) ve (4.2) denklemlerini soldan sırasıyla $(1, LC)$ ve $(1, -LC)$ ile çarparsak

$$(CL)i_\xi + v_\xi = -\left(RCi + \frac{G}{C} v \right), \quad \frac{dx}{dt} = CL \quad de$$

$$(CL)i_\xi - v_\xi = -\left(RCi - \frac{G}{C} v \right), \quad \frac{dx}{dt} = -CL \quad de$$

elde ederiz. Bulduğumuz denklemler sistemini integrallamak denel zor olmaktadır. Fakat, $\frac{R}{L} = \frac{G}{C} = sabit$ Heaviside yaklaşımı çerçevesinde söz konusu sistemi

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(CLi + v) = -\frac{R}{L}(CLi + v), \quad \frac{dx}{dt} = CL \quad de$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(CLi - v) = -\frac{R}{L}(CLi - v), \quad \frac{dx}{dt} = -CL \quad de$$

şekline indirgeyebiliriz. Sonuncu denklemler sisteminin çözümlerini

$$CLi + v = A(\xi)e^{-\left(\frac{R}{L}\xi\right)}, \quad \frac{dx}{dt} = CL$$

$$CLi - v = B(\xi)e^{-\left(\frac{R}{L}\xi\right)}, \quad \frac{dx}{dt} = -CL$$

şeklinde elde ederiz. Bu ifadeleri bir kez toplayıp, ikinci kez ise çıkarıp 2 ye bölersek

$$i(x,t) = \frac{1}{2CL} e^{-\left(\frac{2R}{L}x\right)} \left[f(x-ct) + g(x+ct) \right],$$

$$v(x,t) = \frac{1}{2} e^{-\left(\frac{2R}{L}x\right)} \left[f(x-ct) - g(x+ct) \right]$$

(4.1), (4.2) sisteminin çözümünü elde ederiz, burada $c = (CL)^{-\frac{1}{2}}$ olmaktadır.

4.3 Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Sonlu Farklarla Çözümü

Bu bölümde (4.1)-(4.2) denklemlerini aşağıdaki

$$i(x,0) = 0, \tag{4.16}$$

$$v(x,0) = 0, \tag{4.17}$$

$$i(0,t) = i_0(t), \tag{4.18}$$

$$v(0,t) = v_0(t) \tag{4.19}$$

başlangıç ve sınır koşulları çerçevesinde sayısal çözümü için bir nümerik yöntem önerelim.

Yukarıda söylediğimiz gibi söz konusu probleminin klasik çözümü mevcut olmayabilir.Bu özellikten dolayı (4.1), (4.2) denklemlerini direkt olarak sonlu farklara ayrıklaştırmak yanlış sonuçlara neden olabilir. Bu amaçla (4.1), (4.2) denklemlerine bilinen anlamda denk olan yardımcı problem önerelim.

$$A(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} \tag{4.20}$$

ile tanımlanan bir operatör olsun. A operatörünün tersini A^{-1} ile (4.1), (4.2) denklemlerine uygularsak

$$L\frac{\partial}{\partial t}\int_0^x i(\xi,t)d\xi + v(x,t) + R\int_0^x i(\xi,t)d\xi = v_0(t)\,, \qquad (4.21)$$

$$C\frac{\partial}{\partial t}\int_0^x v(\xi,t)d\xi + i(x,t) + G\int_0^x v(\xi,t)d\xi = i_0(t) \qquad (4.22)$$

integro-diferansiyel denklemlerini elde ederiz.Söz konusu denklemleri (4.16) ve (4.17) başlangıç koşulları çerçevesinde sonlu farklara ayrıklaştıralım.

Bunun için 0 dan x e kadar olan integrale dikdörtgenler metodunu uygulayalım

$$\int_0^x f(\xi,t)d\xi \cong h\sum_{j=1}^{i} f_{j,k}\,. \qquad (4.23)$$

(4.23) i dikkate alarak (4.21) ve (4.22) denklemlerini aşağıdaki gibi sonlu farklara ayrıklaştıralım

$$I_{i,k+1} = I_{i,k} - \sum_{j=1}^{i-1}\left(I_{j,k+1} - I_{j,k}\right) - \frac{\tau}{hL}V_{i,k+1} - \frac{\tau R}{L}\sum_{j=1}^{i} I_{j,k} + \frac{\tau}{hL}v_o(t_k)\,, \qquad (4.24)$$

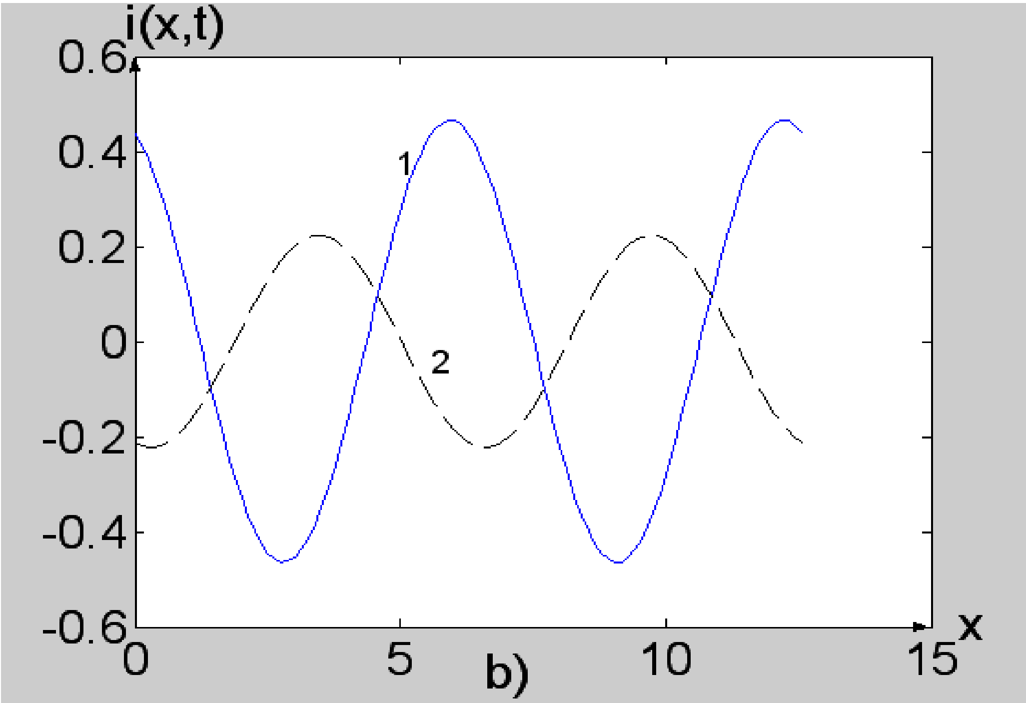
$$V_{i,k+1} = V_{i,k} - \sum_{j=1}^{i-1}\left(V_{j,k+1} - V_{j,k}\right) - \frac{\tau}{hC}I_{i,k+1} - \frac{\tau G}{C}\sum_{j=1}^{i} V_{j,k} + \frac{\tau}{hC}i_o(t_k)\,. \qquad (4.25)$$

Burada $I_{i,k}$ ve $V_{i,k}$ sırasıyla $i(x,t)$ ve $v(x,t)$ fonksiyonlarının ağın (x_i, t_k) noktalarındaki yaklaşık değerini göstermektedir. (4.24), (4.25) cebirsel denklemler sistemi için başlangıç koşulları

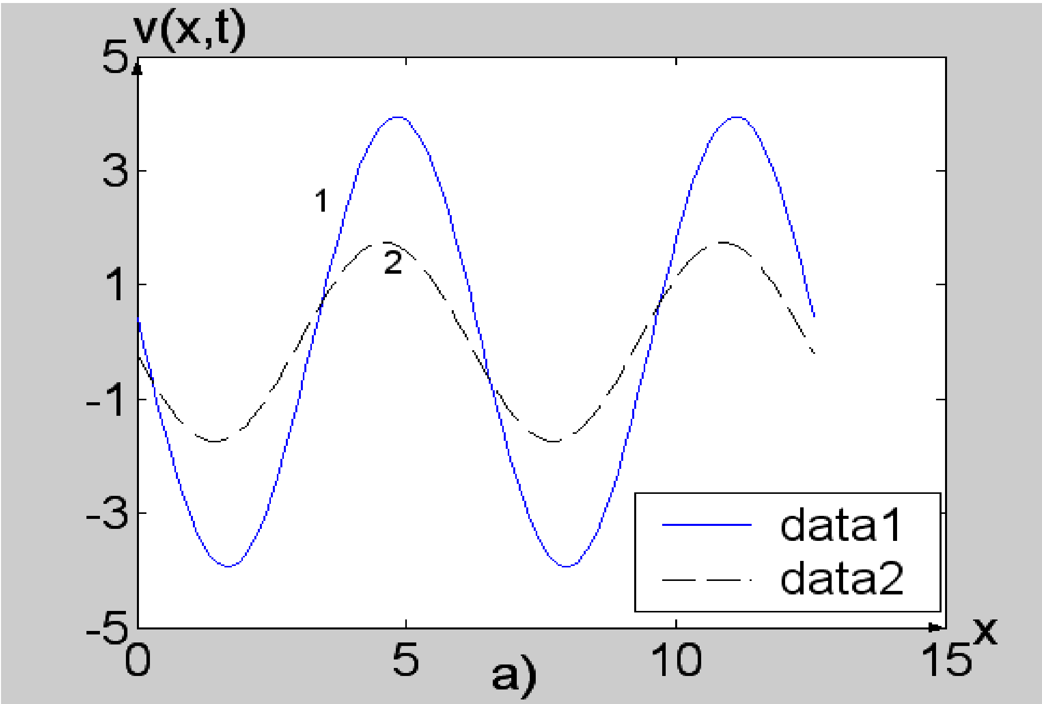
$$I_{i,0} = i_0(x_i)\,, \qquad (4.26)$$

$$V_{i,0} = v_0(x_i) \qquad (4.27)$$

olmaktadır. (4.24)-(4.25) algoritması üzerinde yapılan bazı özel veriler çerçevesinde bilgisayar deneyleri yapılmış ve deneylerin sonuçları sırasıyla Şekil 2 ve Şekil 3 de gösterilmiştir.



Şekil 2.



Şekil 3.

5. SONUÇLAR

Tezde elde edilen sonuçlar aşağıda sıralanmıştır:

- Gaz dinamiğinin model denklem sisteminin gerçek çözümleri elde edilmiştir.
- İletim hattı denklemi için Riemann invaryantları elde edilmiştir.
- İletim hattı denklemler sistemi için esas problemde mevcut olmayan yüksek diferansiyellenebilme özelliğine sahip yardımcı problem içerilmiştir.
- Yardımcı problemin avantajları kullanılarak, iletim hattı denklemler sistemi için ekonomik ve problemin fiziksel özelliklerini düzgün şekilde ifade edebilen süreksiz fonksiyonlar sınıfında fark şemaları önerilmiştir.

6. KAYNAKLAR

[1] Ames, W.F., Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering, Academic Press, New York, London, 1965.

[2] Godunov, S.,K., Equations of Mathematical Physics, Nauka, Moskow, 1979.

[3] Rasulov, M. A., On a Method of Solving the Cauchy Problem for a First Order Nonlinear Equation of Hyperbolic Type with a Smooth Initial Condition, Soviet Math. Dok., 43, No.1, 1991.

[4] Toro, Eleuterio, F., Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1999.

[5] Barbu, L., Gheorghe, M., Singularly Perturbed Boundary-Value Problems, Birkhauser, Basel, Boston, Berlin, 2007.

ÖZGEÇMİŞ

Ethem İlhan ŞAHİN, 1982 yılında İzmir'de doğdu. İlk öğretimini Gaziantep ilindeki Gazi Ortaokulu'nda tamamladıktan sonra Lise öğrenimini Adana Erkek Lisesinde bitirdi. 2004 yılında Çukurova Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümünden mezun oldu. 2007 yılında başladığı Beykent Üniversitesi Uygulamalı Matematik Ana Bilim Dalı'ndaki yüksek lisans öğrenimine devam etmektedir.