T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANA BİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

HİPERBOLİK DENKLEMLERİN ENTROPİ ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gamze ÖZER
080860001

İSTANBUL, 2010

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANA BİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

HİPERBOLİK DENKLEMLERİN ENTROPİ ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gamze ÖZER
Öğrenci No:
080860001

Tez Danışmanı:
Prof. Dr. Mahir RESULOV

İSTANBUL, 2010

YEMİN METNİ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum “Hiperbolik denklemlerin entropi çözümleri” başlıklı bu çalışmanın, bilimsel ahlak ve geleneklere uygun şekilde tarafımdan yazıldığını, yararlandığım eserlerin tamamının kaynaklarda gösterildiğini ve çalışmamın içinde kullanıldıkları her yerde bunlara atıf yapıldığını belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

Gamze ÖZER

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana öneren, tezimin her aşmasında yardımlarını esirgemeyen, yüksek lisans öğrenimim boyunca engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, her türlü desteği ve kolaylığı sağlayan tez danışmanım değerli hocam Sayın Prof. Dr. Mahir RESULOV' a en içten saygılarımı sunar, teşekkür ederim. Ayrıca, yüksek lisans hocalarım Sayın Yrd. Doç. Dr. Bahaddin SİNSOYSAL' a da teşekkür ederim.

İstanbul, 2010 Gamze ÖZER

HİPERBOLİK DENKLEMLERİN ENTROPİ ÇÖZÜMLERİ

Tezi Hazırlayan: Gamze ÖZER

ÖZET

Tezde kuazi lineer kısmi türevli diferansiyel denklem için yazılmış Cauchy problemi incelenmiştir. Bilindiği üzere hem pozitif, hem de negatif eğilime sahip başlangıç koşullu problemin çözümünde yeri önceden bilinmeyen sıçrayış noktaları mevcut olmaktadır. Bu türden olan çözümler zayıf çözüm kavramı dahil edilmekle ifade edilebilir. Fakat, zayıf çözümünde tek olmadığı da bilinmektedir.

Tezde Hopf denklemi için yazılmış Cauchy probleminin çözümü incelenmiş ve sıçrayış noktalarının yerini bulmak için bir metod irdelenmiştir. Ayrıca çözümün tekniğini garantilemek için entropi fonksiyonları dahil edilmiş ve entropinin artma koşulunu koruyan çözümlerin varlığı ispatlanmıştır.

ENTROPY SOLUTIONS OF THE HYPERBOLİC EQUATIONS

Presented by: Gamze ÖZER

ABSTRACT

In this thesis the Cauchy problem for quasi linear partial equation of the first order is investigated. It is known that the solution of this problem has the discontinuity points whose locations unknown beforehand, if the initial profile has both the positive and negative slopes. The solution of this type can be defined by using the concept of the weak solution.

However, it is known that too, the uniqueness of the weak solution is spoiled. In this thesis the method for obtaining the points of discontinuity of the solution of the Cauchy problem is suggested. In order to guarantee of uniqueness solution the entropy functions is introduced and the existence of the solution which satisfies of the increase condition of entropy is proved.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ. KARAKTERİSTİKLER YÖNTEMİ

Bu bölümde sonraki işlerimiz için gereken bazı temel kavramları açıklayalım.

1.1 Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerden Genel Kavramlar

Serbest değişkenler $(x_1, x_2, ..., x_n)$, bilinmeyen fonksiyon $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ ve bilinmeyen fonksiyonun türevlerini içeren

$$F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3}, \ldots, u_{x_n}) = 0 \qquad \textbf{(1.1)}$$

cinsinden olan denkleme kısmi türevli diferansiyel denklem denir. Diferansiyel denklemin içerdiği kısmi türevlerin en yüksek mertebesine denklemin basamağı denir.

Örnek 1 $au_x + bu_y = 0$ a ve b sabitler olmak üzere birinci basamaktan kısmi türevli diferansiyel denklemdir.

Örnek 2 $u_t = k^2 u_{xx}$ ikinci basamaktan kısmi türevli diferansiyel denklemdir.

Örnek 3 $(1+x^2)u_x + u_y = 0$ birinci basamaktan kısmi türevli diferansiyel denklemdir.

Örnek 4 $u_t + uu_x = u_{xxx}$ üçüncü basamaktan olan denklemdir.

Bazı kavram ve işlemleri gerçekleştirebilemiz için çoğu zaman kısmi türevli diferansiyel denklemleri operatör şeklinde yazmak gerekiyor. Eğer

$$L(.) = \frac{\partial(.)}{\partial x} \qquad \textbf{(1.2)}$$

olarak göstersek Örnek 1 deki denklemi $Lu = 0$ cinsinden yazabiliriz. Örnek 2 yi de $Lu = 0$ cinsinden yazmak mümkündür. Bu durumda $L(.) = \dfrac{\partial(.)}{\partial t} - k^2 \dfrac{\partial^2(.)}{\partial x^2}$ olmaktadır. Denklemlerin operatör yazılım formunu kullanarak denklemlerin lineer olup olmadığını kontrol edilebilir. Bunun için aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 1 Aşağıdaki koşulları

1) $L(u+v) = L(u) + L(v)$,

2) $L(au) = aL(u)$, $a = const$

koruyan L operatörüne lineer operatör denir.

Eğer diferansiyel denklemi oluşturan operatör lineer ise söz konusu denkleme de lineer denklem denir. Lineer olmayan denklemlere non-lineer denklemler denir.

Örnek 5 $u_t = k^2 u_{xx}$ ısı dağılım denkleminin lineer olduğunu gösteriniz.

Bunun için aşağıdaki koşulların korunduğunu kontrol edelim. Bu durumda,

$$L(.) = \frac{\partial(.)}{\partial t} - k^2 \frac{\partial^2(.)}{\partial x^2} \tag{1.3}$$

olmaktadır. Önce $L(u+v)$ ifadesini göz önüne alalım,

$$L(u+v) = \frac{\partial(u+v)}{\partial t} - k^2 \frac{\partial^2(u+v)}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} - k^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) \tag{1.4}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} - k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = L(u) + L(v).$$

Yani, birinci özelliğik sağlanmış oldu. Şimdi ikinci özelliği kontrol edelim. λ nın sabit olduğunu varsayarsak

$$L(au) = \frac{\partial(\lambda u)}{\partial t} - k^2 \frac{\partial^2(\lambda u)}{\partial x^2} = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial t} - k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \lambda L(u) \tag{1.5}$$

elde ederiz. Böylelikle operatörün lineer olduğunu ispatlamış oluruz.

Tezde genelde birinci basamaktan olan denklemler incelendiğinden, genel şekilde yazılmış birinci basamaktan kısmi türevli diferansiyel denklemi

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \tag{1.6}$$

göz önüne . Burada F fonksiyonu x, y, u, u_x, u_y değişkenlerine bağlı bilinen fonksiyondur.

F fonksiyonunun u, u_x, u_y değişkenlerine göre lineer olduğu takdirde (1.6) denklemine lineer denklem denir ve genel yazılım formu

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u + d(x, y) = 0 \tag{1.7}$$

olmaktadır. Eğer $F(x, y, u, u_x, u_y)$ fonksiyonu yalnız u_x ve u_y göre lineer fonksiyon ise (1.6) denklemine kuazi lineer denklem denir. Kuazi lineer denklemin genel yazılım formu

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y + c(x, y, u) = 0 \tag{1.8}$$

olmaktadır.

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y,u)$$

şeklinde olan denklemlere ise yarı(hemi) lineer denklem denir.

1.2 Birinci Basamaktan Lineer Homojen Denklemin Çözümü

Kolaylık için önce

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = 0 \tag{1.9}$$

denklemini göz önüne alalım. xoy düzleminde parametrik denklemleri $(x = x(s), y = y(s))$ olan öyle bir eğri içerelim ki, bu eğri üzerinde (1.9) denklemi tam diferansiyel şeklinde yazılabilsin. Eğer böyle eğriler bulanabilinir ise bu tür eğrilere denklemin karakteristik eğrileri denir. Söz konusu karakteristik eğriler aşağıdaki adi diferansiyel denklemler sistemini

$$\frac{dx}{ds} = a(x,y), \tag{1.10}$$

$$\frac{dy}{ds} = b(x,y) \tag{1.11}$$

koruduğu takdirde, (1.9) denklemi de

$$\frac{du}{ds} = 0 \tag{1.12}$$

gibi yazılabilir. (1.10), (1.11) denklemlerini

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)} \tag{1.13}$$

şekilde de yazabiliriz. (1.12), (1.13) adi diferansiyel denklemlerinin genel çözümlerini

$$\varphi(x,y) = c_1, \ \psi(x,y) = c_2 \tag{1.14}$$

gibi gösterelim. Bunlara (1.9) denkleminin 1.aralık integralleri denir.

Teorem 1 (1.14) ifadeleri (1.9) denkleminin 1.aralık integralleri olduğu takdirde

$$\Phi(c_1, c_2) = 0 \tag{1.15}$$

ile tanımlanan kapalı fonksiyon (1.9) un genel çözümü olmaktadır.

Genel olarak x, y, z serbest değişkenler olmak üzere, $\phi = \phi(x,y)$ ve $\psi = \psi(x,y)$

fonksiyonları verilsin. f keyfi diferansiyellenebilen fonksiyon olduğu yerde $f(\phi,\psi)=0$ ise $z=z(x,y)$ fonksiyonu kısmi türevli diferansiyel denklemi sağlar.

$$p\frac{D(\phi,\psi)}{D(y,z)}+q\frac{D(\phi,\psi)}{D(z,x)}=\frac{D(\phi,\psi)}{D(x,y)} \tag{1.16}$$

Burada, $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$

$$\frac{D(\phi,\psi)}{D(x,y)}=\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{1.17}$$

İspat

$f(\phi,\psi)=0$ fonksiyonunu x ve y göre diferansiyelleriz ve yahut

$$f=[\phi(x,y,z),\psi(x,y,z)],z=z(x,y)$$

elde ederiz. Bu fonksiyonu x e ve y ye göre diferansiyellersek

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial\phi}\left[\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right]+\frac{\partial f}{\partial\psi}\left[\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right]=0 \tag{1.18}$$

ve

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial\phi}\left[\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right]+\frac{\partial f}{\partial\psi}\left[\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right]=0 \tag{1.19}$$

elde ederiz. Elde ettiğimiz (1.18) ve (1.19) denklemleri,bilinmeyen $\frac{\partial f}{\partial\varphi}$, $\frac{\partial f}{\partial\psi}$ için homojen cebirsel denklem sistemi olmaktadır. Homojen denklemin trival olmayan çözümünün varlığı için katsayılardan oluşmuş determinant sıfıra eşit olmalıdır. Buradan da hükmün doğruluğunu ispatlamış oluruz.

$$\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial z}p\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial z}q\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial z}p\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial\phi}{\partial z}q\right)\right]=0 \tag{1.20}$$

Örnek 6 Denklemin genel çözümünü bulunuz. $xu_x+yu_y=0.$

Karakteristik denklem

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{du}{0}$$

olmaktadır. Buradan ilk 1. aralık inteqral $du = 0$ denkleminden $u = c_1$ olarak bulunur. İkinci 1. aralık integralı ise $\frac{y}{x} = c_2$ olarak elde ederiz. Böylelikle gereken aralık integrallerimizi bulmuş olduk. Teoreme 1 e göre denklemin genel çözümü

$$f(c_1, c_2) = 0$$

ve yahut

$$f\left(u, \frac{y}{x}\right) = 0$$

olmaktadır. Son denklemden

$$u = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

alırız, burada φ keyfi diferansiyellenebilen bir fonksiyon olmaktadır.

Örnek 7 Denklemin genel çözümünü bulunuz. $u_x - u_y = 1.$

İlk olarak aralık integrallerimizi bulalım. Karakteristik denklemimizi yazalım

$$dx = -dy = du.$$

Buradan

$$dx = -dy, \quad dx = du$$

yaza biliriz. Sonuncu denklemleri integrallersek

$$c_1 = y + x, \quad c_2 = u - x$$

alarız. Teorem 1 e göre

$$f(y + x, u - x) = 0$$

elde ederiz. Buradan çözüm için aşağıdaki

$$u - x = \varphi(y + x)$$

veya

$$u = \varphi(y + x) + x$$

gibi ifadeyi elde ederiz.

1.3 Cauchy Problemi

Birinci basamaktan kısmi türevli diferansiyel denklem için n değişkenli Cauchy problemini incelersek,

$$X[f] \equiv X_1(x_1, x_2, ..., x_n, f)\frac{\partial f}{\partial x_1} + ... + X_n(x_1, x_2, ..., x_n, f)\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \qquad \textbf{(1.21)}$$

$$f(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n^0) = \varphi(x_1, x_2, ..., x_{n-1}). \qquad \textbf{(1.22)}$$

Burada $\psi = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ bilinmeyen fonksiyon, $\varphi(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ fonksiyonu ise verilen fonksiyondur.

İlk olarak karakteristik denklemimizi yazalım,

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = ... = \frac{dx_n}{X_n} \qquad \textbf{(1.23)}$$

Varsayalım ki bu

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n^0) = c_1 \\ \psi_2(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n^0) = c_2 \\ \vdots \\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n^0) = c_{n-1} \end{cases} \qquad \textbf{(1.24)}$$

(1.23) denkleminin birinci aralık integralleridir. Bunlar karakteristik denklemin özel çözümleridir. O halde başlangıç koşulunu korumak zorundadırlar. Yani

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) = \overline{\psi}_1 \\ \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) = \overline{\psi}_2 \\ \vdots \\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) = \overline{\psi}_{n-1} \end{cases} \qquad \textbf{(1.25)}$$

(1.25) deki ψ_i, ($i = 1,2,..., n-1$) fonksiyonlarının her birinde $n-1$ tane değişken ve $n-1$ tane denklem vardır. O halde bu denklemler sistemine $n-1$ tane değişkene bağlı cebirsel denklemler sistemi gözüyle bakmak mümkündür. (1.25) denkleminin çözümlerini

$$\begin{cases} x_1 = W_1(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_{n-1}) \\ x_2 = W_2(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_{n-1}) \\ \vdots \\ x_{n-1} = W_{n-1}(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_{n-1}) \end{cases} \qquad \textbf{(1.26)}$$

olarak gösterelim. Elde edilen ifadeleri (1.22) denkleminde yerine yazarsak (1.21), (1.22) probleminin çözümünü

$$f = \varphi(W_1(\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_2,...,\overline{\psi}_{n-1}),W_2(\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_2,...,\overline{\psi}_{n-1}),...,W_{n-1}(\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_2,...,\overline{\psi}_{n-1})) \quad \textbf{(1.27)}$$

şeklinde buluruz.

Örnek 8 Denklemin çözümünü aşağıda verilen başlangıç koşulları yardımı ile bulunuz.

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{z}{2}\frac{\partial u}{\partial z}=0, \quad \textbf{(1.28)}$$

$$x=1,\ \ u=y+z^2.$$

Önce karakteristik denklemimizi yazalım

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z/2}.$$

İlk 1. aralık integral

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{dy}{y}$$

denkleminden

$$ln|x|=ln|y|+ln|c_1|$$

$$\frac{y}{x}=c_1$$

gibi bulunur. İlk 1. aralık integrali

$$c_1=\frac{y}{x}\equiv\psi_1(x,y,z,u)$$

olarak gösterelim. İkinci 1. aralık integral

$$\frac{dx}{x}=\frac{dz}{z/2}$$

denkleminden

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{dz}{z/2}+c_2$$

$$ln|x|=2ln|z|=ln|c_2|$$

$$\frac{z^2}{x} = c_2$$

olarak elde ederiz. İkinci 1. aralık integralide

$$c_2 = \frac{z^2}{x} \equiv \psi_2(x, y, z, u)$$

olsun. Teorem 1 e göre (1.28) denkleminin genel çözümü

$$u(x, y, z) = F(c_1, c_2) = F\left(\frac{y}{x}, \frac{z^2}{x}\right)$$

olmaktadır. Burada F keyfi fonksiyon olmaktadır. Söz konusu fonksiyonu elde etmek için başlangıç koşulunu kullanalım, yani $x = 1$ noktasında $u(1, y, z) = y + z^2 = F(y, z^2)$. Buradan $F(s_1, s_2) = s_1 + s_2$ olarak belirlenir. F in elde ettiğimiz ifadesini dikkate alarak (1.28) in çözümünü

$$u(x, y, z) = \frac{y}{x} + \frac{z^2}{x}$$

şeklinde yazabiliriz.

(1.28) denklemini başka bir yolla da çözebiliriz. Yukarıda gösterdiğimiz gibi 1.aralık integral

$$c_1 \equiv \psi_1(x, y, z) = \frac{y}{x}$$

olur. Buradan

$$\psi(1, y, z) = \overline{\psi}_1$$

olsun.

İkinci 1. aralık integral

$$c_2 \equiv \psi_2(x, y, z) = \frac{z^2}{x}$$

den

$$\psi(1, y, z) = z^2$$

olmaktadır.

$$y = \overline{\psi}_1, \;\; z^2 = \overline{\psi}_2$$

denklemlerinden y ve z bulup, başlangıç fonksiyonda yerine yazarsak

$$u(x, y, z) = \psi_1 + \psi_2 = \frac{y}{x} + \frac{z^2}{x}$$

elde ederiz.

Örnek 9 Denklemin çözümünü aşağıda verilen Cauchy başlangıç koşulu çerçevesinde bulunuz .

$$(y-u)u_x + (u-x)u_y = x - y,$$

$$u = 0 \;,\; xy = 1.$$

Karakteristik denklem,

$$\frac{dx}{y-u} = \frac{dy}{u-x} = \frac{du}{x-y} = dt$$

olmaktadır. Bu durumda denklemler sistemimizi aşağıdaki simetrik

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (y-u), \\ \dfrac{dy}{dt} = (u-x), \\ \dfrac{du}{dt} = (x-y). \end{cases} \qquad \textbf{(1.29)}$$

formda yazabiliriz. Bu denklemleri toplarsak

$$\frac{d(x+y+u)}{dt} = 0$$

elde ederiz. Burada

$$x + y + u = c_1$$

olmaktadır. İkinci aralık integral olarak karakteristik denklemleri sırasıyla x, y ve z çarparsak

$$d\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{u^2}{2}\right) = 0$$

elde ederiz. Buradan ikinci aralık integrali

$$x^2 + y^2 + u^2 = c_2$$

olarak yazarız. İncelenen denklemin genel çözümü

$$F(c_1, c_2) = 0$$

veya

$$c_1 = \varphi(c_2)$$

olmaktadır. Aralık integrallerin ifadeleri yerine konursa

$$x + y + u = \varphi(x^2 + y^2 + u^2)$$

elde ederiz. Burada φ keyfi diferansiyellenebilen fonksiyon olmaktadır Aralık integraller başlangıç koşulunu korumalıdır, yani

$$u = 0 \Rightarrow c_1 = x + y$$

ve

$$u = 0 \Rightarrow c_2 = x^2 + y^2$$

olmaktadır. c_1 i c_2 cinsinden ifade edersek

$$c_1^2 = c_2 + 2$$

alırız. Bulduğumuz c_1, c_2 değerlerinini yerine yazar isek;

$$(x + y + u)^2 = x^2 + y^2 + u^2 + 2,$$

elde ederiz. Buradan

$$u = \frac{1 - xy}{x + y}$$

olmaktadır.

2. BİR BOYUTLU KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLER. CAUCHY PROBLEMİ

2.1 Bir Boyutlu Hopf Denklemi

Kolaylık için bu bölümde bir boyutlu 1. Basamaktan kuazi lineer skaler denklem için yazılmış Cauchy problemini inceleyeceğiz.

Aşağıdaki problemi göz önüne

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \textbf{(2.1)}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \qquad \textbf{(2.2)}$$

alalım.

(2.1) denklemindeki nonlineerliğin etkisini incelemek için, önce söz konusu denklemi başlangıç profilinin

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \tag{2.3}$$

olduğu durum için inceleyelim.

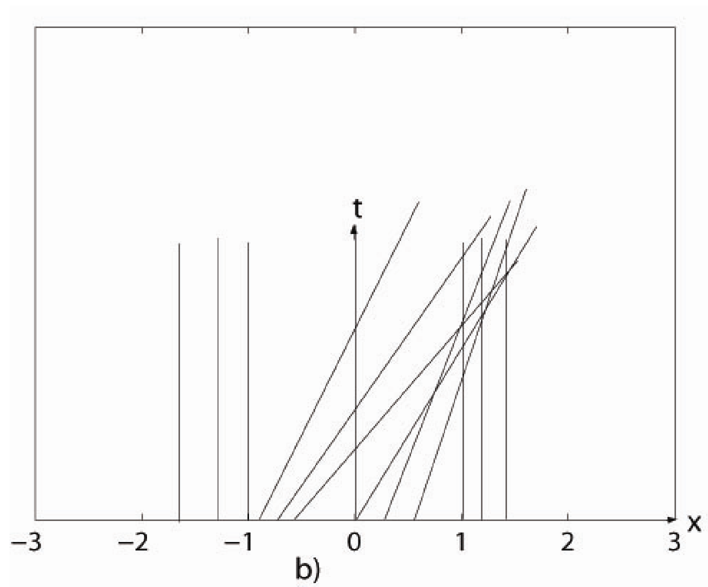
(2.1), (2.2) probleminin sürekli $u(x,t)$ çözümüne sahip olduğunu varsayalım. (x,t) düzleminde ve

$$\frac{dx}{dt} = u \tag{2.4}$$

eşitliği ile tanımlanan $x = x(t)$ eğrisini gözönüne alalım. Söz konusu eğriyi önceden açık şekilde bulmak imkansızdır. Çünkü (2.4) denklemi bilinmeyen u fonksiyonunun bu eğri üzerindeki değerini içermektedir. (2.4) eğrisi üzerinde (2.1) denklemi

$$\frac{du}{dt} = 0$$

şeklinde yazılabilir. Sonuncu denklemden görüldüğü gibi $u(x,t)$ fonksiyonu $x = x(t)$ eğrisi üzerinde sabit değer alır, yani $u = sabit = c$ dır. Böylelikle, (2.1) denkleminin genel çözümünün bulunması (x,t) düzleminde tanımlanan ve eğimi $u(x,t)$ olan eğriler ailesinin bulunmasına indirgenilir. Bu eğriler (2.1) denkleminin karakteristikleri olmaktadır. (2.1) denkleminin karakteristikler ailesinin grafikleri Şekil 1 de gösterilmiştir.



Şekil 1 $u > 0$ için karakteristik eğriler

Diğer bir deyişle, (2.1) denkleminin çözümü aynı zamanda

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = u \\ \\ \dfrac{du}{dt} = 0, \end{cases} \tag{2.5}$$

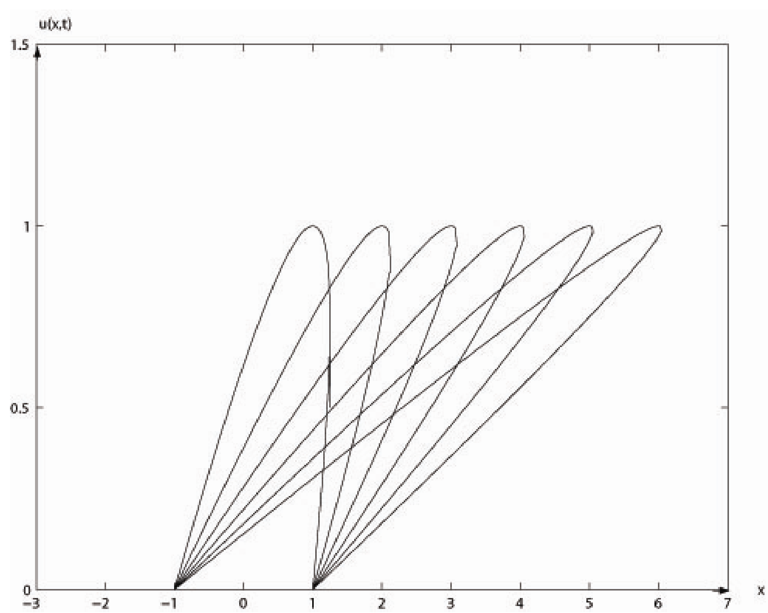
adi diferansiyel denklemler sisteminin de çözümü olmaktadır ve tersine (2.5) in her bir çözümü (2.1) denkleminin de çözümü olmaktadır. (2.5) denklemler sistemine aşağıdaki

$$x\,|_{t=0} = \xi,\ \ u\,|_{t=0} = u(\xi) \tag{2.6}$$

başlangıç koşulları ekleyelim. Burada ξ eğimi $u(x,t)$ olan herhangi bir doğrular ailesinin ox ekseni ile kesiştiği noktasının apsisini gösterir.

(2.5), (2.6) probleminin çözümü

$$u(x,t) = u_0(\xi) = u_0(\xi), \tag{2.7}$$



Şekil 2: $u(x,t)$ çözümünün zamana göre değişimi

$$\xi = x - ut \tag{2.8}$$

olmaktadır. (2.3) dikkate alınırsa çözüm için son olarak

$$u(x,t)=\begin{cases}1-(x-ut)^2, & |x-ut|<1\\ \\ 0, & |x-ut|\geq 1\end{cases} \tag{2.9}$$

ifadesi elde edilir. Hareket eden (2.8) ξ koordinatını dikkate alırsak, (2.9) u

$$u(x,t)=\begin{cases}1-\xi^2, & |\xi|<1\\ \\ 0, & |\xi|\geq 1\end{cases} \tag{2.10}$$

şeklinde de yazabiliriz. (2.10) ifadesi (2.1), (2.2) probleminin stasyoner çözümü olmaktadır. Görüldüğü gibi (2.9) ifadesi $u(x,t)$ fonksiyonu için kapalı bir fonksiyon oluşturmaktadır. Söz konusu kapalı fonksiyondan $u(x,t)$ çözümü için açık şeklinde bir ifade

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{(2xt-1)\pm\sqrt{1-4xt+4t^2}}{2t^2}, & |x-ut|<1\\ \\ 0, & |x-ut|\geq 1\end{cases} \tag{2.11}$$

elde ederiz. $u(x,t)$ fonksiyonunun zamanın çeşitli değerlerinde x e göre değişmesi Şekil 2 de gösterilmiştir.

Genelde, dalgaların karakteristik özelliği herhangi bir sinyalin herhangi bir ortamda sonlu hızla dağılmasıdır. Hiperbolik tür denklemlerle ifade edilen dalgalarda bu olay karakteristikler ile bağlı olmaktadır. (x,t) düzleminde her bir karakteristik x uzayında bir dalgayı ifade eder ve çözümün karakteristik üzerindeki değişmesi ise dalganın fiziksel dağılmasına karşılık gelir. Bu anlamda, (2.5) in birinci denklemi şöyle yorumlanabilir: u nun çeşitli değerleri u hızı ile "dağılmaktadır". Dolayısıyla, problemin çözümünün grafiği her bir t için başlangıç profilinin, yani $u=u_0(x)$ eğrisinin her bir noktasının ut kadar sağa kaydırılması ile elde edilmektedir öyle ki, bu mesafeler çeşitli "u" lar için farklı olmaktadırlar. Şekil 2 den görüldüğü gibi, $u>0$ olduğu durumda u nun büyük değerleri, u nun küçük değerlerine oranla daha hızlı dağılmaktadır. Bu da çözümün profilinde bir bozulmaya neden olur. $u<0$ olduğu durumda ise u nun büyük değerleri küçük değerlerine oranla daha zayıf şeklinde dağılmaktadır. Bu ise çözümün ox ekseninin negatif yönünde bozulmasına neden olur.

Böylelikle dalganın x e göre azalan fonksiyon olduğu bölgelerde kırılması kaçınılmazdır ve çözümde çokdeğerlilik ortaya çıkar. Kırılma (breaking) dalganın profilinde ilk kez dik teğetin oluştuğu $t = T_0$ anında meydana çıkar. söz konusu T_0 değerini bulalım. (2.3) den görüldüğü gibi başlangıç profili hem negatif hem de pozitif eğime sahiptir. Örneğin, $x = 1$ noktasında başlangıç profili negatif eğime sahiptir. Gerçekten de, $u_x(x,0) = -2x|_{x=1} = -2 < 0$ dır. Açıktır ki, $u(x,t)$ fonksiyonunun $x \geq 1$ değerlerinde çokdeğerli olmaması için $u_x(1,t) > 0$ eşitsizliğinin korunması gerekmektedir. Bu eşitsizliğin oluştuğu minimum zaman değeri, aranan T_0 değeri olmaktadır ve $u_x(1,t)$ nin negatif değerden pozitif değerlere dönüşmesi için $u_x(1,t) = \infty$ noktasından geçmektedir. (2.10) formülünden

$$u_x(1,t) = \frac{1}{2t^2}[2t \pm \frac{2t}{1-2t}]$$

elde ederiz. Buradan $T_0 = 0.5$ olarak bulunur.

Çözümün çokdeğerli olması fiziksel açıdan kabul edilemez. Fiziksel açıdan anlamlı olan bir değerli ve sınırlı çözümlerdir. Bazı fiziksel yaklaşımlara göre çözümde kırılma noktaları oluştuğunda, (2.1) denklemi artık fiziksel olayı gerçek şeklinde tam olarak ifade etmemektedir. Bu durumda problemi fiziksel açıdan bir daha incelemek, ek yaklaşımları dikkate almak ve denklemi yeniden incelemek gerekmektedir. Ama, bazı durumlarda çokdeğerli sürekli çözümleri, süreksiz çözümlerin mevcut olduğunu varsayarak kurtarmak mümkündür. Bu durumda sürekli çokdeğerli çözümler bir değerli, lakin 1.tür süreksizliğe sahip çözümlere dönüştürülür. Bu işlevler ise matematiksel çözüm kavramının öyle biçimde genişletilmesini gerektirir ki, süreksiz fonksiyonlar da bilinen anlamda çözüm olabilsinler. Bu tür genişletilme genelleştirilmiş (veya zayıf) çözüm kavramı içermekle gerçekleştirilebilir.

Bazı fiziksel olaylarda rastlanan darbe dalgaları vardır ki, burada viskozite ve sıcaklık çok önemli rol oynamaktadır. Darbe dalgalarının haricinde söz konusu etkileri dikkate almamak da mümkündür. Genelleştirilmiş teoride viskozite dikkate alınmadığı durumda sözünü ettiğimiz darbe dalgası fiziksel olarak çözümde bulunan sıçrayışla ifade edilmektedir. Bu ise kendi sırasında sıçrayış üzerinde akış parametrelerini bir biriyle bağlayan koşulun yazılmasını gerektirir.

Böylelikle, matematiksel açıdan genelleştirilmiş çözümü iki kısımdan, ilki sürekli diferansiyellenebilen ve (2.1) denklemini sağlayan, diğeri ise Rankine-Hugoniot koşulunu koruyan sıçrayıştan oluşan fonksiyon olarak yorumlamak mümkündür.

Tanım 2 *(2.2) koşulunu koruyan,* (x,t) *uzayının üst yarı kısmında her iki değişkene göre diferansiyellenebilen ve* $t+|x|$ *nin büyük değerlerinde sıfır olan herhangi bir* $\varphi(x,t)$ *temel fonksiyonları için*

$$\iint_D \left\{ \varphi_t(x,t)u(x,t) + \varphi_x(x,t)\frac{u^2(x,t)}{2} \right\} dxdt + \int_{-\infty}^{\infty} u(x,0)\varphi(x,0)dx = 0 \qquad \textbf{(2.12)}$$

integral eşitliğini sağlayan $u(x,t)$ fonksiyonuna (2.1), (2.2) probleminin zayıf çözümü denir.

$u(x,t)$ ve $\frac{u^2(x,t)}{2}$ fonksiyonları sürekli diferansiyellenebilen fonksiyonlar olduğunda (2.1) ile (2.12) denklemleri denk olmaktadır. Genelde ise, (2.12) denklemini koruyan fonksiyonlar sınıfı (2.1) denklemini koruyan fonksiyonlar sınıfından daha geniş sınıf oluşturmaktadır. (2.12) denklemini koruyan fonksiyonlar süreksiz de olabilirler ve hatta onların diferansiyellenebilir olmaları istenmeyebilir. (2.12) denklemini koruyan çözümlere (2.1), (2.2) probleminin genelleştirilmiş çözümü de denir .

(2.1) denkleminin zayıf çözümünün diğer tanımını " suni viskotize" kavramı dahil ederek gerçekleştirebiliriz. Söz konusu yaklaşım olayın fiziksel yapısına da uygun olmaktadır. Bu durumda (2.1) denkleminin yerine küçük $\mu > 0$ parametresine bağlı olan

$$\frac{\partial u_\mu}{\partial t} + u_\mu \frac{\partial u_\mu}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u_\mu}{\partial x^2}, \quad \mu \neq 0, \qquad \textbf{(2.13)}$$

denklemi gözönüne alınır. Fizikte $\mu > 0$ parametresine suni viskozite denir.

Tanım 3 $\mu \to 0$ *iken* $u_\mu(x,t)$ *fonksiyonlarının limitine (2.1) denkleminin zayıf çözümü denir.*

(2.1) denkleminin zayıf çözümünün mevcut olduğunu varsayalım. $u(x,t)$ fonksiyonu D bölgesinin alt bölgeleri olan D_1 ve D_2 de sürekli ve D_1 ve D_2 nin sınırı olan Γ da 1. tür süreksizliğe sahip çözüm olsun (Şekil 3). (2.1) denklemini test fonksiyonlar sınıfından olan $\varphi(x,t)$ fonksiyonuyla çarpıp $D = D_1 \cup D_2$ bölgesi üzerinden integrallersek

$$\iint_{D_1}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right)\right\}\varphi(x,t)dxdt+\iint_{D_2}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right)\right\}\varphi(x,t)dxdt$$

$$+\int_{\Gamma}\{[u]\ell+\left[\frac{u^2}{2}\right]m\}\varphi(x,t)ds=0, \qquad \textbf{(2.14)}$$

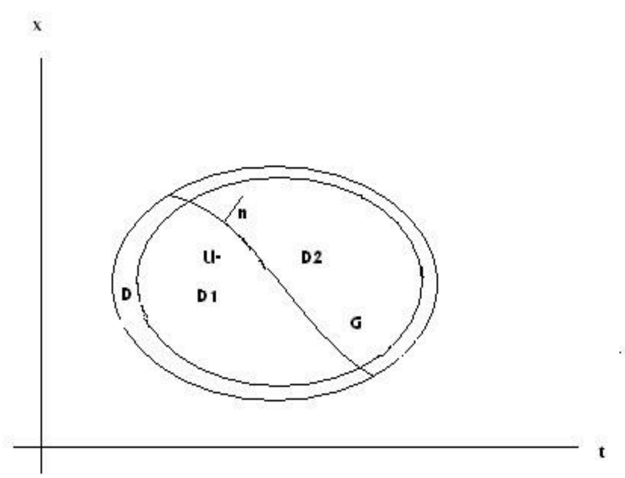
alırız. Burada, (ℓ,m) Γ eğrisinin dış normalini, $[f]$ ise herhangi bir $f(x,t)$ fonksiyonunun Γ üzerindeki sıçrayışını göstermektedir. Γ eğrisi boyunca eğrisel integral, D_1 ve D_2 bölgelerinde

yapılan kısmi integrasyon sonucu ortaya çıkan terimlerden oluşmuştur. (2.14) eşitliği keyfi $\varphi(x,t)\in \overset{o}{C}_1$ fonksiyonları için gerçekleştiğinden

$$[u]dx+\left[\frac{u^2}{2}\right]dt=0 \qquad \textbf{(2.15)}$$

olmak zorundadır. (2.15) a sıçrayış üzerindeki Rankine-Hugoniot koşulu denir. $U=-\frac{\ell}{m}$ olduğunu varsayarsak

$$\frac{dx}{dt}=U=\frac{\left[\frac{u^2}{2}\right]}{[u]}=\frac{u_+^2-u_-^2}{2(u_+-u_-)}=\frac{u_++u_-}{2} \qquad \textbf{(2.16)}$$



Şekil 3: Zayıf çözümün tanım bölgesi

buluruz. Burada u_+ ve u_- sırasıyla hızın sıçrayışın önünde ve arkasındaki değerini göstermektedir.

2.2 YARDIMCI PROBLEM VE ÇÖZÜMÜ

(2.1), (2.2) probleminin zayıf çözümünü elde etmek için [2]'yi takip ederek aşağıdaki yardımcı problemi

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2=0, \qquad \textbf{(2.17)}$$

$$v(x,0)=v_0(x). \qquad \textbf{(2.18)}$$

ele alalım. Burada, $v_0(x)$ fonksiyonu

$$\frac{dv_0(x)}{dx}=u_0(x) \qquad \textbf{(2.19)}$$

denkleminin herhangi bir sürekli diferansiyellenebilen çözümü olmaktadır.

Teorem 2 *Eğer $v(x,t)$ (2.17), (2.18) yardımcı probleminin pürüzsüz çözümü ise,*

$$u(x,t)=\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \qquad \textbf{(2.20)}$$

eşitliği ile bulunan $u(x,t)$ fonksiyonu esas problemin yumuşak (soft) çözümü olmaktadır.

Teoremin doğruluğu direkt hesaplama yolu ile ispatlanabilir. Yardımcı problemin avantajları şunlardır:

1. Yardımcı problemin çözümünün diferansiyellenebilme özelliği esas problemin çözümünün diferansiyellenebilme özelliğinden bir mertebe daha fazladır.

2. Yardımcı problemin çözümü mutlak sürekli fonksiyon olmaktadır. Altını çizerek belirtelim ki, yardımcı problemin çözümü tek değildir. Gerçekten de, eğer (2.1) denklemini x e göre integrallersek

$$\frac{\partial}{\partial t}\int u(x,t)dx+\frac{1}{2}u^2(x,t)=c \qquad \textbf{(2.21)}$$

buluruz. Burada c genelde t ye bağlı keyfi bir fonksiyon olmaktadır.

$$v(x,t) = \int u(x,t)dx + c \qquad \textbf{(2.22)}$$

(2.22) ifadesi (2.21) de yerine konulursa (2.17) denklemini elde ederiz. (2.21) den görüldüğü gibi bu durumda da $u(x,t)$ süreksiz fonksiyon olabilir. Böylelikle, (2.21) denklemini sağlayan fonksiyonlar sınıfı (2.12) eşitliğini koruyan fonksiyonlar sınıfı ile aynı olmaktadır. Gerçekten de, (2.17) denklemini $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ çarpıp, D bölgesi üzerinden integrallersek

$$\int_D \frac{\partial \varphi}{\partial x}[\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2]dxdt = 0$$

elde ederiz. Burada, $\varphi \in \overset{o}{C}_1$ ve $\varphi(x,T) = 0$ koşuluna sahip herhangi bir test fonksiyonudur. Sonuncu integrale x e göre kısmi integrasyon formülünü uygularsak

$$\int_D \varphi[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right)]dxdt = 0$$

buluruz. Bu integrali iki toplama dağıtıp, ilkine t ye, ikincisine ise x e göre kısmi integrasyon formülünü uygularsak (2.12) ifadesini elde ederiz.

Yardımcı problemin diğer bir avantajı, esas problemin çözümünü hesaplarken $u(x,t)$ fonksiyonunun hiçbir değişkene göre türevlerinin kullanılmamasıdır ki, zaten bu türevler genelde mevcut değildir. Gerçekten de, (2.7) ve (2.8) den

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_0'}{1+tu_0'}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{-uu_0'}{1+tu_0'}$$

türevleri $t \geq T = \left(\frac{-1}{u_0'}\right)_{min}$ değerlerinde sonsuzluğa yaklaşır. Diğer deyişle, (2.1), (2.2) probleminin klasik çözümü mevcut değildir.

Şimdi (2.17),(2.18) yardımcı probleminin gerçek çözümünü bulalım. Bunun için, $\frac{\partial v}{\partial t} = p$, $\frac{\partial v}{\partial x} = q$ notasyonlarını kullanarak (2.17) yi

$$F(p,q) = p + \frac{1}{2}q^2 \qquad \textbf{(2.23)}$$

gibi yazabiliriz. (2.23) ü x ve t ye göre diferansiyellersek,

$$\frac{\partial p}{\partial x}+q\frac{\partial q}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial p}{\partial t}+q\frac{\partial q}{\partial t}=0$$

elde ederiz. $\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial q}{\partial t}$ olduğunu varsayarsak, sonuncu denklemler

$$\frac{\partial q}{\partial t}+q\frac{\partial q}{\partial x}=0, \tag{2.24}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}+q\frac{\partial p}{\partial x}=0, \tag{2.25}$$

şeklini alır. (x,t,p,q,v) bilinmeyenleri için aşağıdaki Charpit diferansiyel denklemler sistemini

$$\frac{dt}{ds}=1,\ \frac{dx}{ds}=q,\ \frac{dp}{ds}=0,\ \frac{dq}{ds}=0,\ \frac{dv}{ds}=p+q^2 \tag{2.26}$$

yazalım.(2.26) sistemindeki bilinmeyen $(x,t,p,q\ ve\ v)$ fonksiyonlarını s ye göre bir değerli olarak bulmak için aşağıdaki başlangıç koşullarını

$$t\,|_{s=0}=0,\ x\,|_{s=0}=\xi,\ p\,|_{s=0}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_0}{\partial x}\right)^2,\ \ q\,|_{s=0}=-\frac{\partial v_0}{\partial x},$$

$$v\,|_{s=0}=\begin{cases} v_0(x), & |\xi|<1 \\ 0, & |\xi|\geq 1 \end{cases} \tag{2.27}$$

ekleyelim. Burada, s - parametreyi göstermektedir. (2.26) dan

$$p=c_1,\ \ q=c_2,\ \ t=s+c_3,\ \ x=c_2s+c_1,\ \ v=(c_1+c_2^2)s+c_5 \tag{2.28}$$

elde ederiz. (2.28) den $c_j,\ (j=1,2,3,4,5)$ sabitlerini

$$c_1=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_0}{\partial x}\right)^2=-\frac{1}{2}u_0^2,\ \ c_2=\frac{\partial v_0}{\partial x}=u_0,\ \ c_3=0,\ \ c_4=\xi,$$

$$c_5=v\,|_{s=0}=\begin{cases} v_0(x), & |\xi|<1 \\ 0, & |\xi|\geq 1 \end{cases} \tag{2.29}$$

olarak buluruz. Buradan x,t,v için aşağıdaki formülleri

$$x=ut+\xi,\ \xi=x-ut,\ t=s,$$

$$v=\frac{1}{2}u^2t+v_0(\xi) \tag{2.30}$$

elde ederiz. (2.8) i dikkate alırsak yardımcı problemin çözümü için

$$v(x,t)=\frac{1}{2}u^2t+(x-ut)-\frac{(x-ut)^3}{3} \tag{2.31}$$

alırız. (2.31) den $\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}=u(x,t)$ olduğunu görmek zor değildir. Gerçekten de,

$$\frac{\partial v}{\partial x}=u\frac{\partial u}{\partial x}t+(1-\frac{\partial u}{\partial x}t)-(x-ut)^2(1-\frac{\partial u}{\partial x}t)=u\frac{\partial u}{\partial x}t+1-\frac{\partial u}{\partial x}t$$

$$-(x-ut)^2+(x-ut)^2\frac{\partial u}{\partial x}t=u\frac{\partial u}{\partial x}t-t\frac{\partial u}{\partial x}[1-(x-ut)^2]+1+(x-ut)^2=u(x,t)$$

dır.

2.3 SIÇRAYIŞIN KURULMASI VE GENİŞLETİLMİŞ ÇÖZÜM

Bilindiği gibi

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial X}{\partial x}=0 \tag{2.32}$$

cinsinden yazılabilen her bir denklem bir korunum kanununu ifade etmektedir. Burada T korunan yoğunluk, X ise akış fonksiyonu olup, yalnız u ve onun x ve t ye göre türevlerini içeren polinomsal fonksiyonlar olmaktadır. (2.1) denklemi için sonsuz sayıda korunum kanunları mevcuttur. Açıktır ki, Hopf denkleminin kendisi de aşağıdaki şeklinde yazılmış

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right)=0 \tag{2.33}$$

korunum kanununu ifade etmektedir. Yukarıda söylediğimiz gibi diferansiyellenebilen $u(x,t)$ fonksiyonları için tüm korunum kanunları denk olmaktadır. Lakin onların integral formları farklı olduklarından, söz konusu formlar sıçrayış üzerinde farklı koşulların yazılmasına neden olurlar. Yukarıda gördüğümüz gibi, (2.1) denkleminin (2.12) cinsinden zayıf çözümü (2.15) şeklinde sıçrayış koşulunu oluşturmuştur.

Diferansiyel şeklinde yazılmış (2.32) korunum kanununu

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2}T\,dx+X\,\Big|_{x_1}^{x_2}=0 \tag{2.34}$$

olarak integaral formda da yazabiliriz. (2.34) ifadesinden $\int_{x_1}^{x_2} u(x,t)dx$ enerji integralinin değerinin t ye bağlı olmadığı görülür.

Şimdi, sürekli olduğu bölgede (2.1) denklemini sağlayan ve sıçrayış eğrisi üzerinde ise (2.15) koşulunu koruyan süreksiz çözümün elde edilmesi problemi ile uğraşalım. Yukarıda sözünü ettiğimiz gibi, bu tür çözümlerin elde edilmesi için çokdeğerli çözümden, gözönüne aldığımız problemin fiziksel özelliğini gerçek gösterebilen bir değerli, fakat 1. tür sıçrayışa sahip çözüm elde etmek gerekmektedir. söz konusu sıçrayışın gerçek yerini aşağıdaki yöntem ile belirleyelim.

Açıktır ki, (2.34) cinsinden olan korunum kanunlarını hem sürekli, hem de süreksiz fonksiyonlar sağlamaktadır. Böylelikle, $E(t) = \int_{x_1}^{x_2} u(x,t)dx$ cinsinden olan enerji integralinin değeri her iki fonksiyonlar için aynı kalmaktadır. Aradığımız sıçrayış noktasının gerçek geometrik yeri dalganın herhangi bir $t = T$ anındaki profilinin oluşturduğu alandan, alanı enerji integralinin değerine eşit olan bir alan kesmek zorundadır. Önemle belirtelim ki, bu tanım yeteri kadar genel bir tanım olmaktadır. Sıçrayış noktalarının bulunması için ciddi bir matematiksel yöntem oluşturalım.

Aşağıdaki enerji integralini

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)dx. \qquad \textbf{(2.35)}$$

dikkate alalım. Yukarıda söylediğimiz gibi, dalganın oluşturduğu alan, yani $\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)dx$ nın değeri zaman değişkenine bağlı değildir ve bu değer $\int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)dx$ e eşit olmaktadır.

Tanım 4 *(2.35) eşitliği ile tanımlanan* $E(0)$ *sayısına herhangi bir* t *için* $v(x,t)$ *fonksiyonunun kritik değeri denir*.

Tanım 5 $v(x,t)$ *fonksiyonunun kritik* $E(0)$ *değerini aldığı noktaların apsislerinin geometrik yerine sıçrayış veya front(cephe) noktası denir.*

Front noktasını $x_f(t)$ ile gösterelim. Teorem 1 e ve verdiğimiz tanımlara dayanarak,

$$v(x_f(t),t) = \int_{-\infty}^{x_f(t)} u(x,t)dx = E(0) \qquad \textbf{(2.36)}$$

buluruz.

Tanım 6 *Aşağıdaki eşitlikle tanımlanan* $v_{gen}(x,t)$ *fonksiyonuna*

$$v_{gen}(x,t)=\begin{cases} v(x,t), & v(x,t)<E(0), \\ \\ E(0), & v(x,t)\geq E(0) \end{cases} \tag{2.37}$$

(2.17),(2.18) probleminin genişletilmiş çözümü denir.

Teorem 2 e göre $u_{gen}(x,t)$ için aşağıdaki formülü alırız

$$u_{gen}(x,t)=\begin{cases} u(x,t), & v(x,t)<E(0), \\ \\ 0, & v(x,t)\geq E(0). \end{cases} \tag{2.38}$$

Önerilen bu teoriye dayanarak (2.1) denkleminin (2.2) başlangıç koşulu çerçevesinde genişletilmiş çözümünü araştıralım. Bu amaçla, önce $E(0)$ ı hesaplayalım. (2.8) den

$$E(0)=\int_{-\infty}^{\infty}u(x,0)dx=\int_{-1}^{1}u_0(x)dx=\frac{4}{3}$$

alırız.

Tanım 7 $u(x,t)$ *fonksiyonunun kırıldığı noktanın apsisine kırılma (dönüm) noktası denir.*

Kırılma noktasını $x_b(t)$ ile, u^+ ve u^- ile sırasıyla $u(x,t)$ fonksiyonunun kırılma noktasına kadar ve ondan sonraki kısımlarını, yani

$$u^+=\frac{1}{2t^2}\left[(2xt-1)+\sqrt{1-4xt+4t^2}\right],$$

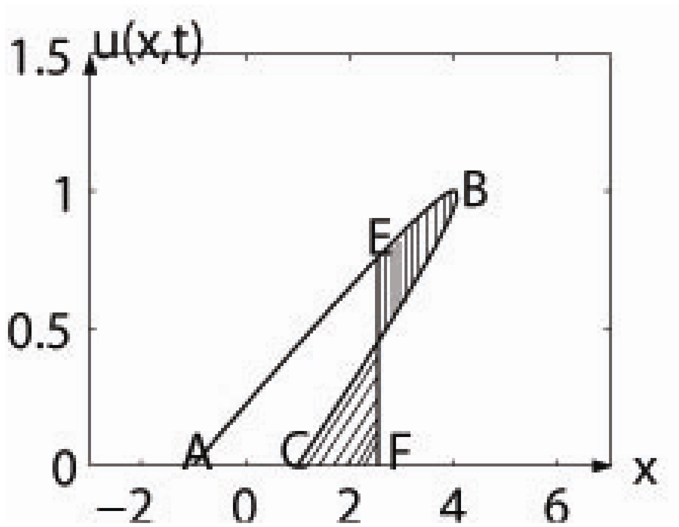
$$u^-=\frac{1}{2t^2}\left[(2xt-1)-\sqrt{1-4xt+4t^2}\right]$$

gösterelim. O halde, $x_b(t)$ noktası $u^+=u^-$ denkleminin çözümü olur ve

$$x_b(t)=\frac{1+4t^2}{4t} \tag{2.39}$$

olarak bulunur.

Şimdi, ABC (Şekil 4) eğrisel bölgesinin S_{ABC} alanını hesaplayalım. Şekilden görüldüğü gibi,



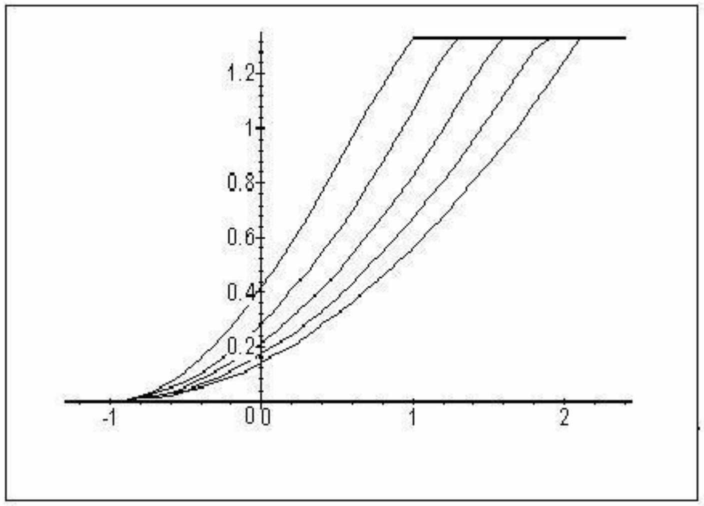
Şekil 4: Sıçrayışın inşa edilmesi

$$S_{ABC} = S_{ABD} - S_{CBD} = \int_{-1}^{x_b(t)} u^+(x,t)dx - \int_{-1}^{x_b(t)} u^-(x,t)dx = \frac{4}{3}.$$

$E(0) = S_{ABC} = \dfrac{4}{3}$ olduğunu dikkate alırsak, (2.38) i

$$v_{gen}(x,t) = \begin{cases} v(x,t), & v(x,t) < \dfrac{4}{3}, \\ \dfrac{4}{3}, & v(x,t) \geq \dfrac{4}{3} \end{cases} \qquad \textbf{(2.40)}$$

şeklinde yazabiliriz.



Şekil 5: $v_{gen}(x,t)$ fonksiyonunun grafiği

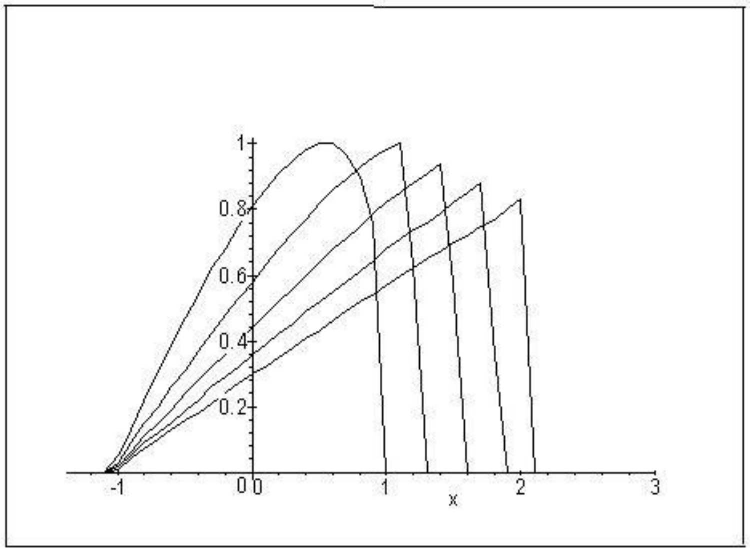
Teorem 1 ve (2.38) ifadesine dayanarak (2.1), (2.2) probleminin çözümü

$$u_{gen}(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & u(x,t) < \dfrac{4}{3}, \\ \\ 0, & u(x,t) \geq \dfrac{4}{3} \end{cases} \quad \textbf{(2.41)}$$

olarak elde edilir. Böylelikle, $u(x,t)$ fonksiyonu için cephe noktası öyle $x_f(t)$ ler olur ki, bu noktanın sağında $u(x,t)$ sıfıra eşit olur. (2.40), (2.41) çözümlerinin grafikleri sırasıyla Şekil 5 ve Şekil 6 da gösterilmiştir.

(2.36) ifadesinden $x_f(t)$ için

$$\frac{dx_f(t)}{dt} = \frac{[\frac{u^2}{2}]}{[u]}\Big|_{x=x_f} = \frac{1}{2}[u(x_f+0,t)+u(x_f-0,t)] \quad \textbf{(2.42)}$$



Şekil 6: $u_{gen}(x,t)$ fonksiyonunun grafiği

buluruz. Bu da literatürdeki Rankine-Hugoniot koşulunun aynısıdır.

Böylelikle, (2.41) formülü ile bulunan $u_{gen}(x,t)$ (2.1), (2.2) probleminin zayıf çözümü olur. Şekil 6 dan görüldüğü gibi, $u_{gen}(x,t)$ 1.tür süreksizliğe sahip bir değerli fonksiyondur. Önemle belirtelim ki, $u_{gen}(x,t)$ çözümünde bulunan 1.tür süreksizlik fiziksel olarak darbe dalgası olarak nitelendirilir.

2.4 SÜREKSİZ BAŞLANGIÇ KOŞULLU RİEMANN PROBLEMİ

Önceki bölümlerde Hopf denklemi için Cauchy problemini incelerken, başlangıç profilinin hem negatif, hem de pozitif eğime sahip sürekli bir fonksiyon olduğunu varsaymıştık. Bunun yanı sıra öyle bir T_0 değerinin mevcutki, $t \geq T_0$ olduğunda problemin çözümünün yeri önceden belli olmayan sıçrayış noktalarına sahip olduğunu da göstermiştik. Limit durumu, yani dalganın başlangıç dağılımının 1.tür süreksizlik noktasına sahip olduğu durumların incelenmesi ayrıca önem taşımaktadır.

Bu bölümde (2.1) denklemini

$$\varphi(x) = \begin{cases} u_1, & x < 0 \\ u_2, & x > 0 \end{cases} \qquad \textbf{(2.43)}$$

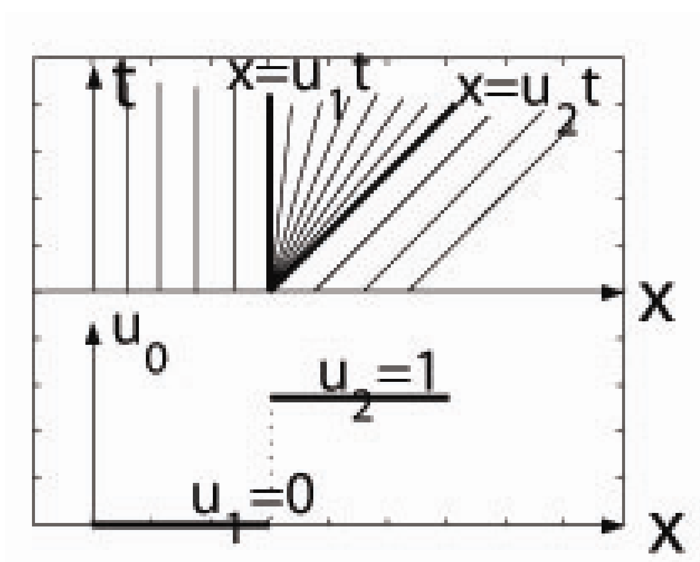
başlangıç koşulu çerçevesinde inceleyelim. Buradaki u_1 ve u_2 sabitlerdir. (2.1), (2.43) Riemann problemindeki nonlineerliğin oluşturduğu özellikleri görebilmek için, bu problemin gerçek çözümünü bulup uygun lineer problemin çözümü ile karşılaştıracagız.

(2.1) denkleminin (2.43) başlangıç koşulu çerçevesinde çözümü $u = u_0(x - ut)$ biçiminde olmaktadır. Sezgisel olarak $u > 0$ olduğunda u nun büyük değerleri, küçük değerlerine oranla daha hızlı hareket ettiği anlaşılmaktadır. Buna göre de, $u_1 > u_2$ olduğunda dalganın dağılım sürecinde başlangıç profili bozulur ve çözümde çokdeğerlilik ortaya çıkar. $u_1 < u_2$ olduğunda ise çokdeğerlilik söz konusu değildir. Şimdi bunları detaylı şeklinde inceleyelim.

Önce, 1.durumu inceleyelım, yani $u_1 < u_2$ olduğunu var sayalım. Karakteristikler metodunun genel prensibine göre (2.1),(2.43) denkleminin çözümü için

$$u(x,t) = u_o(\xi) = \begin{cases} u_1, & \xi < 0 \\ u_2, & \xi > 0 \end{cases} \qquad \textbf{(2.44)}$$

elde ederiz. Burada $\xi = x - ut$ olmaktadır.



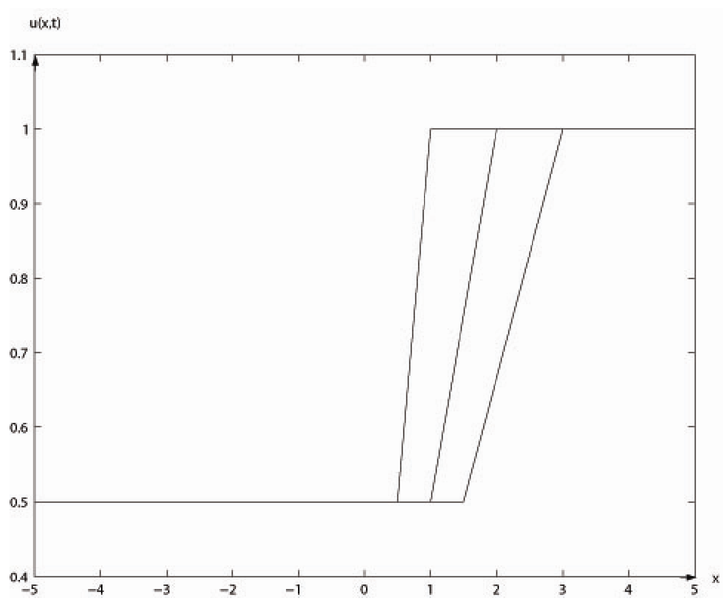
Şekil 7: Riemann probleminin karakteristikleri, $u_1 < u_2$ olan durum

Ayrıca da $u_1 < u < u_2$ olduğundan, $x = u_1 t$ ve $x = u_2 t$ ışınlarının oluşturduğu sektörün içerisinde yerleşen tüm karakteristiklerin yalnız bir ortak noktası $\xi = 0$ olmaktadır. Dolayısıyla, (2.1) denkleminin tüm çözümleri $x = ut$ cinsinden olmaktadır ve çözüm söz konusu karakteristikler üzerinde sabit kalır. (2.1) denkleminin (2.43) başlangıç koşuluna karşılık gelen karakteristiklerinin grafiği Şekil 7 de gösterilmiştir.

Böylelikle (2.1), (2.43) probleminin $u(x,t)$ çözümü için

$$u(x,t) = \begin{cases} u_1, & \dfrac{x}{t} \le u_1 \\ \dfrac{x}{t}, & u_1 < \dfrac{x}{t} < u_2 \\ u_2, & \dfrac{x}{t} \ge u_2 \end{cases} \qquad \textbf{(2.45)}$$

ifadesini elde ederiz. Bu ifade fiziksel açıdan tam yararlı ve sürekli çözüm olmaktadır. $u(x,t)$ fonksiyonunun evrimi Şekil 8 de gösterilmiştir.



Şekil 8: $u(x,t)$ fonksiyonu, $u_1 > u_2$

Örnek 10 Aşağıdaki problemin

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$$u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

çözümünü bulunuz.

Çözüm Bu durumda $u_1 = 0,\quad u_2 = 1$ olmaktadır. (2.44) formülü ile bulunan çözüm

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & \xi < 0 \\ 1, & \xi > 0, \end{cases} \qquad \textbf{(2.46)}$$

olmaktadır.

Şimdi, $u = u_1,\quad u = u_2$ ve $x = ut$ doğrularını başlangıç koşulunun korunumsını sağlayarak birleştirelim

a) $\xi < 0 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow x < 0,$

b) $\xi > 0 \Rightarrow u = 1 \Rightarrow x - t > 0 \Rightarrow x > t,$

c) $\xi = 0 \Rightarrow x - ut \Rightarrow u = \dfrac{x}{t}.$

Böylelikle problemin çözümünü

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{x}{t}, & 0 < x < t \\ 1, & x > t \end{cases} \qquad \textbf{(2.47)}$$

şeklinde elde ederiz.

Şimdi gösterelim ki, elde ettiğimiz (2.47) fonksiyonu (2.1) denkleminin $u_1 = 0$ ve $u_2 = 1$ olduğu takdirde (2.43) koşulunu sağlayan zayıf çözümü olmaktadır, [4].

$f(x,t)$ temel fonksiyon olduğundan sonlu taşıyıcıya sahip olmaktadır, yani öyle $a > 0$ ve T sayıları vardır ki $\mathrm{supp}(f) \subset [-a,a] \times [0,T]$ olmaktadır. Zayıf çözümün tanımına göre

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left(u(x,t)\, f_t(x,t) + \frac{u^2(x,t)}{2}\, f_x(x,t) \right) dxdt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x)\, f(x,0) dx$$

$$= \int_0^T \int_0^t \left(\frac{x}{t}\, f_t(x,t) + \frac{x^2}{2t^2}\, f_x(x,t) \right) dxdt + \int_0^T \int_t^a \left(f_t(x,t) + \frac{1}{2}\, f_x(x,t) \right) dxdt +$$

$$\int_0^a f(x,0)\, dx = \int_0^T \int_x^T \frac{x}{t}\, f_t(x,t) dtdx + \int_0^T \int_0^t \frac{x^2}{2t^2}\, f_x(x,t) dxdt$$

$$+ \int_0^T \int_0^x f_t(x,t) dtdx + \int_T^a \int_0^T f_t(x,t) dtdx + \frac{1}{2} \int_0^T \int_t^a f_x(x,t) dxdt$$

$$+ \int_0^a f(x,0) dx = \int_0^T \left\{ \frac{x}{t}\, f(x,t) \Big|_{t=x}^{t=T} - \int_x^T \left(-\frac{x}{t^2} \right) f(x,t) dt \right\} dx$$

$$+ \int_0^T \left\{ \frac{x^2}{2t^2}\, f(x,t) \Big|_{x=0}^{x=t} - \int_0^t \frac{x}{t^2}\, f(x,t) dx \right\} dt$$

$$+ \int_0^T \left[f(x,x) - f(x,0) \right] dx + \int_0^T \left[f(x,a) - f(x,T) \right] dx$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^T \left[f(a,t) - f(t,t) \right] dt + \int_0^a f(x,0) dx$$

$$= \int_0^T \left(\frac{x}{T}\, f(x,T) - f(x,x) \right) dx + \int_0^T \int_x^T \frac{x}{t^2}\, f(x,t) dtdx$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^T f(t,t) dt - \int_0^T \int_x^T \frac{x}{t^2}\, f(x,t) dtdx + \int_0^T f(x,x) dx -$$

$$\int_0^T f(x,0) dx - \frac{1}{2} \int_0^T f(a,t) dt - \frac{1}{2} \int_0^T f(t,t) dt + \int_0^a f(x,0) dx = 0$$

olmaktadır.

Gösterebilir ki,

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & eğer\ x < \dfrac{t}{2} \\ 1, & eğer\ x > \dfrac{t}{2} \end{cases}$$

fonksiyonu da gözönüne aldığımız denkleminin zayıf çözümüdür. Gerçektende,

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left(u(x,t)\, f_t(x,t) + \frac{u^2(x,t)}{2}\, f_x(x,t) \right) dxdt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x)\, f(x,0) dx$$

$$= \int_0^T \int_{-a}^{a} \left(u(x,t)\, f_t(x,t) + \frac{u^2(x,t)}{2}\, f_x(x,t) \right) dxdt + \int_{-a}^{a} u_0(x)\, f(x,0) dx$$

$$= \int_0^T \int_{\frac{t}{2}}^{a} \left(f_t(x,t) + \frac{1}{2}\, f_x(x,t) \right) dxdt + \int_0^a f(x,0)\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{T}{2}} \int_0^{2x} f_t(x,t) dtdx + \int_{\frac{T}{2}}^{a} \int_0^T f_t(x,t) dxdt$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\frac{t}{2}}^{a} f_t(x,t) dxdt + \int_0^a f(x,0)\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{T}{2}} \left(f(x,2x) - f(x,0) \right) dx + \int_{\frac{T}{2}}^{a} \left(f(x,T) - f(x,0) \right) dx$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^T \left(f(a,t) - f\left(\frac{t}{2}, t \right) \right) dt + \int_0^a f(x,0) dx$$

$$= \int_0^{\frac{T}{2}} f(x,2x) dx - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{T}{2}} f(y,2y) 2dy = 0$$

eşitliği korunumktadır. Dolayısıyla (2.1) denklemi için yazılmış Cauchy probleminin zayıf çözümü tek olmamaktadır.

Şimdi 2. durumu inceleyelim, yani $u_1 > u_2$ olsun.

Örnek 11 Aşağıdaki problemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$$u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

çözünüz.

Çözüm Problemin koşullarına göre $u_1 = 1, \quad u_2 = 0$ olmakta ve bu problemin de çözümü (2.23) formülüne göre

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & \xi < 0 \\ 0, & \xi > 0 \end{cases}$$

olur. Bu durumda $u_2 < u < u_1$, dir ve $x = u_1 t$ ve $x = u_2 t$ sektörünün içerisinde yerleşen her bir karakteristiğin eğimi u_2 den büyük olmaktadır. Böylece, diğer karakterisrikler ile kesişirler, Şekil 9. Bu nedenle çözümün profilinde çokdeğerlilik hemen başlar. Şekil 10 dan görüldüğü gibi çözümün profilinde geriye dönme oluşur. $u_1 > u_2$ olduğu durumda (t, x) düzlemindeki karakteristikler yelpazesi dönmeye başlar ve dalganın yeniden ileri dönmesini sağlar. Dolayısıyla incelediğimiz problemin klasik çözümü mevcut değildir.

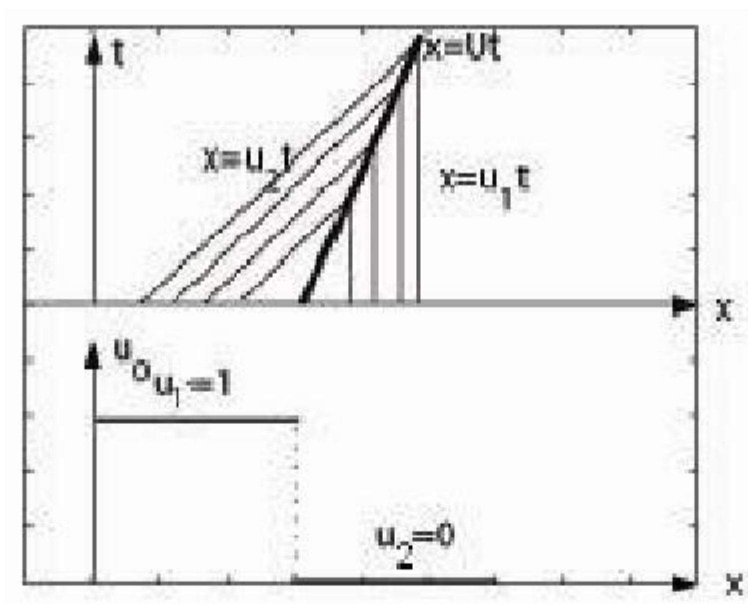
Şimdi de $u = 1$, $u = 0$ ve $x = ut$ doğrularını başlangıç koşulunu koruyacak şeklinde birleştirelim.

a) $\xi < 0 \Rightarrow u = 1 \Rightarrow x - t < 0 \Rightarrow x < t,$

b) $\xi > 0 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow x > 0$

olur. Böylelikle aradığımız çözüm

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & x > t \\ \dfrac{x}{t}, & 0 < x < t \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

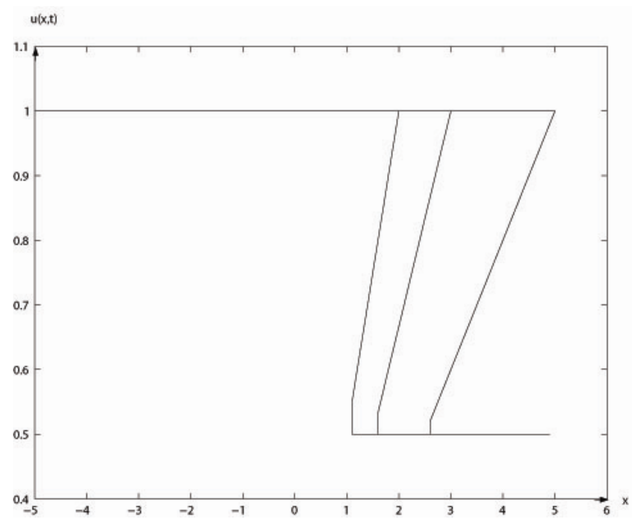


Şekil 9. Riemann probleminin karakteristikleri, $u_1 > u_2$ olan durum

elde ederiz. Şekil 10 dan de görüldüğü gibi elde ettiğimiz fonksiyonun grafiği üç değerli olmaktadır. Bu ise fiziksel açıdan kabul edilemez.

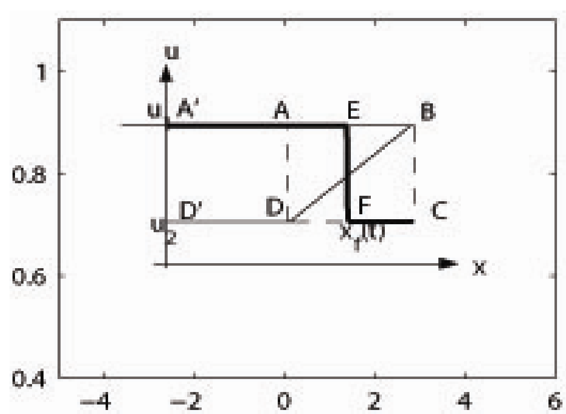
Zayıf çözümü yukarıda gösterdiğimiz yolla

$$u(x,t)=\begin{cases}1, & \dfrac{x}{t}<U\\[2ex] 0, & \dfrac{x}{t}>U\end{cases} \qquad \textbf{(2.48)}$$



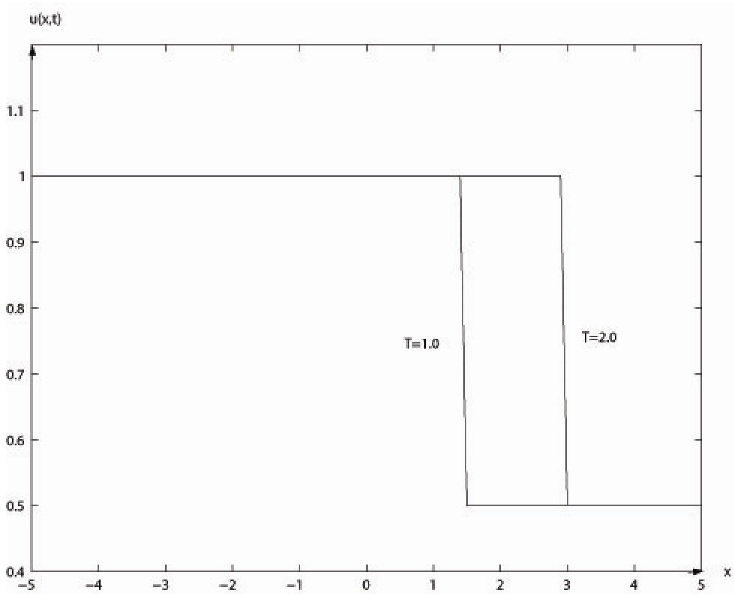
Şekil 10. Çok değerli çözüm

şeklinde yazabiliriz. (2.48) formülünden görüldüğü üzere çözümdeki şüreksizlik $x=\dfrac{t}{2}$ doğrusu üzerinde $U=\dfrac{1}{2}$ hızıyla hareket etmektedir ve incelediğimiz problemin fiziksel gerçek çözümü olmaktadır.



Şekil 11 – Sıçrayışın inşa edilmesi

Çözümün geriye ve ileriye dönme noktalarını sırasıyla $x_b(t)$ ve $x_o(t)$ ile gösterelim.



Şekil 12 – Zayıf çözümün grafiği

Sıçrayış noktasının yerini belirlemek için elde ettiğimiz, örneğin $t = T_1$ zaman değerine karşılık gelen çözümlerden birisini gözönüne alalım (Şekil 11). $u(x,T_1)$ fonksiyonunun grafiği ile sınırlanan $S_{A'BDD'}$ bölgesinin alanı $S_{A'BDD'} = \frac{1}{2}(u_1^2 - u_2^2)t$ olmaktadır. Sıçrayış noktasının yerini öyle seçelim ki, $S_{A'EFD'} = (u_1 - u_2)x_f(t)$ dikdörtgeninin alanı $S_{A'BDD'}$ ye eşit, yani $\frac{1}{2}(u_1^2 - u_2^2)t = (u_1 - u_2)x_f(t)$ olsun. Sonuncu eşitlikten sıçrayış noktası için

$$x_f(t) = \frac{u_1 + u_2}{2} t$$

denklemini elde ederiz. Buradan

$$\frac{dx_f(t)}{dt} = U = \frac{u_1 + u_2}{2} \qquad \textbf{(2.49)}$$

olur. (2.48) i dikkate alarak (2.1), (2.43) problemin zayıf çözümü için

$$u(x,t)=\begin{cases} u_1, & \dfrac{x}{t}<U, \\ \\ u_2, & \dfrac{x}{t}>U \end{cases} \tag{2.50}$$

formülünü elde ederiz. Böylelikle, çokdeğerli çözümden bir değerli, ama birinci tür süreksizliğe sahip ve aynı zamanda enerji integralini koruyan fiziksel yararlı çözümü elde etmiş oluruz. söz konusu zayıf çözümün grafiği Şekil 12 da gösterilmiştir.

Sonuncu ifadenin ele aldığımız problemin zayıf çözümü olduğunu gösterelim. Zayıf çözümün tanımına göre

$$\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(u(x,t)\,f_t(x,t)+\frac{u^2(x,t)}{2}\,f_x(x,t)\right)dxdt+\int_{-\infty}^{\infty}u_0(x)\,f(x,0)dx$$

$$=\int_0^{T}\int_{-a}^{a}\left(u(x,t)\,f_t(x,t)+\frac{u^2(x,t)}{2}\,f_x(x,t)\right)dxdt+\int_{-a}^{a}u_0(x)\,f(x,0)dx$$

$$=\int_0^{T}\int_{-a}^{\frac{t}{2}}\left(f_t(x,t)+\frac{1}{2}\,f_x(x,t)\right)dxdt+\int_{-a}^{0}f(x,0)\,dx$$

$$=\int_{-a}^{0}\int_0^{T}f_t(x,t)dtdx+\int_0^{\frac{T}{2}}\int_{2x}^{T}f_t(x,t)dtdx$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{T}\int_{-a}^{\frac{t}{2}}f_x(x,t)dxdt+\int_{-a}^{0}f(x,0)\,dx$$

$$=\int_{-a}^{0}\left(f(x,T)-f(x,0)\right)dx+\int_0^{\frac{T}{2}}\left(f(x,T)-f(x,2x)\right)dx$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{T}\left(f\left(\frac{t}{2},t\right)-f(-a,t)\right)dt+\int_{-a}^{0}f(x,0)dx$$

$$=-\int_0^{\frac{T}{2}}f(x,2x)dx+\frac{1}{2}\int_0^{T}f\left(\frac{t}{2},t\right)dt=0.$$

2.5 YARDIMCI PROBLEM VE ÇÖZÜMÜ

Şimdi (2.1), (2.43) problemini yardımcı problem aracılığıyla çözelim. Yukarıda gördük ki, $u_1<u_2$ olduğu durumda problemin çözümünde, başlangıç profilde bulunan sıçrayış zamanın artan değerlerinde kaybolur ve t nin büyük değerlerinde çözüm parça-parça

sürekli fonksiyona dönüşür. Lakin, $u_1 > u_2$ olduğunda başlangıç profilde çokdeğerlilik oluşturur, yani klasik çözümü mevcut değildir. Bu durumda zayıf çözümü aşağıdaki gibi tanımlayalım.

Tanım 8 *Negatif olmayan, (2.11) koşulunu sağlayan, temel fonksiyonlar sınıfından ve $f(x,T)=0$ olan herhamgi bir test fonksiyonu için*

$$\int_{D_T}\left[u(x,t)f_t(x,t)+f_x(x,t)\frac{u^2(x,t)}{2}\right]dxdt+\int_{-\infty}^{0}u_2 f(x,0)dx+\int_{0}^{\infty}u_1 f(x,0)dx=0 \qquad \textbf{(2.51)}$$

integral eşitliğini koruyan $u(x,t)$ fonksiyonuna (2.1), (2.11) probleminin zayıf çözümü denir.

Şimdi, (2.1), (2.11) probleminin zayıf çözümünü ve sıçrayış noktasını elde etmek için yardımcı problemi kullanalım. Bu durum için de yardımcı problem (2.17),(2.18) şeklinde olmaktadır. Burada, $v_0(x)$ fonksiyonu

$$v_0(x)=\begin{cases} u_1 x, & x>0 \\ u_2 x, & x<0. \end{cases}$$

olarak tanımlanır. söz konusu yardımcı problemin gerçek çözümünü

$$v(x,t)=\begin{cases} v^+, & \dfrac{x}{t}>u_1 \\ v^-, & \dfrac{x}{t}<u_2 \end{cases} \qquad \textbf{(2.52)}$$

şeklinde yazabiliriz. (2.45) formülünü dikkate alarak

$$v^- = \frac{1}{2}u_1^2 t + u_1(x-u_1 t),$$

$$v^+ = \frac{1}{2}u_2^2 t + u_2(x-u_2 t)$$

yazabiliriz. Basit hesaplamalarla

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}=u(x,t)$$

olduğunu görmek zor değildir.

Şimdi sıçrayış noktasını yerini belirleyelim. Tanım 4 e göre $v(x_f(t),t)=E(t)$

olduğundan $x_f(t)$ front noktasının koordinatları $v^+ = v^-$ denklemini korunumk zorundadır. Sonuncu eşitlikten $x_f(t)$ için

$$x_f(t) = \frac{u_2 + u_1}{2} t$$

elde ederiz.

Aşağıdaki eşitlikle tanımlanan fonksiyona

$$v_{gen}(x,t) = \begin{cases} v^+, & \dfrac{x}{t} > U \\ \\ v^-, & \dfrac{x}{t} < U. \end{cases} \qquad \textbf{(2.53)}$$

(2.17), (2.18) yardımcı probleminin genişletilmiş çözümü denir. Teorem 1 i kullanarak esas problemin $u_{gen}(x,t)$ çözümünü ele alırız. $u_{gen}(x,t)$ fonksiyonunun grafiği Şekil 12 de gösterilmiştir. Şekilden görüldüğü gibi (2.1), (2.11) probleminin profilinde başlangıç dağılışında bulunan sıçrayışın korunarak $\frac{u_1 + u_2}{2}$ hızı ile sağa doğru hareket ettiği görülmektedir. Böylelikle (2.1), (2.11) probleminin fiziksel yapısını gerçek ifade eden çözümünü elde etmiş bulunmaktayız.

3. ENTROPİ KAVRAMI VE SÜRECİN TERSİNMEZLİĞİ

Bu bölümde (2.1) denkleminin doğal genelleşmesi olan

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = 0 \qquad \textbf{(3.1)}$$

denklemini ele alacağız. Yukarıdaki bölümlerde korunum kanunlarını ifade edebilen denklemlerin çözümlerinde, ister başlangıç verilerden kaynaklanan, isterse de karakteristiklerin birbiriyle kesişmesi sonuncu oluşan, yeri önceden bilinmeyen süreksizlik noktalarının mevcut olduğunu ve söz konusu süreksizlik noktaları üzerinde sıçrayış koşullarının korunduğunu gördük. Bunun yanı sıra korunum kanunlarının zayıf çözümlerinin tek olmadığı da bilinmektedir. Ve nihayetinde problemin çözümünü (süreksizlik noktaları içeren) elde ederken fiziksel yararlı çözümü bulmak için ilave yaklaşımların bulunması gerekmektedir.

3.1 SÜREKSİZLİĞİN MEVCUT OLMA KOŞULU

(3.1) denklemini (2.2) başlangıç koşulu çerçevesinde inceleyelim. Varsayalım ki, $F''(u) > 0$, $F(u) \in C^3_{loc}$ ve $u_0(x) \in C^2$.

Şimdi sırf matematiksel düşüncelere dayanarak (3.1) denkleminin $t < T$ değerleri için sürekli olan çözümünün özelliklerini araştıralım ve bu çözümün, hangi $t = T$ kritik değerlerinde bozulduğunu bulalım, [1].

$z = u_x(t,x)$ olsun ve (3.1) denklemini x e göre diferansiyelleyelim,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + F''(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + F'(u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

$z = u_x$ olduğunu dikkate alırsak

$$\frac{\partial z}{\partial t} + F''(u)z^2 + F'(u)\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

veya

$$0 \geq \frac{\partial z}{\partial t} + F'(u)\frac{\partial z}{\partial x}$$

buluruz. $x = x(t)$ karakteristikleri üzerinde $\frac{dx}{dt} = F'(u)$ olduğundan

$$0 \geq \frac{dz}{dt} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial z}{\partial x} \equiv \frac{dz}{dt} \quad \Rightarrow \frac{dz}{dt} \leq 0$$

dır. Yani, $z(t,x)$ karakteristikler üzerinde artmayan fonksiyondur. Böylelikle, herhangi bir $(t,x) \in D_T$ için

$$z(t,x) = u_x(t,x) \leq Sup\, u_0'(x) = K_0, \quad x \in R \qquad \textbf{(3.2)}$$

olur. $u_x(t,x)$ fonksiyonunun $t = T$ değerleri için, x in tüm değerlerinde tanımlı olmadığı durumda, (3.2) ifadesini

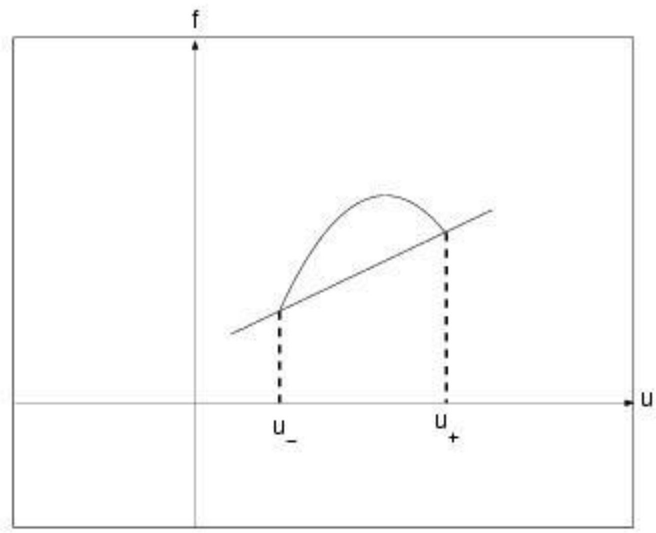
$$\frac{u(t,x_2) - u(t,x_1)}{x_2 - x_1} \leq K_0, \quad \forall x_1, x_2 \qquad \textbf{(3.3)}$$

şeklinde yazalım. (3.3) den, $x_1 < x_2$ olan durumlar için $u(t,x_2) - u(t,x_1) \leq K_0(x_2 - x_1)$ ve $x_2 \to x^* + 0$, $x_1 \to x^* - 0$ yazılabilir, burada x^* $u(T,x)$ fonksiyonu için süreksizlik noktasıdır. Limite geçersek $u(t,x)$ fonksiyonunun

$$u_+ = u(t, x^* + 0) < u(t, x^* - 0) = u_- \quad \textbf{(3.4)}$$

parçalı sürekli fonksiyon olduğunu görebiliriz.

(3.4) türünden olan eşitsizliğe sıçrayışın mevcut olma koşulu (veya O. A. Oleinik



Şekil 13: Üste kabarık (convex) fonksiyon

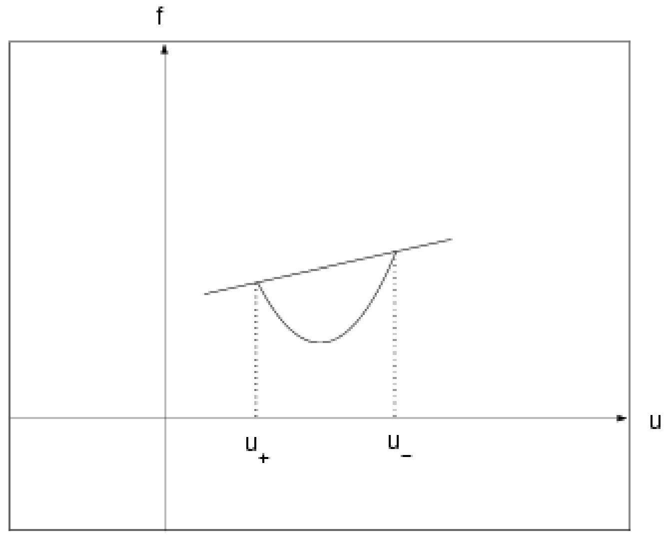
koşulu) [1] denir.

$F''(u) < 0$ olduğu durumda $u = -v$ değişken dönüşümü ile (3.1) denklemini $\upsilon_t + (\tilde{F}(\upsilon))_x = 0$ şeklinde yazabiliriz. Burada $\tilde{F}(\upsilon) \equiv -F(-v)$ dir. Ayrıca $F''(\upsilon) = -F''(-\upsilon) > 0$ dır. Bu durumda, süreksizliğin mevcut olma koşulu $u_+ > u_-$ olur.

Sonuç olarak, kabarık $F(u)$ fonksiyonu için çözümde sıçrayışın mevcut olma koşulu aşağıdaki gibi olmaktadır:

I. $F(u)$ fonksiyonu aşağı kabarık (concave) ise (örneğin; $F(u) = \frac{u^2}{2}, e^u, \ldots$) (3.1) denkleminin çözümünde, $u_- > u_+$ olduğunda, u_- den u_+ ya doğru sıçrayış mevcut olur, Şekil 13.

II. $F(u)$ üste kabarık (convex) fonksiyon ise (örneğin; $F(u) = -u^2,\ lnu, \ldots$) sıçrayış $u_- < u_+$ olduğunda u_- den u_+ ya doğru mevcut olur, Şekil 14.



Şekil 14: Alta kabarık fonksiyon

3.2 ENTROPİ FONKSİYONLARI VE ENTROPİ KOŞULU

Fiziksel yararlı çözümün seçilmesinde birinci yol suni viskotize dahil edilmekle elde edilen modifike olunmuş denklemin $u_\varepsilon(x,t)$ çözümünün (Tanım 2) $\varepsilon \to 0$ olduğunda limiti olarak kabul edilebilir. Bu yaklaşım olayın fiziksel yapısına da uygun olmaktadır. Çünkü bizin incelediğimiz denklemlerden bir çoğu (ihmal edilebilecek kadar) küçük bazı disipatif parametreler içermektedir. Dolayısıyla bu yöntemle küçük disipatife sahip çözüm elde edilebilir.

Tanım 9 *(3.1) denkleminin U hızıyla dağılan süreksizlik noktalarına sahip olan ve entropinin artma koşulunu sağlayan $u(x,t)$ çözümüne entropi çözümü denir.*

Not 2 Kolayca gösterilebilir ki, Örnek 1 in çözümü entropi koşulunu korumamaktadır, çünkü $F'(u_-)=0,\ U=\frac{1}{2}$ ve $F'(u_+)=1$dır. Fakat, Örnek 2 deki problemin çözümü, $F'(u_-)=1,\ U=\frac{1}{2}$ ve $F'(u_+)=0$ olduğundan entropi koşulunu sağlanmaktadır.

Yukarıda elde ettiğimiz (3.4) koşuluna neden entropinin artma koşulu denmektedir. Bilindiği gibi nonlineer denklemlerle ifade edilebilen fiziksel süreçler zaman bakımından geriye dönemezler.

(2.1) Hopf denklemi herhangi bir hortumda akan gazın hareketini ifade edebilen en basit bir model olmaktadır. Daha detaylı modellerde basınç fonksiyonu, gazın sıkıştırılabilirliği varsayımında ise yoğunluk fonksiyonları da yer almaktadır. Gazın durumunu ifade edebilen bu büyüklükler yardımıyla S entropi fonksiyonu oluşturulur ki, söz konusu fonksiyon darbe dalgasından geçtiğinde zamana göre azalmamaktadır, yani

$$S_+ = S(x,t+0) \geq S_- = S(x,t-0). \qquad (E)$$

Geriyedönemezliği ifade edebilen bu eşitsizliklere "entropinin artma" eşitsizliği denir.

Örneğin, Hopf denklemiyle ifade edebilen hidrodinamik modellerde entropi fonksiyonu olarak kinetik enerji

$$S(x,t) = \frac{1}{2}u^2(x,t)$$

kabul edilebilir.

Gösterelim ki, gerçekten de darbe dalgasından geçtiğinde (E) koşulu korunmaktadır. (2.1) denklemi için Rankine-Hugoniot koşulu

$$\frac{u_- + u_+}{2} = \frac{dx}{dt},$$

aşağı kabarık hal fonksiyonları için ise sıçrayışın mevcut olma koşulu

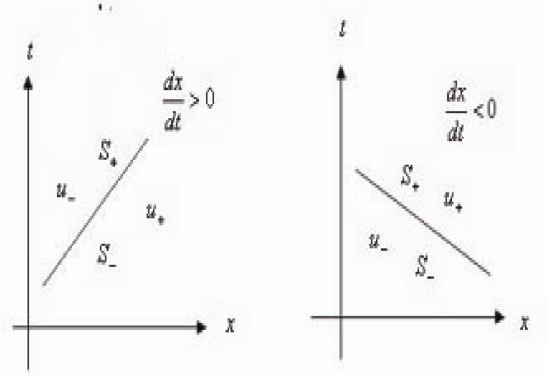
$$u_- - u_+ > 0$$

olmaktadır. $\frac{dx}{dt} > 0$ olduğu takdirde $S_- = \frac{u_+^2}{2}$ ve $S_+ = \frac{u_-^2}{2}$ oluyor. Sonuncu eşitsizliği $\frac{u_- + u_+}{2}$ ile çarparsak $\frac{u_-^2 - u_+^2}{2} > 0$ veya $S_- < S_+$ olduğunu elde ederiz. Benzer yolla $\frac{dx}{dt} < 0$ olduğunda ise $S_- = \frac{u_-^2}{2} <= \frac{u_+^2}{2} = S_+$ olduğunu görebiliriz.

(3.1) denkleminin geriye dönmezliğini gösterebilen diğer bir fonksiyon da fiziksel sistemin toplam kinetik enerjisi

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}u^2(x,t)dx$$

olabilir.



Şekil 24: Entropinin artma koşulunu gösteren grafikler

Yukarıda ispatlandığı gibi (3.1) denkleminin pürüzsüz başlangıç verileri çerçevesinde, (örneğin, sonlu taşıyıcıya sahip olan) $[0, T_0)$ zaman aralığında klasik ve herhangi bir $t \le T_0$ ler için ise sonlu taşıyıcıya sahip $u(x,t)$ çözümü mevcut olmaktadır. (3.1) denklemini u ile çarparsak

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u^2}{2}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^{u(x,t)}\eta F'(\eta)d\eta\right)=0$$

elde ederiz. Sonuncu denklemi $x \in (-\infty, \infty)$ olmak üzere integrallarsak

$$\frac{dE}{dt}=-\left(\int_0^{u(x,t)}\eta F'(\eta)d\eta\right)\Bigg|_{x=-\infty}^{x=+\infty}=0$$

alırız. Dolayısıyla $t \le T_0$ olduğu sürece $E(t)=sabit=E(0)$ olur, yani çözümde hiçbir özellik oluşmadığı sürece toplam kinetik enerji sıfıra eşit olur.

Şimdi varsayalım ki, $t > T_0$ ve (3.1) in zayıf çözümünü

$$u_t^\varepsilon + \left(F(u^\varepsilon)\right)_x = \varepsilon u_{xx}^\varepsilon \tag{3.5}$$

denkleminin (2.2) başlangıç koşulu çerçevesinde $L_2(R)$ anlamında, $\varepsilon \to 0$ limit olarak düşünelim. Sonuncu denklemi u^ε ile çarparak ve $t \in [0,T)$ aralığında $u^\varepsilon, u_x^\varepsilon$ *ve* u_{xx}^ε fonksiyonlarının $x \to \pm\infty$ olduğunda düzgün sıfıra yaklaştığı varsayımı çerçevesinde integrallersek

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(u^{\varepsilon})^2}{2}dx=-\left(\int_0^{u^{\varepsilon}(x,t)}\eta F'(\eta)d\eta\right)\Bigg|_{x=-\infty}^{x=+\infty}+$$

$$\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}[\frac{1}{2}\left((u^{\varepsilon})^2\right)_{xx}-(u_x^{\varepsilon})^2]dx\leq-\left(\int_0^{u^{\varepsilon}(x,t)}\eta F'(\eta)d\eta\right)\Bigg|_{x=-\infty}^{x=+\infty}+$$

$$\frac{\varepsilon}{2}(u^{\varepsilon})_x^2\Bigg|_{x=-\infty}^{x=+\infty}=0$$

elde ederiz. Nihayet $\varepsilon\to 0$ için limit alırsak

$$\frac{dE}{dt}\leq 0$$

olduğunu görürüz.

Dolayısıyla darbe dalgalarının mevcut olduğu durumda toplam kinetik enerji ciddi olarak negatif olur, yani kinetik enerji disipatif etkisini gösterir (kinetik enerji darbe dalgası üzerinde kısmen ısı enerjisine dönüşür). Bundan dolayı da bu tür fiziksel olaylarda geriyedönmezlik (tersinmezlik) söz konusu olamaz.

Entropi koşulu tanımlamanın ikinci yolu biraz daha zor olmaktadır, çünkü bu yaklaşım korunum kanunları ve fiziksel sistemin çözümleri ile ilişkili iki tane entropi fonksiyonunun şeçilmesi ile bağlı olmaktadır. söz konusu çifti sırasıyla, $S=S(u)$ entropi fonksiyonu ve $\Phi=\Phi(u)$ entropi akış fonksiyonu olarak gösterelim. Amacımız (3.1) denklemini koruyan pürüzsüz $u(x,t)$ fonksiyonu için

$$\frac{\partial S(u)}{\partial t}+\frac{\partial\Phi(u)}{\partial x}=0 \qquad \textbf{(3.6)}$$

denklemini koruyan $S=S(u)$ ve $\Phi=\Phi(u)$ fonksiyonlarının bulunmasıdır. Varsayalım ki, $S''\geq 0$. Bu yaklaşımın dahil edilmesi ve gerekliligi sonra daha iyi anlaşılacaktır. Böylelikle, eklenilen korunum kanununun da entropinin korunması koşulunu sağlayacağını göreceğiz.

(3.6) denklemini konservatif olmayan

$$S'(u)\frac{\partial u}{\partial t}+\Phi'(u)\frac{\partial u}{\partial x}=0 \qquad \textbf{(3.7)}$$

şeklinde yazalım. (3.1) denkleminin pürüzsüz çözümü de

$$\frac{\partial u}{\partial t}+F'(u)\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

denklemini korunmaktadır. Sonuncu denklemi $S'(u)$ ile çarparsak

$$S'(u)\frac{\partial u}{\partial t}+S'(u)F'(u)\frac{\partial u}{\partial x}=0 \quad \textbf{(3.8)}$$

elde ederiz. (3.6) ve (3.7) denklemlerinden $S=S(u)$ ve $\Phi=\Phi(u)$ fonksiyonlarının aşağıdaki

$$\Phi'(u)=S'(u)F'(u) \quad \textbf{(3.9)}$$

eşitliğini sağladığı görülmektedir. Skaler korunum kanunları için (3.8) denkleminin birden fazla çözümü olmaktadır.

Not 3 $H(u)$ (3.1) denkleminin $F(u)$ durum fonksiyonu ile $F(u)=H'(u)$ şeklinde bağlı olan bir fonksiyon olsun. Bu takdirde entropi fonksiyonları olarak $S_1(u)=\frac{1}{2}|u^2|$ ve $\Phi_1(u)=uF(u)-H(u)$ olarak buluruz. Böylelikle (3.1) korunum kanunu $S_1(u)$ entropi fonksiyonu ve $\Phi_1(u)$ entropi akış fonksiyonlarını oluşturmaktadır. Sade hesaplama yolu ile $\Phi_{1'}(u)=S_1'(u)F_1'(u)$ olduğu da görülmektedir.

Örneğin, (2.1) Hopf denklemi için $H(u)=\frac{u^3}{6}$ olduğundan entropi akış fonksiyonu $\Phi_1(u)=\frac{u^3}{3}$ olur.

Bizim amacımız entropi ve entropi akış fonksiyonlarını incelediğimiz başlangıç değer probleminin tek çözümünün seçilebilmesi için kullanmaktır.

Teorem 3 *Varsayalım ki, (3.1) korunum kuralı* $S\geq 0$ *ve* S *konveksi ile ilgili herhangi bir entropinin korunum kuralına sahiptir. Eğer* $u_{,}$ *modifiye olunmuş (2.13) denkleminin* $\varepsilon\to 0$ *olduğundaki limit fonksiyonu ise sözkonusu* u

$$\frac{\partial S(u)}{\partial t}+\frac{\partial \Phi(u)}{\partial x}\leq 0 \quad \textbf{(3.10)}$$

eşitsizliğini sağlamaktadır.

İspat (3.9) eşitsizliğini ispatlamak için biz yalnız pozitif test fonksiyonlarını kullanacağız. Bu nedenle, $(x,t)\in R\times R_+$ olmak üzere herhangi bir $f(x,t)\in\{C^1_{0,+}=C^1_0\cup\{f: f(x,t)\geq 0\}\}$ fonksiyonu için aşağıdaki

$$\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty \left[S(u(x,t))\,f_t(x,t)+\Phi(u(x,t))\,f_x(x,t)\right]dxdt+\int_{-\infty}^\infty S(u(x,0))\,f(x,0)\,dx\geq 0 \qquad \textbf{(3.11)}$$

eşitsizliğinin korunduğunu talep edelim. (2.5) denklemini $S'(u^\varepsilon)$ çarparsak

$$S'(u^\varepsilon)u_t^\varepsilon+S'(u^\varepsilon)F(u^\varepsilon)_x-\varepsilon S'(u^\varepsilon)u_{xx}^\varepsilon=0$$

veya

$$S_t(u^\varepsilon)+S'(u^\varepsilon)F'(u^\varepsilon)u_x^\varepsilon-\varepsilon S'(u^\varepsilon)u_{xx}^\varepsilon=0 \qquad \textbf{(3.12)}$$

elde ederiz. S ve Φ fonksiyonları $\Phi'(u^\varepsilon)=S'(u^\varepsilon)F'(u^\varepsilon)$ ve $\Phi'(u^\varepsilon)u_x^\varepsilon=\Phi_x(u^\varepsilon)$ olduğundan (3.12) denklemini

$$S_t(u^\varepsilon)+\Phi_x(u^\varepsilon)-\varepsilon S'(u^\varepsilon)u_{xx}=0 \qquad \textbf{(3.13)}$$

şeklinde yazabiliriz.

$S'(u^\varepsilon)u_{xx}^\varepsilon=(S'(u^\varepsilon)_x)_x-S''(u^\varepsilon)(u_x^\varepsilon)^2$ olduğunu dikkate alırsak sonuncu denklemi

$$S(u^\varepsilon)_t+\Phi(u^\varepsilon)_x=(S'(u^\varepsilon)_x)_x-S''(u^\varepsilon)(u_x^\varepsilon)^2 \qquad \textbf{(3.14)}$$

olarak yazabiliriz. Simdi, (3.14) denklemini $f(x,t)\in C^1_{0,+}$ ile çarpıp $R\times[0,\infty)$ bölgesi üzere integrallersek

$$\int_{-\infty}^\infty\int_0^\infty f(x,t)[S(u^\varepsilon)_t+\Phi(u^\varepsilon)_x]dxdt=$$

$$\int_{-\infty}^\infty\int_0^\infty \varepsilon f(x,t)\left[S'(u^\varepsilon)_x)_x-S''(u^\varepsilon)(u_x^\varepsilon)^2\right)\right]dxdt$$

elde ederiz. $f(x,t)$ fonksiyonu kompakt taşıyıcıya sahip olduğundan yukarıdaki ifadeyi

$$\int_{-a}^a\int_0^T f(x,t)[S(u^\varepsilon)_t+\Phi(u^\varepsilon)_x]dxdt=$$

$$\int_{-a}^a\int_0^T \varepsilon f(x,t)\left[S'(u^\varepsilon)_x)_x-S''(u^\varepsilon)(u_x^\varepsilon)^2\right)\right]dxdt$$

şeklinde yazabiliriz. Sol tarafdaki integrallardan birincisine t ye göre, ikincisine ise x e göre kısmi integrasyon förmülünü uygularsak

$$\int_{-a}^a f(x,0)\,S(u^\varepsilon(x,0))\,dx-\int_{-a}^a\int_0^T f_t(x,t)S(u^\varepsilon)dxdt-$$

$$\int_{-a}^{a}\int_{0}^{T} f_x(x,t)\Phi(u^\varepsilon)dxdt = \varepsilon\int_{-a}^{a}\int_{0}^{T} f_{xx}(x,t)S(u^\varepsilon)dxdt -$$

$$\varepsilon\int_{-a}^{a}\int_{0}^{T} f(x,t)S''(u^\varepsilon)(u_x^\varepsilon)^2 dxdt$$

buluruz.

$$-\varepsilon\int_{-a}^{a}\int_{0}^{T} f(x,t)S''(u^\varepsilon)(u_x^\varepsilon)^2 dxdt \le 0$$

eşitsizliğini dikkate alarak ve $\varepsilon \to 0$ da limit hesaplarsak

$$-\int_{-a}^{a} f(x,0)\, S(u(x,0))\, dx - \int_{-a}^{a}\int_{0}^{T} f_t(x,t)S(u)dxdt -$$

$$\int_{-a}^{a}\int_{0}^{T} f_x(x,t)\Phi(u)dxdt \le 0$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Şimdi entropi çözümü için ikinci tanımı verelim.

Tanım 10 *(2.12)integral eşitliğini ve herhangi bir S entropi ve Φ entropi akış fonksiyonu için (3.10) denklemini klasik anlamda (3.11) ise zayıf anlamda) koruyan $u(x,t)$ çözümüne 2.entropi koşulunu koruyan çözüm denir.*

Bu tanımı kullanarak, yukarıda incelediğimiz korunum kanunu için yazılmış başlangıç değer probleminin fiziksel yararlı çözümünün elde edilmesi için entropi ve entropi akış fonksiyonlarının nasıl şekilleneceğini gösterelim.

Durum fonksiyonu $F(u)$ konveks ve çözümünde zayıf sıçrayış olan (2.1) denklemini gözönüne alalim.

Teorem 4 *S entropi fonksiyonunun ciddi konveks ve $u(x,t)$ çözümünün 2. entropi koşulunu koruduğunu varsayalım. Bu takdirde $u(x,t)$ fonksiyonu (2.1) denkleminin 2.entropi koşulunu koruyan tek bir çözümü olmaktadır ve bu çözüm kaybolan suni viskoziteye sahip çözüm olmaktadır.*

Entropi $S_1(u) = \dfrac{|u|^2}{2}$ ve entropi akış fonksiyonları $\Phi_1(u) = \dfrac{u^3}{3}$ olmak üzere (2.1) denklemini

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

başlangıç koşulu çerçevesinde gözönüne alalım. Yukarıda gösterildiği üzere bu problemin çözümü (2.48) şeklinde olmaktadır. (2.48) formülü ile tanımlanan $u(x,t)$ fonksiyonunun 2.entropi koşulunu koruyan çözümü olduğunu gösterebilmek için aşağıdaki ifadeyi gözönüne alalım

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f_t(x,t) S_1(u)dxdt + \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f_x \Phi_1(u)dxdt + \int_{-\infty}^\infty f(x,0)\, S_1(u(x,0))\, dx.$$

$f(x,t)$ nin sonlu taşıyıcıya sahip fonksiyon olduğunu dikkate alırsak sonuncu ifadeyi,

$$\int_0^T \int_{-a}^a f_t(x,t) \frac{|u|^2}{2} dxdt + \int_0^T \int_{-a}^a f_x \frac{u^3}{6} dxdt + \frac{1}{2} \int_{-a}^a f(x,0)\, u_0^2 dx$$

şeklinde yazabiliriz. (2.48) formülü ile tanımlanan $u(x,t)$ nin ifadesi sonuncu eşitlikte yerine konursa

$$\int_0^T \int_{-a}^{\frac{t}{2}} f_t(x,t) \frac{1}{2} dxdt + \int_0^T \int_{-a}^{\frac{t}{2}} f_x \frac{1}{6} dxdt + \frac{1}{2} \int_{-a}^0 f(x,0)\, dx$$

elde edilir. Elde edilen ifadede 1.integrali

$$\frac{1}{2} \int_0^T \int_{-a}^0 f_t(x,t) dxdt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^{\frac{t}{2}} f_t(x,t) dxdt$$

şeklinde yazıp, integralleme sırasını değiştirir ve integralleme işlemlerini gerçekleştirsek

$$\frac{1}{2} \int_{-a}^0 f(x,t)\,\Big|_{t=0}^{t=T} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x,t)\,\Big|_{t=2x}^{t=T} dx + \frac{1}{6} \int_0^T f(x,t)\,\Big|_{x=-a}^{x=\frac{t}{2}} dt +$$

$$\frac{1}{2} \int_{-a}^0 f(x,0)\, dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^0 f(x,T) dx - \frac{1}{2} \int_{-a}^0 f(x,0)\, dx + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x,T) dx -$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x,2x) dx + \frac{1}{6} \int_0^T f\left(\frac{t}{2}, t\right) dt - \frac{1}{6} \int_0^T f(-a,t) dt + \int_{-a}^0 f(x,0)\, dx =$$

$$-\frac{1}{2} \int_{-a}^0 f(x,0)\, dx - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x,2x) dx + \frac{1}{6} \int_0^T f\left(\frac{t}{2}, t\right) dt +$$

$$\frac{1}{2} \int_{-a}^0 f(x,0)\, dx = \frac{1}{12} \int_0^T f\left(\frac{t}{2}, t\right) dt$$

elde ederiz.

Yukarıda gösterildiği gibi $u(x,t)$ problemin zayıf çözümü olmaktadır ve $f(x,t)$ lerin pozitif olduğu durumlarda sonuncu ifadenin sağ tarafı da pozitif olmaktadır. Dolayısıyla Teorem 2.4 ispatlanmış oluyor.

Şimdi (2.1) denkleminin

$$u(x,0)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\geq 0\end{cases}$$

başlangıç şartını sağlayan

$$u(x,t)=\begin{cases}0, & x\leq \dfrac{t}{2}\\ 1, & x<\dfrac{t}{2}\end{cases}$$

çözümünün 2. entropi koşulunun koruyup korunumdığunı kontrol edelim. Bu durum için de entropi ve entropi akış fonksiyonlarını sırasıyla $S_1(u)=\dfrac{|u|^2}{2}$ ve $\Phi_1(u)=\dfrac{u^3}{3}$ olsun ve aşağıdaki

$$\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f_t(x,t)S_1(u)dxdt+\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f_x(x,t)\Phi_1(u)dxdt+$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x,0)\,S_1(u(x,0))\,dx$$

ifadeyi gözönüne alalım.

$f(x,t)$ nin sonlu taşıyıcıya sahip olduğunu ve $u(x,t)$ nin ifadesini dikkate alırsak sonuncu ifadeyi

$$\int_0^T\int_{-a}^a f_t(x,t)\frac{|u(x,t)|^2}{2}dxdt+\int_0^T\int_{-a}^a f_x(x,t)\frac{u^3(x,t)}{3}dxdt+\frac{1}{2}\int_{-a}^a f(x,0)u_0^2dx$$

şeklinde yazabiliriz. $u(x,t)$ nin ifadesi yerine konursa

$$\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\frac{t}{2}}^a f_t(x,t)dxdt+\frac{1}{3}\int_0^T\int_{\frac{t}{2}}^a f_x dxdt+\frac{1}{2}\int_0^a f(x,0)\,dx$$

elde edilir. Birinci integrali iki integrale

$$\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\frac{t}{2}}^{\frac{T}{2}} f_t(x,t)dxdt+\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\frac{T}{2}}^a f_t(x,t)dxdt+$$

$$\frac{1}{3}\int_0^T \int_{\frac{t}{2}}^a f_x(x,t)dxdt + \frac{1}{2}\int_0^a f(x,0)\,dx$$

ayıralım. 1.integralde integralleme sınırlarının yerini değiştirsek

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{T}{2}} \int_0^{2x} f_t(x,t)dtdx + \frac{1}{2}\int_{\frac{T}{2}}^a \int_0^T f_t(x,t)dxdt + \frac{1}{3}\int_0^T \int_{\frac{t}{2}}^a f_x(x,t)dxdt +$$

$$\frac{1}{2}\int_0^a f(x,0)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x,t)\,|_{t=0}^{t=2x}\; dx + \frac{1}{2}\int_{\frac{T}{2}}^a f(x,t)\,|_{t=0}^{t=T}\; dx +$$

$$\frac{1}{3}\int_0^T f(x,t)\,|_{x=\frac{t}{2}}^{x=a}\; dt + \frac{1}{2}\int_0^a f(x,0)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{T}{2}}[f(x,2x) - f(x,0)]dx +$$

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{T}{2}}^a [f(x,T) - f(x,0)]\,dx + \frac{1}{3}\int_0^T [f(a,t) - f\left(\frac{t}{2},t\right)]dt + \frac{1}{2}\int_0^a f(x,0)\,dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x,2x)dx - \frac{1}{3}\int_0^T f\left(\frac{t}{2},t\right)dt = -\frac{1}{6}\int_0^T f(x,2x)dx.$$

olur. Görüldüğü gibi bu durumda Teorem 2.4 geçerli olmamaktadır.

$F(u)$ fonksiyonunun konveks olduğu durumda (3.4) sıçrayışım mevcut olma koşulu

$$\frac{u(x+a,t) - u(x,t)}{a} \le \frac{E}{t}, \quad a > 0,\; t > 0 \qquad \textbf{(3.15)}$$

koşuluna denk olmaktadır, [?]. Burada E, x,t ve a bağlı olmayan bir büyüklük olmaktadır, [4].

Gerçektende, $u_0'(x) \ge 0$ olduğunda $u_x = \dfrac{u_0'}{1 + u_0'F''t}$, $u_0'(x) = 0$ olduğu takdirde $u_x' = 0$, ve $u_0'(x) > 0$ ise

$$u_x \le \frac{u_0'}{u_0'F''t} = \frac{1}{F''t} \le \frac{E}{t}$$

olmaktadır. Burada, $E = \dfrac{1}{infF''}$ dir.

Örnek 12 Aşağıdaki Cauchy

$$u_t + u^2 u_x = 0,$$

$$u(x,0)=\begin{cases}0, & x<0\\ \\ 2, & x>0\end{cases}$$

problemini gözönüne alalım.

Bu durumda hal fonksiyonu $F(u)=\dfrac{u^3}{3}$ olmaktadır ve $u_1=0,\ \ u_2=2.\ \ \ u_1<u_2$ olduğundan sıçrayışın mevcut olma koşuluna göre, darbe dalgası mevcut değildir.

Probleminin çözümünü (2.45) formülüne göre

$$u(x,t)=\begin{cases}0, & x<f'(0)t\\ \\ \psi(\dfrac{x}{t}), & f'(0)t<x<f'(2)t\\ \\ 2, & x\geq f'(2)t\end{cases}$$

şeklinde yazabiliriz. $F'(u)=u^2$ olduğundan $F'(0)=0$, $F'(2)=4$ dür. Şimdi $\psi(\dfrac{x}{t})$ yi bulalım. $\psi(\xi)=(F')^{-1}$ olduğundan $-\dfrac{x}{t}=-u^2$; $u=\sqrt{\dfrac{x}{t}}$ olur. Sonuç olarak, gerçek çözümü

$$u(t,x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \\ \sqrt{\dfrac{x}{t}}, & 0<x<4t\\ \\ 2, & x\geq 4t\end{cases}$$

şeklinde elde ederiz.

Şimdi, gözönüne aldığımız denklemin

$$u(x,0)=\begin{cases}2, & x<0\\ \\ 0, & x>0\end{cases}$$

başlangıç koşulu çerçevesinde çözümünü bulalım. $u_1>u_2$ olduğundan darbe dalgası mevcuttur. Bu durumda yardımcı problemi

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{3}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^3=0$$

$$v(x,0)=\begin{cases}2x, & x<0\\ \\ 0, & x>0\end{cases}$$

şeklinde dahil edelim. Dahil ettiğimiz yardımcı problemin çözümü (2.52) formülüne göre

$$v(x,t)=\begin{cases}v_-, & x<0\\ \\ v_+, & x>0.\end{cases}$$

ve

$$v_-(x,t)=\left(u_1(2u_1)-\frac{u_1^3}{3}\right)t+u_1(x-(2u_1)t)=2x-\frac{8}{3}t,$$

$$v_+(x,t)=\left(u_2(2u_2)-\frac{u_2^3}{3}\right)t+u_2(x-(2u_2)t)=0$$

olmaktadır. Sonuncu ifadeleri dikkate alarak $v_-=v_+$ koşulundan

$$\frac{x}{t}=\frac{4}{3}$$

buluruz. (2.53) formülünü kullanarak da yardımcı problemin çözümünü

$$v(t,x)=\begin{cases}2x-\frac{4}{3}t, & x<\frac{4}{3}t\\ \\ 0, & x>\frac{4}{3}t\end{cases}$$

şeklinde yazabiliriz. Teorem 1.1 e görede gözönüne aldığımız problemin çözümünü

$$u(t,x)=\begin{cases}2, & x<\frac{4}{3}t,\\ \\ 0, & x>\frac{4}{3}t\end{cases}$$

olarak elde ederiz.

SONUÇLAR

1. Birinci basamaktan nonlineer denklem için yazılmış sürekli başlangıç koşullu problemin gerçek çözümü elde edilmiş ve çözümde oluşan sıçrayışın yerini belirlemek için bir yöntem önerilmiştir.
2. Hopf Denklemi için sürekli başlangıç koşullu problemin, Riemann Problemi incelenmiş ve sıçrayış noktasının zaman evrimi incelenmiştir.
3. Problemin fiziksel yapısını düzgün aksettirebilen tek bir gerçek çözümün seçilmesi için entropi fonksiyonları dahil edilmiş ve entropinin artma koşulunu koruyan çözüm elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Oleinik, O.A., Discontinuous Solutions of Nonlineer Differential Equations, Usp. Math. Nauk, 12, 1957.

[2] Rasulov, M.A., Ragimova, T.A., About One Method of the Solution of a Problem Cauchy for a Nonlineer Equation of a Hyperbolic Type of the First- Order with the Smooth Initial Condition with the Smooth Initial Condition, Soviet Math. Dokl. Vol. 316, No.4, pp. 777-781, 1991.

[3] Thomas, J.W., Numerical Partial Differential Equations, Conservation Laws and Elliptic Equations, Springer-Verlag, 573p, 1999.

[4] Smaller J.A. , Shoek Wave and Reaction Diffusion Equation, Springer – Verlag, New York, 1983

ÖZGEÇMİŞ

15 Mayıs 1979 tarihi, Mersin ili Tarsus ilçesi doğumluyum. İlk, orta ve lise öğretimimi Tarsus ilçesinde tamamladıktan sonra, 1997 yılında Çukurova Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümüne kaydoldum. Bu bölümden 2001 yılında mezun olarak öğretmenlik mesleğine Ağrı ilinde başladım. 2 yıl Ağrı' da görev yaptıktan sonra 5 yıl Şanlıurfa' da görevime devam ettim. 2008 yılından itibaren de İstanbul Beyoğlu Dilnihat Özyeğin Lisesi' nde görev yapmaktayım.

Gamze ÖZER