T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANA BİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

İKİ BOYUTLU NONLİNEER DALGA DENKLEMİNİN SÜREKSİZ FONKSİYONLAR SINIFINDA ÇÖZÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Özer ASLIBAY
Ögrenci No: 070860008

İSTANBUL, 2010

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANA BİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

İKİ BOYUTLU NONLİNEER DALGA DENKLEMİNİN SÜREKSİZ FONKSİYONLAR SINIFINDA ÇÖZÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Özer ASLIBAY
Ögrenci No: 070860008

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mahir RESULOV

İSTANBUL, 2010

ÖNSÖZ

Tezimin her aşamasında bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, her türlü desteği ve kolaylığı benden esirgemeyen öğretim üyesi Prof. Dr. Mahir RESULOV'a minnettarlığımı ifade eder, en içten dileklerimle teşekkür ederim. Ayrıca eğitimim süresince bilgilerinden yararlanma fırsatı bulduğum Prof. Dr. Mehmet ERDOĞAN, Doç. Dr. Afgan ASLONOV ve Yrd. Doç. Dr. Bahaddin SİNSOYSAL'a teşekkür ederim.

Bu tez sevgili eşim Fatma ASLIBAY, canım ailem ve benim için çok değerli, çok sevdiğim rahmetli dedem saygı değer Muhammet ASLIBAY'a adanmıştır.

İstanbul, 2010 Özer ASLIBAY

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Dört bölümden oluşan tezde 2 boyutlu kuazi lineer kısmi türevli diferansiyel denklem için yazılmış Cauchy probleminin gerçek çözümünün elde edilmesi için bir yöntem geliştirilmiştir.

İkinci bölümde, önce sabit katsayılı denklem için yazılmış başlangıç değer probleminin gerçek çözümü elde edilmiş ve çözümün bazı özellikleri incelenmiştir. Bunun için esas problemde bulunmayan avantajlara sahip iki tane yardımcı problem dahil edilmiş ve yardımcı problemin avantajları kullanılarak esas problemin gerçek çözümü elde edilmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde elde edilen sonuçlar 2 boyutlu kuazi lineer Hopf denklemi için geliştirilmiştir.

Son bölümde ise, durum (state) fonksiyonu konveks olmayan birinci basamaktan nonlineer kısmi türevli diferansiyel denklem için yazılmış Cauchy problemi incelenmiş ve problemin gerçek çözümü elde edilmiştir.

ABSTRACT

In this thesis, a new method is developed to obtain the exact solution of the Cauchy problem for the two dimensional quasilinear partial differential equation.

In the second part, the exact solution of the initial value problem for the equation with constant coefficient is found and its some properties are investigated. To do so, two auxiliary problems which have some advantages on the main problem are introduced, and by using these advantages the exact solution of the main problem is obtained.

In the third part of the thesis, the obtained results are extended to the two dimensional quasi linear Hopf equation.

Finally, the Cauchy problem for the first order nonlinear partial differential equation having non-convex state function is presented and its exact solution is derived.

1. GİRİŞ

Genelde kısmi türevli diferansiyel denklemler, doğadaki fundamental kanunları matematiksel olarak ifade ederken, uygulamalı matematiğin, fiziğin ve mühendisliğin birçok önemli problemlerinin modellenmesi ve çözülmesi süreçlerinde karşımıza çıkmaktadır. Bu bilim dalı modern matematiğin tüm alanlarında, özellikle fizik, geometri ve analizde önemli rol oynamaktadır. Fiziksel önem taşıyan birçok olaylar kısmi türevli diferansiyel denklemler ve onlar için yazılmış uygun başlangıç ve başlangıç-sınır değer problemlerinin çözümünün bulunmasına indirgenmektedir. Matematiksel modeller çerçevesinde fiziksel olayların dinamiği incelenebilir, ayrıca da zor koşullarda yapılması gereken fiziksel deneyin yerine kolayca ve hızlı bir şekilde sonuca varılabilen bilgisayar deneyleri yapılabilir.

Bu kitapda, kısmi türevli diferansiyel denklemlerin temel kavramları, çözüm yöntemleri ve uygulamalı matematiğin pratik problemlerinde sık rastlanan model denklemler ve onların matematiksel yapıları incelenecektir.

Tanım 1.1 Bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerini içeren denklemlere *diferansiyel denklemler* denir.

Bilinmeyen fonksiyonun argümanlarının sayısına bağlı olarak denklemler iki türe ayrılmaktadırlar. Eğer diferansiyel denklemin içerdiği bilinmeyen fonksiyon yalnız bir argümana bağlı olursa, böyle denklemlere *adi diferansiyel denklemler (ADD)* denir. Argümanlarının sayısı birden fazla olan denklemlere ise *kısmi türevli diferansiyel denklemler (KTDD)* denir.

Örnek 1.1

$$a)\quad y'' - y = 0,$$

$$b)\quad x^2 y'' - 2xy' + y = e^t,$$

$$c)\quad u_x - u_y = 0,$$

$$d)\quad u_t + uu_x = x.$$

Yukarıdaki tanıma göre, a) ve b) denklemleri adi, c) ve d) denklemleri ise kısmi türevli diferansiyel denklemler olmaktadırlar.

R^m ile $(x_1, x_2, ..., x_m)$ noktalarının Euclid uzayını gösterelim. Q $\subseteq R^m$ bir bölge ve $u(x_1, x_2, ..., x_m)$ ise Q de tanımlı ve *n*. mertebeden sürekli türevlere sahip fonksiyon olsun. *n.* mertebeden KTDD lerin genel yazılım formu

$$F\left(x_1,x_2,...,x_m,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},...,\frac{\partial u}{\partial x_m},\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2},...,\frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2},...,\frac{\partial^n u}{\partial x_m^n}\right)=0 \tag{1.1}$$

biçimindedir. Burada, $x_1,x_2,...,x_m$ bağımsız değişkenler, F tüm argümanlarına göre tanımlı, bilinen fonksiyon ve $u(x_1,x_2,...,x_m)$ ise bilinmeyen fonksiyon olmaktadır.

Tanım 1.2 Diferansiyel denklemin içerdiği bilinmeyen fonksiyonun türevlerinin en yüksek mertebesine denklemin *mertebesi* (veya *basamağı*) denir.

Eğer $n=1$ olursa (1.1) denklemi birinci mertebeden KTDD dönüşür ve genel yazılım formu

$$F\left(x_1,x_2,...,x_m,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},...,\frac{\partial u}{\partial x_m}\right)=0 \tag{1.2}$$

şeklini alır. Genelde biz ikinci mertebeden KTDD leri inceleyeceğiz. Kolaylık için $m=2$ alalım. Yer eksenlerinin sayısının iki olduğu durumda ikinci mertebeden KTDD in genel yazılım formu

$$F\left(x_1,x_2,u,\ \frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2},\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)=0 \tag{1.3}$$

biçimindedir.

Kolaylık için bazı durumlarda x_1,x_2,x_3 değişkenlerini $(x,\ y,\ z)$ gibi de göstereceğiz. Fizikte zamana bağlı değişen büyüklükleri ifade etmek için zaman değişkeni özel olarak t harfi ile göstereceğiz.

Tanım 1.3 Eğer (1.1) denklemindeki F fonksiyonu, bilinmeyen fonksiyona ve onun tüm türevlerine göre lineer olursa, böyle denklemlere *lineer* KTDD denir.

Diferansiyel denklemlerin lineerlik özelliğini denklemin operatör yazılım formunu kullanarak ifade edelim. Bundan dolayı,

$$\Im(u)=f(x) \tag{1.4}$$

şekilde yazılmış denklemi göz önüne alalım. Burada, $\Im(u)=\Im\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)$ değişkenlerine bağlı polinomsal bir bilinen fonksiyon ve $x=(x_1,x_2,...,x_m)$ olmaktadır.

Tanım 1.4 D de tanımlı keyfi u ve v fonksiyonları ve keyfi c sabiti için

1^0. $\Im(u+v)=\Im(u)+\Im(v)$,

2^0. $\Im(cu)=c\Im(u)$

koşullarını sağlayan $\Im$ operatörüne *lineer operatör* denir. Eğer $\Im$ operatörü lineer olursa, (1.4) denklemine de lineer denklem denir. (1.4) denkleminde $f(x) \equiv 0$ ise denkleme *homojen*, $f(x) \neq 0$ ise denkleme *homojen olmayan* (veya *sağ taraflı*) denklem denir.

Örnek 1.2

1) $u_x + u_y = 0,$

2) $x\ u_x + y^2 u_y = \sin x,$

3) $u_t - u_x = u$

4) $u_t + cu_x = \mu u_{xx},$

5) $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$

6) $u_t + cu_x = \mu u_{xxx},$

7) $u_{tt} - c^2 u_{xxxx} = 0$

ise sırasıyla 1,2,3 birinci mertebeden, 4,5 ikinci mertebeden, 6 üçüncü ve 7 dördüncü mertebeden lineer kısmi türevli diferansiyel denklemlere örnek oluşturmaktadır. Gerçekten de, eğer $\Im(\cdot)$ operatörünü $\Im(\cdot) = (\cdot)_x + (\cdot)_y$ ile gösterirsek 1) denklemi $\Im u = 0$ şeklinde yazılabilir. Buradan da $\Im$ operatörünün lineer olduğu kolayca görülür.

Birinci ve ikinci mertebeden KTDD lerin genel yazılım formları

$$a(x_1,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1} + b(x_1,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2} + c(x_1,x_2)u = d(x_1,x_2), \tag{1.5}$$

$$A(x_1,x_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + B(x_1,x_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_2} + C(x_1,x_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + D(x_1,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1} +$$

$$E(x_1,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2} + F(x_1,x_2)u = G(x_1,x_2) \tag{1.6}$$

biçimindedir. Burada, $a(x_1,x_2),\ b(x_1,x_2),\ c(x_1,x_2)$ denklemin katsayıları, $d(x_1,x_2)$ ise denklemin sağ tarafı olup, bilinen fonksiyonlardır.

Tanım 1.5 Eğer (1.1) denklemindeki *F*, bilinmeyen fonksiyona ve onun en yüksek mertebeden türevlerine göre nonlineer fonksiyon olursa, böyle denklemlere *nonlineer* (veya *lineer olmayan*) *KTDD* denir.

Örnek 1.3

1) $u_x^2 + u_y^2 = 1,$

2) $\mathrm{v}_\mathrm{t} + \frac{1}{2}(v_x)^2 = 0,$

3) $(u_x)^2 + yu_y - u = 0$

4) $u_x^2 u_y = 1$

lineer olmayan denklemlerdir.

Tanım 1.6 Eğer (1.1) denklemindeki *F*, bilinmeyen *u* fonksiyonunun yüksek mertebeden türevlerine göre lineer fonksiyon ise, böyle denklemlere kuazilineer KTDD denir.

Örnek 1.4

1) $\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + u^2 = 0,$

2) $u_t + uu_x = u,$

3) $\frac{\partial u}{\partial t} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$

kuazilineer denklemlerdir.

Birinci ve ikinci mertebeden kuazilineer denklemlerin genel yazılım formu sırasıyla

$$a(x_1, x_2, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + b(x_1, x_2, u)\frac{\partial u}{\partial x_2} = d(x_1, x_2, u), \tag{1.7}$$

$$A\left(x_1, x_2, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + B\left(x_1, x_2, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_2} +$$

$$C\left(x_1, x_2 u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = D\left(x_1, x_2, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) \tag{1.8}$$

olmaktadır.

Tanım 1.7 $a(x_1, x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1} + b(x_1, x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2} + c(x_1, x_2, u) = 0$ şeklinde olan denklemlere *hemi* (veya *yarı*) lineer denklemler denir.

Örnek 1.5

1) $u_t - u_{xx} = u^2$,

2) $u_t - u_{xx} = u(1-u)$

denklemleri yarı lineerdir.

Tanım 1.8 Eğer tüm değişkenlerine göre n kez sürekli diferansiyellenebilen bir $u = \varphi(x_1, x_2, ..., x_m)$ fonksiyonu, (1.1) denkleminde yerine konulduğunda denklemi özdeş olarak sağlıyorsa, böyle fonksiyonlara diferansiyel denklemin *çözümü* (veya *klasik çözümü*) denir.

Bu kitapta, genelde fizikte çok sık rastlanan birinci ve ikinci mertebeden denklemlerin incelenmesi planlaştırılmıştır. Bundan dolayı, özel olarak matematiksel fiziğin aşağıdaki ünlü denklemleri göz önüne alınacaktır:

- ısı iletim denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right) + f_1(x_1, x_2, x_3), \tag{1.9}$$

- Dalga denklemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right) + f_2(x_1, x_2, x_3), \tag{1.10}$$

- Potansiyel veya Poisson denklemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = f_3(x_1, x_2, x_3), \tag{1.11}$$

$f_3(x_1, x_2, x_3) = 0$ olduğu durumda (1.11) denklemine Laplace denklemi denir.

Fizik denklemleri ile ilişkisi açısından, bu konu önemli ölçüde fiziğe çok yakın olmaktadır ve bundan dolayı söz konusu denklemlere bazı durumlarda *matematiksel fizik* denklemleri de denilmektedir. Bu gibi durumlarda önemli olan, matematiksel modelin fiziksel modelin özelliklerini düzgün ifade etmesidir. Bu açıdan göz önüne alınan denklemlerin, fiziğin dinamiğini düzgün ifade eden çözümünün bulunması yöntemlerinin seçilmesi de önem taşımaktadır.

Matematiksel fizik denklemlerinin fiziksel sınıflandırılmasına göre KTDD ler *durgun* (veya *stasyoner*) ve *durgun olmayan* şeklinde ikiye ayrılır. Zaman değişkenine bağlı olmayan Laplace ve Poisson denklemleri durgun, ısı iletim ve dalga denklemleri ise durgun olmayan denklemlerdir.

2. İKİ BOYUTLU DENKLEMLER

Bu bölümde iki boyutlu kuazilineer denklemler için yazılmış Cauchy probleminin gerçek çözümünü elde edecek ve çözümün bazı özelliklerini inceleyeceğiz. D_T ile aşağıdaki bölgeyi $D_T = R^2 \times [0,T]$ gösterelim, burada $R^2, (x, y)$ noktalarının Euklid uzayı olmaktadır. Kolaylık için önce sabit katsayılı denklemleri göz önüne alalım.

2.1 Sabit Katsayılı Denklem İçin Cauchy Problemi

Yapılacak işlerin kolaylığı adına yer değişkenlerinin sayısı $n = 2$ olsun ve aşagıdaki gibi sabit katsayılı denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{2.1}$$

gözönüne alalım. Burada A ve B bilinen reel sabitler olmaktadır.

(2.1) denkleminin geometrik anlamını verelim. (2.1) denkleminin herhangi bir $u(x, y, t)$ yüzeyi (x, y, t, u) uzayının herhangi bir $P(x, y, t, u)$ noktasında bileşimleri $u_x = p, u_y = q, u_t = \pi$ olan $\pi + Ap + Bq = 0$ denklemi ile tanımlanan normal düzleme sahip olmaktadır, yani $P(x, y, t, u)$ noktasından geçen integral yüzeylerinin teğet düzlemi

$$dt : dx : dy : du \equiv 1 : A : B : 0$$

bağlantılarıyla verilen düzlemler demeti olmaktadır.

Şimdi (2.1) denklemini

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y) \tag{2.2}$$

koşulu çerçevesinde inceleyelim. Sonraki bölümlerde (2.1), (2.2) problemini esas problem olarak adlandıracağız.

Önce $A = B = 1$ olan durumu inceleyelim. Karakteristikler yönteminin genel yapısına göre (2.1) denkleminin çözümü aşağıdaki adi differansiyel denklemler sisteminin de

$$\frac{dx}{dt} = 1, \frac{dy}{dt} = 1, \frac{du}{dt} = 0 \tag{2.3}$$

çözümü olmaktadır [1], [2], [3] ve tersine, (2.3) denklemler sisteminin çözümü (2.1) in de çözümü olmaktadır. (2.3) denklemler sistemi için başlangıc koşulları aşağıdaki gibi

$$x|_{t=0} = \xi, \quad y|_{t=0} = \eta, \quad u|_{t=0} = u_0(\xi, \eta) \tag{2.4}$$

yazalım, burada ξ ve η bilinen sabitler olmaktadır. Kolayca gösterilebilir ki (2.3), (2.4) probleminin çözümü

$$u(x,y,t)=u_0(x-t,y-t) \tag{2.5}$$

şeklinde ifage edilebilir.

2.2 Yardımcı Problem ve Onun Çözümü

[4], [5] kaynaklarını takip ederek, (2.1), (2.2) problemi için iki tür yardımcı problem oluşturalım ve onları kullanarak esas problemin gerçek çözümünü bulalım. Bu amaçla L ile aşağıdaki operatörü

$$L\cdot=\frac{\partial\,\cdot}{\partial x}+\frac{\partial\,\cdot}{\partial y}$$

gösterelim. Bu notasyonunda (2.1) denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t}+Lu=0 \tag{2.6}$$

gibi yazılabilir. L^{-1} ile L ile operatörünün tersini gösterelim. L^{-1} in varlığını kabul ederek (2.6) nın her iki tarafına L^{-1} i uygularsak

$$L^{-1}\frac{\partial u}{\partial t}+L^{-1}Lu=L^{-1}0$$

ve buradan

$$\frac{\partial L^{-1}u}{\partial t}+u=h(x,y) \tag{2.7}$$

elde ederiz. Burada, $h(x,y)=L^{-1}0$ olmaktadır, yani h fonksiyonu $Lh=0$ denklemini koruyor, dolayısıyla $h\in kerL$ olmaktadır.

$$L^{-1}u=v \tag{2.8}$$

notasyonunda sonuncu denklem

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u=h(x,y)$$

gibi yazılabilir. $h\in kerL$ olduğundan açıktır ki, $h=f(x-y)$ şeklinde ifade ediler, burada f herhangi bir diferansiyellenebilen fonksiyon olmaktadır.

$$w(x,y,t)=v(x,y,t)-tf(x-y)$$

olsun. Bu notasyonda (2.7) denklemi

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u=0$$

şeklinde yazılabilir. $Lv=Lw$ olduğundan son denklemi

$$\frac{\partial w}{\partial t} + Lw = 0 \qquad (2.9)$$

gibi ifade ederiz. (2.9) denklemi için başlangıç koşul

$$w(x, y, 0) = w_0(x, y) \qquad (2.10)$$

olmaktadır. Burada

$$u_0(x, y) = Lw_0(x, y) \qquad (2.11)$$

denklemini koruyan herhangi bir fonksiyon olmaktadır. . (2.9), (2.10) problemini 1.tür yardımcı problem adlandıralım.

Teorem 2.1 Eğer $v(x, y, t)$ (2.9), (2.10) probleminin çözümü ise

$$u(x, y, t) = Lv(x, y, t)$$

eşitliği ile tanımlanan $u(x, y, t)$ fonksiyonu (2.1), (2.2) probleminin çözümü olmaktadır.

İspat. $v(x, y, t)$ fonksiyonu (2.9), (2.10) probleminin çözümü, L ve $\frac{\partial}{\partial t}$ opertörlerinin komutatif olduğu varsayımı çerçevesinde (2.9) denklemi ve (2.10) başlangıç koşuluna L operatörünü uygulayalım. L lineer olduğundan

$$0 = L\frac{\partial w}{\partial t} + Lu = \frac{\partial Lw}{\partial t} + Lu$$

elde ederiz. $Lw = u$ olduğundan teoremi ispatlamış oluruz.

Örnek 2.1 (2.1) denklemini

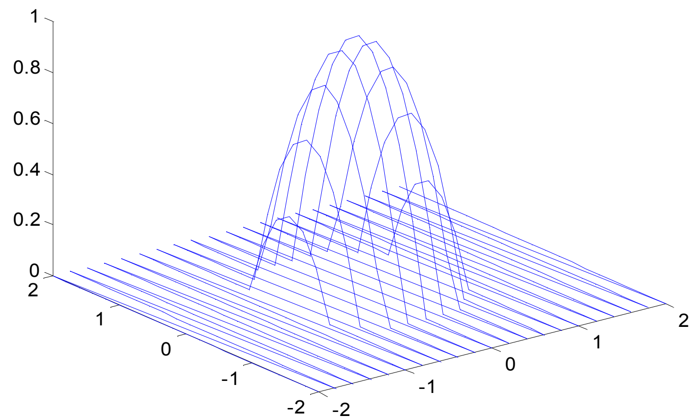
$$u(x, y, 0) = \begin{cases} 1 - x^2 - y^2, & |x| \le 1 \\ \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \qquad (2.12)$$

başlangıç koşulu çerçevesinde çözümünü bulunuz. Burada, $|x| = \sqrt{x^2 + y^2}$ olmaktadır. (2.12) formülü ile verilen fonksiyonun grafiği Şekil 1 de gösterilmiştir.

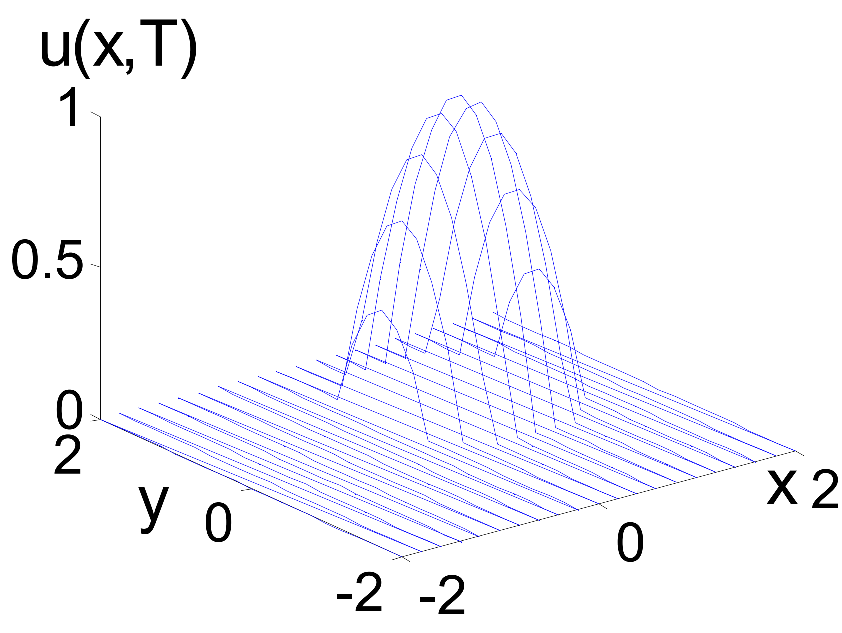
Çözüm. (2.1), (2.12) probleminin karakteristikler metodu ile bulunan çözümü

$$u(x, y, t) = \begin{cases} 1 - (x-t)^2 - (y-t)^2, & |x| \le 1 \\ \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

olmaktadır. Elde edilen çözümün grafiği Şekil 2 de gösterilmiştir.



Şekil 1. $u_0(x, y)$ fonksiyonunun grafiği



Şekil 2. $u(x, y, t)$ fonksiyonunun grafiği, $T = 1.0$

Şimdi (2.1), (2.12) probleminin çözümünü yardımcı problem aracıyla elde edelim. Söz konusu problem için yardımcı problem (2.9),(2.10) şeklinde olmaktadır. Sözkonusu problemin gerçek çözümünü elde etmek için önce $w_0(x,y)$ başlangıç fonksiyonu bulmak gerekiyor. Bunun için aşağıdaki denklemin

$$\frac{\partial w_0}{\partial x}+\frac{\partial w_0}{\partial y}=1-x^2-y^2$$

çözümünü bulalım.

Karakteristiklerin denklemleri

$$\frac{dx}{ds}=1,\ \frac{dy}{ds}=1,\ \frac{dw_0}{ds}=1-x^2-y^2$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} &x=x^{(0)}+s,\ \ y=y^{(0)}+s,\\ &w_0=s-\frac{\left(x^{(0)}+s\right)^3}{3}-\frac{(y^{(0)}+s)^3}{3}+v_0^{(0)} \end{aligned} \tag{2.13}$$

elde ederiz. Burada, $x^{(0)}, y^{(0)}$ ve $w_0^{(0)}$ integralleme sabitleri olmaktadırlar. Karakteristiklerin denklemleri

$$x^{(0)}=x^{(0)}(t),\ \ y^{(0)}=y^{(0)}(t),\ \ w_0^{(0)}=w_0^{(0)}(t)$$

şeklinde verildiği taktirde (2.13)

$$\begin{cases} x(s,t)=x^{(0)}(t)+s,\\ y(s,t)=y^{(0)}(t)+s,\\ w_0(s,t)=s-\dfrac{\left(x^{(0)}(t)+s\right)^3}{3}-\dfrac{\left(y^{(0)}(t)+s\right)^3}{3}+w_0^{(0)}(t) \end{cases} \tag{2.14}$$

şeklinde yazıla bilir.

$$\Delta(s,t)=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s}\\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{vmatrix}\neq 0,$$

olursa (2.14) ün birinci iki denkleminden s ve t yok ederek w_0 u x ve y yardımı ile ifade edebiliriz. Özel durumda eğer başlangıç yuzeyi

$$x^{(0)}(t) = t,\ \ y^{(0)}(t) = -t,\ \ w_0^{(0)}(t) = t - \frac{2t^3}{3}$$

olarak ele alsak bu yuzey üzerinde $\Delta(s,t) \neq 0$ ve (2.14) den

$$s = y - y^{(0)},\ x = x^{(0)} + y - y^{(0)} = y + 2t,$$

$$w_0 = y + t - \frac{(t+s)^3}{3} - \frac{(-t+s)^3}{3} + t - \frac{2t^3}{3}$$

$$= y + 2t - \frac{(y+2t)^3}{3} - \frac{(y)^3}{3} - \frac{2t^3}{3}$$

elde ederiz. Buradan $2t = x - y$ olduğundan (2.14) den

$$w_0(x,y) = x - \frac{x^3}{3} - \frac{y^3}{3} - \frac{2(x-y)^3}{3} \tag{2.15}$$

alırız. Kolayca gösterilebilir ki,

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial y} = u_0$$

olmaktadır. Böylelikle L^{-1} varlığını ispatlamış oluyoruz.

(2.15) ü dikkate alırsak (2.9), (2.10) probleminin gerçek çözümünü aşağıdaki şekilde

$$w(x,y,t) = x - t - \frac{(x-t)^3}{3} - \frac{(y-t)^3}{3} - \frac{2(x-y)^3}{3} \tag{2.16}$$

elde ederiz.

Sade hesaplamalar yardımı ile göstermek mümkündür ki, $Lw = u.$ Gerçektende,

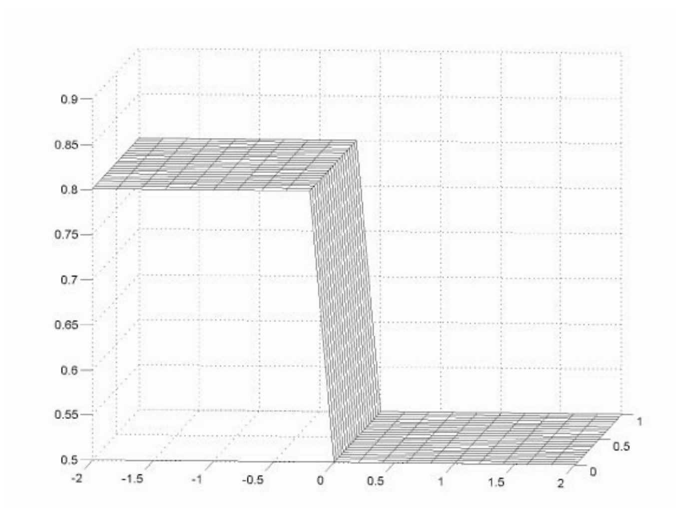
$$Lw = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)\left[x - t - \frac{(x-t)^3}{3} - \frac{(y-t)^3}{3} - \frac{2(x-y)^3}{3}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[x - t - \frac{(x-t)^3}{3} - \frac{(y-t)^3}{3} - \frac{2(x-y)^3}{3}\right]$$

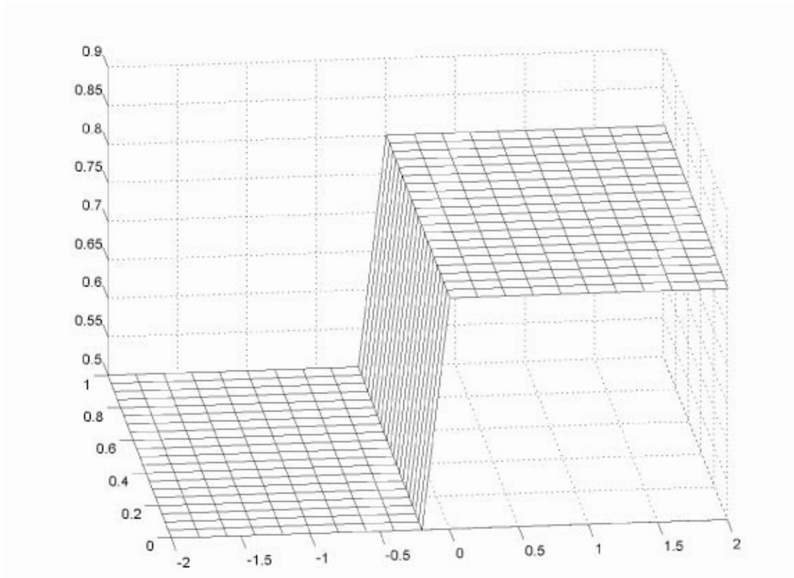
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[x-t-\frac{(x-t)^3}{3}-\frac{(y-t)^3}{3}-\frac{2(x-y)^3}{3}\right]$$

$$=1-\frac{3(x-t)^2}{3}-\frac{6(x-y)^2}{3}-\frac{3(y-t)^2}{3}+\frac{6(x-y)^2}{3}$$

$$=1-(x-t)^2-(y-t)^2=u(x,y,t).$$



Şekil 3. $u_0(x,y)$ fonksiyonunun grafiği, $u_1 > u_2$



Şekil 4. $u_0(x, y)$ fonksiyonunun grafiği, $u_1 < u_2$

Örnek 2.2 (2.1) denkleminin

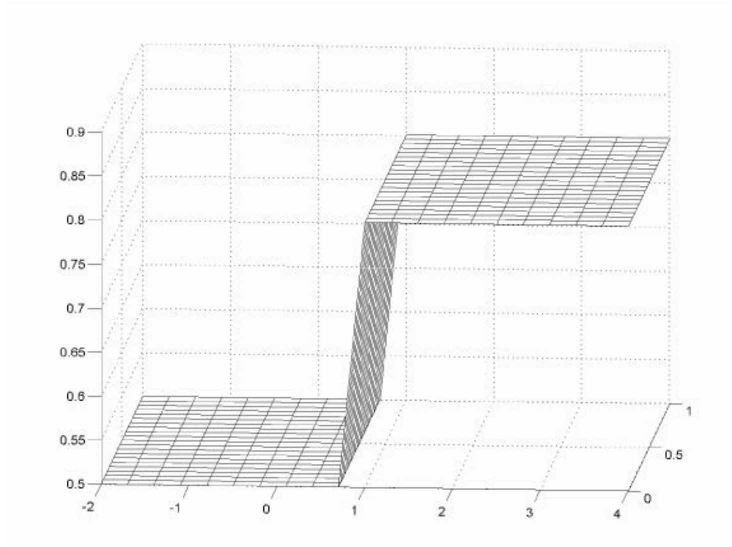
$$u_0(x,y) = \begin{cases} u_1, & x > 0, \\ & & , \quad 0 \le y \le 1 \\ u_2, & x < 0 \end{cases} \tag{2.17}$$

çerçevesinde gerçek çözümünü bulunuz. Burada, u_1 ve u_2 bilinen sabitlerdir. (2.17) ile verilen fonksiyonun grafikleri Şekil 3 ve 4 de gösterilmiştir.

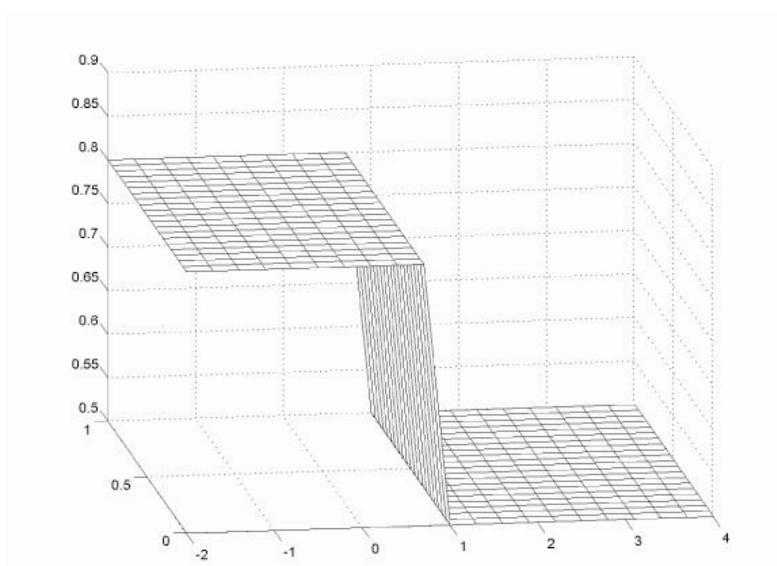
(2.1), (2.17) esas probleminin gerçek çözümü

$$u(x,y,t) = \begin{cases} u_1, & \dfrac{x}{t} < 1, \\ & & , \quad 0 \le y \le 1 \\ u_2, & \dfrac{x}{t} > 1 \end{cases}$$

olmaktadır ve söz konusu çözümüm grafikleri sırasıyla Şekil 5 ve 6 da gösterilmiştir.



Şekil 5. $u(x, y, t)$ fonksiyonunun grafiği, $u_1 < u_2, T = 0.8$

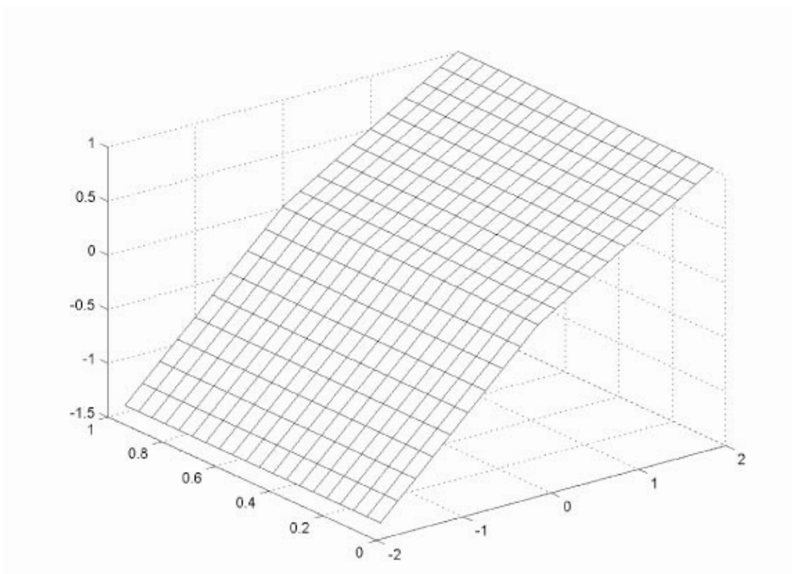


Şekil 6. $u(x, y, t)$ fonksiyonunun grafiği, $u_1 > u_2, T = 1.0$

Şimdi bu problemin çözümünü 1.tür yardımcı problemi kullanarak elde edelim. Bu amacla $w_0(x, y)$ fonksiyonunu

$$w_0(x,y)=\begin{cases} u_1 x, & x<0, \\ & , \quad 0 \le y \le 1 \\ u_2 x, & x>0 \end{cases} \tag{2.18}$$

olarak tanımlayalım. Yardımcı problemin başlangıç fonksiyonunun garafijkleri Şekil 7 ve 8 de gösterilmiştir.



Şekil 7. $v_0(x, y)$ fonksiyonunun grafiği, $u_1 < u_2$

(2.1), (2.18) yardımcı probleminin karakteristikler yöntemiyle bulunan çözümü

$$w(x,y,t)=\begin{cases} u_1(x-t), & \dfrac{x}{t}<1, \\ & , \quad 0 \le y \le 1 \\ u_2(x-t), & \dfrac{x}{t}>1 \end{cases}$$

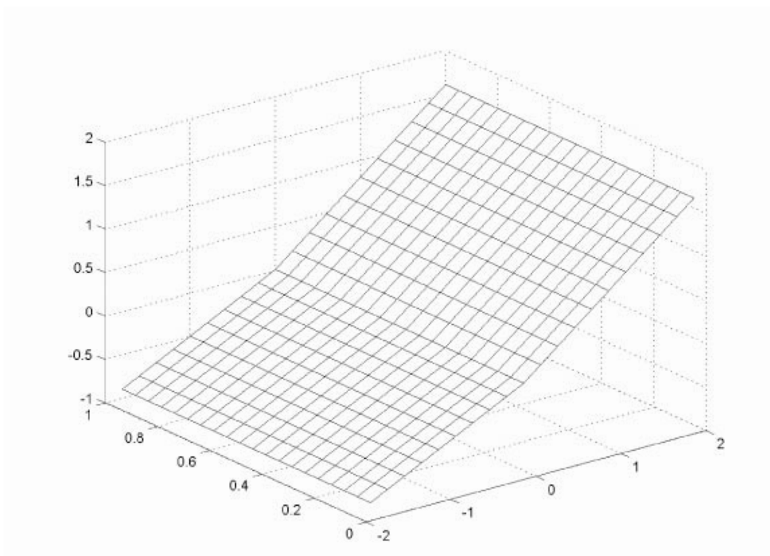
olmaktadır ve bu çözümlerin grafikleri Şekil 9 ve 10 da gösterilmiştir.

Kolayca gösterilebilir ki, $u(x,y,t) = Lw(x,y,t)$ ve bu fonksiyonların grafikleri de Şekil 11 ve 12 de gösterilmiştir. Şekil 6 ve 11 (ve yahut Şekil 4 ve 12) den görüldüğü gibi esas problemin çözümü ile yardımcı problemden elde edilen $u(x,y,t)$ fonksiyonunun grafikleri çakışmaktadır.

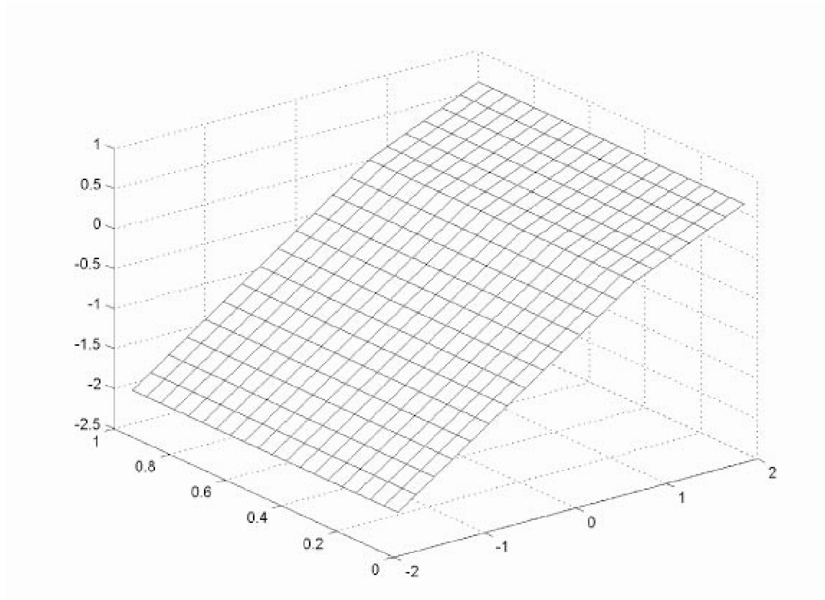
Şimdi $A \neq B$ olan durumu inceleyelim. Bu amacla

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} + A\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x} + B\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial y} = 0 \tag{2.19}$$

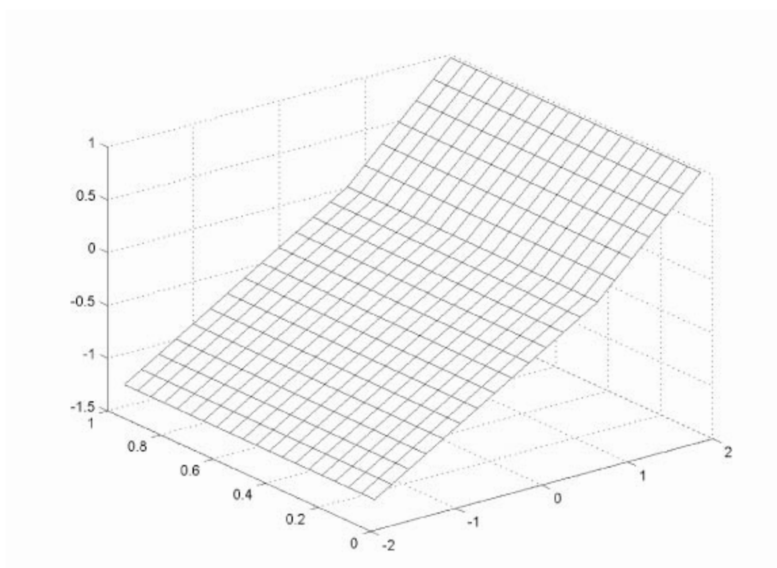
denklemini (2.2) koşulu çerçevesinde inceleyelim. Burada, A ve B bilinen sabitlerdir.



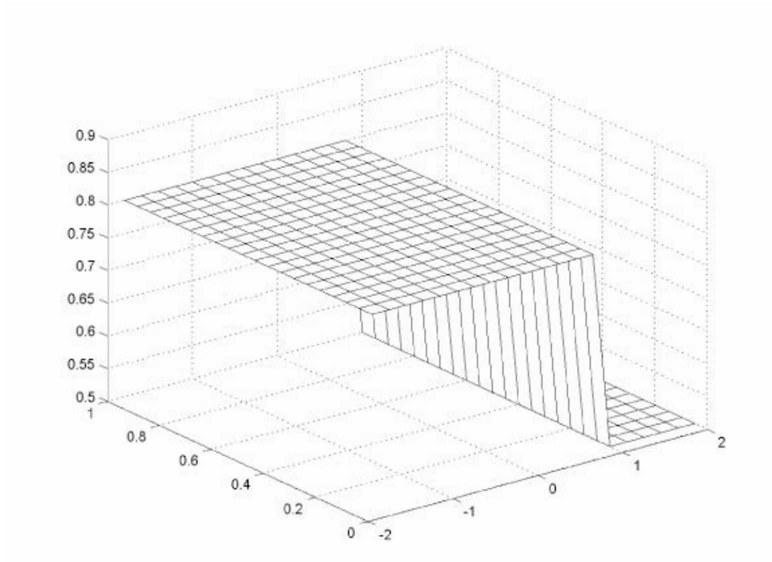
Şekil 8. $v_0(x,y)$ fonksiyonunun grafiği, $u_1 > u_2$



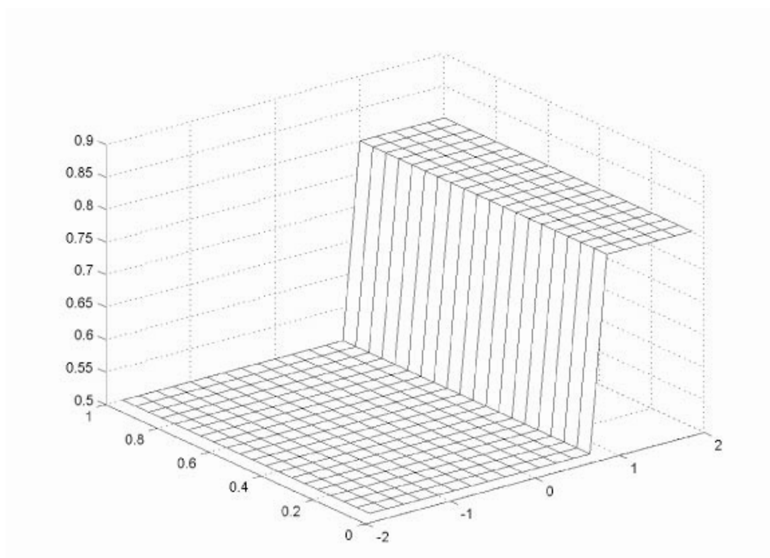
Şekil 9. $v(x, y, t)$ fonksiyonunun grafiği, $u_1 > u_2$, $T = 1.0$



Şekil 10. $v(x, y, t)$ fonksiyonunun grafiği, $u_1 < u_2$, $T = 0.8$



Şekil 11. $u(x,y,t) = Lv(x,y,t)$ fonksiyonunun grafiği, $u_1 > u_2, T = 0.8$

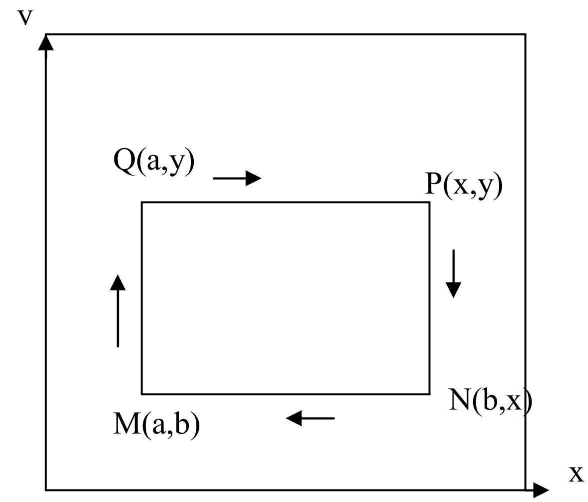


Şekil 12. $u(x,y,t) = Lv(x,y,t)$ fonksiyonunun grafiği, $u_1 < u_2, T = 0.8$

Açıktır ki, (2.19), (2.2) probleminin karakteristikler yöntemi ile elde edilen gerçek çözümü

$$u(x,y,t) = u_0(x - At, y - Bt) \tag{2.20}$$

olmaktadır.



Şekil 13. D_{xy} bölgesi

(2.20) ile tanımlanan gerçek çözüm $u_0(x,y)$ fonksiyonunun hangi koşulları koruduğunda (2.19), (2.2) probleminin zayıf çözümü de olabileceğini araştıralım. Bu amacla önce (2.19), (2.2) probleminin zayıf çözümünün tanımını verelim

Tanım 2.1 (2.2) başlangıc kosulunu ve temel fonksiyonlar sınıfından ve $\sqrt{x^2+y^2}+t$ sonsuzluğa yaklaşdığında sıfıra eşit olan herhangi bir $\varphi(x,y,t)$ fonksiyonları için aşağıdaki integral eşitliği

$$\int_{R^2}\int_{R_+^1}\{u(x,y,t)[\varphi_t(x,y,t)+A\varphi_x(x,y,t)+B\varphi_y(x,y,t)]\}dxdydt$$

$$+\int_{R^2}\varphi(x,y,0)u_0(x,y)dxdy=0 \qquad (2.21)$$

koruyan $u(x,y,t)$ fonksiyonuna (2.19), (2.2) probleminin zayıf çözümü denir.

Teorem 2.2 $u_0(x,y)$ sürekli fonksiyon olduğu taktirde, (2.20) eşitliği ile tanımlanan $u(x,y,t)$ fonksiyonu (2.19), (2.2) probleminin yumuşak (soft) çözümü olmaktadır.

İspat. Zayıf çözümün tanımına göre, herhangi bir pürüzsüz ve $\sqrt{x^2+y^2}+t$ in büyük değerlerinde sıfıra eşit olan $v(x,y,t)$ fonksiyonu için

$$\int_{R^2}\int_{R_+^1}\{u(x,y,t)[v_t(x,y,t)+Av_x(x,y,t)+Bv_y(x,y,t)]\}dxdydt$$

$$+\int_{R^2}v(x,y,0)u_0(x,y)dxdy=0 \tag{2.22}$$

olmaktadır.

Aşağıdaki değişken dönüşümlerini

$$\xi = x-At,\ \ \eta = y-Bt,\ \ h_t = t \tag{2.23}$$

yapalım. Yeni değişkenlerde (2.22)

$$\int_{R^2}\int_{R_+^1}\{u(\xi,\eta,h_t)v_{h_t}(\xi,\eta,h_t)\}d\xi d\eta dh_t+\int_{R^2}v(\xi,\eta,0)u_0(\xi,\eta)d\xi d\eta=0$$

ve buradan

$$\int_{R^2}\left\{\int_0^\infty u(\xi,\eta,h_t)v_{h_t}(\xi,\eta,h_t)dh_t+v(\xi,\eta,0)u(\xi,\eta,0)\right\}d\xi d\eta=0$$

gibi yazılabilr.

$$F(\xi,\eta)=\int_0^\infty u(\xi,\eta,h_t)v_{h_t}(\xi,\eta,h_t)dh_t$$

olsun. Bu notasyonda sonuncu ifade

$$\int_{R^2}[F(\xi,\eta)+u(\xi,\eta,0)v(\xi,\eta,0)]d\xi d\eta=0$$

olur ve $F(\xi,\eta)+u(\xi,\eta,0)v(\xi,\eta,0)=0$ olmaktadır, aks taktirde ölçüsü sıfırdan farklı herhangi bir $[\xi_1,\xi_2,]\times[\eta_1,\eta_2]$ bölgesi için

$$\int_{R^2}[\overline{F}(\xi,\eta)+u(\xi,\eta,0)\overline{v}(\xi,\eta,0)]d\xi d\eta>0$$

olduğunu elde ederiz. Böylelikle

$$\int_{R_+^1}u(\xi,\eta,h_t)v_{h_t}(\xi,\eta,h_t)dh_t+v(\xi,\eta,0)u(\xi,\eta,0)=0$$

olmaktadır. $\int_{R_+^1}v_{h_t}(\xi,\eta,h_t)dh_t=-v(\xi,\eta,0)$ olduğundan

$$\int_{R_+^1}v_{h_t}(\xi,\eta,h_t)u(\xi,\eta,0)dh_t=-v(\xi,\eta,0)u_0(\xi,\eta,0)$$

ve aşağıdaki

$$\int_{R_+^1}[u(\xi,\eta,h_t)-u(\xi,\eta)]v_{h_t}(\xi,\eta,h_t)dh_t=0$$

eşitliği elde dederiz. u fonksiyonunun sürekli olması koşulundan

$$u(x,y,t)=u(\xi,\eta)=u_0(x-At,y-Bt)$$

elde ederiz.

Teorem 2.3 $u(x,y,t)=u_0(x-At,y-Bt)$ integrellene bilen fonksiyon olduğu taktirde, $u(x,y,t)$ esas problemin zayıf çözümü olmaktadır.

İspat. $v(x,y,t)$, $\sqrt{x^2+y^2}+t$ ifadesinin yeteri kadar büyük değerlerinde sıfıra çevrilen fonksiyon olsun. Aşağıdaki ifadeyi göz önüne alalım

$$\int_{R^2}\int_{R_+^1}u_0(x-At,y-Bt)\{v_t(x,y,t)+Av_x(x,y,t)+Bv_y(x,y,t)\}dxdydt+$$

$$+\int_{R^2}v(x,y,0)u_0(x,y)dxdy \qquad (2.24)$$

(2.23) dönüşümü dikkata alınırsa

$$\int_{R^2}\int_{R_+^1}u_0(\xi,\eta)v_{h_t}(\xi,\eta,h_t)d\xi d\eta dh_t+\int_{R^2}v(\xi,\eta,0)u_0(\xi,\eta)d\xi d\eta$$

elde ederiz. Sonuncu ifadede h_t in büyük değerlerinde $v=0$ olduğunu dikkate alarak h_t e göre integrelleme işlemi yapıldığında integralın sonuncu sıfıra eşit olur, yani u fonksiyonu esas problemin zayıf çözümü olur.

Şimdi (2.19), (2.2) problemi için yardımcı problem oluşturalım. D_{xy} ile aşağıdaki gibi tanımlanmış bölgeyi $D_{xy}=\{(\xi,\eta),\ a\le\xi\le x,\ b\le\eta\le y\}\subseteq R^2, t\in R_+^1$ gösterelim, Şekil 13.

(2.19) denklemini D_{xy} bölgesi üzere x ve y göre integrelleyip

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint_{D_{xy}}u(\xi,\eta,t)d\xi d\eta+\iint_{D_{xy}}[A\frac{\partial u(\xi,\eta,t)}{\partial\xi}+B\frac{\partial u(\xi,\eta,t)}{\partial\eta}]d\xi d\eta=0$$

ve sonra da Green formülünü uygulayarsak

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_a^x\int_b^y u(\xi,\eta,t)d\xi d\eta+\int_{\partial D_{xy}}Audy-Budx=0$$

ve buradan

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_a^x\int_b^y u(\xi,\eta,t)d\xi d\eta + A\int_b^y [u(x,\eta,t)-u(a,\eta,t)]d\eta$$

$$-B\int_a^x [u(\xi,y,t)-u(\xi,b,t)]d\xi = 0$$

elde ederiz. Sonuncu ifadeyi böyle de

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_a^x\int_b^y u(\xi,\eta,t)d\xi d\eta + A\int_b^y u(x,\eta,t)d\eta -$$

$$-B\int_a^x u(\xi,y,t)d\xi = \varphi(a,y,t)+\psi(x,b,t) \qquad (2.25)$$

yaza biliriz. Burada,

$$\varphi(a,y,t) = A\int_b^y u(a,\eta,t)d\eta,\ \ \psi(x,b,t) = B\int_a^x u(\xi,b,t)d\xi \qquad (2.26)$$

olmaktadır.

$\Im$ ile aşağıdaki operatörü

$$\Im(\cdot) = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x\partial y} \qquad (2.27)$$

ve $v(x,y,t)$ ile ise fonksiyonu

$$v(x,y,t) = \int_a^x\int_b^y u(\xi,\eta,t)d\xi d\eta + \Phi(a,y,t)+\Psi(x,b,t) \qquad (2.28)$$

gösterelim. Kolayca gösterilebilür ki, $H(a,b,x,y,t)=\varphi(a,y,t)+\psi(x,b,t)\in ker\Im$. Gerçektende,

$$\Im[\varphi(a,y,t)+\psi(x,b,t)] = \Im[A\int_b^y u(a,\eta,t)d\eta + B\int_a^x u(\xi,b,t)d\xi] =$$

$$A\frac{\partial u(a,\eta,t)}{\partial x} + B\frac{\partial u(x,b,t)}{\partial y} = 0,$$

yani, $\Im H(a,b,x,y,t)=0$.

(2.27) ve (2.28) dikkate alınırsa (2.25) denklemi

$$\frac{\partial v(x,y,t)}{\partial t} + A\frac{\partial v(x,y,t)}{\partial x} + B\frac{\partial v(x,y,t)}{\partial y} = 0. \qquad (2.29)$$

şekline düşer. (2.28) den

$$u(x,y,t)=\Im v(x,y,t)=\frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial x\partial y} \qquad (2.30)$$

elde ederiz. Gerçektende, (2.28) ifadesini bir kez x e, bir kes de y e göre diferansiyelersek (2.30) un doğru olduğunu ispatlamış oluruz.

(2.29) denklemi için başlangıç koşul

$$v(x,y,0)=v_0(x,y), \qquad (2.31)$$

olur ve burada $v_0(x,y)$ fonksiyonu

$$\frac{\partial^2 v_0(x,y)}{\partial x\partial y}=u_0(x,y)$$

denklemini koruyan herhangi bir fonksiyon olmaktadır.

(2.29), (2.31) problemini 2.tür yardımcı problem adlandıracağız. Söz konusu yardımcı problemin aşağıdaki avantajları vardır:

- $v(x,y,t)$ fonksiyonunun x ve y e göre diferansiyellenebilme özelliği $u(x,y,t)$ fonksiyonunun x ve y e göre diferansiyellenebilme özelliğinden fazla olmaktadır,
- $u(x,y,t)$ fonksiyonu süreksiz de olabilir,
- $u(x,y,t)$ çözümünü bulurken u_x, u_y ve u_t türevlerini kullanmaya gerek yoktur, zaten denklemin içerdiği söz konusu türevler genelde mevcut olmaya da bilir. Altını çizelim ki, yardımcı problem tek olarak tanımlanmamaktadır.

Teorem 2.4 Eğer, $v(x,y,t)$ (2.29), (2.31) yardımcı probleminin yumuşak çözümü ise (2.30) eşitliği ile tanımllanan $u(x,y,t)$ esas problemin zayıf çözümü olmaktadır.

İspat. $\varphi(x,y,t)$ test fonksiyonlar sınıfından ve t in büyük değerlerinde sıfır olan fonksiyon olsun ve aşağıdaki ifadeyi göz önüne alalım

$$0=\int_{D_{ab\times[0,T)}}\Im\varphi(x,y,t)\left\{\frac{\partial v}{\partial t}+A\frac{\partial v}{\partial x}+B\frac{\partial v}{\partial y}\right\}dxdydt.$$

Gereken integrelleme işlemlerini yaparsak

$$\int_{D_{ab\times[0,T)}}\varphi(x,y,t)\left\{\frac{\partial \Im v}{\partial t}+A\frac{\partial \Im v}{\partial x}+B\frac{\partial \Im v}{\partial y}\right\}dxdydt=0.$$

elde ederiz. Sonuncu ifadede sırasıyla t, x ve y e göre kısmi integrasyon formüllerini uygularsak

$$\int_{D_{ab\times[0,T)}} \varphi(x,y,t)\left\{\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} + A\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x} + B\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial y}\right\} dxdydt = 0.$$

elde dereriz. $\varphi(x,y,t)$ fonksiyonunun keyfi olduğu dikkate alırsak Teorem 3 ispatlanmış olur.

Örnek 2.3 (2.19), (2.17) problemini 2.tür yardımcı problemi kullanarak çözünüz.

Bu durumda $v_0(x,y)$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi

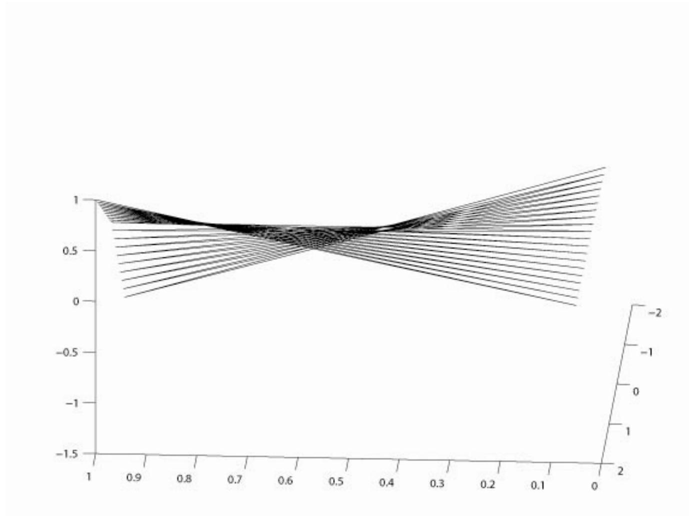
$$v_0(x,y) = \begin{cases} u_1 xy, & -2 \le x \le 0 \\ & \qquad\qquad 0 \le y \le 1 \\ u_2 xy, & 0 \le x \le 2 \end{cases} \tag{2.32}$$

tanımlayalım. $v_0(x,y)$ fonksiyonunun grafikleri Şekil 14 ve 15 de gösterilmiştir.

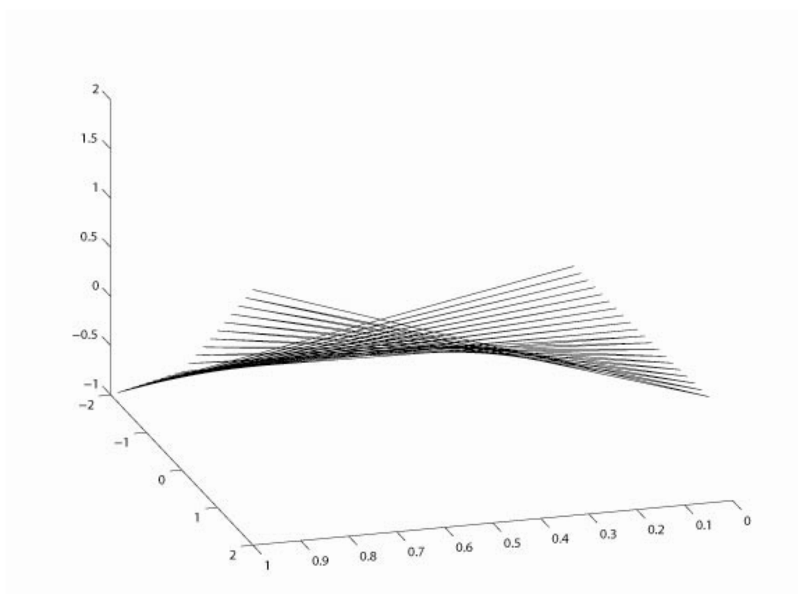
(2.29), (2.32) probleminin karakteristikler yöntemi ile bulunan çözümü

$$v(x,y,t) = \begin{cases} u_1(x-At)(y-Bt), & -2 \le x \le 0 \\ u_2(x-At)(y-Bt), & 0 \le x \le 2 \end{cases} \tag{2.33}$$

olmaktadır ve bu çözümün grafiği Şekil 16 ve 17 de gösterilmiştir.

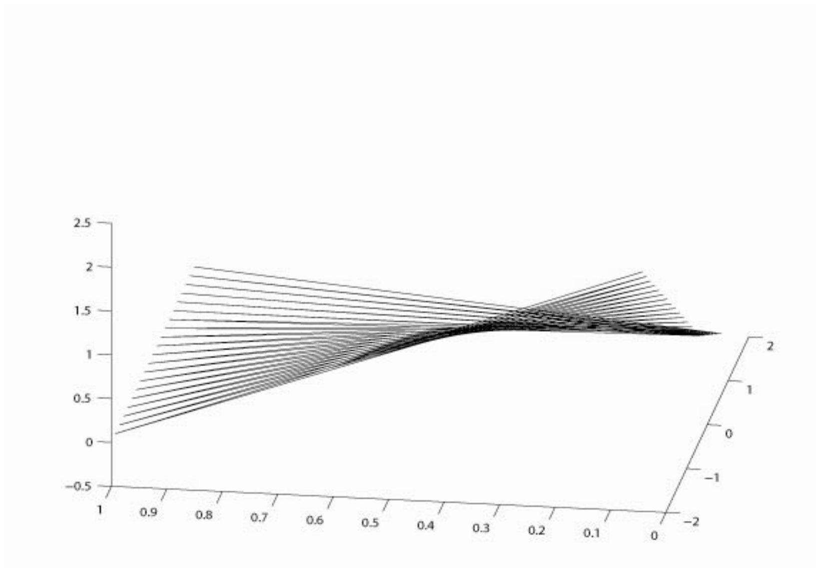


Şekil 14. $v_0(x, y)$ fonksiyonunun grafiği, $u_1 > u_2$

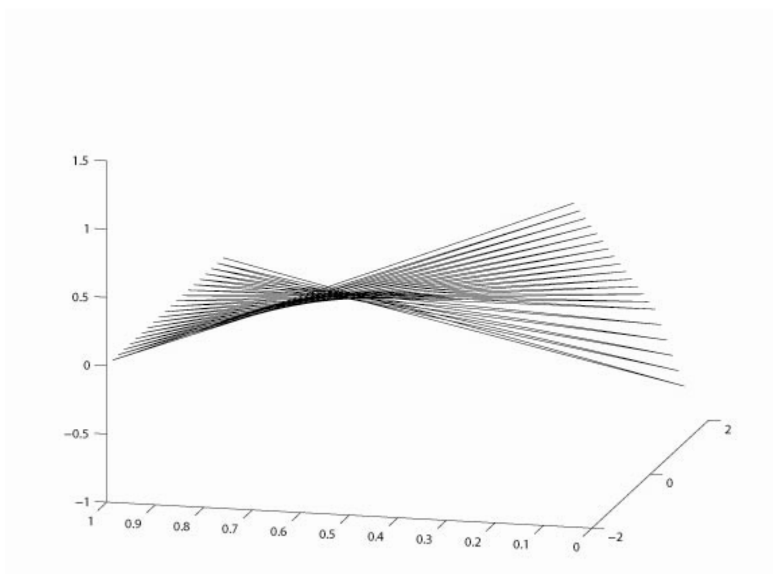


Şekil 15. $v_0(x, y)$ fonksiyonunun grafiği, $u_1 < u_2$

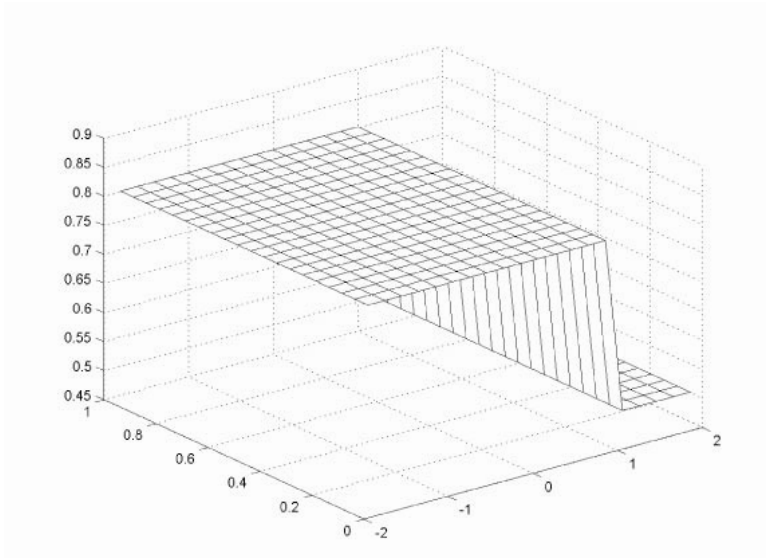
Şekil 16 ve 17 de ise (2.30) yardımı ile bulunan $u(x, y, t)$ fonksiyonunun grafikleri yer almaktadır. Şekilde görüldüğü gibi yardımcı problem aracıyla bulunan çözümle esas problemin çözümü çakışıyor.



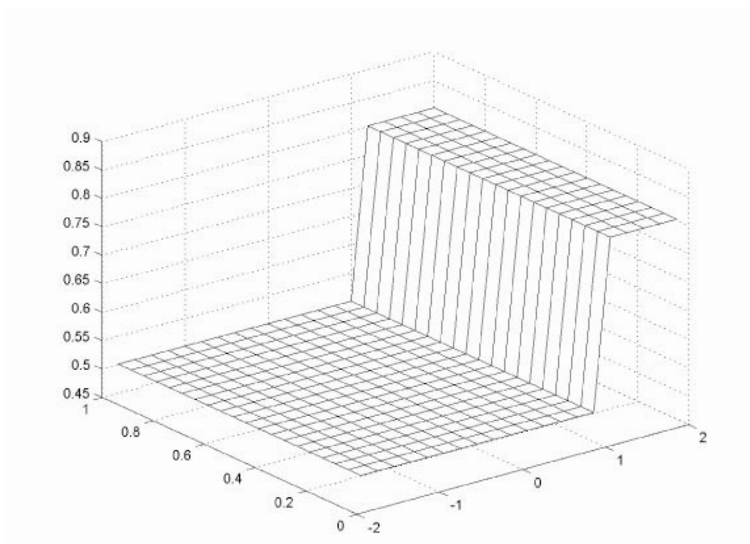
Şekil 16. $v(x, y, t)$ fonksiyonunun grafiği, $u_1 > u_2, T = 1.0$



Şekil 17. $v(x, y, t)$ fonksiyonunun grafiği, $u_1 < u_2, T = 1.0$

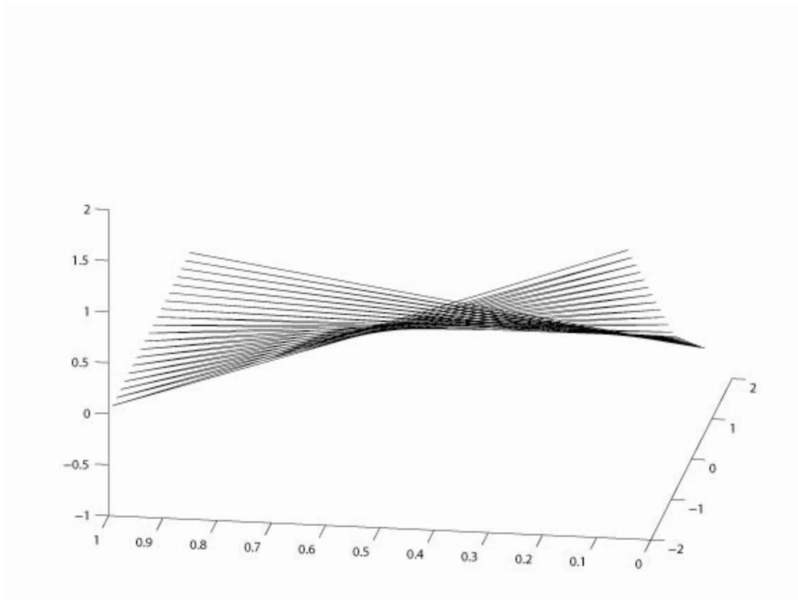


Şekil 18. $u(x,t,t) = \Im v(x,y,t)$ fonksiyonunun grafiği, $u_1 > u_2, T = 1.0$

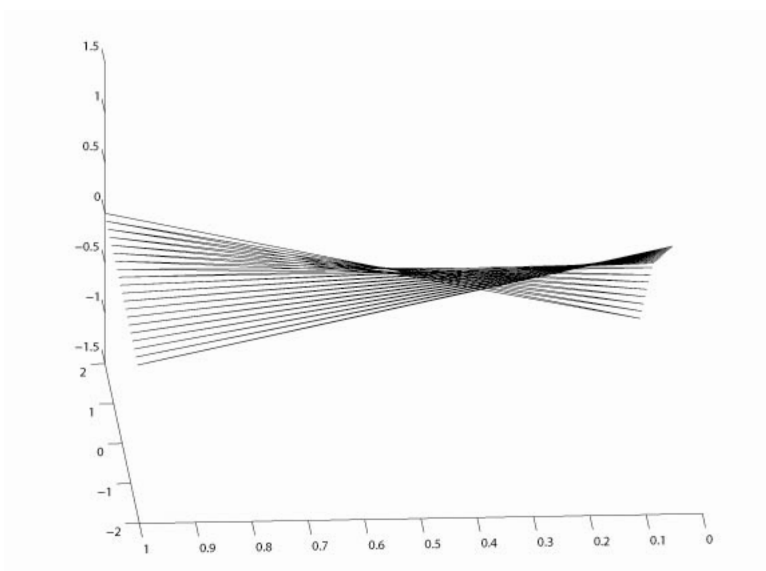


Şekil 19. $u(x,t,t) = \Im v(x,y,t)$ fonksiyonunun grafiği, $u_1 < u_2, T = 1.0$

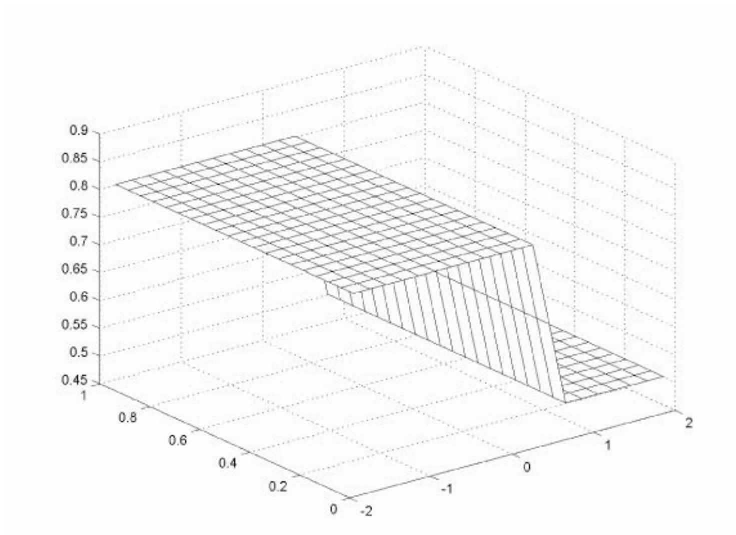
Grafiklerden birinci ve ikinci tür yardımcı problemlerden elde edilen çözümler $A = B = 1$ olduğu durumda çakışmaktadır. $A \neq B$ olan durum için bulunan çözümlerin grafikleri sırasıyla Şekil 20-23 de yer almaktatır.



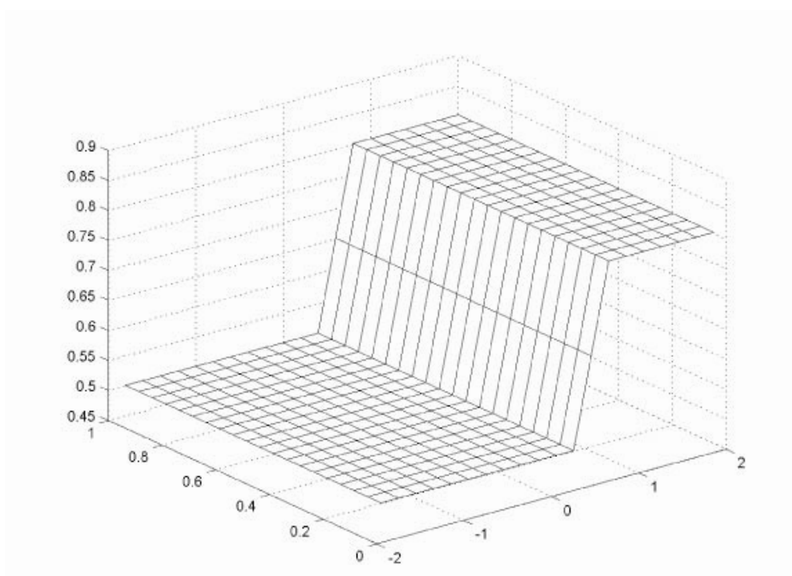
Şekil 20. $v(x,y,t)$ fonksiyonunun grafiği, $u_1 > u_2, A = 0.5, B = 1.0, T = 1.0$



Şekil 21. $u(x,t,t) = \Im v(x,y,t)$ fonksiyonunun grafiği, $u_1 < u_2, A = 0.5, B = 1.0, T = 1.0$



Şekil 22. $u(x,t,t)=\Im v(x,y,t)$ fonksiyonunun grafiği, $u_1 > u_2, A=0.5, B=1.0, T=1.0$



Şekil 23. Figure 23: $u(x,t,t)=\Im v(x,y,t)$ fonksiyonunun grafiği,

$u_1 < u_2, A=0.5, B=1.0, T=1.0$

3. HOPF DENKLEMİ İÇİN CAUCHY PROBLEMİ

D_T de aşagıdaki problemi göz önüne

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial u}{\partial y}=0, \tag{3.1}$$

$$u(x,y,0)=u_0(x,y)=\begin{cases}1-x^2-y^2, & |x|\le 1\\ 0, & |x|>1\end{cases} \tag{3.2}$$

alalım. (3.1) diferansiyel denkleminin de yukarıda olduğu gibi geometrik anlamını vermek mumkündür. Söz konusu denkleminin $u(x,y,t)$ integral yüzeyi (x,y,t,u) uzayının herhangi bir $P(x,y,t,u)$ noktasında bileşimleri $u_x=p$, $u_y=q$, $u_t=\pi$ olan ve

$$\pi+up+uq=0$$

denklemi ile baglı olan normal düzleme sahip olmaktadır. Bu durumda P noktasından geçen integral yüzeylerini teğet düzlemi

$$dt:dx:dy:du\equiv 1:u:u:0$$

bağlantıları ile verilen düzlemler demeti olmaktadır. Bu düzlemler demetlerine Monja demetleri, eksenlere ise Monja eksenleri denir.

Şimdi bu karakteristikleri bulalım. Bu amaçla

$$\frac{dx(t)}{dt}=u,\ \frac{dy(t)}{dt}=u \tag{3.3}$$

denklemleri ile tanımlanan $(x=x(t),y=y(t))$ eğrilerini göz önüne alalım.

(3.3) i dikkata alırsak (3.1) ü

$$\frac{du}{dt}=0 \tag{3.4}$$

gibi yazabiliriz. Böylelikle, (3.1) denkleminin genel çözümünün bulunması (x,y,t) düzleminde eğimleri u olan doğrular ailesinin bulunmasına indirgenmektedir.

(3.3) ve (3.4) den

$$x=ut+c_1,\, y=ut+c_2,\, u=c_3$$

elde ederiz, burada $c_i, (i = 1,2,3)$ herhangi bir sabitlerdir.

Söz konusu sabitleri bulmak için aşağıdaki başlangıç koşullarını kullanalım

$$x\big|_{t=0} = \xi,\ y\big|_{t=0} = \eta,\ u\big|_{t=0} = u_0(\xi,\eta). \tag{3.5}$$

Bu kosullar çerçevesinde problemin çözümü için aşagıdaki ifadedeyi

$$u(x,y,t) = u_0(\xi,\eta) = \begin{cases} 1-(x-ut)^2-(y-ut)^2, & |\xi|\le 1 \\ 0, & |\xi|>1, \end{cases} \tag{3.6}$$

elde ederiz. Burada, $\xi = x-ut, \eta = y-ut$ ve $|\xi| = \sqrt{\xi^2+\eta^2}$ olmaktadır. ξ ve η koordinatlarına haraket eden koordinatlar denir.

(3.6) ifadesi haraket eden koordinatlarda

$$u(x,y,t) = \begin{cases} 1-\xi^2-\eta^2, |\xi|\le 1 \\ 0, |\xi|>1. \end{cases} \tag{3.7}$$

gibi yazılır. Kolayca gösterilebilir ki, (3.7) ifadesi ile tanımlanan u fonksiyonu (3.1), (3.2) probleminin çözümü olmaktadır. Gerçektende,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u_0}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u_0}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t},\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u_0}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y},$$

ve

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -u - t\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial \eta}{\partial t} = -u - t\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial \xi}{\partial x} = 1 - \frac{\partial u}{\partial x}t, \frac{\partial \eta}{\partial y} = 1 - \frac{\partial u}{\partial y}t$$

olduğunu dikkata alırsak

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u\frac{\dfrac{\partial u_0}{\partial \xi} + \dfrac{\partial u_0}{\partial \eta}}{1 + t\left(\dfrac{\partial u_0}{\partial \xi} + \dfrac{\partial u_0}{\partial \eta}\right)}$$

ve

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\dfrac{\partial u_0}{\partial \xi}}{1+t\left(\dfrac{\partial u_0}{\partial \xi}+\dfrac{\partial u_0}{\partial \eta}\right)},\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\dfrac{\partial u_0}{\partial \eta}}{1+t\left(\dfrac{\partial u_0}{\partial \xi}+\dfrac{\partial u_0}{\partial \eta}\right)}. \tag{3.8}$$

elde ederiz. Bu ifadeler (3.1) yerine konarsa denklemin korunduğunu görürüz. Başlangıc koşulun da korunduğu görmek zor değildir. Görüldüğü gibi (3.7) ifadesine u kapalı şekilde dahil olmaktadır. Fakat bu ifadeden u u açık şekilde

$$u(x,y,t)=\begin{cases}\dfrac{2(x+y)t-1\pm\sqrt{d}}{4t^2}, |\xi|\le 1\\ \\ 0,\quad |\xi|>1.\end{cases} \tag{3.9}$$

bulmak mümkündür, burada $d=1+8t^2-4t(x+y)+4t^2(x+y)^2$ olmaktadır.

(3.8) ifadesi $u(x,y,t)$ fonksiyonunun keyfi (x,y,t) noktasındaki eğimlerini $u_0(x,y)$ fonksiyınunun $(x=\xi,\ y=\eta,\ t=0)$ noktasındaki eğimi ile ifade eder. Bir boyutlu ortamlarda olduğu gibi (3.3) ifadeleri u fonksiyonunun çeşitli değerlerinin u hızıyla dağıldığını göstermektedir. Bu ise çözümün profilinde çokdeğerlilik oluşturur ve kırılma ilk kez grafiğe dik teğet düzlemin oluştuğu T_0 anında ortaya çıkar. (3.2) den görüldüğü gibi başlangıç yüzey hem negatif hem de pozitif eğime sahip olmaktadır. Çözümün grafiğinde çök değerliliğin oluşabilmesi için $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ ve $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ fonksiyonları $(x=1,\ y=0)$ ve $(x=0,\ y=1)$ noktalarında pozitif eğime sahip olmak zorundadır. Açıktır ki, eğim negatif değerden pozitife geçdiğinde grafiğe çizilen teğetin dik olması gerekmektedir. Dik teğetin oluştuğu zaman aradığımız T_0 olmaktadır.

Bu özelik ise $u(x,y,t)$ fonksiyonunun çok değerli olması anlamına geliyor ki, bu da (3.1) denkleminin nonlineer olmasından kaynaklanmaktadır ve bu özellik lineer denklemlerde mevcut olmamaktadır. (3.9) ifadelerinden

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\ y=0}} = \frac{1}{4t^2}\left(2t + \frac{8t^2}{\sqrt{1+8t^2-4t(x+y)-4t^2(x-y)^2}}\right),$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\substack{x=0\\ y=1}} = \frac{1}{4t^2}\left(2t + \frac{8t^2}{\sqrt{1+8t^2-4t(x+y)-4t^2(x-y)^2}}\right)$$

$T_0 = 0.5$ olduğu ve $t > T_0$ oldunda $\frac{\partial u}{\partial x}$ ve $\frac{\partial u}{\partial x}$ türevleri sonsuzluğa yaklaştığı görülmektedir. Dolaysıyla (3.1), (3.2) probleminin klasik çözümü mevcut olmamaktadır ve söz konusu problemin zayıf çözümünü aşağıdaki gibi tanımlayalım.

Tanım 3.1 Negatif olmayan, (3.2) başlangıc kosulunu ve $\varphi(x,y,T)=0$ olan keyfi $\varphi(x,y,t)$ test fonksiyonları için aşağıdaki integral eşitliği

$$\int_{R^2}\int_{R^1_+}\left\{u(x,y,t)\varphi_t(x,y,t) + \frac{u^2(x,y,t)}{2}\left(\varphi_x(x,y,t)+\varphi_y(x,y,t)\right)\right\}dxdydt$$

$$+\int_D \varphi(x,y,0)u_0(x,y)dxdy = 0, \tag{3.20}$$

koruyan $u(x,y,t)$ fonksiyonuna (3.1), (3.2) probleminin zayıf çözümü denir.

(3.1), (3.2) probleminin zayıf çözümünü elde etmek için 1.tür yardımcı problemi

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}(Lv)^2 = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = 0, \tag{3.21}$$

$$v(x,y,0) = v_0(x,y) \tag{3.22}$$

şeklinde içerelim. Burada, $v_0(x,y)$ fonksiyonu

$$\frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = u_0(x,y) \tag{3.13}$$

denkleminin her hangi bir çözümü olmaktadır.

Teorem 3.1 Eğer, $v(x,y,t)$ (3.21), (3.22) yardımcı probleminin her hangi bir çözümü ise

$$Lv(x,y,t) = \frac{\partial v(x,y,t)}{\partial x} + \frac{\partial v(x,y,t)}{\partial y} = u(x,y,t) \tag{3.14}$$

ifadesi ile tanımlanan $u(x,y,t)$ fonksiyonu esas problemin zayıf çözümü olmaktadır.

Yardımcı problemi çözerken başlangıc $v_0(x,y)$ fonksiyonunun bulunması gerekiyor ve bu fonksiyon yukarıdaki bölümde bulunmuştur.

3.1 Yardımcı Problemin Çözümü

Şimdi (3.21), (3.22) yardımcı problerminin çözümünü bulalım. Aşağıdaki notasyonları

$$\frac{\partial v}{\partial t} = p, \frac{\partial v}{\partial x} = q_1, \frac{\partial v}{\partial y} = q_2$$

içerelim. Bu notasyonlarda (3.21) denklemini

$$\pi(p,q_1,q_2) \equiv p + \frac{1}{2}(q_1+q_2)^2 = 0 \tag{3.15}$$

gibi yazalım. (3.15) ifadesini t, x ve y e göre diferansiyellersek

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (q_1+q_2)\frac{\partial q_1}{\partial t} + (q_1+q_2)\frac{\partial q_2}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} - (q_1+q_2)\frac{\partial q_1}{\partial x} + (q_1+q_2)\frac{\partial q_2}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} + (q_1+q_2)\frac{\partial q_1}{\partial y} + (q_1+q_2)\frac{\partial q_2}{\partial y} = 0$$

elde ederiz.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q_1}{\partial t}, \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q_2}{\partial t}, \frac{\partial q_1}{\partial y} = \frac{\partial q_2}{\partial x}$$

olduğundan sonuncu ifadeleri

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial t}+(q_1+q_2)\dfrac{\partial p}{\partial x}+(q_1+q_2)\dfrac{\partial p}{\partial y}=0, \\ \dfrac{\partial q_1}{\partial t}+(q_1+q_2)\dfrac{\partial q_1}{\partial x}+(q_1+q_2)\dfrac{\partial q_1}{\partial y}=0, \\ \dfrac{\partial q_2}{\partial t}+(q_1+q_2)\dfrac{\partial q_2}{\partial x}+(q_1+q_2)\dfrac{\partial q_2}{\partial y}=0, \end{cases}$$

olur. Böylelikle (t,x,y,p,q_1,q_2) uzayında karakteristikleri bulmamız için aşağıdaki Charpit adi diferansiyel denklemler sistemini

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{ds}=1,\ \dfrac{dx}{ds}=(q_1+q_2),\ \dfrac{dy}{ds}=(q_1+q_2), \\ \dfrac{dp}{ds}=0, \dfrac{dq_1}{ds}=0, \dfrac{dq_2}{ds}=0, \\ \dfrac{dv}{ds}=p+(q_1+q_2)^2 \end{cases}$$

alırız. Bu sisteminin genel çözümleri

$$\begin{cases} t=s+c_0,\ x=(q_1+q_2)s+c_1, \\ y=(q_2+q_1)s+c_1,\ p=c_3,\ q_1=c_4, \\ q_2=c_5,\ v=\left(c_3+(c_4+c_5)^2\right)s+c_6 \end{cases}$$

olmaktadır. İntegral alma sabitlerini

$$t\big|_{s=0}=0,\ x\big|_{s=0}=\xi,\ y\big|_{s=0}=\eta\ \ p_{|s=0}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_0}{\partial xi}+\frac{\partial v_0}{\partial \eta}\right)^2,$$

$$q_{1|s=0}=\frac{\partial v_0}{\partial \xi},\ q_{2|s=0}=\frac{\partial v_0}{\partial \eta},\ v_{|s=0}=v_0(\xi,\eta)$$

koşullarından

$$c_0=0,\ c_1=\xi,\ c_2=\eta,\ c_3=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_0}{\partial \xi}+\frac{\partial v_0}{\partial \eta}\right)^2,$$

$$c_4 = \frac{\partial v_0}{\partial \xi},\ c_5 = \frac{\partial v_0}{\partial \eta},\ c_6 = v_0(\xi,\eta)$$

bulabiliriz. Buradan,

$$\xi = x-(q_1+q_2)t, \eta = y-(q_1+q_2)t$$

$$v(x,y,t) = v_0(\xi,\eta) + \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_0}{\partial \xi}+\frac{\partial v_0}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial \xi}+\frac{\partial v_0}{\partial \eta}\right)^2 \right] t = \tag{3.16}$$

$$v_0(\xi,\eta) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_0}{\partial \xi}+\frac{\partial v_0}{\partial \eta}\right)^2 t = v_0(\xi,\eta) + \frac{1}{2}u_0(\xi,\eta)^2 t$$

olarak elde ederiz. Şimdi gösterelim ki, (3.16) eşitliği ile tanımlanan $v(x,y,t)$ fonksiyonu (3.14) yı korunmaktadır.

Gerçektende (3.2) i dikkate alırsak (3.16) dan

$$v(x,y,t) = \frac{1}{2}u^2 t + (x-ut) - \frac{(x-ut)^3}{3} - \frac{(y-ut)^3}{3} - \frac{2}{3}(x-y)^3$$

alırız. Sade hesaplama yoluyla

$$\frac{\partial v(x,y,t)}{\partial x} + \frac{\partial v(x,y,t)}{\partial y} = u\frac{\partial u}{\partial x}t + u\frac{\partial u}{\partial y}t + \left(1-\frac{\partial u}{\partial x}t\right) - \frac{\partial u}{\partial y}t - (x-ut)^2\left(1-\frac{\partial u}{\partial x}t\right) +$$

$$(x-ut)^2\frac{\partial u}{\partial x}t + (y-ut)^2\frac{\partial u}{\partial x} - (y-ut)^2\left(1-\frac{\partial u}{\partial x}t\right) - 2(x-y)^2 + 2(x-y)^2 =$$

$$u\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)t + 1 - \frac{\partial u}{\partial x}t - \frac{\partial u}{\partial y}t - (x-ut)^2 + (x-ut)^2\frac{\partial u}{\partial x}t +$$

$$(x-ut)^2\frac{\partial u}{\partial y}t + (y-ut)^2\frac{\partial u}{\partial x} - (y-ut)^2 + (y-ut)^2\frac{\partial u}{\partial y}t =$$

$$u\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)t+1-(x-ut)^2-(y-ut)^2-\frac{\partial u}{\partial x}t\left[1-(x-ut)^2-(y-ut)^2\right]-$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}t\left[1-(x-ut)^2-(y-ut)^2\right]=1-(x-ut)^2-(y-ut)^2$$

elde ederiz.

3.2 Sıçrayışın Kurulması

Sıçrayış noktalarının yerini bulmak için 2.bölümde önerilmiş yöntemi iki boyutlu probleme de geliştirelim. Bir boyutlu problemlerde olduğu gibi

$$E(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,y,t)dxdy \tag{3.17}$$

enerji integrali hem sürekli, hem de süreksiz fonksiyonlar için mevcut olmaktadır ve söz konusu integralin sonuncu zamana bağlı deyil. $E(t)$ nin değerini $t=0$ olduğu durumda

$$E(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\infty}^{\infty}u_0(x,y)dxdy$$

hesaplayalım.

Aşağıdaki değişken $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ dönüşümlerini yapalım. Bu durum için

$$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\left(1-r^2\right)rdr=\frac{\pi}{2}$$

olmaktadır, yani $E(0)=\frac{\pi}{2}$ sayısı $v(x,y,t)$ fonksiyonunun kritik sayıdır.

Var sayalım ki, $(x=\xi(t),\ y=\eta(t))$ sıçrayış eğrisinin parametrik denklemleridir ve bu eğriyi bulmak için aşağıdaki gibi yöntem geliştirelim.

Tanım 3.2 Aşağıdaki eşitliği

$$v\left(\xi(t),\eta(t),t\right)=E(0)$$

sağlayan noktaların geometrik yerine front eğrisi denir. Buradan,

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{d\xi}{dt}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{d\eta}{dt}=0$$

elde ederiz.

Bu ifadeyi yazarken (3.1) denkleminin D_T bölgesinin tüm noktalarında o cümleden de front eğrisi üzere, yani

$$\left.\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right)\right|_{\substack{x=\xi(t)\\ y=\eta(t)}}=0 \tag{3.18}$$

korunduğunu var sayalım.

(3.3) da dikkate almakla (7.50) den

$$\frac{d\xi}{dt}=\frac{d\eta}{dt}=u(\xi(t),\eta(t),t)=\left.\frac{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]}{\left[\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right]}\right|_{\substack{x=\xi(t)\\ y=\eta(t)}} \tag{3.19}$$

elde ederiz.

Tanım 3.3 Aşağıdaki eşitlikle tanımlanan

$$v_{gen}(x,y,t)=\begin{cases} E(0), & v(x,y,t)>E(0),\\ \\ v(x,y,t), & v(x,y,t)\le E(0)\end{cases} \tag{3.20}$$

fonksiyona (3.21), (3.22) probleminin genişletilmiş çözümü denir.

Teorem 2.4 e göre

$$u_{gen}(x,y,t)=\frac{\partial v_{gen}(x,y,t)}{\partial x}+\frac{\partial v_{gen}(x,y,t)}{\partial y} \tag{3.21}$$

olmaktadır.

Teorem 3.2 (3.1) denklemi ile ifade olunan dinamik sistemin haraketi

$$L(p,q_1,q_2)=pM(q_1+q_2)+M(q_1+q_2)F(q_1+q_2). \tag{3.22}$$

formülü ile tanımlanan Lagranjinın erkstremalları olmaktadır.

İspat. $v(x,y,t)$ (3.21), (3.22) probleminin pürüzsüz çözümü olsun. (3.22) için yazılmış Euler-Lagrange denklemi

$$\frac{\partial L_p}{\partial t}+\frac{\partial L_{Mv}}{\partial x}+\frac{\partial L_{Mv}}{\partial y}-\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}L_{Mu}+\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}L_{Mu}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}L_{Mu}\right]$$

olmaktadır. $Lp = Mu, Lp = p + Mu\ F(u), LMu = p + F(u) = 0$ olduğunu dikkata alırsak teoremi ispatlamış oluruz.

3.3 Riemann Problemi

Yukarıdaki bölümde iki boyutlu Hoph denklemi için sürekli başlangıç koşullu Cauchy problemini inceledik ve başlangıç profilde bulunmayan ve yeri önceden belli olmayan sıçrayış noktalarının bulunması için bir yöntem geliştirdik. Bu bölümde limit durumu, yani başlangıç profilinin süreksiz olduğu durumunu inceleyeceğiz.

Şimdi (3.1) denklemini (2.17) başlangıç koşulu çerçevesinde gözönüne alalım. Burada da iki durumu

$$(i)\ u_1 < u_2,\ (ii)\ u_1 > u_2$$

inceleyelim.

Birinci durumda (3.1), (2.17) probleminin gerçek çözümü

$$u(x,y,t)=\begin{cases} u_1, & \frac{x}{t} > u_1 \\ \frac{x}{t}, & u_2 < \frac{x}{t} < u_1, \quad 0 \le y \le \ell \\ u_2, & \frac{x}{t} < u_2 \end{cases} \tag{3.23}$$

olmaktadır. Bu durumda eğimi $u(x,y,t)$ olan tüm karakteristik düzlemler eğimi $u_1 ve\, u_2$ olan düzlemler arasında yerleşir ve onlar yalnız $\{x=0,\ 0 \le y \le 1\}$ doğrusu üzerinde kesişirler, (3.23) formülü ile bulunan çözümün grafiği Şekil 24 de gösterilmiştir. Şekilden görüldüğü gibi başlangıç profilde bulunan sıçrayış çözümün zaman evriminde kayıp olur ve çözüm sürekli ve monoton fonksiyona dönüşür.

Şimdi $u_1 > u_2$ olan durumu inceleyelim. Bu durumda da problemin çözümü (3.23) formülü ile ifade edilmektedir. Fakat, $u_2 < u < u_1$ olduğundan $\{x = u_1 t,\ 0 \le y \le \ell\}$ ve $\{x = u_2 t, 0 \le y \le \ell\}$ arasında yerleşen tüm karakteristik düzlemlerin eğimleri u_1 den büyük olur ve diğer karakteristikler ile kesişir ve çözümde çok değerlilik hemen başlar, Şekil 25 de çok değerli çözüm fiziksel açıdan anlamsız olduğundan bu durumda zayıf çözüm kavramı içermekle çok değerli sürekli çözümden 1.tür süreksizliğe sahip çözüm oluşturalım.

Tanım 3.4 (2.17) başlangıc koşulunu sağlayan ve $\varphi(x,y,t)=0$ özelliğine sahip temel fonksiyonlar sınıfından olan herhangi bir $\varphi(x,y,t)$ fonksiyonları için aşağıdaki integral eşitliği

$$\int_{R^2}\int_{R^1_+}\left\{u(x,y,t)\varphi_t(x,y,t)+\frac{u^2(x,y,t)}{2}\left[\varphi_x(x,y,t)+\varphi_y(x,y,t)\right]\right\}dxdydt+$$

$$\int_{x>0,\,0\le y\le \ell}\varphi(x,y,0)u_2dxdy+\int_{x<0,\quad 0\le y\le \ell}\varphi(x,y,0)u_1dxdy=0 \qquad (3.24)$$

koruyan $u(x,y,t)$ fonksiyonuna (3.1), (2.17) probleminin zayıf çözümü denir.

Zayıf çözümü bulmak için (3.21), (3.22) yardımcı problemini burada da kullanalım. Bu durumda $v_0(x,y)$ başlangıç fonksiyonunu

$$v_0(x,y)=\begin{cases} u_1x, & x<0, \\ & \qquad 0\le y\le \ell \\ u_2x, & x>0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım.

(3.21), (3.22) yardımcı probleminin çözümünü başlangıc fonksiyonu da dikkate alarak aşağıdaki şekilde

$$v(x,y,t)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}u_1^2t+u_1(x-u_1t), & \dfrac{x}{t}<u_1, \\ & \qquad 0\le y\le \ell \\ \dfrac{1}{2}u_2^2t+u_2(x-u_2t), & \dfrac{x}{t}>u_2 \end{cases} \qquad (3.25)$$

yazabiliriz.

Bir boyutlu problemlerde olduğu gibi front noktasının yeri

$$\frac{1}{2}u_1^2t+u_1(x-u_1t)=\frac{1}{2}u_2^2t+u_2(x-u_2t)$$

denkleminden sıçrayış noktası için

$$\frac{dx}{dt}=U=\frac{u_1+u_2}{2}$$

elde edilir.

Bu takdirde (3.21), (3.22) yardımcı probleminin genişlentirilmiş çözümü

$$v_{gen}(x,y,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}u_1^2t+u_1(x-u_1t), & \frac{x}{t}<U\\ & & 0\le y\le \ell\\ \frac{1}{2}u_2^2t+u_2(x-u_2t), & \frac{x}{t}>U\end{cases}$$

gibi yazalım.

Teorem 2.4 e göre (3.1), (2.17) esas probleminin zayıf çözümü

$$u_{gen}(x,y,t)=\begin{cases}u_1 & \frac{x}{t}<U\\ & , \quad 0\le y\le \ell\\ u_2, & \frac{x}{t}>U\end{cases}$$

olmaktadır, Şekil 26.

4. BİRİNCİ MERTEBEDEN DENKLEM İÇİN CAUCHY PROBLEMİ

Bu bölümde D_T bölgesinde iki boyutlu birinci mertebeden lineer olmayan kısmi türevli denklem için aşağıdaki Cauchy problemini

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}+\frac{\partial F(u(x,y,t))}{\partial x}+\frac{\partial F(u(x,y,t))}{\partial y}=0, \tag{4.1}$$

$$u(x,y,0)=u_0(x,y), \quad (x,y)\in R^2 \tag{4.2}$$

göz önüne alalım. Burada $u_0(x,y)$ fonksiyonu $Q\subseteq R^2$ bölgesinde tanımlı, $u_0(x,y)\in \hat{C}^0_{1,1}(\overline{Q})$ olmak üzere bilinen ve $F(u)$ ise aşağıdaki koşulları sağlayan fonksiyonlar olmaktadır:

(i) $F(u)$ sınırlı u fonksiyonları için sınırlı olup, $F(u)\in C^2(D_T)$,

(ii) $u\ge 0$ değerleri için $F'\ge 0$,

(iii) $F''(u)$ fonksiyonu işaretini değiştirmektedir, yani $F(u)$ konveks ve konkav kısımlara sahip olan bilinen fonksiyondur.

Literatürden bilindiği gibi (4.1), (4.2) problemi gaz dinamiğinin temel denklemi olup bir çok hidrodinamik problemlerini modellemekte kullanılmaktadır.

Bilindiği gibi, lineer olmayan (4.1), (4.2) probleminin karakteristikler yöntemi ile bulunan çözümü kapalı bir ifadedir ve bu ifade problemin bir alternatif formunu oluşturmaktadır.

Fakat bu ifadeden çözüm için açık bir formül çıkarmak genelde olanaksızdır. Ayrıcada (4.1), (4.2) probleminin çözümündeki süreksizlik noktalarının varlığı söz konusu problemin sayısal çözümünün de ele alınmasında zorluklar çıkarmaktadırlar, çünkü süreksizlik noktaları (4.1) denkleminin içerdiği türevlerin sonlu fark formülleri ile ayrıklaştırmaya imkan vermemektedir.

Çok boyutlu problemlerde sıçrayış noktalarının ortaya çıktığı yerlerin incelenmesi bir boyutlu problemlere oranla zor olduğundan, problemin fiziksel yapısından doğan süreksizlik noktalarının yerini bulmak için önerilmiş yöntemlerden yüksek hassaslık talep edilmektedir. Gerçekten de, ekonomik açıdan çok boyutlu problemlerde ağın adımını bir boyutlu problemlere nazaran daha büyük almak zorunda kalmaktayız, bu ise çok boyutlu problemlerde süreksizlik noktalarının geometrik yerinin bulunmasını zorlaştırmaktadır.

Bu bölümde birinci mertebeden lineer olmayan iki boyutlu kısmi türevli dalga denklemi için Cauchy probleminin çözümünü süreksiz fonksiyonlar sınıfında ele alınacaktır . Önerilen yöntem yer eksenlerinin sayısı ikiden fazla olduğu durumda bile geçerli olmaktadır.

4.1 Sürekli Başlangıç Koşulu

(4.1), (4.2) probleminin çözümünün yapısını incelemek için $u_0(x,y) \in \hat{C}^0_{1,1}(\overline{Q})$ olduğunu varsayalım. Kolaylık için $u_0(x,y)$ fonksiyonu olarak (2.12) göz önüne alalım.

Açıktır ki, (4.1), (4.2) probleminin karakteristikler yöntemi ile bulunan çözümü

$$u(x,y,t) = \begin{cases} u_0(\xi_1,\xi_2), & |\xi| < 1, \\ \\ 0, & |\xi| \geq 1 \end{cases} \tag{4.3}$$

şeklindedir. Burada $\xi = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ ve $\xi = x - F'(u)t, \eta = y - F'(u)t$ olmaktadır ve bunlara (4.1) denkleminin karakteristikleri denir. (4.3) ile tanımlanan sürekli çözümden

$$u_t = \frac{F'(u)\left(\dfrac{\partial u_0}{\partial \xi} + \dfrac{\partial u_0}{\partial \eta}\right)}{1 + tF''(u)\left(\dfrac{\partial u_0}{\partial \xi} + \dfrac{\partial u_0}{\partial \eta}\right)},$$

$$u_x = \frac{\dfrac{\partial u_0}{\partial \xi}}{1 + tF''(u)\left(\dfrac{\partial u_0}{\partial \xi} + \dfrac{\partial u_0}{\partial \eta}\right)}, \quad u_y = \frac{\dfrac{\partial u_0}{\partial \eta}}{1 + tF''(u)\left(\dfrac{\partial u_0}{\partial \xi} + \dfrac{\partial u_0}{\partial \eta}\right)} \tag{4.4}$$

elde edilir. Göründüğü gibi (4.4) ifadesi $u(x, y, t)$ çözümünün (x, y, t) noktasındaki eğiminin $u_0(\xi, \eta)$ fonksiyonunun eğimi ile ifade etmektedir. Eğer $\left(\dfrac{\partial u_0}{\partial \xi} + \dfrac{\partial u_0}{\partial \eta}\right) < 0$ ve $F'' > 0$ (veya $\left(\dfrac{\partial u_0}{\partial \xi} + \dfrac{\partial u_0}{\partial \eta}\right) > 0$ ve $F'' < 0$) olduğu takdirde,

$$t \equiv T_0 = \left(-F''(u)\left(\frac{\partial u_0}{\partial \xi} + \frac{\partial u_0}{\partial \eta}\right)\right)^{-1} \tag{4.5}$$

değerlerinde $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$ ve $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ türevleri sonsuzluğa yaklaşmaktadır.

Böylece yukarıda açıklandığı gibi, eğer başlangıç fonksiyonu hem negatif, hem de pozitif eğime sahipse, (4.1) denkleminin lineer olmayan yapısı nedeniyle $t \geq T_0$ için $u(x, y, t)$ çözümü çok değerli fonksiyon olur. Çok değerli çözüm fiziksel açıdan anlamlı olmadığından, benzer problemlerde olduğu gibi klasik çözüm kavramını genişletmekle sürekli fakat çok değerli çözümden tek değerli ama birinci tür süreksizliğe sahip olan ve fiziksel yararlı çözüm elde etmek gerekmektedir.

(4.1), (4.2) problemin zayıf çözümünü aşağıdaki gibi tanımlayalım.

Tanım 4.1 Negatif olmayan ve (4.2) koşulunu sağlayan ve her $\varphi \in C^0_{1,1}(\overline{Q})$ test fonksiyonu için

$$\int_{R^2}\int_{R^1_+}\left\{u(x, y, t)\frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial t} + F(u(x, y, t))\left(\frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial y}\right)dxdydt\right\} +$$

$$\int_{R^2}\varphi(x, y, 0)u_0(x, y)dxdy = 0$$

integral eşitliğini gerçekleyen $u(x, y, t)$ fonksiyonuna (4.1), (4.2) probleminin genelleştirilmiş (zayıf) çözümü denir.

Zayıf çözümlerin bulunmasında önemli olan, bu çözümlerde ortaya çıkan süreksizlik noktalarının yerini bulmak ve söz konusu noktaların yerlerinin zamana göre değişmelerini incelemektir. Söz konusu probleminin zayıf çözümünü bulmak için aşağıdaki 1.tür yardımcı problemi

$$\frac{\partial v(x,y,t)}{\partial t}+F\left(\frac{\partial v(x,y,t)}{\partial x}+\frac{\partial v(x,y,t)}{\partial y}\right)=0, \tag{4.6}$$

$$v(x,y,0)=v_0(x,y), \tag{4.7}$$

içerelim, burada $v_0(x,y)$ fonksiyonu (2.10) denklemini sağlayan herhangi bir fonksiyon olmaktadır. Söz konusu fonksiyon (2.15) şeklinde yukarıdaki bölümlerde elde edilmiştir. Teorem 5 den

$$u(x,y,t)=Lv(x,y,t)$$

elde ederiz.

Şimdi (4.6), (4.7) problemini karakteristikler yöntemi ile çözelim. Bunun için (4.6) denklemini

$$\pi(p,q_1,q_2)=p+F(q_1+q_2)=0$$

şeklinde yazalım. Sonuncu denklemi sırasıyla, t, x ve y e göre diferansiyelliyip ve

$$\frac{\partial q_1}{\partial y}=\frac{\partial q_1}{\partial x},\ \frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial q_1}{\partial t},\ ve\ \frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial q_2}{\partial t}$$

olduğunu da dikkate alırsak onu aşağıdaki şekilde

$$\frac{\partial p}{\partial t}+F'(q)\left(\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial y}\right)=0,$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial t}+F'(q)\left(\frac{\partial q_1}{\partial x}+\frac{\partial q_1}{\partial y}\right)=0,$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial t}+F'(q)\left(\frac{\partial q_2}{\partial x}+\frac{\partial q_2}{\partial y}\right)=0$$

ifade edebiliriz. Son olarak da (4.1) denklemine karşılık gelen Charpit denklemler sistemini

$$\frac{dt}{ds}=1,\ \frac{dx}{ds}=F'(q),\ \frac{dy}{ds}=F'(q),$$

$$\frac{dp}{ds}=0,\ \frac{dq_1}{ds}=0,\frac{dq_2}{ds}=0,\ \frac{dv}{ds}=p+qF'(q) \tag{4.8}$$

şeklinde yazarız. (4.8) adi diferansiyel denklemler sisteminin tek bir çözümünü elde etmek için

$$t\,|_{s=0}=0,\ x\,|_{s=0}=\xi,\ y\,|_{s=0}=\eta,\ p\,|_{s=0}=-F(v_0(\xi,\eta)),\ q_1\,|_{s=0}=\frac{\partial v_0}{\partial \xi},$$

$$q_2\,|_{s=0}=\frac{\partial v_0}{\partial \eta},\ v\,|_{s=0}=v_0(\xi,\eta) \tag{67}$$

başlangıc koşullarını kullanalım. (4.8) ve (67) den

$$v(x,y,t)=[-F(u)+uF'(u)]t+v_0(\xi_1,\xi_2) \tag{4.9}$$

alınır. Sade hesaplamalar yoluyla

$$u(x,y,t)=Mv(x,y,t)$$

olduğu görülmektedir. Gerçekten de,

$$Mv(x,y,t)=\left[\frac{\partial u}{\partial x}F'(u)+u\frac{\partial F'(u)}{\partial x}-\frac{\partial F(u)}{\partial x}\right]t+\frac{\partial v_0}{\partial \xi_1}\left(1-\frac{\partial F'(u)}{\partial x}t\right)-$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial \xi_2}\frac{\partial F'(u)}{\partial x}+\left[\frac{\partial u}{\partial y}F'(u)+u\frac{\partial F'(u)}{\partial y}-\frac{\partial F(u)}{\partial y}\right]t+\frac{\partial v_0}{\partial \xi_2}\left(1-\frac{\partial F'(u)}{\partial y}t\right)-$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial \xi_1}\frac{\partial F'(u)}{\partial y}t=u\left[\frac{\partial F'(u)}{\partial x}+\frac{\partial F'(u)}{\partial y}\right]t+\frac{\partial v_0}{\partial \xi_1}+\frac{\partial v_0}{\partial \xi_2}-\frac{\partial F'(u)}{\partial x}\left(\frac{\partial v_0}{\partial \xi_1}+\frac{\partial v_0}{\partial \xi_2}\right)t-$$

$$\frac{\partial F'(u)}{\partial y}\left(\frac{\partial v_0}{\partial \xi_1}+\frac{\partial v_0}{\partial \xi_2}\right)t=u.$$

Böylelikle aşağıdaki teoremi de ispatlamış bulunmaktayız.

Teorem 4.1 Eğer $v(x,y,t)$ fonksiyonu (4.6), (4.7) probleminin sürekli çözümü ise, bu taktirde $u(x,y,t)=Mv(x,y,t)$ eşitliği ile bulunan $u(x,y,t)$ de (4.1), (4.2) probleminin zayıf çözümüdür.

Yardımcı problemin aşağıdaki avantajları vardır:

(i) $v(x,y,t)$ fonksiyonunun diferansiyellenme özelliği $u(x,y,t)$ nin diferansiyellenme özelliğinden yüksektir;

(ii) $u(x,y,t)$ çözümünü bulurken $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \, ve \, \frac{\partial u}{\partial t}$ türevlerini kullanmak zorunda değiliz, zaten söz konusu türevler sıçrayış noktalarının etrafında mevcut değildir.

Şimdi (4.1), (4.2) probleminin çözümünde ortaya çıkan süreksizlik eğrisinin yerini bulalım. Bundan dolayı yine de (3.17) enerji integralini göz önüne alalım ve 2 bölümde olduğu gibi

$$v_{gen}(x,y,t) = \begin{cases} v\ (x,y,t), & v < E(0), \\ \\ E(0), & v \geq E(0) \end{cases} \tag{4.10}$$

eşitliğiyle tanımlanan $v_{gen}(x,y,t)$ fonksiyonuna (4.6), (4.7) problemi için genelleştirilmiş çözüm diyelim.

Teorem 4.1 e göre

$$u_{gen}(x,y,t) = Mv_{gen}(x,y,t)$$

olur. Buradan görüldüğü gibi $u(x,y,t)$ fonksiyonu için x ve y değişkenlerine göre sıçrayış noktası sağdan $\frac{\partial u}{\partial x_j}, (j=1,2)$ türevlerinin sıfıra eşit olduğu noktalara denir. Tanım 3 e göre

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{[F(u)]}{[u]}\bigg|_{(x=x_f(t),\ y=y_f(t))}$$

elde ederiz. Buradan

$$t = \int_0^{\xi_j(t)} \frac{u}{F(u)} dx$$

buluruz ve $\int_0^{\xi_j(t)} \frac{u}{F(u)} dx < \infty$, koşulu $u(x,y,t)$ fonksiyonunda sıçrayış noktalarının varlığı için yeter ve gerekli koşul olmaktadır.

4.2 Başlangıç Fonksiyonun Süreksiz Olduğu Durum

Yukarıdaki bölümde başlangıç fonksiyon sürekli olduğu durumda (4.1) denklemi için Cauchy problemini inceledik, ve gördük ki, yeteri kadar pürüzsüz başlangıç fonksiyonu hem negatif, hem de pozitif eğime sahip olursa, öyle bir T_0 zamanı var ki $t \geq T_0$ olduğunda (4.1), (4.2) probleminin çözümü yeri önceden bilinmeyen sıçrayış noktalarına sahip olmaktadır.

Bu bölümde amacımız başlangıç fonksiyonu süreksiz olduğu durumda (4.1), (4.2) probleminin global çözümünü incelemektir. Bundan dolayı (4.1) denklemini (2.17) koşulu çerçevesinde inceleyelim.

Burada iki durum olabilir:

(i) $u_1 < u_2$. Bu durumda, (4.1), (2.17) probleminin çözümü karakteristikler yöntemi ile

$$u(x,y,t) = \begin{cases} u_1, & \dfrac{x}{t} < F'(u_1) \\ G\left(\dfrac{x}{t}\right), & F'(u_1) < \dfrac{x}{t} < F'(u_2),\ 0 \leq y \leq \ell, \\ u_2, & \dfrac{x}{t} > F'(u_2) \end{cases} \tag{4.11}$$

olarak bulunur, burada, $G = (F')^{-1}$ olmaktadır. Bu durumda (67) ifadesi ile bulunan çözüm zamanın artan değerlerinde sürekli ve monoton fonksiyona dönüşür, yani başlangıç profilde bulunan sıçrayış zaman arttıkça kayıp oluyor.

(ii) $u_1 > u_2$. Bu durumda ise probleminin çözümü çok değerli fonksiyon olur. Klasik çözüm söz konusu olmadığı için göz önüne aldığımız probleminin zayıf çözümünü aşağıdaki gibi tanımlayalım.

Tanım 4.2 Negatif olmayan, (2.17) koşulunu sağlayan ve her $\varphi(x,y,T) = 0$ olan herhangi bir $\varphi(x,y,t)$ test fonksiyonu için

$$\int_{R^2}\int_{R_+^1}\left\{u(x,y,t)\frac{\partial\varphi(x,y,t)}{\partial t} + F(u(x,y,t))\left(\frac{\partial\varphi(x,y,t)}{\partial x} + \frac{\partial\varphi(x,y,t)}{\partial y}\right)\right\}dxdydt +$$

$$\int_{x<0,\ 0\leq y\leq\ell}\varphi(x,y,0)u_1dxdy + \int_{x>0,\ 0\leq y\leq\ell}\varphi(x,y,0)u_2dxdy = 0$$

integral eşitliğini gerçekleyen $u(x,y,t)$ fonksiyonuna (4.1), (2.17) probleminin genelleştirilmiş (zayıf) çözümü denir.

Bu integral eşitliğini koruyan zayıf çözümü ele almak için yine de (4.6), (4.7) yardımcı problemi içerelim. Burada $v_0(x,y)$ fonksiyonunu yukarıda olduğu gibi (2.10) denkleminin herhangi bir çözümü olarak aşağıdaki gibi

$$v(x,y,0) \equiv v_0(x,y) = \begin{cases} u_1 x, & x < 0 \\ & \quad , \quad 0 \le y \le \ell \\ u_2 x, & x > 0 \end{cases} \tag{4.12}$$

tanımlayalım. (4.9) formülü göz önüne alınırsa (4.6), (4.7) probleminin çözümünü

$$v(x,y,t) = \begin{cases} v_-(x,y,t), & \dfrac{x}{t} < F'(u_1) \\ & \quad , \quad 0 < y < \ell \\ v_+(x,y,t), & \dfrac{x}{t} > F'(u_2) \end{cases} \tag{4.13}$$

şeklinde yazalım, burada

$$v_-(x,y,t) = [u_1 F'(u_1) - F(u_1)]t + u_1 x,$$

$$v_+(x,y,t) = [u_2 F'(u_2) - F(u_2)]t + u_2 x,$$

olmaktadır. $u(x,y,t)$ fonksiyonunun süreksizlik noktasının yeri

$$v_-(x,y,t) = v_+(x,y,t)$$

denkleminden

$$\frac{dx}{dt} = U = \frac{F(u_1) - F(u_2)}{u_1 - u_2}, \quad 0 < y < \ell \tag{4.14}$$

olarak tanımlanır.

(4.6), (4.7) probleminin genişlendirilmiş çözümünü

$$v_{gen}(x,y,t) = \begin{cases} v_-(x,y,t), & \dfrac{x}{t} < U \\ & \quad 0 < y < \ell \\ v_+(x,y,t), & \dfrac{x}{t} > U \end{cases} \tag{4.15}$$

eşitliği ile tanımlayalım. Buradan (4.1), (2.17) probleminin zayıf çözümü

$$u_{gen}(x,y,t) = Mv_{gen}(x,y,t) = \begin{cases} u_1, & \dfrac{x}{t} < U \\ \\ u_2, & \dfrac{x}{t} > U \end{cases} \tag{4.16}$$

olarak elde edilir. Böyle fonksiyonlarla ifade edilen çözümlere darbe dalgaları denir.

5. SONUÇLAR

Tezde elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibi sıralanabilir:

1. Tezde 2 boyutlu sabit katsayılı lineer kısmi türevli diferansiyel denklem için yazılmış Cauchy problemi için süreksiz fonksiyonlar sınıfında gerçek çözümü elde edilmiştir.
2. Esas problemin çözümünün diferansiyellenebilme özelliğinden bir birim fazla diferansiyellenebilen çözüme sahip özel yolla elde edilmiş yardımcı problem dahil edilmiş ve sözkonusu problemin gerçek çözümleri bulunmuştur.
3. Elde edilen sonuçlar genel şekilde yazılmış 1. basamaktan kuazi lineer denklem için yazılmış Cauchy probleminin çözümünün bulunması için geliştirilmiştir.

6. KAYNAKLAR

1. Courant, R, Lax, P, On Nonlinear Partial Differential Equations with two in depend variable, Comm. On Pure and Applied Mathenmatics,vol.2, No.3,1949, pp. 255-273.
2. John, Fritz, Partial Differential Equations, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1986.
3. Smoller, J. A., Shock Wave and Reaction Diffusion Equations, Springer-Verlag, New York Inc., 1983.
4. Abasov M. T., Rasulov, M. A., İbrahimov T., M., Ragimova T.,A. On a Method of Solving the Cauchy Problem for a First Order Nonlinear Equation of Hyperbolic Type with a Smooth Initial Condition, Soviet Math. Dok. 43, No.1, 1991.
5. M.A. Rasulov, M.T. Abasov, A.T. Ragimova, Identification of the saturation jump in the process of oil displacement by water in a two-dimensional domain, Soviet Math. Dokl. USSR (319) (2.4) (1992) 943-947.

ÖZGEÇMİŞ

Adı – Soyadı: Özer ASLIBAY

Adres: Kartaltepe mah. Ömür sok. No:1 Daire: 7, Bakırköy-İstanbul

Doğum Yeri: Edirne/Keşan

Doğum Tarihi: Mayıs 08, 1981

Lise: İnsa Lisesi 1996 – 1999

Üniversite: Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Matematik (İngilizce) Bölümü, 1994 – 2005

Yüksek Lisans: Beykent Üniversitesi, Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı, 2007 – ?

İŞ DENEYİMLERİM

- ✓ Beykent Üniversitesi Genel Sekreter Yardımcılığı, 2007 – ?
- ✓ Birey Dergisi Dershanesi, İstanbul Şubesinde Uzman Öğretici, 2004 – 2006