T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANA BİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

LİNEER ISI DENKLEMİ İÇİN ADJOİNT OLMAYAN BAŞLANGIÇ-SINIR DEĞER PROBLEMİNİN REZİDÜ YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

(Yüksek Lisans Tezi)

Uğur POLAT

İSTANBUL, 2009

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANA BİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

LİNEER ISI DENKLEMİ İÇİN ADJOİNT OLMAYAN BAŞLANGIÇ-SINIR DEĞER PROBLEMİNİN REZİDÜ YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

(Yüksek Lisans Tezi)

Hazırlayan:
Uğur POLAT
070860002

Tez Danışmanı:
Yrd.Doç.Dr. Bahaddin SİNSOYSAL

İSTANBUL, 2009

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması esnasında gerekli yardım ve desteklerini esirgemeyen sayın hocalarım Yrd.Doç.Dr. Bahaddin SİNSOYSAL ile Prof. Dr. Mahir RESULOV'a ayrıca yüksek lisans dersi ve tez süresince kendilerini ihmal ettiğim eşim Sibel POLAT ve Kızım Zeynep POLAT'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İstanbul, 2009

Uğur POLAT

ÖZET

Fourier serisi metodu lineer ısı denkleminin çözülmesi için en önemli metotlardan birisidir. Bilindiği gibi karışık self-adjoint probleme karşılık gelen spektral problemin özdeğerleri ve bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar tam sistem oluşturmaktadır. Bu durumda herhangi bir sürekli fonksiyonun söz konusu özfonksiyonlar sistemine göre seri ayrılış formülleri geçerlidir. Bu da Fourier serisi metodunun uygulanabilmesinin temelini oluşturmaktadır.

Pratikte, self-adjoint olmayan sınır koşullu diferansiyel denklemlerle ifade edilen bir çok problem vardır. Bu durumda özfonksiyonlar tam sistem oluşturmaz ve Fourier yönteminin uygulanmasında zorluklar ortaya çıkar.

Tezde singüler kaynak fonksiyonlarına sahip lineer ısı denklemi için yüksek mertebeden türev içeren sınır koşulu karışık problemin çözümü incelenmiştir.

Tezin ikinci bölümünde diferansiyel operatörler teorisinden gereken alt yapı verilmiştir.

Son bölümde ise incelenen problemin gerçek çözümü sırasıyla Fourier ve rezidü yöntemleri yardımıyla elde edilmiştir.

ABSTRACT

The Residue Method of the Non Self-Adjoint Initial Boundary Value Problem of the Linear Heat Equation

The Fourier series method is one of the basic tools for a solution of the linear heat equation. As known, the spectral problem related with a mixed self-adjoint problem has real eigenvalues, and corresponding eigenfunctions of these eigenvalues make a complete system. In this case, the expansion formula of any continuous function of these eigenfunctions holds, that is fundamental in the application of the Fourier series method.

There are many problems which described by differential equations with non self-adjoint boundary conditions. In this case, the eigenfunctions are incomplete and the application of the Fourier method becomes difficult.

In the thesis, the linear heat equation with a singular source function subject to boundary condition involving the higher derivatives with respect to time coordinate is studied.

In the second section, the necessary mathematical backgrounds from a spectral theory of differential operators are introduced.

In the final section, the solution of the mentioned problem is found using the Fourier and Residue methods, respectively.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Kısmi türevli diferansiyel denklemler mühendislik ve bir çok bilim dallarında geniş şekilde kullanılmakta ve olayın fiziksel yapısını incelemek için en etkin bir araç olmaktadır. Bu tür denklemlerin çözümleri yardımıyla sıvı veya gaz dinamiğinde akışın parametrelerini ve diğer muhitle olan ilişkilerini sonuna kadar öğrenmek mümkündür. Deniz ve okyanus sularının atmosfer katı ile ilişkisi, yani ısı alış verişi hava sirkülasyonunun temelini teşkil eder. Bu nedenle büyük sularda yani okyanus ve denizlerde suyun akış dinamiğinin öğrenilmesi hem pratik hem de bilimsel önem taşımaktadır. Deniz ve okyanuslardaki suların akışı, yoğunluk (ρ), basınç (p), hız vektörü (u), bunların dışında termodinamik büyüklükler sıcaklık (T), birim kitledeki iç enerji (e) ve entropi (s) gibi parametreler yardımıyla ifade edilmektedir. Bazı durumlarda suyun fiziksel özelliklerini ifade eden diğer büyüklükler de (örneğin, suyun tuzluluk oranı) dikkate alınabilir. Deniz sularında yaşayan balık ve diğer canlı organizmaların yaşayabilmesi için deniz sularında tuzluluğun dinamik dağılımını bilmek hayati önem taşımaktadır.

Suyun hareketini ifade etmek için Euler yorumunu kullanırsak, yukarıda saydığımız tüm dinamik değişkenlerin t zaman ve r konum değişkenlerindeki dinamiğini incelemek yeterlidir.

Sıvı ortamında dışarıdan sıvı girişi veya dışarıya sıvı akışı olmadığı durumda kitlenin korunması kanunu

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.\rho \vec{u} = 0 \tag{1.1}$$

gibi süreksizlik denklemi olarak yazılmaktadır. Eğer $\rho = sabit$ olursa (1.1) denklemini

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla.\vec{u} = 0$$

olarak yazabiliriz. Burada

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}.\nabla = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + \vartheta\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$$

olmaktadır.

Sürekli sistemler için Newton'un II. kanunu

$$\rho.\frac{d\vec{u}}{dt} \equiv -\nabla p + \rho \nabla \varphi + \Im(\mathrm{u}) \tag{1.2}$$

olmaktadır. Yani Newton kanunu o demektir ki, birim hacimdeki kitlenin ivmeyle çarpımı, basıncın gradienti $\rho\nabla\varphi$ kitlesel kuvvet ve $\mathfrak{I}$ kuvvetinin toplamına eşit olmaktadır. Burada φ kitlesel kuvvetlerin oluşturduğu potansiyel fonksiyon olmaktadır. $\mathfrak{I}$ kuvveti ise genelde herhangi bir konservatif olmayan kuvvet olmaktadır, şimdiki durumda sıvının sürtünme kuvvetini göstermektedir. Newton sıvıları için (su ve hava gibi)

$$\Im = \mu\nabla^2\vec{u} + \frac{\mu}{3}\nabla(\nabla.\vec{u}) \tag{1.3}$$

Burada μ moleküler viskositayı göstermektedir.

Eğer yoğunluğun sabit olmadığı durumu dikkate alırsak, yukarıda yazdığımız (1.1), (1.2), (1.3) sistemleri tam sistem oluşturmaz; yani bilinmeyenlerin sayısı denklemlerin sayısından fazla olmaktadır. Sistemi tamamlamak için termodinamiğin II. kanunu da eklemek zorundayız. Termodinamiğin II. kanunu

$$\rho\frac{de}{dt} = -p\rho\frac{d}{dt}\rho^{-1} + k\nabla^2 T + \chi + \rho\,\mathrm{Q} \tag{1.4}$$

şeklinde ifade edilmektedir. Burada k ısı iletme katsayısı, Q dış kaynaklardan birim kitleye dahil olan sıcaklığın hızı, χ dispasyon hesabına oluşan enerji çok küçük olduğundan bunu dikkate almamak da mümkündür. Ama öyle bir akış türü vardır ki, mesela mağmanın akış dinamiğinde χ parametresinin rolünü dikkate almamak mümkün değildir.

s öz entropi parametresinin dahil edilmesi çoğu zaman kolaylık sağlamaktadır. Sistemin entropisi diğer fiziksel büyüklüklerle

$$T\Delta s = \Delta e = p\Delta\left(\frac{1}{\rho}\right) \tag{1.5}$$

ilişkisine sahiptir. Burada, Δs, Δe ve $\Delta\left(\frac{1}{\rho}\right)$ sırasıyla s, e ve $\frac{1}{\rho}$ büyüklüklerinin artımı olmaktadır.

Limit durumunda (1.5) denklemi

$$T\frac{ds}{dt} = \frac{de}{dt} + p\frac{d}{dt}\frac{1}{\rho} \tag{1.6}$$

olur. (1.6) nın dikkate alınmasıyla, (1.4) denklemi

$$T\frac{ds}{dt} = \frac{k}{\rho}\nabla^2 T + \mathrm{Q} \tag{1.7}$$

şeklini alır. Bu durumda sisteme yeni bir bilinmeyen T değişkeni dahil oldu ve sistemi tamlaştırmaktan dolayı, yani sistemdeki bilinmeyen sayısı ile denklem sayısını eşitlemek için

$$C_p \frac{dT}{dt} - \frac{T}{\rho}\alpha \frac{dp}{dt} = \frac{k}{\rho}\nabla^2 T + \mathrm{Q} \quad (1.8)$$

denklemini eklemek gerekmektedir. Bu denklemi içerirken ρ, $\rho = \rho(p,T)$ ve s, $s = s(p,T)$ fonksiyonu olarak ele alınmaktadır. Burada ki $\alpha = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_p$, $C_p = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p$ olmaktadır. Aynı zamanda $\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p$ termodinamik ilişkisi de dikkate alınmaktadır. Örneğin atmosferdeki kuru hava için bu termodinamik kural $\rho = \frac{\rho}{RT}$ şeklinde Boyle- Mariotte gaz kuralı şeklinde verilmektedir.

Öğrenilmek istenen fiziksel olayın karakterine bağlı olarak (1.1)-(1.8) denklemler sistemine uygun başlangıç ve sınır koşulları eklenerek çözümü araştırılır.

Görüldüğü gibi bu denklemler sistemi çok zor olduğundan, onları bu şekilde çözmek mümkün olmamaktadır. Bu nedenle, incelenmek istenen olaya hangi parametrenin etkisinin daha fazla olduğunu dikkate alarak, yalnız o büyüklüğün değişme dinamiği incelenir. Olayı az etkileyen büyüklükler dikkate alınmaz. Örneğin eğer deniz sularının üst ince katındaki sıcaklık değişimi incelenmek istenirse, yalnız sıcaklığa göre olan denklemi yani (1.8) denklemini çözmek yeterlidir. Dolayısıyla sistemde sadece T ye göre olan denklem kalacak şekilde, diğer denklemeler sistemden atılır.

Tezde deniz sularının üst ince katındaki sıcaklık dağılımı öğrenilmek istendiğinden denkleme dahil olan diğer parametreler uygun şekilde seçilmelidir. Bu durum tezin üçüncü bölümünde detaylı bir şekilde incelenecektir.

2. LİNEER DİFERANSİYEL OPERATÖRLER

2.1 Lineer Diferansiyel İfade ve Operatör

$C^{(n)}[a,b]$ ile herhangi bir $[a,b]$ aralığında, n. mertebe de dahil olmak üzere tüm sürekli diferansiyellenebilen fonksiyonlar uzayını gösterelim. a ve b noktalarındaki süreklilik ise, sırasıyla sağdan ve soldan süreklilik anlamına gelmektedir. $[a,b]$ de tanımlı, sadece sürekli fonksiyonlar uzayını $C^{(0)}[a,b]$ veya kısaca $C[a,b]$ ile göstereceğiz.

Aşağıdaki şekilde yazılmış ifadeyi

$$\ell\left(x,\frac{d}{dx}\right)y \equiv \ell y \equiv p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}y' + p_n(x)y = \sum_{k=0}^{n} p_k(x)y^{(n-k)} \quad (2.1)$$

göz önüne alalım. (2.1) ifadesindeki $p_i(x)$ fonksiyonlarının reel değişkene bağlı kompleks fonksiyonlar olduğunu varsayacağız, yani her bir fonksiyon $\varphi(x)=\varphi_*(x)+i\varphi_{**}(x)$, $i=\sqrt{-1}$ şeklinde olmaktadır. Ayrıca varsayalım ki, $p_i(x)$ fonksiyonları *n-i* , (*i=0,1,2,...,n*) mertebeden sürekli diferansiyellenebilen fonksiyonlardır. $p_k(x)\in C[a,b]$, $(k=\overline{0,n})$ ve $y(x)\in C^{(n)}[a,b]$ olduğu taktirde (2.1) operatörü $[a,b]$ de tanımlı, sürekli bir fonksiyona karşılık gelir. Diğer deyimle, $f(x)\in C[a,b]$ olmak üzere

$$\ell\left(x,\frac{d}{dx}\right)y = f(x) \quad (2.2)$$

dır.

Eğer (2.2) ifadesindeki $f(x)$ fonksiyonunu bilinen bir fonksiyon olarak kabul edersek, (2.2) denklemine n. mertebeden lineer diferansiyel denklem olarak bakabiliriz. Bu durumda, (2.2) denkleminin genel çözümünü araştıralım. Bunun için önce (2.2) ye karşılık gelen

$$\ell\left(x,\frac{d}{dx}\right)y = 0, \qquad p_0(x)\neq 0$$

homojen denklemini göz önüne alalım. Bu denklemi (2.1) ifadesini dikkate alarak açık şekilde aşağıdaki şekilde yazabiliriz

$$y^{(n)} + \frac{p_1(x)}{p_0(x)} y^{(n-1)} + ... + \frac{p_n(x)}{p_0(x)} y = 0 . \tag{2.3}$$

Bu denklemin katsayıları sürekli fonksiyon olmaktadır ve Cauchy-Picard teoremine göre denklemin temel fonksiyonlar sisteminin varlığını ispatlamak mümkündür. Temel çözümler sistemi farklı yollarla elde edilebilir. Örneğin, (2.3) denklemi için aşağıdaki başlangıç koşulları

$$y_i^{(j-1)}(a) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \qquad (i, j = \overline{1, n}) \tag{2.4}$$

verilerek söz konusu çözümleri elde etmek mümkündür. (2.4) ifadesinde *n* tane başlangıç koşulu vardır. Gerçekten de *i* yi sabit tutup, *j* yi ise 1 den *n* e kadar değiştirerek söz konusu koşulların birini elde edebiliriz. (2.3) denkleminin bu koşullar çerçevesindeki çözümleri tüm $[a,b]$ aralığında tanımlı ve tektirler. Söz konusu çözümleri $y_1, y_2, ..., y_n$ ile gösterelim. Bu çözümlere *fundamental* (temel) çözümler sistemi denir. Adi diferansiyel denklemler teorisinden bilindiği gibi fundemantal çözümler yardımıyla (2.3) denkleminin genel çözümü

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x)$$

olarak yazılır. Buna ek olarak (2.2) denkleminin genel çözümü ise

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x) + y^*(x) \tag{2.5}$$

şeklindedir. Fundamental çözümler sistemi bilindiği taktirde, (2.5) ifadesinde yer alan $y^*(x)$ i sabitin varyasyonu yöntemi ile elde etmek mümkündür.

Bizi (2.2) veya (2.3) denklemlerinin belli bir sınır koşullarını sağlayan çözümleri ilgilendirmektedir. $y_a, y'_a, ..., y_a^{(n-1)}$ ve $y_b, y'_b, ..., y_b^{(n-1)}$ ler $y, y', ..., y^{(n-1)}$ fonksiyonlarının $[a,b]$ aralığının uç noktalarındaki değerleri olsun ve $U_v(y)$ ile aşağıdaki lineer formu gösterelim

$$U_\nu(y) \equiv \sum_{s=1}^{n} \left\{ \alpha_{\nu s} y^{(s-1)}(a) + \beta_{\nu s} y^{(s-1)}(b) \right\}. \tag{2.6}$$

Eğer

$$U_\nu(y) = 0\,, \quad (\nu = \overline{1,m}) \tag{2.7}$$

gibi ifadeler verilirse, bunlara sınır koşulları denir. Burada $\alpha_{\nu s}$ ve $\beta_{\nu s}$ genelde kompleks sabitlerdir. Görüldüğü gibi, (2.7) sınır koşulları bilinmeyen fonksiyonun ve *m*. mertebeye kadar türevlerinin aralığın uç noktalarındaki değerlerini birbirine bağlamaktadır. Eğer herhangi bir $y(x)$ fonksiyonu (2.7) sınır koşullarının herbirini korursa, $c.y(x)$ de bu koşulların herbirini korur. Ayrıca, eğer $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ bu koşulların herbirini korursa $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ de korur. Nihayetinde özdeş olarak sıfıra eşit olan fonksiyon da bu koşulların her birini korumaktadır. Böylelikle, (2.7) koşulunu koruyan fonksiyonlar kümesi $C^{(n)}[a,b]$ nin alt uzayını oluşturur. D ile (2.7) koşulunu koruyan tüm $y \in C^{(n)}[a,b]$ fonksiyonlar kümesini gösterelim. Açıktır ki, $D \subset C^{(n)}[a,b]$ dır ve (2.7) koşulu olmazsa $D \equiv C^{(n)}[a,b]$ dır.

$\ell(y)$ diferansiyel ifadesinin ve D manifoldunun verildiğini varsayalım. $y \in D$ olan keyfi fonksiyona $f = \ell(y)$ yi karşılık getirelim. Bu *D* de tanımlı lineer operatör oluşturur. Söz konusu operatörü *L* ile gösterelim. Böylelikle, (2.2) lineer diferansiyel denklemi (2.7) koşulu ile birlikte *L* operatörünü oluşturur, yani

$$\begin{cases} \ell\left(x, \dfrac{d}{dx}\right) y = f(x), & (2.8) \\ U_\nu y = 0, \quad \nu = \overline{1,m} & (2.9) \end{cases}$$

dır. *D* bölgesine *L* lineer diferansiyel operatörünün tanım bölgesi denir. (2.6) ifadelerinin lineer bağımsız olması doğaldır. Çünkü, sınır koşullarının herhangi biri diğerlerinin lineer kombinasyonu şeklinde ifade edilebilirdir.

$$rank \begin{pmatrix} \alpha_{11},\ldots\alpha_{1n}, & \beta_{11},\ldots,\beta_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1},\ldots\alpha_{mn}, & \beta_{m1},\ldots\beta_{mn} \end{pmatrix} = m \tag{2.10}$$

olmaktadır. Açıktır ki, $m \le 2n$ dir ve aynı bir diferansiyel ifade, *m* sayıda sınır koşulları ile birlikte ele alındığında onlar farklı lineer diferansiyel operatörler doğurabilir. Bu operatörler birbirinden tanım bölgesi ile farklılaşır. Özel durumda, eğer sınır koşulları dikkate alınmazsa en geniş tanım bölgesi olan operatör alınır. Bu durumda tanım bölgesi $C^{(n)}[a,b]$ olur. Bu anlamda en dar tanım bölgesi olan operator $m=2n$ olduğunda ele alınır. Bu taktirde, sınır koşullarının katsayısından oluşturulan matris $2n$ boyutlu kare matris olur ve (2.10) koşulu o matrisin determinantının sıfırdan farklı olmasına dönüşür. O halde, (2.6) sınır koşullarına,

$$y(a),\ y'(a),\dots,y^{(n-1)}(a),\quad y(b),\ y'(b),\dots,y^{(n-1)}(b)$$

büyüklüklerine göre homojen lineer cebirsel denklemler sistemi gibi bakarsak, sistemin determinantı sıfırdan farklı olduğundan onun yalnız trivial çözümü olmaktadır. Bu ise şu anlama gelir: (2.6) ifadesi $m=2n$ olduğunda yalnız ve yalnız

$$y_a = y_a{}' =,\dots,= y_a^{(n-1)} = y_b = y_b{}' = \dots = y_b^{(n-1)} = 0 \tag{2.11}$$

olduğu durumda geçerlidir.

2.2 Lagrange Anlamında Adjoint Diferansiyel İfade

$y(x)\,,z(x)\in C[a,b]$ keyfi iki skaler fonksiyon olmak üzere aşağıdaki gibi iç çarpım tanımlayalım

$$(y,z)=\int_a^b y(x)\overline{z}(x)\,dx\,. \tag{2.12}$$

Burada $\overline{z}$, z nin eşleniğini göstermektedir; yani $z(x)=z_1(x)+iz_2(x)$ ise $\overline{z}(x)=z_1(x)-iz_2(x)$ dır. (2.12) eşitliğinde tanımlanan iç çarpım aşağıdaki özellikleri sağlar:

1. $(y,z)=\overline{(z,y)}$,
2. $(\lambda y,z)=\lambda(y,z)$,
3. $(y,\lambda z)=\overline{\lambda}(y,z)$,

4. $\left(y,\alpha\, z(x)+\beta\, q(x)\right)=\overline{\alpha}\left(y,z\right)+\overline{\beta}\left(y,q\right)$.

Tanım 1. Eğer $\left(y,z\right)=0$, ise *y* ve *z* fonksiyonları birbirine ortagonaldir(diktir) denir.

İç çarpım kavramını kullanarak lineer diferansiyel ifade için Lagrange anlamında adjoint diferansiyel ifadeyi açıklayalım.

Varsayalım ki, $y(x),\ z(x)\in C^{(n)}[a,b]$ olsun. $(\ell y,z)$ ifadesini göz önüne alalım. Burada $\ell y=\sum\limits_{k=0}^{n} p_k(x)y^{(n-k)}(x)$ ve $p_k(x)$ fonksiyonları *n-k* mertebeden sürekli diferansiyellenebilen fonksiyonlardır. Kısmi integrasyon formülünü kullanarak $(\ell y,z)$ iç çarpımını, integral altında *y* fonksiyonunu türev işaretinden kurtaracak şekilde dönüştürelim. Bu durumda katsayılar ve $z(x)$ fonksiyonu türev işareti altına girer. Gerçekten

$$\left(\ell y,z\right)=\int\limits_a^b\sum_{k=0}^{n} p_k(x)\,y^{(n-k)}(x)\,\overline{z}(x)dx$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\int\limits_a^b p_k(x)\,y^{(n-k)}(x)\,\overline{z}(x)dx\,. \tag{2.13}$$

olup, (2.13) e kısmi integrasyon formulunu uygularsak

$$\int\limits_a^b p_k(x)y^{(n-k)}(x)\overline{z}(x)dx=y^{(n-k-1)}(x)\ \left[p_k(x)\overline{z}(x)\right]\Big|_a^b-\int\limits_a^b y^{(n-k-1)}(x)\ \left[p_k(x)\overline{z}(x)\right]'dx$$

$$=\left\{y^{(n-k-1)}(x)\left[p_k(x)\overline{z}(x)\right]\right\}\Big|_a^b-\left\{y^{(n-k-2)}(x)\left[p_k(x)\overline{z}(x)\right]'\right\}\Big|_a^b+\left\{y^{(n-k-3)}(x)\left[P_k(x)\overline{z}(x)\right]''\right\}\Big|_a^b$$

$$+\ldots+(-1)^{n-k-1}\left\{y(x)\left[p_k(x)\overline{z}(x)\right]^{(n-k-1)}\right\}\Big|_a^b+(-1)^{n-k}\int\limits_a^b y(x)\left[\overline{p_k(x)\,z(x)}\right]^{(n-k)}dx \tag{2.14}$$

elde ederiz. Şimdi aşağıdaki notasyonları göz önüne alalım

$$\eta=\left\{y(a),y'(a),\ldots,y^{(n-1)}(a),y(b),y'(b),\ldots,y^{(n-1)}(b)\right\}$$

$$\xi = \{z(a), z'(a), ..., z^{(n-1)}(a), z(b), z'(b), ..., z^{(n-1)}(b)\}.$$

η ve ξ nin $2n$ boyutlu vektör uzayının elemanları olduğu açıktır. (2.14) ifadesinin sağ tarafındaki integral dışında kalan terimlerin her biri η nın belli bir koordinatı ile ξ nin belli koordinatlarının bilinen bir sayıyla çarpımından oluşmaktadır. Bu tür ifadelere bilineer fomlar denir. (2.14) ifadesini *k* ya göre 0 dan *n* e kadar toplarsak

$$(\ell y, z) = \beta(\eta, \xi) + \int_a^b y(x)\overline{\ell^*(z)}dx \tag{2.15}$$

elde ederiz. Burada,

$$\ell^* z \equiv \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\left[\overline{p_k(x)}z(x)\right]^{(n-k)} = (-1)^n\left[\overline{p_0(x)}z(x)\right]^{(n)} +$$

$$+(-1)^{n-1}\left[\overline{p_1(x)}z(x)\right]^{(n-1)} + \overline{p_n(x)}z(x) \tag{2.16}$$

olmaktadır. (2.16) nın sağ tarafındaki çarpımlarının türevlerini Leibnitz kuralı ile

$$\beta(y,z) = y\left\{a_{n-1}z - (a_{n-2}z)' + ... + (-1)^{n-1}(a_0\, z)^{(n-1)}\right\} +$$
$$+ y'\left\{a_{n-2}z - (a_{n-3}z)' + ... + (-1)^{n-2}(a_0\, z)^{(n-2)}\right\} + ... + y^{(n-2)}\left\{a_1 z - (a_0\, z)'\right\} + y^{(n-1)}a_0\, z$$

hesaplayıp alınan sonucu gruplaştırıp $\ell^* z$ ifadesini de ℓ lineer diferansiyel ifadesi gibi yazabiliriz. Bu yolla elde edilen ℓ^* lineer diferansiyel ifadesine, ℓ lineer difarensiyel ifadesine Lagrange anlamında adjoint lineer diferansiyel ifade denir. $(\ell^*)^* = \ell$ olduğu açıktır ve bu işlem aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$(\lambda\, \ell)^* = \overline{\lambda}\, \ell^*,$$

$$(\ell_1 + \ell_2)^* = \ell_1^* + \ell_2^*.$$

Tanım 2. Eğer $\ell^* \equiv \ell$ ise ℓ^* a kendi kendine (self) adjoint operatör denir.

2.3 Adjoint Sınır Koşulları

Yukarda verilen notasyonlar çerçevesinde (2.15) aşağıdaki şekilde yazılabilir

$$(\ell y, z) = \beta(\eta, \xi) + (y, \ell^* z). \tag{2.17}$$

Bildiğimiz gibi $\beta(\eta, \xi)$, η ve ξ vektörlerine göre bilineer formdur. Bilineer formu genel şekilde aşağıdaki gibi yazmak mümkündür

$$\beta(\eta, \xi) = \sum_{k,s=1}^{q} a_{ks} \eta_k \overline{\xi_s}\ . \tag{2.18}$$

Burada a_{ks} -ler katsayılar, η_k ve ξ_s ise değişkenlerdir.

Kare formların bilineer formların özel durumu olduğu açıktır. (2.18) ifadesinin katsayılarından oluşan matrisin Δ determinantı sıfırdan farklı olduğunda ona dejenere olmayan bilineer form denir, bu durumda

$$\Delta = \det \left\{ \left\| a_{ks} \right\|_{k,s=1}^{q} \right\} \neq 0 \tag{2.19}$$

dır. Şimdi, (2.17) ifadesindeki $\beta(\eta, \xi)$ bilineer formunun dejenere olmadığını gösterelim. (2.14) den görüldüğü gibi, $\beta(\eta, \xi)$ formunda η ve ξ nin tüm koordinatları birlikte yer almazlar. Ona göre de $\beta(\eta, \xi)$ nin katsayılarından oluşturulan matris

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -\Delta(a) & 0 \\ 0 & \Delta(b) \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

şeklinde özel bir matristir. Burada,

$$\Delta(x) = \begin{pmatrix} & & & & (-1)^n p_0(x) \\ & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & & p_0(x) & & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \\ p_0(x) & & & & \end{pmatrix}$$

$n \times n$ boyutlu kare matristir. (2.20) ifadesindeki matrislerin her biri $n \times n$ boyutlu matris olduğundan genelde A matrisi $2n \times 2n$ boyutlu kare matris olur ve Laplace teoremine göre

$$\det\{\|\mathrm{A}\|\} \neq 0 \tag{2.21}$$

dır. (2.21) den görüldüğü üzere, (2.17) ifadesindeki $\beta(\eta, \xi)$ gerçekten de dejenere olmayan bilineer formdur.

Şimdi, yukarıda sözünü ettiğimiz sınır koşullarına geri dönelim

$$U_\nu y = \sum_{s=1}^{n} \left\{ \alpha_{\nu s} y^{(s-1)}(a) + \beta_{\nu s} y^{(s-1)}(b) \right\}, \ \ (\nu = \overline{1,m}) . \tag{2.22}$$

$m < 2n$ olduğunda (2.22) ifadelerinin katsayılarından oluşturulan matrise yeni satırlar ilave ederek $2n$ boyutlu kare matrise tamamlayalım öyle ki, ele aldığımız matrisin determinantı sıfırdan farklı olsun. Bu taktirde

$$\sum_{s=1}^{n} \left\{ \alpha_{\nu s} y^{(s-1)}(a) + \beta_{\nu s} y^{(s-1)}(b) \right\} = U_\nu y , \ \ (\nu = \overline{1,2n}) \tag{2.23}$$

dır ve

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_{11} \ldots \alpha_{1n} & \beta_{11} \ldots \beta_{1n} \\ \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \alpha_{m1} \ldots \alpha_{mn} & \beta_{m1} \ldots \beta_{mn} \\ \alpha_{m+1,1} \ldots \alpha_{m+1,n} & \beta_{m+1,1} \ldots \beta_{m+1,n} \\ \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \alpha_{2m,1} \ldots \alpha_{2m,n} & \beta_{2m,1} \ldots \beta_{2m,n} \end{pmatrix} \neq 0 \tag{2.24}$$

olur. (2.23) sistemine η vektörünün koordinatlrarına göre lineer cebirsel denklemler sistemi gibi bakılabilir. Burada $U_\nu y$ sembollerini ise, şimdilik bilinen sağ taraf gibi kabul edelim. Sistemin determinantı sıfırdan farklı olduğundan, bu sistemin tek çözümü Cramer formülü ile ele alınabilir. Cramer formüllerinde her defa paydaki determinantın sağ tarafında oluşan sütüna göre ayrılışını yazarsak, nihayetinde η vektörünün her bir bulunmuş koordinatları $U_1 y, U_2 y, \ldots, U_{2n} y$ büyüklüklerine göre lineer form olarak alınır. Şimdi, bu ele aldıklarımızı yukarıdaki (2.17) ifadesinde $\beta(\eta, \xi)$ bilineer formunda yerine yazıp ele alınan ifadeyi aşağıdaki şekilde gruplaştıralım

$$\left(\ell y,z\right)=U_1 y\overline{V_{2n}z}+U_2 y\overline{V_{2n-1}z}+...+U_m y\overline{V_{2n-m+1}z}+U_{m+1}y\overline{V_{2n-m}z}+...+U_{2n}y\overline{V_1 z}+(y,\ell^* z) \quad (2.25)$$

$V_k z$ lerin her birinin $\{z(a), z'(a),..., z^{(n-1)}(a), z(b), z'(b),..., z^{(n-1)}(b)\}$ vektör koordinatlarına göre lineer homojen bir form olduğunu göstermek mümkündür. $\beta(\eta,\xi)$ dejenere olmadığından bu özellik (2.25) ifadesinde de korunacaktır.

$y \in D(L)$ olduğunu varsayalım. Bu $U_\nu y = 0$, $(\nu = \overline{1,m})$ anlamına gelir, yani (2.25) in sağ tarafında ilk m sayıda denklemlerde z nin nasıl olacağından bağımsız olarak sıfıra dönüşür. Böylelikle, (2.25) aşağıdaki şekile indirgenir

$$\left(\ell y,z\right)=U_{m+1}y\overline{V_{2n-m}z}+...+U_{2n}y\overline{V_1 z}+\left(y,\ell^* z\right). \quad (2.26)$$

Sonraki amaçlarımız için integralin dışında kalan tüm terimlerin sıfıra eşit olması gerekmektedir. Bundan dolayı, $z(x)$ için aşağıdaki sınır koşullarının korunduğunu varsayalım

$$V_k z = 0, \quad k = \overline{1,2n-m}. \quad (2.27)$$

Bu durumda (2.26)

$$\left(Ly,z\right)=\left(y,L^* z\right) \quad (2.28)$$

şeklini alır. (2.27) ye ve onlarla denk olan her türlü lineer sınır koşullarına, (2.6) sınır koşullarına adjoint sınır koşulları denir. ℓ^* lineer diferansiyel ifadesi ve (2.27) sınır koşulunun oluşturduğu lineer diferansiyel operatöre ise, L operatörüne adjoint lineer diferansiyel operatör denir ve L^* ile ifade edilir. (2.28) eşitliğinde bulunan L^* da bu anlamdadır. L^* operatörünün $D(L^*)$ tanım bölgesi (2.27) sınır koşullarını koruyan fonksiyonların $C^{(n)}$ de oluşmuş alt uzayıdır. Adjoint sınır koşullarının oluşturulma prosesinden görüldüğü gibi, onlar yalnız (2.6) nın değil, aynı zamanda lineer diferansiyel ifadenin katsayılarına da bağımlıdır. (2.28) e bazen Green formülü de denir. Eğer (2.27) sınır koşulları ile (2.6) koşulu eşitse onlara self adjoint sınır koşulları denir. Self adjoint lineeer diferansiyel ifade ve self adjoint lineer sınır koşullarının doğurduğu L operatörüne self adjoint lineer diferansiyel operatör denir ve $L = L^*$ şeklide gösterilir. Bu halde Green formülü aşağıdaki şekli alır

$$\left(Ly,z\right)=\left(y,Lz\right). \quad (2.29)$$

2.4 Lineer Diferansiyel Operatörlerin Özdeğerleri ve Özfonksiyonları

Bilindiği gibi, sonlu uzunluğa sahip telin titreşimini veya sonlu uzunluklu çubuktaki ısı dağılımı problemlerini Fourier yöntemiyle çözerken, esas problemi iki yardımcı probleme indirgeriz. Bu problemlerden birini aşağıdaki şekilde yazılmış Sturm-Luoville problemi oluşturur

$$y^{u} - \lambda y = 0\,, \tag{2.30}$$

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ y(\ell) &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{2.31}$$

Burada, λ parametredir ve bizi bu problemin trivial olmayan çözümleri ilgilendirmektedir.

Tanım 3. Eğer λ nın herhangi bir değerinde (2.30), (2.31) probleminin trivial olmayan çözümü mevcutsa, λ nın bu değerine (2.30), (2.31) probleminin özdeğeri denir.

Tanım 4. (2.30), (2.31) problemindeki λ özdeğerine karşılık gelen çözüme ise özfonksiyon denir.

Eğer L ile (2.30), (2.31) probleminin oluşturduğu lineer diferansiyel operatörü gösterirsek (2.30), (2.31) problemi

$$Ly = \lambda y \tag{2.32}$$

şeklinde yazılabilir. Böyle bir problemi genel durum içinde incelemek mümkündür ve bu tür problemlerin incelenmesi kısmi türevli diferansiyel denklemler için yazılmış sınır değer problemlerinin çözümünde çok önem taşımaktadır. Bu nedenle aşağıdaki şekilde yazılmış daha genel problemi gözönüne alalım

$$L\left(x, \frac{d}{dx}\right) y = \lambda y\,. \tag{2.33}$$

(2.33) yi açık şekilde yazarsak

$$\ell\left(x, \frac{d}{dx}\right) y = \lambda y\,, \tag{2.34}$$

$$U_{\nu} y = 0, \quad (\nu = \overline{1, m}) \tag{2.35}$$

olur. Diğer bir deyimle, bir parametreye sahip (2.34) adi diferansiyel denklemi için yazılmış sınır değer probleminin incelenmesi gerekmektedir. Parametrenin her bir değerinde trivial çözüm vardır. Trivial olmayan çözümü, yani sıfırdan farklı özdeğer ve özfonksiyonların bulunmasını detaylı şekilde inceleyelim. Bu nedenle (2.34) ü

$$y^{(n)} + \frac{p_1(x)}{p_0(x)} y^{(n-1)} + ... + \frac{p_n(x)\lambda y}{p_0(x)} = 0 \tag{2.36}$$

şeklinde yazalım. (2.36) nün

$$y_i^{(j-1)} \Big|_{x=a} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} , \qquad (i, j = \overline{1, n}) \tag{2.37}$$

başlangıç koşulunu sağlayan çözümlerinin varlığı açıktır. Bu çözümleri sırasıyla $y_1(x,\lambda), y_2(x,\lambda),..., y_n(x,\lambda)$ ile gösterelim. (2.36) denkleminin katsayıları λ ya göre tam analitik fonksiyonlardır ve Puancare teoremine göre $y_1(x,\lambda), y_2(x,\lambda),..., y_n(x,\lambda)$ çözümlerinin her biri λ ya göre tam analitik fonksiyonlardır. (2.34) ün genel çözümü

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \; y_k(x,\lambda) \tag{2.38}$$

dır. (2.34), (2.35) in çözümünü elde etmek için (2.38) ifadesi (2.35) de yerine konulursa

$$\sum_{k=1}^{n} c_k U_\nu y_k(\lambda) = 0 \,, \quad \nu = \overline{1, m} \tag{2.39}$$

elde edilir. Burada $U_\nu y_k(\lambda)$ ν. sınır koşulunun k. fundamental çözüme uygulanmasının sonucunu göstermektedir, yani

$$U_\nu \; y_k(\lambda) = \sum_{s=1}^{n} \left\{ \alpha_{ks} \frac{d^{s-1} y_k}{dx^{s-1}} \Big|_{x=a} + \beta_{ks} \frac{d^{s-1} y_k}{dx^{s-1}} \Big|_{x=b} \right\}$$

dır. $U_\nu y_k(\lambda)$ ların herbiri tam analitik fonksiyon olmaktadır. (2.39) sistemi c_k lara göre lineer homojen cebirsel denklemler sistemi oluşturur. Bilinmeyenlerin sayısı denklemlerin sayısı ile aynı değildir. (2.39) un katsayılarından oluşan matrisi aşağıdaki şekilde gösterelim

$$U(\lambda)=\begin{pmatrix} U_1y_1(\lambda) & \dots & U_1y_n(\lambda) \\ U_2y_1(\lambda) & \dots & U_2y_n(\lambda) \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ U_my_1(\lambda) & \dots & U_my_n(\lambda) \end{pmatrix}. \tag{2.40}$$

$rankU(\lambda)=r$ olsun. (2.39) un trivial olmayan çözümlerinin varlığı için

$$r<n \tag{2.41}$$

olmalıdır. Ayrı ayrı durumları inceleyelim.

I. $m<n$ olsun. Bu durumda λ nın herhangi bir değerinde mutlaka $r<n$ olur, yani (2.39) sisteminin trivial olmayan çözümü her zaman vardır. Bu çözümü (2.38) da yerine yazıp (2.33) ve (2.34) ün trivial olmayan çözümünü elde edebiliriz. Diğer deyimle, bu durumda λ nın her bir değeri L operatörünün özdeğeri olmaktadır.

II. $m=n$ olsun. Bu durumda $U(\lambda)$ matrisi $n\times n$ boyutlu kare matris olmaktadır. (2.41) koşulu söz konusu matrisin determinantının sıfıra eşit olmasına neden olur, yani

$$\det U(\lambda)=0 \tag{2.42}$$

olur. $\det U(\lambda)$ nın kendisi de λ ya göre tam analitik fonksiyon olmaktadır ve burada çeşitli durumlar olabilir:

II_1 $\Delta(\lambda)\equiv 0$ olsun.

$$\Delta(\lambda)=\det U(\lambda). \tag{2.43}$$

Bu durumda açıktır ki, yine de λ nın her bir değeri L operatorünün özdeğerleri olmaktadır.

II_2 $\Delta(\lambda)\neq 0$ olsun. Bu durumda (2.41) un ayrı ayrı sıfırları olabilir. Daha net bir şekilde ifade edersek bilindiği gibi tam analitik fonksiyon özdeş olarak sıfıra eşit değilse onun en fazla sayılabilir sayıda sıfırları olabilir. Bu sıfırlar dizisi kompleks düzlemin hiç bir sonlu kısmında limit noktasına sahip olamaz. Bu durumda söz konusu sıfırları onların modüllerinin artma sırasına göre aşağıdaki şekilde dizelim

$$|\lambda_1|<|\lambda_2|<|\lambda_3|<\dots . \tag{2.44}$$

$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\dots,\lambda_k,\dots$ noktalarından herhangi birini (2.39) de yerine yazarsak alınan sistemin determinatı sıfıra eşit olur ve bundan dolayı sistemin trivial olmayan çözümü bulunur. Bu çözümü (2.38) da yerine yazarak uygun özfonksiyonu da elde edebiliriz.

III. $m > n$ olsun. Bu durumda (2.40) matrisi yine de dikdörtgen şeklinde bir matrise dönüşür. (2.41) u göz önüne alalım. λ nın özdeğer olması için *U* matrisinden oluşturulan mümkün olabilen tüm $n \times n$ boyutlu determinantlar sıfıra eşit olmalıdır. Burada da iki durum olabilir:

III_1 $U(\lambda)$ matrisinden bilinen yolla düzeltilmiş tüm $n \times n$ boyutlu determinantlar özdeş olarak sıfıra eşit olur. Bu durumda yine de λ nın herhangi bir kompleks değeri *L* operatörünün özdeğeri olur.

III_2 $U(\lambda)$ matrisinin $n \times n$ determinantlarının içerisinde hiç olmazsa bir tane sıfıra özdeş olmayanı vardır. Açıktır ki, özdeğerler söz konusu determinantın sıfırları içerisinde olabilir. Ayrıca da bu sıfırların her birisi geride kalan tüm $n \times n$ determinantların sıfırı (yani özdeğerleri) olmalıdır. Eğer herhangi bir λ_k bu tür seçilmiş bir determinantın sıfırı oluyorsa, onu (2.39) nin uygun denklemler grubunda yerine yazdığımızda aldığımız sistemin determinantı sıfıra eşit olur. Buradan c_k ları trivial olmayan şekilde elde edebiliriz. Ele aldığımız sistemin diğer denklemleri de korunur, çünkü λ_k da diğer $n \times n$ determinantın her birini sıfıra dönüştürür. Açıktır ki, bu durumda da *L* operatörünün sayılabilir sayıda özdeğerleri vardır ve bunlar da kompleks düzlemin sonlu kısmında limite sahip olamaz.

2.5 Lineer Adi Diferansiyel Denklemler İçin Green Fonksiyonu

Aşağıdaki problemi göz önüne alalım

$$Ly = f(x), \tag{2.45}$$

veya

$$\ell y = f(x), \tag{2.46}$$

$$U_\nu y = 0, \quad (\nu = \overline{1,n}). \tag{2.47}$$

(2.46) ye karşılık gelen homojen denklemi yazalım

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = 0. \tag{2.48}$$

Burada $p_0(x) \neq 0$ ve $p_i(x) \in C$, $(i = 0,...,n)$ dir. (2.46) nin fundamental çözümler sistemini $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ diye gösterelim. Diferansiyel denklemler teorisinden bilindiği gibi, (2.46) denkleminin genel çözümü

$$y=\sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x) \tag{2.49}$$

şeklindedir. Burada c_i ler sabitler olmaktadır. Sabitin varyasyonu yöntemini kullanarak (2.45) in genel çözümünü aşağıdaki gibi arayalım

$$y(x)=\sum_{k=1}^{n} c_k(x) y_k(x). \tag{2.50}$$

Burada, $c_k(x)$ ler şimdilik bilinmeyen fonksiyonlardır. Bu bilinmeyen fonksiyonları öyle seçelim ki, (2.50) ile tanımlanan $y(x)$ ifadesi (2.45) in de genel çözümü olsun. (2.50) ifadesinin birinci türevini alalım

$$y'(x)=\sum_{k=1}^{n} c_k(x) y_k{}'(x)+\sum_{k=1}^{n} c_k{}'(x) y_k(x)$$

ve $c_k(x)$ leri öyle seçelim ki,

$$\sum_{k=1}^{n} c_k{}'(x) y_k(x)=0 \tag{2.51}$$

eşitliği korunsun. (2.51) i dikkate alarak ikinci türevi

$$y''(x)=\sum_{k=1}^{n} c_k(x) y_k{}''(x)+\sum_{k=1}^{n} c_k{}'(x) y_k{}'(x)$$

olarak buluruz ve burada

$$\sum_{k=1}^{n} c_k{}'(x) y_k{}'(x)=0 \tag{2.52}$$

eşitliğinin korunduğunu varsayalım. Bu işlemleri (n-1) defa yaparsak

$$y^{(n-1)}(x)=\sum_{k=1}^{n} c_k(x) y_k^{(n-1)}(x)+\sum_{k=1}^{n} c_k{}'(x) y_k^{n-2}(x)$$

ve

$$\sum_{k=1}^{n} c_k{}'(x) y_k^{(n-2)}(x)=0 \tag{2.53}$$

elde ederiz. Bunları dikkate alarak

$$y^{(n)}(x)=\sum_{k=1}^{n} c_k'(x)y_k^{(n-1)}(x)+\sum_{k=1}^{n} c_k(x)y_k^{(n)}(x) \tag{2.54}$$

elde ederiz. Elde ettiğimiz türevleri (2.46) de yerine yazdıktan sonra bazı işlemleri yaparak

$$\sum_{k=1}^{n} c_k(x)y_k + p_0(x)\sum_{k=1}^{n} c_k'(x)y_k^{(n-1)}(x)= f(x) \tag{2.55}$$

alırız. (2.55) denklemini (2.51), (2.52) ve (2.53) ile birlikte yazarsak c_k' bilinmeyenlerini elde etmek için aşağıdaki cebirsel denklemler sistemini elde ederiz

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{n} c_k'(x)y_k(x)=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \sum_{k=1}^{n} c_k'(x)y_k^{(n-2)}(x)=0,\\ \sum_{k=1}^{n} c_k'(x)y_k^{(n-1)}(x)=\frac{f(x)}{p_0(x)}.\end{gathered} \tag{2.56}$$

Söz konusu cebirsel denklemler sisteminin determinantı fundamental çözümlerden oluşan

$$w(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x)\\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x)\\ \dots & \dots & \dots\\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix}$$

Wronski determinantı olmaktadır. (2.56) cebirsel denklemler sisteminin çözümünü Cramer yöntemi ile

$$c_k'(x)=\frac{w_{nk}(x)}{w(x)}\frac{f(x)}{p_0(x)}, \quad k=\overline{1,n} \tag{2.57}$$

şeklinde elde etmek mümkündür. Burada w_{nk} determinantı $w(x)$ in uygun elemanının cebirsel tümleyicisidir. (2.57) yi önce *a* dan *x* e kadar integrallersek

$$c_k(x)=c_{k_1}+\int_a^x \frac{w_{nk}(\xi)}{w(\xi)}\frac{f(\xi)}{p_0(\xi)}d\xi \tag{2.58}$$

elde ederiz. (2.58) i (2.50) de yerine yazarsak

$$y(x)=\sum_{k=1}^{n}c_k y_k(x)+\sum_{k=1}^{n}y_k(x)\int_a^x \frac{w_{nk}(\xi)}{w(\xi)}\frac{f(\xi)}{p_0(\xi)}d\xi \tag{2.59}$$

olur. Bu kez (2.57) ifadesini b den x e kadar integrallersek, $y(x)$ çözümü için

$$\mathrm{y}(x)=\sum_{k=1}^{n}c_{k_2}y_k(x)+\sum_{k=1}^{n}y_k(x)\int_b^x \frac{w_{k_n}(\xi)f(\xi)}{w(\xi)P_0(\xi)}d\xi \tag{2.60}$$

bulunur. (2.59) ve (2.60) ifadelerini toplayıp ikiye böler ve aşağıdaki notasyonları içerirsek

$$c_k=\frac{c_{k_1}+c_{k_2}}{2},$$

$$g(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}y_k(x)w_{nk}(\xi)}{2w(\xi)p_0(\xi)}, & a\le\xi\le x\le b\\[2ex] -\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}y_k(x)w_{nk}(\xi)}{2w(\xi)p_0(\xi)}, & a\le x\le\xi\le b\end{cases} \tag{2.61}$$

bu notasyonlar çerçevesinde (2.45) in genel çözümünü

$$y(x)=\sum_{k=1}^{n}c_k y_k(x)+\int_a^b g(x,\xi)f(\xi)d\xi \tag{2.62}$$

şeklinde elde ederiz. Görüldüğü gibi, (2.45) in genel çözümü uygun homojen denklemin genel çözümü ile kendinin bir özel çözümünün toplamı şeklindedir. Söz konusu özel çözüm (2.62) ifadesindeki ikinci integraldir. (2.61) ile tanımlanan $g(x,\xi)$ fonksiyonuna (2.45) denkleminin Cauchy fonksiyonu da denir. Bu fonksiyon aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1^0. $[a,\xi)$ ve $(\xi,b]$ yarı aralıklarının her birinde x e göre homojen (2.46) denklemini korur. (2.61) den görüldüğü gibi bu yarı aralıkların her birinde $g(x,\xi)$ fonksiyonu $y_k(x)$

fundamental çözümlerinin belirli lineer kombinasyonu şeklindedir ve buradan da birinci özellik ispatlanmış olur.

2^0. $g(x,\xi)$ nin x e göre $(n-2)$. mertebeye kadar türevleri $[a,b]$ aralığında mevcuttur ve sürekli fonksiyonlardır. Şu var ki, yalnız $x=\xi$ noktasında kontrole ihtiyaç duyulmaktadır. Gerçekten de, (2.61) ifadesinde $x=\xi$ ye sağdan ve soldan yaklaşarak limite geçsek her defasında payda $\sum_{k=1}^{n} y_k'(\xi)w_{nk}(\xi)$ alınır. Bu ise Wronski determinantı $w(\xi)$ de birinci satır elemanlarının sonuncu satırın uygun elemanlarının cebirsel tümleyicilerine çarpımı demektir ve sıfıra eşittir. Şimdi (2.61) in her iki tarafından x e göre türev alalım bu türevler sağ tarafta $y(x)$ ler olarak karşımıza çıkar. Şimdi bu iki tarafta $x=\xi$ ye uygun kaidede yaklaşmayla limite geçsek, bu defa paydada $\sum_{k=1}^{n} y_k'(\xi)w_{nk}(\xi)$ şeklinde bir toplam karşımıza çıkar. Buradaki $w(\xi)$ de ikinci satır elmanlarının sonuncu satır elemanlarının cebirsel tümleyicilerinin çarpımının toplamı olduğundan sıfıra eşittir. Bu işlemleri $(n-2)$. mertebeden türeve kadar devam ettirebiliriz ve her defa sağ ve sol limitlerin değerlerini sıfır olarak ele alırız.

3^0. $g(x,\xi)$ fonksiyonunun x e göre $(n-1)$. mertebeden türevi $x=\xi$ noktasında aşağıdaki süreksizliğe sahiptir

$$\frac{\partial^{n-1}g(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}\Big|_{x=\xi+0}-\frac{\partial^{n-1}\zeta(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}\Big|_{x=\xi-0}=\frac{1}{p_0(\xi)}.$$

Gerçekten de (2.61) in sağ tarafında x e göre $(n-1)$. mertebeden türev alsak bu türev işareti $y_k(x)$ in üzerinde meydana çıkar. Sonda ise x i $x=\xi$ ye sağdan ve soldan yakınlaştırmakla limite geçsek her iki ifadede $y^{(n-1)}(\xi)$ meydana gelir ve her iki paydadaki ifade sadece olarak $w(\xi)$ determinantının sonuncu satır elemanlarına göre açılışını verir. Pay ve paydada aynı $w(\xi)$ bulunduğundan solda birinci ifade $\frac{1}{p_0(\xi)}$ ikincisi ise $-\frac{1}{2p_0(\xi)}$ şekline dönüşür. Bunların farkı $\frac{1}{p_0(\xi)}$ olur.

(2.45) sınır değer probleminin çözümünü elde etmek için c_k sabitlerini öyle seçelim ki, (2.47) sınır koşullarının hepsi korunsun. Bilindiği gibi, (2.47) de bilinmeyen fonksiyonun en fazla $(n-1)$. mertebeye kadar türevleri iştirak eder ve yukardaki 2 ve 3.

özelliklere göre sınır koşulundaki operatörlerini direkt olarak (2.62) integralinin altına x e göre $g(x,\xi)$ ye uygulama mümkündür. Böylelikle, (2.62) yı (2.47) de yerine yazarsak

$$\sum_{k=1}^{n} c_k U_\nu y_k = -\int_a^b U_\nu(x) g . f(\xi) d\xi, \quad (\nu = \overline{1,n}) \tag{2.63}$$

elde ederiz. Burada, $U_\nu(x)g$ ile sınır koşulu operatörünün g fonksiyonuna x değişkenine göre uygulandığı gösterilmektedir.

$$\Delta = \begin{vmatrix} U_1 y_1 \dots U_1 y_n \\ U_2 y_1 \dots U_2 y_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ U_n y_1 \dots U_n y_n \end{vmatrix} \tag{2.64}$$

determinantını göz önüne alalım ve varsayalım ki,

$$\Delta \neq 0 \tag{2.65}$$

olsun. Bu koşullar çerçevesinde (2.63) ün tek bir çözümü vardır ve bu çözümler Cramer yöntemiyle aşağıdaki şekilde ifade edilir

$$c_k = -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} U_1 y_1 & U_1 y_2 & \dots & U_1 y_{k-1} \int_a^b U_{1x} g(x,\xi) f(\xi) d\xi & U_1 y_{k+1} & \dots & U_1 y_n \\ U_2 y_1 & U_2 y_2 & \dots & U_2 y_{k-1} \int_a^b U_{2x} g(x,\xi) f(\xi) d\xi & U_2 y_{k+1} & \dots & U_2 y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_n y_1 & U_n y_2 & \dots & U_n y_{k-1} \int_a^b U_{nx} g(x,\xi) f(\xi) d\xi & U_n y_{k+1} & \dots & U_n y_n \end{vmatrix}.$$

Δ nın başka sütunlarında ξ ye bağımlılık olmadığına göre c_k ları

$$c_k = -\frac{1}{\Delta} \int_a^b \begin{vmatrix} U_1 y_1 & \dots & U_1 y_{k-1} U_{1x} g & U_1 y_{k+1} & \dots & U_1 y_n \\ U_2 y_1 & \dots & U_2 y_{k-1} U_{2x} g & U_2 y_{k+1} & \dots & U_2 y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_n y_1 & \dots & U_n y_{k-1} U_{nx} g & U_n y_{k+1} & \dots & U_n y_n \end{vmatrix} f(\xi) d\xi$$

şekilde de yazabiliriz. c_k ların bu değerini (2.62) de yerine yazıp bazı basit işlemlerden sonra (2.45) denkleminin çözümünü

$$y(x)=\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi \tag{2.66}$$

şekilde elde ederiz. Burada

$$G(x,\xi)=H(x,\xi)/\Delta \tag{2.67}$$

$$H(x,\xi)=\begin{vmatrix} g(x,\xi) & y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ U_{1x}g & U_1y_1 & \dots & U_ny_n \\ U_{2x}g & U_2y_1 & \dots & U_2y_n \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ U_{nx}g & U_ny_1 & \dots & U_ny_n \end{vmatrix} \tag{2.68}$$

olmaktadır. Göstermek mümkündür ki, (2.65) ifadesi (2.46) denklemini ve (2.47) sınır koşulunu korumaktadır. Bu ifadenin denklemi koruması (2.62) den gözükmektedir. Çünkü, (2.62) deki birinci kısım (2.46) ya uygun homojen denklemi korur. İkinci terim veya ikinci toplanan ise (2.46) yı korumaktadır. Sınır koşullarına gelince, onların her bir operatörünü (2.65) in altında $G(x,\xi)$ ye uygulamak mümkündür. Çünkü, $G(x,\xi)$ yi

$$G(x,\xi)=g(x,\xi)+G_1(x,\xi) \tag{2.69}$$

şeklinde yazabiliriz; burada $G_1(x,\xi)$ n. meretebeye kadar aralığın tüm noktalarında sürekli türevlenebilirdir. $g(x,\xi)$ nin ise, $(n-1)$. mertebeden türevinin birinci tür süreksizlik noktası vardır. Sınır koşullarında ise en çoğu $(n-1)$ e kadar olan türevler iştirak eder.

$$U_\nu G=0\,,\ (\nu=\overline{1,n}) \tag{2.70}$$

olduğu ise (2.66) dan direkt olarak gözükmektedir. Gerçekten de, $U_\nu G=\dfrac{U_\nu H}{\Delta}$, $H(x,\xi)$ determinantının ancak birinci satırında x'e bağımlılık var ve bundan dolayı sınır koşulundaki operatörleri doğrudan bu satırın elemanlarına uygulayabiliriz. U_ν sınır koşulu operatörünü $H(x,\xi)$ nin birinci satır elemanlarına uyguladıktan sonra ele aldığımız $(n+1)$ ölçülü determinantın birinci satırı her defa sonraki satırlardan biri ile aynı olacak ve bu nedenle de sıfıra eşit olacaktır. Dolayısıyla (2.70) eşitliğinin korunduğu aşikardır.

$G(x,\xi)$ fonksiyonu L lineer diferansiyel operatörünün Green fonksiyonudur ve bu fonksiyonun tek olarak varlığı için yeterli ve gerekli koşul (2.65) koşuludur. (2.69) u dikkate alarak $G(x,\xi)$ nin aşağıdaki önemli özelliklerini gösterelim.

1^0. $[a,\xi)$ ve $(\xi,b]$ yarı aralıklarının her birinde $G(x,\xi)$ x e göre homojen denklemi korur, yani $\ell G = 0$ dır.

2^0. $G(x,\xi)$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında x e göre ($n-2$). mertebeye kadar türevleri mevcuttur ve sürekli fonksiyonlardır.

3^0. $G(x,\xi)$ fonksiyonunun x e göre ($n-1$). mertebeden türevi $x=\xi$ noktasında aşağıdaki süreksizliğe sahiptir

$$\frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}\Big|_{x=\xi+0} - \frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}\Big|_{x=\xi-0} = \frac{1}{p_0(\xi)}.$$

4^0. $G(x,\xi)$ x e göre (2.47) sınır koşullarının her birini korumaktadır.

1^0 - 4^0 özelliklerini, Green fonksiyonunun tanımı olarak kabul etmek de mümkündür ve $\Delta(\lambda) \neq 0$ olduğunda Green fonksiyonu bu özelliklere göre kurulabilir.

3. LİNEER ISI DENKLEMİ İÇİN ADJOİNT OLMAYAN BAŞLANGIÇ-SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Son zamanlarda Hazar Denizi, Van Gölü vs. gibi denizlerde ve göllerde suyun seviyesinin yükselmesi olayı tespit edilmiştir. Deniz veya göllerde suyun seviyesinin neden yükseldiğini incelerken şu sıralar iki yorum gündemdedir. Bunlardan biri, deniz veya gölün dibinde ortaya çıkan tektonik kabarmalar sonucu yükselme oluşabileceğidir. İkincisi ise, suların petrol, tekniksel sular ve atık sular sonucu kirlenmesinden dolayı doğal buharlaşma prosesinin azalmasıyla "sera etkisi" nin bozulması yorumu olmaktadır. İkinci söylediğimiz sera etkisinin bozulması nedeni uydu gözlemleri sonucu suyun üst ince tabakası (yüzey) ile atmosfer arasında ısı alış verişi ve güneş ışınlarının hacimsel yutulması olaylarının bozulması gözlemlenmiştir. Bu söylenilen varsayımlar gerçekten doğru olmaktadır. Çünkü, moleküler difüzyon hesabına sıcaklık profilinin oluşması zaman açısından uzun bir süre zarfında baş verir. Bunun yanı sıra soğuk tabakanın oluşma süreci daha az olmaktadır.

Bu söylediklerimizi teorik olarak ispatlamamız için aşağıdaki matematiksel problemi göz önüne alalım.

D ile aşağıdaki bölgeyi gösterelim

$$D = \{0 \le z \le H,\, 0 \le t \le T\} \subset R^2(x,t)$$

x ve y değişkenlerine göre ortalaştırılmış deniz sularının ince üst tabakası için ısı difüzyon denklemi

$$\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = \kappa^2 \frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2} + \frac{\beta J_0 e^{-\beta\sqrt{z}}}{2c\rho\sqrt{z}} \tag{3.1}$$

olmaktadır. Bu denklem aşağıdaki sınır koşulları çerçevesinde göz önüne alınmaktadır

$$T(z,0) = f(z), \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial z} = \frac{Q}{\kappa^2 c\rho}, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial T(H,t)}{\partial t} = \frac{\beta J_0 e^{-\beta\sqrt{H}}}{2c\rho\sqrt{H}}. \tag{3.4}$$

Burada $T(z,t)$ bilinmeyen sıcaklık fonksiyonu, t zaman, z yer değişkeni, κ^2 moleküler ısı dağılım katsayısı, c dahili sıcaklık tutumu, ρ suyun yoğunluğu, J_0 albedo dikkate alınarak deniz seviyesindeki toplam güneş radyasyonu(ışınması), β denizin içerisine gidildikçe güneş radyasyonunun zayıflama katsayısı, Q deniz yüzeyinden atmosfere akan negatif ısı miktarı olmaktadırlar.

(3.1) den görüldüğü gibi

$$\psi(z) = \frac{\beta J_0 e^{-\beta\sqrt{z}}}{2c\rho\sqrt{z}} \tag{3.5}$$

kaynağı ifade eden $\psi(z)$ fonksiyonu $z=0$ noktasında $L_2(D)$ uzayına dahil değildir. Bu özellik çözüm üzerine ek problem çıkarır; öyle ki çözümün kendisi sürekli, fakat diferansiyeli mevcut olmayan bir fonksiyona dönüşür.

Şimdi, (3.1)-(3.4) probleminin çözümünü elde edelim. Bu çözümü, birincisi Fourier Metodu, ikincisi rezidü yöntemini olmak üzere iki yolla elde edeceğiz. Birincisinden elde edilen gerçek çözüm problemin çözümünün varlığını ispat etmek için, ikincisinden olan ise fiziksel olayın dinamiğini incelemek için büyük önem taşır.

3.1 Fourier Metodu İle Çözüm

Kolaylık için aşağıdaki değişken dönüşümünü

$$T_1(z,t) = T(z,t) - \frac{Q}{\kappa^2 c\rho} z - \psi(H)t \tag{3.6}$$

uygulayalım. (3.1)-(3.4) problemi $T_1(z,t)$ değişkeninde

$$\frac{\partial T_1(z,t)}{\partial t} = \kappa^2 \frac{\partial^2 T_1(z,t)}{\partial z^2} + \psi_1(z), \tag{3.7}$$

$$T_1(z,0) = T_{10}(z), \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial T_1(0,t)}{\partial z} = 0, \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial T_1(H,t)}{\partial t} = 0 \tag{3.10}$$

şeklini alır. Burada

$$\psi_1(z) = \psi(z) - \psi(H), \quad T_{10} = f(z) - \frac{Q}{\kappa^2 c\rho} z$$

olmaktadır.

(3.5) ifadesinden görüldüğü gibi $\psi(z)$ fonksiyonu $z=0$ da sonsuzluğa dönüşür ve bu özellik $\psi(z)$ fonksiyonunu Fourier serisine açmaya imkan sağlamaz. Bunun için (3.7)-(3.10) probleminin yerine [4] ü takip ederek aşağıdaki yardımcı problemi içerelim

$$\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} = \kappa^2 \frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} + \varphi(z), \tag{3.11}$$

$$v(z,0) = v_0(z), \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial^2 v(0,t)}{\partial z^2} = 0, \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial^2 v(H,t)}{\partial z \partial t} = 0 \tag{3.14}$$

Burada $v_0(z)$ fonksiyonu

$$\frac{dv_0(z)}{dz} = T_{10}(z), \tag{3.15}$$

denklemini koruyan herhangi bir çözüm ve

$$\varphi(z) = \frac{J_0}{c\rho}\left[1 - e^{-\beta\sqrt{z}}\right] - \psi(H)z \tag{3.16}$$

olmaktadır.

(3.11)-(3.14) problemini biz yardımcı problem olarak adlandıracağız. Yardımcı problemin çözümünün diferansiyellenebilme özelliği esas problemin diferansiyellenebilme özelliğinden bir mertebe yüksek olmaktadır. Bunun yanı sıra, $\varphi(z)$ fonksiyonu sürekli fonksiyon olmaktadır, ayrıca da $\varphi(0) = 0$ dır.

Fourier yöntemini kullanabilmemiz için (3.10) koşulunu *t* ye göre integrallersek

$$T(H,t) = \psi(H)t + f(H) \tag{3.17}$$

elde ederiz.

$$u(z,t) = T(z,t) - g(z,t) \tag{3.18}$$

değişken dönüşümü (3.7)-(3.10) problemini

$$\frac{\partial u(z,t)}{\partial t} = \kappa^2 \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} + \psi_1(z), \tag{3.19}$$

$$u(z,0) = u_0(z), \tag{3.20}$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial z} = 0, \quad u(H,t) = 0 \tag{3.21}$$

problemine dönüştürür. Burada

$$\psi_1(z) = \psi(z) - \psi(H),$$

$$u_0(z) = f(z) + \frac{Q}{\kappa^2 c\rho}(H - z) \tag{3.22}$$

olmaktadır. Yine [4] ü takip ederek (3.19)- (3.21) problemine karşılık gelen aşağıdaki yardımcı problemi içerelim

$$\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} = \kappa^2 \frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} + \varphi(z), \tag{3.23}$$

$$v(z,0) = v_0(z), \tag{3.24}$$

$$\frac{\partial^2 v(0,t)}{\partial z^2} = 0, \qquad \frac{\partial v(H,t)}{\partial z} = 0 \tag{3.25}$$

Burada $\varphi(z)$ ve $v_0(z)$ sırasıyla

$$\varphi(z) = \frac{J_0}{c\rho}\left[1 - e^{-\beta\sqrt{z}}\right] - \psi(H)z, \tag{3.26}$$

$$v_0(z) = \int_0^z f(\xi)d\xi + \frac{Q}{\kappa^2 c\rho} z\left(H - \frac{z}{2}\right) \tag{3.27}$$

olmaktadır. (3.25) deki birinci koşulu aşağıdaki gibi yazalım

$$\frac{\partial^2 v(0,t)}{\partial z^2} = \frac{1}{\kappa^2}\left(\frac{\partial v(0,t)}{\partial t} - \varphi(0)\right) = 0\,. \tag{3.28}$$

$\varphi(0) = 0$ olduğunu dikkate alarak (3.28) koşulu

$$\frac{\partial v(0,t)}{\partial t} = 0 \tag{3.29}$$

a dönüşür ve nihayet (3.29) u *t* ye göre integralleyerek

$$v(0,t) = v_0(0) = 0 \tag{3.30}$$

elde edilir.

Böylelikle inceleyeceğimiz problem aşağıdaki şekli alır

$$\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} = \kappa^2 \frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} + \varphi(z), \tag{3.31}$$

$$v(z,0) = v_0(z), \tag{3.32}$$

$$v(0,t) = 0, \quad \frac{\partial v(H,t)}{\partial z} = 0\,. \tag{3.33}$$

Görüldüğü gibi $\varphi(z) \in C[0,H]$ dır ama diferansiyellenebilir değildir. Aşağıdaki gibi bir fonksiyon tanımlayalım

$$\varphi_N(z) = \begin{cases} \varphi(z), & z \in [1/N, H] \\ 0, & z \in [0, 1/N] \end{cases} \tag{3.34}$$

ve aşağıdaki problemi göz önüne alalım

$$\frac{\partial v_N(z,t)}{\partial t} = \kappa^2 \frac{\partial^2 v_N(z,t)}{\partial z^2} + \varphi_N(z), \tag{3.35}$$

$$v_N(z,0) = v_0(z), \tag{3.36}$$

$$v_N(0,t) = 0, \qquad \frac{\partial v_N(H,t)}{\partial z} = 0\,. \tag{3.37}$$

(3.35)- (3.37) probleminin çözümünü

$$v_N(z,t) = u_N(z,t) + w(z,t) \tag{3.38}$$

şeklinde arayacağız. Burada $u_N(z,t)$ homojen denklemin homojen sınır koşulları, homojen olmayan başlangıç koşulları çerçevesinde çözümünü, $w(z,t)$ homojen olmayan denklemin homojen sınır ve başlangıç koşulları çerçevesinde çözümünü göstermektedir.

Fourier yönteminin genel yapısına göre $u_N(z,t)$ fonksiyonunu

$$u_N(z,t) = \sum X(z)T(t) \tag{3.39}$$

şeklinde arayalım. $X(z)$ ve $T(t)$ fonksiyonları

$$X''(z) + \lambda^2 X(z) = 0, \tag{3.40}$$

$$X(0) = 0, \qquad X'(H) = 0, \tag{3.41}$$

$$T' + (\lambda\kappa)^2 T = 0 \tag{3.42}$$

denklemlerinden bulunur. (3.40), (3.41) den

$$\lambda_\nu = \frac{(2\nu+1)\pi}{2H} \text{ ve } X_\nu(z) = \sin\frac{(2\nu+1)\pi z}{2H}\,,\ (\nu = 0,1,2,...) \tag{3.43}$$

bu problemin sırasıyla özdeğerleri ve özfonksiyonları olduğu kalayca görülebilir. $\lambda = \lambda_\nu$ olduğunu dikkate alarak (3.42) denkleminin çözümünü

$$T_\nu(t) = C_\nu e^{-(\lambda_\nu\kappa)^2 t} \tag{3.44}$$

şeklinde yazalım.

Elde ettiğimiz ifadeleri (3.39) da yerine yazarsak,

$$u_N(z,t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu e^{-(\lambda_\nu\kappa)^2 t} \sin\frac{(2\nu+1)\pi z}{2H} \tag{3.45}$$

elde ederiz. (3.45) ifadesinin $\varphi_N(z,t) = 0$ olduğu durumda (3.35) denklemini ve (3.37) koşulunu koruduğu kolayca gösterilebilir. (3.36) başlangıç koşulunun korunabilmesi için

$$u_{0N}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu \sin\frac{(2\nu+1)\pi z}{2H} \tag{3.46}$$

olması gerekmektedir. (3.46) serisinin düzgün yakınsak olduğunu varsayalım. Bu taktirde (3.46) ayrılışındaki C_ν $(\nu = 0,\pm1,\pm2,...)$ ler (3.46) nın her iki tarafının $\sin\frac{(2n+1)\pi z}{2H}$ ile çarpılıp $z = 0$ dan $z = H$ a kadar integrallenmesi yoluyla elde edilebilir. Gerçekten de

$$\int_0^H u_0(z)\sin\frac{(2n+1)\pi z}{2H}dz = \sum_{\nu=0}^{\infty}\int_0^H C_\nu \sin\frac{(2n+1)\pi z}{2H}\int_0^H C_\nu \sin\frac{(2n+1)\pi z}{2H}\sin\frac{(2\nu+1)\pi z}{2H}dz$$

$$= \begin{cases} 0, & n \neq \nu \\ \dfrac{H}{2}, & n = \nu \end{cases}$$

dır. Burada C_ν ler için

$$C_\nu = \frac{2}{H}\int_0^H u_0(\xi)\sin\frac{(2\nu+1)\pi\xi}{2H}d\xi \tag{3.47}$$

elde edilir. (3.47) ifadesi (3.43) de yerine konursa $u_N(z,t)$ için

$$u_N(z,t) = \frac{2}{H}\sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-(\lambda_\nu\kappa)^2 t}\sin\frac{(2\nu+1)\pi z}{2H}\int_0^H u_0(\xi)\sin\frac{(2n+1)\pi\xi}{2H}d\xi \tag{3.48}$$

bulunur.

Şimdi, (3.35)-(3.37) probleminin çözümünü bulalım. $w(z,t)$ fonksiyonunun çözümünü

$$w(z,t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} T_\nu(t)\sin\frac{(2\nu+1)\pi z}{2H} \tag{3.49}$$

şeklinde arayalım. (3.49) daki $T_\nu(t)$ leri öyle seçelim ki (3.49), (3.35) denklemini ve homojen başlangıç koşulunu korusun. Bunun için (3.49) u (3.35) de yerine yazarsak

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[T_\nu'(t) + \left(\frac{(2\nu+1)\pi\kappa}{2H}\right)^2 T_\nu(t)\right]\sin\frac{(2\nu+1)\pi z}{2H} = \varphi_N(z) \tag{3.50}$$

elde ederiz. $\varphi_N(z)$ nin $(0,H)$ aralığında Fourier sinüs serisini yazalım

$$\varphi_N(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi_{N\nu}(z)\sin\frac{(2\nu+1)\pi z}{2H}. \tag{3.51}$$

Burada

$$\varphi_{N\nu}(z) = \frac{2}{H}\int_{1/H}^{H}\varphi_N(\xi)\sin\frac{(2\nu+1)\pi\xi}{2H}d\xi \tag{3.52}$$

olmaktadır.

Böylelikle $T_\nu(t)$ leri eldeetmek için aşağıdaki Cauchy problemine ulaşırız

$$T_\nu'(t)+\left(\frac{(2\nu+1)\pi\kappa}{2H}\right)^2 T_\nu(t)=\varphi_{N\nu}(z),\ \ (\nu=0,1,...) \tag{3.53}$$

$$T_\nu(0)=0. \tag{3.54}$$

(3.53), (3.54) ün çözümü

$$T_\nu(t)=\int_0^t \varphi_{N\nu}(z)e^{-\left[\frac{(2\nu+1)\pi\kappa}{2H}\right]^2(t-\tau)}d\tau \tag{3.55}$$

olmaktadır. (3.55) i (3.49) da yerine yazarsak

$$w(z,t)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\sin\frac{(2\nu+1)\pi z}{2H}\int_0^t \varphi_{N\nu}(z)e^{-\left[\frac{(2\nu+1)\pi\kappa}{2H}\right]^2(t-\tau)}d\tau$$

$$=\frac{2}{H}\sum_{\nu=0}^{\infty}\sin\frac{(2\nu+1)\pi z}{2H}\int_0^t e^{-\left[\frac{(2\nu+1)\pi\kappa}{2H}\right]^2(t-\tau)}\int_0^H \varphi(\xi)\sin\frac{(2\nu+1)\pi\xi}{2H}d\xi \tag{3.56}$$

yı alırız. Nihayet $v_N(z,t)$ için

$$v_N(z,t)=\frac{2}{H}\sum_{\nu=0}^{\infty}e^{-(\lambda_\nu\kappa)^2 t}\sin\lambda_\nu z\int_0^H u_0(\xi)\sin\lambda_\nu\xi d\xi+$$

$$+\frac{2}{H}\sum_{\nu=0}^{\infty}\sin\lambda_\nu z\int_0^t e^{-(\lambda_\nu\kappa)^2(t-\tau)^2}d\tau\int_{1/N}^H \varphi_N(\xi)\sin\lambda_\nu\xi d\xi \tag{3.57}$$

elde ederiz.

3.2 Rezidü Metodu İle Çözüm

Şimdi (3.35)- (3.37) problemini Rezidü yöntemiyle çözelim. [3] ü takip ederek rezidü yönteminin genel yapısına göre (3.35)- (3.37) karışık problemine bir tane spektral problem, bir tane de Cauchy problemi karşılık getirelim.

3.2.1 Spektral Problem

$$y''(z)+\lambda^2 y(z)=h(z), \tag{3.58}$$

$$y(0)=0,\quad y'(H)=0\,. \tag{3.59}$$

Burada $h(z)$ keyfi sürekli diferansiyellenebilen bir fonksiyon olmaktadır.

Kolaylık için $Ly=y''+\lambda^2 y$ şeklinde operatör içerelim. Bu durumda (3.58) denklemini

$$Ly=0 \tag{3.60}$$

şeklinde yazabiliriz.

Eğer y ve v fonksiyonları $C^2[0,H]$ dan ise ve (3.59) koşullarını koruyorsa $(Ly,v)=(y,Lv)$ olduğu, yani L operatörünün (3.58), (3.59) problemi için self adjoint olduğu kolayca görülebilir.

Teorem 1. (3.58), (3.59) probleminin özdeğerleri düzlemin sonlu kısımlarında limiti olmayan reel sayılar olmaktadır. Farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar ortogonal sistem oluşturmaktadır.

(3.58), (3.59) probleminin çözümünü ikinci bölümde olduğu gibi

$$y(z,\lambda,h)=\int_0^H G(z,\xi,\lambda)h(\xi)d\xi \tag{3.61}$$

şeklinde elde edebiliriz. Burada G fonksiyonuna (3.58), (3.59) probleminin Green fonksiyonu denilir ve $G(z,\xi,\lambda)=\Delta(z,\xi,\lambda)/\Delta(\lambda)$ şeklindedir. Burada

$$\Delta(z,\xi,\lambda)=\begin{vmatrix} g_0(z,\xi,\lambda) & e^{\lambda z} & e^{-\lambda z} \\ g_0(0,\xi,\lambda) & 1 & 1 \\ \dfrac{dg_0(H,\xi,\lambda)}{dz} & \lambda e^{\lambda H} & -\lambda e^{-\lambda H} \end{vmatrix} \tag{3.62}$$

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda e^{\lambda H} & -\lambda e^{-\lambda H} \end{vmatrix} \tag{3.63}$$

$$g_0(z,\xi,\lambda)=\begin{cases} \dfrac{1}{2\lambda} sh\lambda(z-\xi), & \xi \le z \\ -\dfrac{1}{2\lambda} sh\lambda(z-\xi), & z \le \xi \end{cases} \tag{3.64}$$

olmaktadır.

Böylelikle $y(z,\lambda,h)$ fonksiyonu (3.58), (3.59) probleminin özdeğer noktaları hariç her yerde çözümü olmaktadır. (3.63) den görüldüğü üzere $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları aynı zamanda problemin özdeğerleri olmaktadır. Bunun yanı sıra $\Delta(\lambda)$ nın sıfırları Green fonksiyonunun da sıfırları olmaktadır. U_k $(k=1,2)$ ile (3.59) sınır koşullarını ifade eden

$$U_k(y)=0, \ (k=1,2) \tag{3.65}$$

şeklinde operatör olsun.

$y(z,\lambda)=\sum_{i=1}^{2} C_i y_i$ ifadesi (3.65) denklemini korumaktadır. Burada y_i ler fundamental çözüm sistemi oluşturmaktadır. (3.65) sistemi iki bilinmeyen bulunduran cebirsel denklemler sistemi oluşturmaktadır ve bilindiği gibi söz konusu sistemin trivial olmayan çözümünün varlığı için gerek ve yeter koşul katsayılarından oluşan determinantın sıfıra eşit olmasıdır. Bu determinant $\Delta(\lambda)$ olmaktadır. Görüldüğü üzere $\Delta(\lambda)$ λ ya göre tam fonksiyon olmakta ve bu fonksiyonun yalnız reel sıfırları olmakta ve bu sıfırlar $\lambda = \infty$ da yoğunlaşmaktadır. $\Delta(\lambda)$ nın sıfırları

$$\lambda_\nu = \frac{(2\nu+1)\pi}{2H}, \quad \nu = 0,1,...$$

olmaktadır.

3.2.2 Ayrılış Formülü

Ayrılış formülünü iki yolla ispatlayalım. (3.60) denklemini (3.65) koşulu çerçevesinde göz önüne alalım. L operatörü self adjoint olduğundan

$$Ly = \lambda^2 y$$

denklemi için tam ortonormal $\{y_k\}$ özfonksiyonlar sistemi mevcut olmaktadır ve bu denklem $\lambda \neq \lambda_\nu$, noktalarında $G(z,\xi,\lambda)$ Green fonksiyonuna sahiptir. Bu taktirde, herhangi bir $h(z) \in L_2(0,H)$ fonksiyonu için

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} (h, y_k) y_k \tag{3.66}$$

ayrılış formülü mevcut olmaktadır. Burada

$$(h, y_k) = \int_0^H G(z,\xi,\lambda) h(\xi) d\xi \tag{3.67}$$

dır ve (3.66) fonksiyonel serisi kuadratik anlamda $h(z)$ ye yakınsaktır.

$$\Im(\lambda)[h(z)] = \int_0^H G(z,\xi,\lambda) h(\xi) d\xi$$

ile gösterelim.

$$Ly_k = \lambda y_k = \bar{\ell} y_k + (\lambda - \bar{\ell}) y_k ,$$

$$\left(\Im(\ell)[h(z)], y_k\right) = \left(h, \Im(\bar{\ell})[y_k]\right) = (\lambda_k - \ell)^{-1}(f, y_k)$$

olduğundan $\Im(\lambda)h(z)$ fonksiyonu için Fourier serisi

$$\Im(\lambda)h(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - \ell)^{-1} (h, y_k) y_k$$

olmaktadır. Bu fonksiyonun rezidülerini hesaplarsak

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c_k}\lambda\Im(\lambda)h(z)d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k-\ell)^{-1}(h,y_k)y_k=-\sum_{k=1}^{\infty}(h,y_k)y_k$$

Burada c_k, λ düzleminde her bir λ_ν kutup noktasını içerisine alan basit kapalı bir eğri olmaktadır.

Böylelikle, $h(z)$ fonksiyonu için aşağıdaki ayrılış formülünü

$$h(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{c_k}\lambda\int_0^H G(z,\xi,\lambda)h(\xi)d\xi d\lambda \tag{3.68}$$

elde etmiş oluruz. Şimdi (3.68) ayrılışındaki katsayıları hesaplayalım. Bunun için (3.62) ve (3.63) ifadelerini dikkate almayla

$$h(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{c_k}\lambda d\lambda\int_0^H\frac{\Delta(z,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}h(\xi)d\xi \tag{3.69}$$

elde ederiz. $\lambda_\nu=\dfrac{(2\nu+1)\pi}{2H}$ ler $\Delta(\lambda)$ nın basit kökleri olduğundan (3.69) u

$$h(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_0^H\frac{\lambda_\nu\Delta(z,\xi,\lambda_\nu)}{\Delta'(\lambda_\nu)}h(\xi)d\xi \tag{3.70}$$

şeklinde yazarız. Sade hesaplamarla

$$\Delta'(\lambda_\nu)=-2\lambda_\nu Hi\cos\pi\nu,\quad(\nu=0,\pm1,\pm2,...)$$

$$\frac{\lambda_\nu\Delta(z,\xi,\lambda_\nu)}{\Delta'(\lambda_\nu)}=\frac{1}{H}\sin\lambda_\nu\xi\sin\lambda_\nu z$$

olduğunu görebiliriz. Bunları dikkate alarak (3.70) i aşağıdaki gibi yazabiliriz

$$h(z)=\frac{2}{H}\sum_{\nu=1}^{\infty}\sin\lambda_\nu z\int_0^H\sin\lambda_\nu\xi h(\xi)d\xi\,. \tag{3.71}$$

$a_\nu=\dfrac{2}{H}\displaystyle\int_0^H h(\xi)\sin\lambda_\nu\xi d\xi$ olduğunu gösterirsek (3.71) serisinin h için Fourier serisi olduğunu görebiliriz. Bu ayrılış formülünü [3] de olduğu gibi de elde edebiliriz. Bunun için (3.59) sınır koşullarını

$$\Im_\nu(y)=\sum_{k=1}^{2}\left[\alpha_{\nu k}y^{(k-1)}(0)+\beta_{\nu k}y^{(k-1)}(H)\right]=0, \tag{3.72}$$

$$\alpha_{11}=1,\ \alpha_{12}=\beta_{11}=\beta_{12}=0,$$

$$\alpha_{21}=\alpha_{22}=\beta_{21}=0,\quad\beta_{22}=1$$

şeklinde yazalım.

$$y_1(z,\lambda)=e^{\lambda z},\quad y_2(z,\lambda)=e^{-\lambda z} \tag{3.73}$$

fundamental sistem oluşturmaktadır.

$$\Im_\nu(y_1) = A_{\nu 1}(\lambda) + B_{\nu 1}(\lambda)e^{\lambda H},$$

$$\Im_\nu(y_2) = A_{\nu 2}(\lambda) + B_{\nu 2}(\lambda)e^{-\lambda H}$$

$$A_{11} = 1, \quad A_{12} = 1, \quad A_{21} = 0, \quad A_{22} = 0$$

$$B_{11} = 0, \quad B_{12} = 0, \quad B_{21} = \lambda, \quad B_{22} = -\lambda$$

olduğu kolayca görülmektedir.

$\wp$ koşulu:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{vmatrix}$$

determinantlarının artma hızı λ dereceden,

$$\begin{pmatrix} A_{11}(\lambda) & A_{12}(\lambda) & B_{11}(\lambda) & B_{12}(\lambda) \\ A_{21}(\lambda) & A_{22}(\lambda) & B_{21}(\lambda) & B_{22}(\lambda) \end{pmatrix}$$

matrisinden oluşan diğer determinantların artma hızı ise λ dan düşük olmaktadır.

Teorem 2. $\wp$ koşulu çerçevesinde (3.58)-(3.59) probleminin sayılabilir sayıda λ_ν özdeğerleri mevcut olmakta, söz konusu problem $G(z,\xi,\lambda)$ Green fonksiyonu için

$$G(z,\xi,\lambda) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \tag{3.74}$$

asimptotik değerlendirmesi mevcuttur ve $[0,H]$ tanımlı keyfi $h(z)$ fonksiyonu için (3.68) şeklinde ayrılış formülü mevcut olmaktadır, [3].

3.2.3 Karışık Problemin Çözümü

Rezidü yönteminin genel yapısına göre (3.35)-(3.37) problemine

$$\frac{\partial Z(z,\lambda,t)}{\partial t} - \lambda^2 Z(z,\lambda,t) = \varphi_N(z), \tag{3.75}$$

$$Z(z,\lambda,0) = v_0(z) \tag{3.76}$$

Cauchy problemini de karşılık getirelim. (3.75)-(3.76) nın çözümü

$$Z(z,\lambda,t) = v_0(z)e^{\lambda^2 t} + \int_0^t e^{\lambda^2(t-\tau)}\varphi_N(z)d\tau \tag{3.77}$$

şeklindedir. [3] ü takip ederek $[0,H]$ da tanımlı, birinci türeve sahip keyfi $h(z)$ fonksiyonu için

$$A_{\nu j}h \equiv h_\nu^{(j)}(z) = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{c_\nu} \lambda^{2j+1} y(z,\lambda,h)d\lambda \tag{3.78}$$

operatörünü içerelim. Bu notasyonda

$$\sum_\nu h_{\nu_0}(z) = h(z) \tag{3.79}$$

alırız.

(3.78) operatörünü (3.35)-(3.37) problemine uygularsak

$$\frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{c_\nu} \lambda^{2j+1} y\left(z,\lambda,\frac{\partial v_N(z,t)}{\partial t}\right)d\lambda =$$

$$= \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{c_\nu} \lambda^{2j+1} y\left(z,\lambda,\frac{\partial^2 v_N(z,t)}{\partial z^2}\right)d\lambda + \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{c_\nu} \lambda^{2j+1}\varphi_N(z)d\lambda \tag{3.80}$$

elde ederiz. (3.61) formülünden görüldüğü gibi $y(z,\lambda,h)$ üçüncü argümana göre lineer operatör olmaktadır. Bu durumda (3.80) den

$$\frac{\partial v_{N\nu}^{(j)}(z,t)}{\partial t} = v_{N\nu}^{(j+1)}(z,t) + \varphi_{N\nu}^{(j)}(z) \tag{3.81}$$

i alırız. (3.78) operatörünü (3.36) ya uygularsak

$$v_{N\nu}^{(j)}(z,0) = v_{0\nu}^{(j)}(z) \tag{3.82}$$

koşulunu alırız. Hesaplamalar yoluyla gösterilebilir ki, (3.81), (3.82) probleminin çözümü

$$v_{N\nu}^{(j)}(z,t) = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{c_\nu} \lambda^{2j+1} y(z,\lambda,Z(z,\lambda,t)d\lambda, \quad (j=\overline{0,\varepsilon_\nu -1}) \tag{3.83}$$

olmaktadır. Gerçekten de,

$$\frac{\partial v_{N\nu}^{(j)}(z,t)}{\partial t}\frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{c_\nu} \lambda^{2j+1} y\left(z,\lambda,\frac{\partial Z(z,\lambda,t)}{\partial t}\right)d\lambda =$$

$$= \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{c_\nu} \lambda^{2j+1} y(z,\lambda,\lambda^2 Z(z,\lambda,t)d\lambda + \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{c_\nu} \lambda^{2j+1} y(z,\lambda,\varphi_N(z))d\lambda =$$

$$v_{N\nu}^{(j+1)}(z,t) + \varphi_{N\nu}^{(j)}(z)$$

(3.82) nin sağ tarafını (3.83) de yerine yazsak

$$v_{N\nu}^{(j)}(z,0) = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{c_\nu} \lambda^{2j+1} y(z,\lambda,v_0(z))d\lambda = v_{0\nu}^{(j)}(0)$$

alırız. (3.79) u dikkate almayla

$$v_N(z,t) = \sum_\nu v_{N\nu}^{(0)}(z,t) = \sum_\nu \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{c_\nu} \lambda y(z,\lambda,Z(z,\lambda,t))d\lambda =$$

$$=\sum_{\nu}\frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{c_\nu}\lambda d\lambda\int_0^H G(z,\xi,\lambda)\left[v_0(\xi)e^{\lambda^2 t}+\int_0^t e^{\lambda^2(t-\tau)}\varphi_N(z)d\tau\right]d\xi=$$

$$=\sum_{\nu}\frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{c_\nu}\lambda e^{\lambda^2 t}d\lambda\int_0^H\frac{\Delta(z,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}v_0(\xi)d\xi+$$

$$\sum_{\nu}\frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{c_\nu}\lambda d\lambda\int_0^H\frac{\Delta(z,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}v_0(\xi)d\xi\varphi_N(\xi)d\tau d\xi \qquad (3.84)$$

(3.84) e dahil olan rezidüleri hesaplarsak $v_N(z,t)$ için

$$v_N(z,t)=\frac{2}{H}\sum_{\nu=1}^{\infty}\sin\lambda_\nu z\int_0^H\sin\lambda_\nu\xi\, v_0(\xi)d\xi+\frac{2}{H}\sum_{\nu=1}^{\infty}\sin\lambda_\nu z\int_0^t e^{-\lambda_\nu^2(t-\tau)}d\tau\int_0^H\sin\lambda_\nu\xi\,\varphi_N(\xi)d\xi \qquad (3.85)$$

i alırız. (3.85) in içerdiği integral $\int_0^H\sin\lambda_\nu\xi\varphi_N(\xi)d\xi$, $N\to\infty$ iken mevcut olmaktadır. Bundan dolayı $v(z,t)=\lim_{N\to\infty}v_N(z,t)$ olmaktadır.

4. SONUÇLAR

Tezde lineer diferansiyel denklemler için yazılmış sınır değer probleminin cebirsel temeli incelenmiş ve ele alınan sonuçlar aşağıda sıralanmıştır.

1. Self adjoint diferansiyel operatörler için Lagrange anlamında adjoint diferansiyel ifade kurulmuştur.

2. Karşılıklı adjoint problemlerin rankları arasındaki ilişki bulunmuştur.

3. Sabit katsayılı lineer homojen ve homojen olmayan denklemlerin genel çözümleri rezidü yöntemi yardımıyla elde edilmiştir.

5. KAYNAKLAR

1. Naimark, M.A., Linear Differential Operators, Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1967.

2. Titchmarsh, E.C, Eigenfunction Expansions Associated With Second-Order Differential Equations, Oxford, Clarendon, 1958.

3. Rasulov, M.L., Methods of Contours Integrals, Amsterdam, North-Holland Pub. Co., 1967.

ÖZGEÇMİŞ

Uğur POLAT, 1971 de Kilis'de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Kilis'de tamamladıktan sonra İstanbul Üniversitesi Fen Fakiltesi Matematik Bölümü'nü bitirdi. Yeditepe Üniversitesi, Eğitim Yönetimi ve Denetimi Programı'nda yüksek lisans yaptı. 12 yıl çeşitli dersane ve özel liselerde matematik öğretmenliği yaptı. Halen özel bir lisede matematik öğretmenliği yapmaktadır. 2007 de başladığı Beykent Üniversitesi, Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı'ndaki yüksek lisans öğrenimine halen devam etmektedir. Evli ve bir kız çocuk babasıdır. Yabancı dili İngilizce'dir.