T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANA BİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

ÖZEL FONKSİYONLAR VE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tezi Hazırlayan: **Muhterem BİLGİÇ**

İstanbul, 2010

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANA BİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

ÖZEL FONKSİYONLAR VE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tezi Hazırlayan:

Muhterem BİLGİÇ

Öğrenci No:
080860004

Tez Danışmanı:
Doç.Dr. Afgan ASLANOV

İstanbul, 2010

YEMİN METNİ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum " Özel fonksiyonlar ve uygulamaları" başlıklı çalışmanın, bilimsel ahlak ve geleneklere uygun şekilde tarafımdan yazıldığını, yararlandığım kaynakların tamamını kaynaklarda gösterildiğini ve çalışmamın içinde kullanıldıkları her yerde bunlara atıf yapıldığını belirtir ve bunu onurumla doğrularım. **08/07/2010**

Muhterem BİLGİÇ

ÖZEL FONKSİYONLAR VE UYGULAMALARI

Tezi/Projeyi Hazırlayan: Muhterem BİLGİÇ

Özet

Bu tez çalışması 7 bölümden oluşmaktadır.

Birinci Bölümde, genel olarak içerikten, uygulama alanlarından ve tarihsel gelişiminden bahsedildi.

İkinci bölümde, iç çarpım, ortogonallik, ortogonal polinomların tanımları verildi.

Üçüncü bölümde, Legendre fonksiyonu, Legendre polinomu, Rodrigues formülü ve Doğuran (genereting) fonksiyonlar üzerine literatür taraması yapılarak tanımları ve özellikleri verildi.

Dördüncü bölümde Bessel fonksiyonu ve türleri, ayrıca Gamma fonksiyonu literatür taraması yapılıp tanımları ve özellikleri verildi.

Beşinci bölümde Chebyshev fonksiyonunu ve polinomunun tanımlanması yapıldı.

Altıncı bölümde ise ortogonalliğe neden ihtiyaç duyulur sorusunun cevabından yola çıkarak Sturm Liouville Teoremine ve oradan da özdeğer ve özvektörlere girildi.

Yedinci ve son bölümde ortogonal polinomların matematiksel ve nümerik olarak hesaplanması ve uygulaması yapıldı.

Anahtar Kelimler: Özel Fonksiyonlar ve Uygulamaları, Legendre Fonksiyonu, Bessel Fonksiyonu, Chebyshev Fonksiyonu

SPECIAL FUNCTION AND APPLICATION

Presented by: Muhterem BİLGİÇ

Abstract

This study consist of seven chapters.

In the first chapter, it is generally mentioned about context, application areas and historical evolution of special function.

In the second chapter, inner product, orhogonality and their definition, some examples are given.

In the third chapter, via technical literature definitions and the features of the Legendre Function, Legendre Polinomial, Rodrigues Formula and Genereting Function are explained.

In the fourth chapter, with the technical literature definitions and the features of the Bessel Function and Gamma Function is indicated.

In the fifth chapter, the definition of the Chebyshev Function and Polynomial is defined.

In the sixth chapter, after answering the question of " Why is orthogonality needed?", eigenvalue, eigenvector through Sturm Lioville theory are explined.
Finally, the last chapter covers the mathematical and numerical calculation and applications of orthogonal polynomial.

Key Words: Special Function and Applications, Legendre Function, Bessel Function, Chebyshev Function.

ÖZEL FONKSİYONLAR VE UYGULAMARI

İÇİNDEKİLER

Sayfa No.

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa No.

KISALTMALAR VE SEMBOLLER

GA	**:** Genetik algoritma
DE	**:** Diferansiyel gelişim
YLS	**:** Yan lob seviyesi
YGIG	**:** Yarım güç ışın genişliği
$\boldsymbol{R}$	**:** Yarıçap
$\boldsymbol{P_n(x)}$	**:** *n* dereceli Legendre Polinomu
$\boldsymbol{J_n(x)}$	**:** *n.* mertebeden birinci tür Bessel Fonksiyonu
$\Gamma(\boldsymbol{v})$	**:** Gamma Fonksiyonu
$\boldsymbol{N_n(x)}$	**:** *n.* mertebeden ikinci tür Bessel Fonksiyonu
$\boldsymbol{T_n(x)}$	**:** *n.* mertebeden birinci tür Chebyshev Polinomu
$\boldsymbol{U_n(x)}$	**:** *n.* mertebeden ikinci tür Chebyshev Polinomu
∇^2	**:** Laplace operatörü

1.BÖLÜM

GİRİŞ

Matematikte çeşitli uygulama alanları vardır. Bu uygulama alanların bir çeşidi ile uğraşmak düşüncesi ile bu tez konusu seçildi ve uygulama alanları ortaya konulabilmesi için önce kuvvet serilerinden yola çıkarak Fourier Serileri incelendi. Ortogonallik (diklik) kavramı ve bunların fonksiyonlar üzerine uygulaması özel fonksiyonları doğurdu. Özel Fonksiyonların birçok çeşidi var ancak bu tez de bu fonksiyonların bir kısmı ele alındı. Problemlerin tam çözümü yoksa da genelde çözüm seri şeklinde bulunur. Bu seriler polinomlardan, trigonometrik fonksiyonlardan ve bazen de özel seçilmiş fonksiyonlardan oluşur. Seri çözümün terimlerinin ortogonal fonksiyonlardan oluşması, çözümün değerlendirilmesi, nerede yakınsak olduğu seri bakımdan çok önemlidir. Aslında bütün özel fonksiyonların bir ortak tarafı vardır: Terimler ortogonaldirler.
Şimdi özel fonksiyonlardan kısaca bahsedelim.

Matematikte Legendre Fonksiyonları, Legendre Diferansiyel Denklemlerinin çözümleridir. Bu fonksiyonlar ***Adrien-Marie Legendre'den*** sonra bu şekilde isimlendirildi. Adi diferansiyel denklemlerine sıkça fizikte ve diğer alanlarda karşılaşılır. Özellikle, Laplace Denklemlerinin Küresel koordinatlarda çözümü yapıldığı zaman oluşur. Legendre diferansiyel denklemi standart kuvvet serisi yöntemi ile çözülebilir. Çözüm sınırlıdır ($|x|<1$ sağlanıyorsa). Ayrıca, $x=\mp 1$ de $n=0,1,2,..$ için sınırlıdır. Bu durumda dik polinomların, polinomlar dizisine **Legendre Polinomları** denir. Her Legendre polinomu Rodrigue's formülü ile ifade edilebilir.

Bessel fonksiyonlarını ilk tanımlayan İsviçre matematikçi Daniel Bernoulli ve sonra isimlendiren kişi Friedrich Besseldir. Aşağıdaki Bessel diferansiyel denkleminin çözümleri Bessel fonksiyonlarıdır:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - v^2) y = 0 .$$

Bessel denklemleri Laplace denklemlerinin ayrılabilir çözümleri bulunduğu zaman ve Helmholtz denklemlerinde silindirik veya küre koordinatlarından doğar. Bu nedenle Bessel fonksiyonları özellikle dalga yayılımı, statik potansiyelleri, v.s. problemlerde çok önemlidir.

Chebyshev polinomları genellikle nümerik analizin birçok yerinde ve matematiğin uygulamalarında kullanılır.

Görüldüğü gibi özel fonksiyonların bir kaçından bahsedildi, ama şurası açıktır ki bu fonksiyonların hepsi ortogonal polinomlar dizisi oluşturuyor. Bu yüzden kendilerine birçok alanda uygulama fırsatı buluyorlar.

2.BÖLÜM

ORTOGONAL POLİNOMLAR

2.1 İç çarpım: M bir vektör uzayı olsun. $< x, y >$ ile gösterilen ve aşağıdaki koşulları sağlayan $İ : M \times M \to \mathbf{R}$, İ $(x, y) \to < x, y >$ fonksiyonuna, M üzerinde iç çarpım ve M ye de iç çarpım uzayı denir.

i) $\forall x, y \in M$ için $< x, y > \; = \; < y, x >$

ii) $\forall x, y, z \in M$ için $< x, y + z > \; = \; < x, y > + < x, z >$

iii) $\forall x, y \in M$ ve c $\in$ **R** için $< cx, y > \; = \; < x, cy > \; = \; c < x, y >$

iv) $\forall x \in M$ için $< x, x > \; \geq 0$; $< x, x > \; = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\mathbf{R}^n$ de iç çarpım.

$x, y \in \mathbf{R}$ için $x = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, y_3, ..., y_n)$ olsun.

x ile y vektörlerinin iç çarpımı

$$< x, y >= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + ... + x_n y_n \tag{2.1}$$

biçiminde tanımlanır.

Eğer M, $[a, b]$ aralığında tanımlanmış sürekli integrallenebilir fonksiyonların vektör uzayı ise iç çarpım şu şekilde tanımlanabilir. $f(x)$ ve $g(x)$ M üzerinde tanımlı iki fonksiyon, w(x) pozitif tanımlı bir fonksiyon olmak üzere;

$$< f, g > \; = \int_a^b f(x).g(x).w(x)dx. \tag{2.2}$$

Burada $w(x)$ fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu denir.

2.2 Ortogonallik (Diklik):

M bir iç çarpım uzayı olsun. $x, y \in M$ için $< x, y >= 0$ olursa x, y vektörlerine ortogonaldir veya diktir denir. Buna göre $f(x)$ ve $g(x)$, M üzerinde tanımlı fonksiyon ve

$$< f, g >= 0 \text{ ise} \tag{2.3}$$

$f(x)$ ve $g(x)$ ortogonaldir denir.

2.3.1 Örnek (Fourier Serisi):

$[-\pi,\pi]$ aralığında iç çarpımı $<f,g>=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$ gibi tanımlarsak $\{1,\sin x,\cos x,\sin 2x,\cos 2x,...\}$ fonksiyonlar sistemi ortogonal olur. Bu fonksiyonlar

yardımıyla her f fonksiyonu bir seri şeklinde gösterilir:

$$f(x)=a_0+a_1\sin x+b_1\cos x+...$$

Mesela
$$f(x)=\begin{cases}0 & -\pi\le x<0\\ 1 & 0\le x<\pi\end{cases} \quad \text{ve} \quad f(x+2\pi)=f(x) \qquad (2.4)$$

gibi tanımlanan fonksiyonu seri (Fourier serisi) şeklinde yazmak için onun fourier katsayılarını bulalım.

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}0dx+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}1dx=0+\frac{1}{2\pi}(2\pi)=\frac{1}{2}. \qquad (2.5)$$

$n\ge 1$ için,

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cosnxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}0dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}cosnxdx,$$
$$a_n=0+\frac{1}{\pi}\frac{sinnx}{n}\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{n\pi}(sinn\pi-sin0)=0. \qquad (2.6)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sinnxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}0dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}sinnxdx,$$
$$b_n=-\frac{1}{\pi}\frac{cosnx}{n}\Big|_0^{\pi}=-\frac{1}{n\pi}(cosn\pi-cos0), \qquad (2.7)$$
$$b_n=\begin{cases}0 & eğer\ n\ tek\ ise\\ \dfrac{2}{n\pi} & eğer\ n\ çift\ ise.\end{cases}$$

Böylece f için fourier serisi şöyle olur,

$$f(x)=a_0+a_1cosx+a_2cos2x+a_3cos3x+....+b_1sinx+b_2sin2x+b_3sin3x+...,$$
$$=\frac{1}{2}+0+0+0+....+\frac{2}{\pi}sinx+0sin2x+\frac{2}{3\pi}sin3x+0sin4x+\frac{2}{5\pi}sin5x+..., \quad (2.8)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}sinx+\frac{2}{3\pi}sin3x+\frac{2}{5\pi}sin5x+\frac{2}{7\pi}sin7x+....$$

$n=2k-1, k\in \mathbb{Z}$ olmak üzere Fourier serisini toplam sembolü ile şu şekilde gösterebiliriz.

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(2k-1)\pi}Sin(2k-1)x=\begin{cases} f(x) & x\neq n\pi \\ \frac{1}{2} & x=n\pi \end{cases} \tag{2.9}$$

2.3.2 Örnek (Ortogonal Polinomlar) $p_0(x), p_1(x), p_2(x)...$ ortogonal polinomlar dizisi olması için , $p_i(x)$ polinomunun derecesi i olmak üzere, $[-1,1]$ aralığında $i\neq j$ için $<p_i, p_j>=0$ olması gerekir.

$p_0(x)=1,$ $p_1(x)=x,$ $p_2(x)=3x^2\text{-}1,$ seçelim.

İç çarpım altında ortogonal polinomlar dizisi oluşturalım.

$i\neq j$ için $<p_i, p_j>=0$ olması gerekir.

$$< p_0, p_1 > \;=\int_{-1}^{1} 1.x.dx = 0$$

$$< p_0, p_2 > \;=\int_{-1}^{1} 1.(3x^2-1).dx = 0$$

$$< p_1, p_2 > \;=\int_{-1}^{1} x.(3x^2-1).dx = 0$$

3. BÖLÜM
LEGENDRE POLİNOMLARI

3.1 Diferansiyel Denklemin Seri Çözümü (Yakınsaklık yarıçapı)

Kuvvet seriler metodu, değişken katsayılı lineer diferansiyel denkleminin çözümü için temel standart metottur. Kuvvet serileri ($x-x_0$ ın kuvvetlerinde) sonsuz seriler şeklindedir.

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m (x-x_0)^m = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + ..., \qquad (3.1)$$

$a_0, a_1, a_2, ...$ sabit sayılar olmak üzere, serinin katsayıları, x_0 ise sabit bir sayı ve serinin merkezi diye adlandırılır. *x* ise değişkendir. Eğer $x_0 = 0$ seçilirse kuvvet serisi

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... \qquad (3.2)$$

şeklinde olur. Eğer fonksiyonun birkaç dereceden sürekli türevleri varsa o zaman bu fonksiyon yaklaşık olarak bir kuvvet serisi şeklinde gösterilebilir ve kuvvet serisinin katsayıları fonksiyonun türevleri ile ifade edilebilir:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + ... \qquad \text{(Maclauren Serisi)}$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... \qquad \text{(Taylor Serisi)}$$

Kuvvet Serilerine Örnekler

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1 + x + x^2 + x^3 + ... \qquad (\ |x| < 1 \text{, geometrik seriler})$$

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$$

$$cosx = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...$$

$$sinx = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$$

Kuvvet Serilerinin Uygulamaları

Fonksiyonların seri şeklinde gösterilmesinden istifade ederek diferansiyel denklemler çözülebilir.

Örnek 3.1.1 $y' - y = 0$ denklemini çözelim.

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ...$$

$$y' = \sum_{m=1}^{\infty} m.a_m x^{m-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + ...$$

Eğer bu iki ifadeyi denklemde yerine yazarsak

$$(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + ...) - (a_0 + a_1 x + +a_2 x^2 + a_3 x^3 + ...) = 0$$

$$(a_1 - a_0) + (2a_2 - a_1)x + (3a_3 - a_2)x^2 + ... = 0$$

Sol tarafta bulunan polinomun katsayıları sıfır olmalı

$$(a_1 - a_0) = 0, \qquad (2a_2 - a_1) = 0, \qquad (3a_3 - a_2) = 0,$$

$$a_1 = a_0, \qquad a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2!}, \qquad a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{3.2} = \frac{a_0}{3!},$$

Böylece

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... \text{ polinomu}$$

$$y = a_0 + a_0 x + \frac{a_0 x^2}{2!} + \frac{a_0 x^3}{3!} + ... \text{ şekline dönüşür.}$$

Bunun sonucu olarak

$$y = a_0 (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...) = a_0 .e^x \text{ olur.}$$

Genel olarak kuvvet serilerine bakarsak teorisinden şöyle bahsedebiliriz. Kuvvet serisinin formunda

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m = a_0 + a_1 (x - x_1) + a_2 (x - x_2)^2 + ... \tag{3.3}$$

x değişkenine bağlı, merkezi x_0 olan ve $a_0, a_1, a_2, ...$ reel katsayılar olduğunu farz edelim.

(3.3) ün *n*. kısmi toplamlar dizisini yazarsak

$$S_n(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + ... + a_n (x - x_0)^n, \tag{3.4}$$

Seride kalan terimleri yazarsak

$$R_n(x) = a_{n+1}(x - x_0)^{n+1} + a_{n+2}(x - x_0)^{n+2} + ..., \tag{3.5}$$

Eğer

$$\lim_{n \to \infty} S_n(x_1) = S(x_1) \text{ ise,}$$

$S_n(x)$ dizisine $x = x_1$ değeri için yakınsak denir.

$S(x_1)$ 'e, (3.3) ün x_1 de toplamı veya değeri denir. Buradan (3.3) serisine $x = x_1$ de yakınsaktır deriz ve

$$S(x_1) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x_1 - x_0)^m \quad \text{yazabiliriz.}$$

Buradan her n için

$$S(x_1) = S_n(x_1) + R_n(x_1) \qquad \text{yazabiliriz.} \tag{3.6}$$

Eğer $x = x_1$ de $S_n(x)$ dizisi ıraksak ise **(3.3)** serisi de x_1 de ıraksak olur.

Yakınsaklık durumunda, herhangi bir pozitif ε değeri için bir N değeri vardır öyle ki

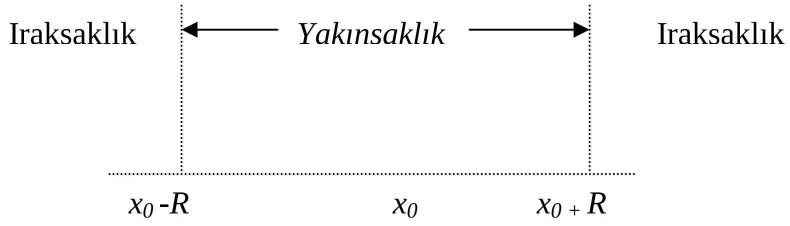
$$|R_n(x_1)| = |S(x_1) - S_n(x_1)| < \varepsilon \qquad \forall n > N \quad \text{için.} \tag{3.7}$$

Bunun anlamı $S_n(x_1), n > N$ olmak şartı ile $S(x_1) - \varepsilon$ ve $S(x_1) + \varepsilon$ arasındadır. Eğer n yeterince büyük seçilirse tam sonuca o kadar yaklaşılır.

Yakınsaklık Aralığı ve Yakınsaklık Yarıçapı

1) Seri (3.3) $x = x_0$ da yakınsaktır ve a_0 'a eşittir çünkü a_0 hariç diğer tüm terimleri sıfırdır.

2) Eğer seriyi yakınsak yapan birden çok x değeri var ise orta noktası x_0 olmak üzere (eğer bu aralık sınırlı ise) bu değerler aralığına yakınsaklık aralığı denir. Bu durumda seriler bütün x değerleri için $|x - x_0| < R$ olursa yakınsak olur ve $|x - x_0| > R$ olursa ıraksak olur. R 'e yakınsaklığın yarıçapı denir.



Şekil 1: x_0 merkezli kuvvet serilerinin yakınsaklık aralığı

Burada R aşağıdaki iki formülden biri ile hesaplanır.

a) $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{m\to\infty} \sqrt[m]{|a_m|}}$. b) $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{m\to\infty} \left|\dfrac{a_{m+1}}{a_m}\right|}$.

Bazen yakınsak aralıklar sonsuz olur. (3.3) de bütün x'ler için yaklaşırsa o zaman $R = \infty$ yazalım.

(3.3) de yaklaşan tüm x değerleri için x'e bağlı olarak kesin bir S(x) değeri vardır. Yakınsak aralıkta **(**3.3), S(x) fonksiyonunu temsil eder. Öyleyse

$$S(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m \qquad (|x - x_0| < R)$$

Örnek 1:

$$\sum_{m=0}^{\infty} m!.x^m = 1 + 2x^2 + 6x^3 + ...,$$

$a_m = m!$ alalım ve $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{m\to\infty} \left|\dfrac{a_{m+1}}{a_m}\right|}$ olduğuna göre

$$\left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| = \frac{(m+1)!}{m!} = m + 1 \to \infty.$$

Bu seri sadece $x = 0$ merkezinde yakınsar.

Örnek 2:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1 + x + x^2 + x^3 + ... \qquad (\ |x| < 1 \text{ , geometrik seri}).$$

Bütün m'ler için $a_m = 1$ olur.

$$\left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| = 1$$

olduğundan $R = 1$ elde edilir.

$|x| < 1$ olduğunda bu yüzden geometrik seriler yakınsar.

Örnek 3:

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...,$$

$$a_m = \frac{1}{m!} \text{ alalım.}$$

$$\left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| = \frac{\frac{1}{(m+1)!}}{\frac{1}{m!}} = \frac{1}{m+1} \to 0.$$

Bu yüzden seri bütün x değerleri için yakınsar.

Örnek 4: Aşağıda verilen serinin yakınsaklık yarıçapını bulalım.

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{8^m} x^{3m} = 1 - \frac{x^3}{8} + \frac{x^6}{64} - \frac{x^9}{512} + ...$$

$x^3 = t$ değişkenini kullanıp $a_m = \frac{(-1)^m}{8^m}$ alalım.

$$\left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| = \frac{8^m}{8^{m+1}} = \frac{1}{8}$$

Böylece $|t| < 8$ olduğunda seri yakınsar. $t = x^3$ olduğuna göre $|x| < 2$ olur. Yani $R = 2$ dir.

3.2 Legendre Fonksiyonu:

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n-1)y=0 \tag{3.8}$$

(3.8) denkleminin çözümüne Legendre Fonksiyonu denir. (3.8) denkleminin katsayıları $x=0$ noktasında analitiktir. Bu yüzden Kuvvet Seriler metodunu uygulayabiliriz.

$$y=\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m. \tag{3.9}$$

y 'yi (3.9) deki gibi alıp (3.8) de y'yi ve türevlerini yerine yazarsak ve $n(n+1)=k$ alırsak,

$$(1-x^2)\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-2}-2x\sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1}+k\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m=0,$$

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-2}-\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^m-2x\sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1}+k\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m=0\ , \tag{3.10}$$

x^o ın katsayısı , $2a_2+n(n+1)a_0=0,$

x^1 ın katsayısı , $6a_3-2a_2+n(n+1)a_1=0,$

x^s ın katsayısı , $(s+2)(s+1)a_{s+2}-s(s+1)a_s-2sa_s+n(n+1)a_s=0.$

$$a_{s+2}=\frac{s^2+s-n(n+1)}{(s+2)(s+1)}a_s,$$

işlemini düzenlersek,

$$a_{s+2}=-\frac{(n-s)(n+s+1)}{(s+2)(s+1)}a_s \qquad (s=0,1,2,3,...). \tag{3.11}$$

Bunlara **rekürans (yinelenme) bağıntısı** veya **rekürşın formülü** denir.

Buradan

$$a_2=\frac{-n(n+1)}{2}a_0$$

$$a_3=-\frac{(n-1)(n+2)}{(3)(2)}a_1=-\frac{(n-1)(n+2)}{3!}a_1$$

$$a_4 = -\frac{(n-2)(n+3)}{(4)(3)} a_2 = -\frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{(4)(3)(2)} a_0 = -\frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!} a_0$$

$$a_5 = -\frac{(n-3)(n+4)}{(5)(4)} a_3 = -\frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{(5)(4)(3!)} a_1$$

$$a_5 = -\frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!} a_1$$

Burada $y(x)$'i, a_0 ve a_1 katsayılarına ve $y_1(x), y_2(x)$ fonksiyonlarına bağlı olarak ifade edebiliriz.

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x), \tag{3.12}$$

$$y_1(x) = 1 - \frac{n(n+1)}{2!} x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!} x^4 - ..., \tag{3.13}$$

$$y_2(x) = x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!} x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!} x^5 - ..., \tag{3.14}$$

Bu seri $|x| < 1$ için yakınsaktır.

$y_1(x)$, x in çift kuvvetlerini, $y_2(x)$, x in tek kuvvetlerini kapsıyor. Bundan dolayı y_1 / y_2 oranı sabit değildir. Bu yüzden y_1 ve y_2 lineer bağımsız çözümlere sahiptir ve (3.12), (3.8) in genel çözümü olur.

Örnek 1: (n=0 için Legendre Fonksiyonu)

$n = 0$ için,

$$y_1(x) = 1 - \frac{n(n+1)}{2!} x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!} x^4 - ...,$$

denkleminden

$y_1(x) = 1.$ (Legendre Polinomu) elde edilir.

$$y_2(x) = x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!} x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!} x^5 - ...,$$

denkleminden

$$y_2(x) = x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{(-3).(-1).2.4}{5!}x^5 + ...,$$

$$y_2(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

elde edilir.

Örnek 2: (n=1 için Legendre Fonksiyonu)

$n = 1$ için

$$y_2(x) = x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - ...,$$

denkleminden

$y_2(x) = x$, (sonraki Legendre Polinomu)

$$y_1(x) = 1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - ...,$$

denkleminden

$$y_1(x) = 1 - \frac{x^2}{1} - \frac{x^4}{3} - \frac{x^6}{5} - ...,$$

$$y_1(x) = 1 - x\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + ...\right),$$

$$y_1(x) = 1 - \frac{1}{2}x\ln\frac{1+x}{1-x}$$

elde edilir.

3.3 Legendre Polinomu:

Legendre denkleminde *n* parametresi negatif olmayan bir tamsayı olacaktır. $s = n$ olduğu zaman (3.11) denkleminin sağ tarafı sıfırdır. Bunun için

$a_{n+2} = 0, \quad a_{n+4} = 0, \quad a_{n+6} = 0$..........

Bundan dolayı eğer *n* çift ise $y_1(x)$, *n* dereceli bir polinoma dönüşür, eğer *n* tek olursa bu sefer de $y_2(x)$ için aynısı olur.

Bazı sabitlerle çarpılmış bu polinomlara **Legendre Polinomları** denir.

$$a_s = \frac{-(s+2)(s+1)}{(n-s)(n+s+1)}a_{s+2} \qquad s \le n-2 \qquad (3.15)$$

O zaman sıfıra eşit olamayan tüm terimler, polinomun en yüksek *x'* in kuvvetlerinin katsayıları a_n olarak ifade edilebilir. Öyleyse a_n katsıları keyfidir. $n=0$ için a_n=1 seçilirse

$$a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} = \frac{1.3.5....(2n-1)}{n!}, \qquad n=1,2,... \tag{3.16}$$

(3.15) ve (3.16) eşitliğinden

$$a_{n-2} = -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)} a_n = \frac{-n(n-1)(2n)!}{2(2n-1)2^n (n!)^2},$$

$$a_{n-2} = -\frac{n(n-1)2n(2n-1)(2n-2)!}{2(2n-1)2^n n(n-1)!n(n-1)(n-2)!},$$

$$a_{n-2} = -\frac{(2n-2)!}{2^n (n-1)!(n-2)!},$$

$$a_{n-4} = \frac{-(n-2)(n-3)}{4(2n-3)} a_{n-2} = \frac{(2n-4)!}{2^n 2!(n-2)!(n-4)!}.$$

Bunun gibi devam eder ve genel olarak, $n-2m \geq 0$ olduğu zaman

$$a_{n-2m} = (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!}. \tag{3.17}$$

Legendre denkleminin sonuç çözümü ***n*** **dereceli Legendre Polinomu** diye adlandırılır ve $\boldsymbol{P_n(x)}$ diye gösterilir.

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{M} \frac{(-1)^m (2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!} x^{n-2m}, \tag{3.18}$$

$$P_n(x) = \frac{(2n)!x^n}{2^n (n!)^2} - \frac{(2n-2)!x^{n-2}}{2^n 1!(n-1)!(n-2)!} + ...,$$

Özellikle

$$P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = x,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \qquad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \qquad P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x).$$

3.4 Rodrigues formülü:

Legendre polinomu aynı zamanda Rodrigues formülü

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^2 - 1\right)^n . \tag{3.19}$$

ile ifade edilebilir.

Verilen

$$P_n(x) = \frac{(2n-1)(2n-3)...3.1}{n!} \left\{ x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - ... \right\}. \tag{3.20}$$

Legendre polinomu n defa, 0 dan x ‘e kadar integre edersek,

$$\frac{(2n-1)(2n-3)...3.1}{2n!} \left\{ x^{2n} - nx^{2n-2} + \frac{n(n-1)}{2!} x^{2n-4} - ... \right\}, \tag{3.21}$$

elde edilir. Bu da

$$\frac{(2n-1)(2n-3)...3.1}{(2n)(2n-1)(2n-2)...2.1} \left(x^2 - 1\right)^n , \tag{3.22}$$

$$\text{veya} \quad \frac{1}{2^n n!} \left(x^2 - 1\right)^n \tag{3.23}$$

yazılır. Böylece (3.19)

$P_n(x) = \frac{1}{2^2 .n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^2 - 1\right)^n$ elde edilmiş olur.

3.5 Doğuran (Generating) Fonksiyonlar:

Teknik olarak Legendre polinomları için doğuran (generating) fonksiyonları aşağıdaki eşitlik kullanılarak elde edilir.

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xu+u^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)u^n \tag{3.24}$$

$$\frac{1}{(1+y)^m}=1-my+\frac{m(m+1)}{2!}y^2-\frac{m(m+1)(m+2)}{3!}y^3+..., \tag{3.25}$$

formülünü kullanarak sol tarafı açarsak ve burada $m=\frac{1}{2}$ ve $y=u^2-2xu$ farz edersek,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-2xu+u^2)^{\frac{1}{2}}}&=1-\left(\frac{1}{2}\right)(u^2-2xu)+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)}{2!}(u^2-2xu)^2\\&\quad-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)}{3!}(u^2-2xu)^3+...,\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-2xu+u^2)^{\frac{1}{2}}}&=1-\frac{u^2}{2}+xu+\frac{\frac{3}{4}}{2!}(u^4-4xu^3+4x^2u^2)\\&\quad-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)}{3!}(u^2-2xu)^3+...,\end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-2xu+u^2)^{\frac{1}{2}}}&=1+xu-\frac{u^2}{2}+\frac{\left(\frac{3}{4}\right)}{2!}4x^2u^2-\frac{\left(\frac{3}{4}\right)}{2!}4xu^3\\&\quad-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)}{3!}(u^6-6xu^5+12x^2u^4-16x^3u^3)+...\end{aligned} \tag{3.28}$$

u' nun kuvvetlerine göre açılımı dizersek,

$$\frac{1}{(1-2xu+u^2)^{\frac{1}{2}}} = 1 + xu + \frac{1}{2}(3x^2-1)u^2 + \left(-\frac{\frac{3}{4}}{2!}4x + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)}{3!}16x^3 \right)u^3$$

$$+\left(\frac{\frac{3}{4}}{2!} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)}{3!}12x^2 \right)u^4 - \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)}{3!}(-6x) \right)u^5 \qquad (3.29)$$

$$-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)}{3!}u^6 + \ldots$$

katsayılarının $P_4(x)$ _lere eşit olduğunu görürüz.

4.BÖLÜM
BESSEL FONKSİYONU

Bazen ikinci dereceden diferansiyel denklemlerin katsayıları analitik olmadığı noktanın etrafında çözülebilir. Mesela diyelim ki x= 0 da katsayılar analitik değil. Bu durumda kuvvet seri açılımı uygulanamaz ama aşağıda gösterilen teorem ile ki bunun adı **Frobenius metottur** bu sorun ortadan kaldırılabiliyor.

4.1 Teorem Indicial (indirgenme) Denklemi:

$b(x)$ ve $c(x)$ analitik fonksiyonlar olsun.

$$y'' + \frac{b(x)}{x} y' + \frac{c(x)}{x^2} y = 0, \qquad (4.1)$$

şeklindeki diferansiyel denkleminde en azından bir çözümü aşağıdaki şekilde olmalıdır.

$$y(x) = x^r \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = x^r (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ...) \qquad a_0 \neq 0 \qquad (4.2)$$

burada r üssü herhangi bir reel veya karmaşık sayı olabilir. Ayrıca denklem ikinci bir çözüme sahip olabilir ki bu iki çözüm doğrusal bağımsızdır. Bunun çözümü (4.2) e benzer veya logaritmik terimler içerebilir.

(4.1) in çözümünü bulmak için denklemi x^2 ile çarpalım.

$$x^2 y'' + b(x) x y' + c(x) y = 0 \qquad (4.1')$$

$$b(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ..., \qquad c(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ...,$$

(4.2) denkleminin türevini alırsak,

$$y' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) a_m x^{m+r-1} = x^{r-1} (r a_0 + (r+1) a_1 x + ...)$$

$$y'' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) a_m x^{m+r-2} = x^{r-2} \left[r(r-1) a_0 + (r+1) r a_1 x + ... \right]$$

Bu elde ettiklerimizi (4.1') denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} & x^r \left[r(r-1) a_0 + (r+1) r a_1 x + ... \right] + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ...) x^r \left[r a_0 + (r+1) a_1 x + ... \right] \\ & + (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ...) x^r (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ...) = 0. \end{aligned} \qquad (4.2')$$

Şimdi bu toplamda $x^r, x^{r+1}, x^{r+2}, ...$ kuvvetli terimlerin katsayıları sıfıra eşitleyelim.

Bu işlem denklem sisteminin bilinmeyen a_m katsayılarının olduğunu ifade eder.

Denklemi x^{r}'e göre yazarsak,

$$\left[r(r-1)+b_0r+c_o\right]a_0=0 \qquad a_0\neq 0 \text{ olduğu için,}$$

$$\begin{aligned} r(r-1)+b_0r+c_o&=0 \\ r^2+(b_0-1)r+c_0&=0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

olur. Bu denkleme (4.1) denkleminin **indişıl (indirgenme) denklemi** denir.

İki çözümden biri daima (4.2) şeklindedir ve burada r , (4.3) denkleminin köküdür.

Burada üç farklı durum ile karşılaşılır.

Durum 1: Kökler tamsayı değil ve farklı

Durum 2: Çift katlı kök

Durum 3: Kökler tamsayı ve farklı

Örnek 1 (Durum 1):

$x^2y''-\frac{1}{2}xy'+\frac{1}{2}y=0$ denklemi için aynı prosedürü işletirsek indişıl denklemi olan yardımcı denklem şöyle çıkar.

$$r(r-1)-\frac{1}{2}r+\frac{1}{2}=0$$

Burada kökler $r_1=1$ ve $r_2=\frac{1}{2}$ çıkar. Bir tabanı $y_1=x$ ve $y_2(x)=\sqrt{x}$ dir.

Örnek 2 (Durum 2):

$x^2y''-xy'+y=0$ denkleminin indişıl_denklemi

$$r(r-1)-r+1=(r-1)^2=0 \text{ şeklindedir.}$$

Denkleminin çift katlı kökü vardır. $r=r_1=r_2=1$ olduğu için taban

$$y_1=x \text{ ve } y_2=x\ln x \text{ olur.}$$

Örnek 3a (Durum 3):

$x^2y''+xy'-y=0$ denkleminin indişıl_denklemi

$$r(r-1)+r-1=0$$

bu denklemin kökleri $r_1=1$ ve $r_2=-1$ olduğu için taban

$$y_1=x \text{ ve } y_2=\frac{1}{x} \text{ olur.}$$

Örnek 3b (Durum 3):

$$(x^2 - x)y'' - xy' + y = 0$$

$$y'' + \frac{1}{x}\left(-\frac{x^2}{x^2 - x}\right)y' + \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2}{x^2 - x}\right)y = 0$$

$$b(x) = -c(x) = -\frac{x^2}{x^2 - x} = \frac{x}{1 - x} = x(1 + x + ...)\,,$$

Böylece,

$$b_0 = 0 \quad \text{ve} \quad c_0 = 0 \text{ olur.}$$

Bundan dolayı indişıl_denklemi

$$r(r-1) = 0 \text{ olur.}$$

Burada kökler $r_1 = 1$ ve $r_2 = 0$ olur. Taban

$$y_1 = x \text{ ve } y_2 = x\ln x + 1 \text{ olur.}$$

Teorem 2 (Frobenius Metot):

Diferansiyel denklemi (4.1) ,Teorem 1 varsayımın sağladığını farz edelim. r_1 ve r_2 indicial denklemi (4.3) ün kökleri olsun. Bu durumda üç farklı durum ile karşılaşırız.

1. Durum: **Kökler tamsayı değil ve kökler farklı**

$$y_1(x) = x^{r_1}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...) \tag{4.4}$$

$$y_2(x) = x^{r_2}(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + ...) \tag{4.5}$$

Sırasıyla $r = r_1$ ve $r = r_2$ ile (4.2’) den elde ettiğimiz katsayılardır.

2. Durum: **Çift katlı kök** $r = r_1 = r_2$

$$y_1(x) = x^r(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...) \qquad \left[r = \frac{1 - b_0}{2} \right] \tag{4.6}$$

$$y_2(x) = y_1(x)\ln x + x^r(A_1 x + A_2 x^2 + ...) \qquad (x > 0) \tag{4.7}$$

3. Durum: **Kökler tamsayı ve farklı**

$$y_1(x) = x^{r_1}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...) \tag{4.8}$$

$$y_2(x) = ky_1(x)\ln x + x^{r_2}(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + ...) \qquad (x > 0) \tag{4.9}$$

Burada kökler $r_1 - r_2 > 0$ olarak gösterilmiştir ve *k* sıfır olarak meydana getirilebilir.

$r_1 < r_2$ için, eğer ilk çözüm $y = x^{r_1} \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ iki keyfi sabitten (a_0 ve a_m) oluşur o zaman yukarıdaki çözüm genel bir çözüme ihtiyaç duyar. Bunun anlamı $y_2(x)$ 'i bulamayız.

Örnek 4: Euler Cauchy Denklemi:

Euler Cauchy denklemi için

$$x^2 y'' + b_0 x y' + c_0 y = 0 \quad (b_0 \text{ ve } c_0 \text{ sabitler})$$

$y = x^r$ alarak yardımcı denklemi elde edebiliriz.

$$r(r-1) + b_0 r + c_0 = 0 \qquad \text{(indişıl denklemi).}$$

Farklı kökler r_1, r_2 için tabanı $y_1 = x^{r_1}$, $y_2 = x^{r_2}$ alırız, eğer çift katlı kök *r* olursa, tabanı $y_1 = x^r$, $y_2 = x^r \ln x$ alırız.

Örnek 5: Durum 1 için bir denklem:

$y'' + \frac{1}{2x} y' + \frac{1}{4x} y = 0$ diferansiyel denklemi çözelim.

Eğer paydaları eşitlersek aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$4xy'' + 2y' + y = 0$$

$$y = x^r \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = x^r (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots) \qquad (a_0 \neq 0),$$

$$y'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) a_m x^{m+r-1},$$

$$y''(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) a_m x^{m+r-2}.$$

Bu ifadeleri denklemde yerine yazarsak

$$4\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) a_m x^{m+r-1} + 2\sum_{m=0}^{\infty} (m+r) a_m x^{m+r-1} + x^r \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = 0$$

$$4r(r-1)a_0 x^{r-1} + 4(r+1)r a_1 x^r + 4(r+2)(r+1) a_2 x^{r+1} + \ldots$$

$$+2r a_0 x^{r-1} + 2(r+1) a_1 x^r + 2(r+2) a_2 x^{r+1} + \ldots$$

$$+a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + \ldots = 0$$

x^{r-1} in katsayısının toplamını sıfıra eşitlersek,

$$4r(r-1)+2r=0\ ,$$

$$4r^2-4r+2r=0,$$

$$r\left(r-\frac{1}{2}\right)=0,$$

$$r_1=0, r_2=\frac{1}{2}.$$

x^{r+s} in katsayılarının toplamını sıfıra eşitlersek,

$$4(s+r+1)(s+r)a_{s+1}+2(s+r+1)a_{s+1}+a_s=0$$

$$4(s+r+1)\left(s+r+\frac{1}{2}\right)a_{s+1}+a_s=0$$

$$a_{s+1}=-\frac{a_s}{(2s+2r+2)(2s+2r+1)} \qquad (s=0,1,2,\ldots)$$

$r=r_1=\frac{1}{2}$ için

$$a_{s+1}=-\frac{a_s}{(2s+3)(2s+2)} \qquad (s=0,1,2,\ldots)$$

$$a_1=-\frac{a_0}{3.2}, a_2=-\frac{a_1}{5.4}, a_3=-\frac{a_2}{7.6},\ldots$$

$$a_1=-\frac{a_0}{3!}, a_2=-\frac{a_0}{5!}, a_3=-\frac{a_0}{7!},\ldots$$

Genel olarak $a_0=1$ seçilir,

$$a_m=\frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \qquad (m=0,1,2,\ldots)$$

Böylece ilk çözüm,

$$y_1(x)=x^{\frac{1}{2}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^m=\sqrt{x}.(1-\frac{1}{6}x+\frac{1}{120}x^2-+\ldots)$$

$r=r_2=0$ için

$$A_{s+1}=-\frac{A_s}{(2s+2)(2s+1)} \qquad (s=0,1,2,\ldots)$$

$$A_1=-\frac{A_0}{2.1}, A_2=-\frac{A_1}{4.3}, A_3=-\frac{A_2}{6.5},\ldots$$

$$A_1=-\frac{A_0}{2!}, A_2=-\frac{A_0}{4!}, A_3=-\frac{A_0}{6!},\ldots$$

Genel olarak $A_0=1$ seçilir, ve böylece

$$A_m = \frac{(-1)^m}{(2m)!} \text{ olur.}$$

Böylece ikinci çözüm $r = r_2 = 0$ olduğunda

$$y_2(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^m = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{24}x^2 - + ...$$

Burada bulduğumuz y_1 ve y_2 x ekseninin pozitif tarafında lineer bağımsızdır. Çünkü $a_1 y_1 + a_2 y_2 \neq 0,$ eğer $a_1 \neq 0$ veya $a_2 \neq 0$.

Örnek 6: Durum 2 için bir denklem (Çift katlı kök):

$x(x-1)y'' + (3x-1)y' + y = 0$ diferansiyel denklemi çözelim.

$$y = x^r \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = x^r (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...) \qquad (a_0 \neq 0),$$

$$y'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) a_m x^{m+r-1},$$

$$y''(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) a_m x^{m+r-2}.$$

Bu ifadeleri denklemde yerine yazarsak

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) a_m x^{m+r} - \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) a_m x^{m+r-1}$$

$$+3\sum_{m=0}^{\infty} (m+r) a_m x^{m+r} - \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) a_m x^{m+r-1} + \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) a_m x^{m+r} = 0$$

En küçük kuvvete sahip x^{r-1} in katsayısının toplamını sıfıra eşitlersek,

$$\left[-r(r-1) - r\right] a_0 = 0$$

Böylece $r^2 = 0$ elde ederiz.

Dolayısıyla indişıl denklemi çift katlı köke sahip olur.

r yerine sıfır yazıp x^s in katsayılarının toplamını sıfıra eşitlersek,

$$s(s-1)a_s - (s+1)s a_{s+1} + 3s a_s - (s+1) a_{s+1} + a_s = 0$$

Böylece $a_{s+1} = a_s$ olur. Bundan dolayı $a_0 = a_1 = a_2 = ...,$ olur. Eğer $a_0 = 1$ seçersek,

$$y_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{1}{1-x}.$$

$$-\int p dx = -\int \frac{3x-1}{x(x-1)} dx = -\int \left(\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x} \right) dx = -2\ln(x-1) - \ln x$$

$$u' = U = y_1^{-2} e^{-\int p dx} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2 x},$$

$$u = \ln x,$$

$$y_2 = u y_1 = \frac{\ln x}{1-x}.$$

Burada bulduğumuz y_1 ve y_2 lineer bağımsızdır böylece $1 < x < \infty$ aralığında olduğu kadar $0 < x < 1$ aralığında da bir taban şeklidir.

Örnek 7: Durum 3 için bir denklem (Logaritmik terimli ikinci çözüm):
$(x^2 - x) y'' - x y' + y = 0$ diferansiyel denklemi çözelim.

$$y = x^r \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = x^r (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...) \qquad (a_0 \neq 0),$$

$$y'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) a_m x^{m+r-1},$$

$$y''(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) a_m x^{m+r-2}.$$

Bu ifadeleri denklemde yerine yazarsak

$$(x^2 - x) \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) a_m x^{m+r-2} - x \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) a_m x^{m+r-1} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r} = 0$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+r-1)^2 a_m x^{m+r} - \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) a_m x^{m+r-1} = 0.$$

İlk seride $m = s$ elde etmiştik burada ise $m = s+1$ çıkar, yani $s = m-1$

$$\sum_{s=0}^{\infty} (s+r-1)^2 a_s x^{s+r} - \sum_{s=-1}^{\infty} (s+r+1)(s+r) a_{s+1} x^{s+r} = 0.$$

En küçük kuvvetli x^{r-1} dir. Denklemde $s = -1$ alırsak indicial denklemi $r(r-1) = 0$ olur. Kökler $r_1 = 1$ ve $r_2 = 0$ olur.

$r_1 = 1$ için,

$$\sum_{s=0}^{\infty} \left[s^2 a_s - (s+2)(s+1) a_{s+1} \right] x^{s+1} = 0.$$

Bu bize rekürens ilişkisini verir.

$$a_{s+1} = \frac{s^2}{(s+2)(s+1)} a_s \qquad (s = 0,1,2,3,...)$$

Bunun için $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0,...$ Eğer $a_0 = 1$ alırsak

$$y_1 = x^{r_1} a_0 = x,$$

$$y_2 = y_1 u = xu,$$
$$y_2' = xu' + u,$$
$$y_2'' = xu'' + 2u'.$$

Denklemde yerine yazarsak

$$(x^2 - x)(xu'' + 2u') - x(xu' + u) + xu = 0$$
$$(x^2 - x)u'' + (x-2)u' = 0$$

$$\frac{u''}{u'} = -\frac{x-2}{x^2 - x} = -\frac{2}{x} + \frac{1}{1-x},$$

eğer her iki tarafın integralini alırsak

$$\ln u' = \ln \frac{x-1}{x^2}.$$

Buradan

$$u' = \frac{x-1}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}, \qquad u = \ln x + \frac{1}{x}, \qquad y_2 = xu = x \ln x + 1.$$

Burada bulduğumuz y_1 ve y_2 lineer bağımsızdır ve y_2 logaritmiktir.

4.1.1 Regular Singular (Düzenli Tekil) ve Irregular Singular (Düzenli Olmayan Tekil) Nokta:

Aşağıda verilen diferansiyel denklemi

$$N(x)y'' + P(x)y' + Q(x) = 0, \tag{4.10}$$

veya standart şekilde,

$$y'' + p(x)y' + q(x) = 0 \tag{4.11}$$

gibi verilen denklemi singular (tekil) noktanın komşuluğunda çözmeye çalışalım. Eğer tekillik çok sıkıntılı değil ise o zaman kuvvet serileri tekniğini kullanarak burada çözümü oluşturabiliriz. Burada *N*,*P*,*Q*'u ortak çarpanları olmayan polinom seçelim. O zaman denklemin tekil noktaları $N(x) = 0$ yapan noktalardır. Farz edelim x_0 bir tekil(singular) nokta olsun. Denklem (4.10)'i $(x - x_0)^2 / N(x)$ ile çarpıp yeniden düzenlersek,

$$(x - x_0)^2 y'' + (x - x_0)u(x)y' + v(x) = 0. \tag{4.12}$$

Burada,

$$u(x) = \frac{(x-x_0)P(x)}{N(x)}, \qquad v(x) = \frac{(x-x_0)^2 Q(x)}{N(x)}. \tag{4.13}$$

Bu durumda biz x_0 da, $u(x)$ ve $v(x)$ rasyonel fonksiyonları tekilliğe sahip değil ise x_0 noktasına **düzenli tekil nokta (regular singular nokta)** diyoruz. Aksi takdirde **düzenli olmayan tekil nokta (irregular singular nokta)** diyoruz.

4.2 Bessel Denklemi. Bessel Fonksiyonu $J_v(x)$:

Bessel diferansiyel denkleminin şekli,

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - v^2) y = 0 \tag{4.14}$$

veya standart biçimde,

$$y'' + \frac{1}{x} y' + (1 - \frac{v^2}{x^2}) y = 0 \quad , \tag{4.14'}$$

v parametresi verilen bir sayıdır.

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r} \qquad (a_0 \neq 0) \tag{4.15}$$

ifadesi çözüme sahip olmasından dolayı, (4.14) denkleminde (4.15)'i ve türevlerini yerine yazarsak

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) a_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) a_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r+2} - v^2 \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r} = 0$$

x^r in katsayısının toplamını sıfıra eşitlersek,

$$\left[r(r-1) + r - v^2 \right] = 0$$

elde ederiz, $(a_0 \neq 0)$ olduğu için

$$r^2 - v^2 = 0, \;\; r = \mp v . \tag{4.16}$$

x^{r+s} in katsayılarının toplamını sıfıra eşitlersek,

$$(s+r)(s+r-1) a_s + (s+r) a_s + a_{s-2} - v a_s = 0$$

elde ederiz.

$r = r_1 = v$ durumunda rekürens (tekrarlanan) katsayı:

$r = v$ olduğu zaman,

$$a_s\left[(s+v)^2 - v^2\right] + a_{s-2} = 0$$

$$a_s = -\frac{a_{s-2}}{s(s+2v)} \tag{4.17}$$

x^{r+1} in katsayısı,

$$\left[(r+1)r + r + 1 - v^2\right]a_1 = 0$$

$$(r^2 + 2r + 1 - v^2)a_1 = 0$$

$r = \mp v$ ve $(2r+1) \neq 0$ olduğu için, $a_1 = 0$ olur. Buradan

$$a_1 = a_3 = a_5 = ... = 0 \text{ olur.}$$

Eğer $s = 2m$ olarak alırsak,

$$c_{2m} = -\frac{c_{2m-2}}{(2m+2v)2m} = -\frac{c_{2m-2}}{2^2(m+v)m} \qquad (m = 1, 2, 3, ...)\,. \tag{4.18}$$

Böylece $a_2, a_4, a_6, ...$ katsayılarını hesaplıyabiliriz.

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2(v+1)}\,,$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{2^2.2.(v+2)} = -\frac{a_0}{2^4 2!(v+1)(v+2)}\,,$$

ve genel olarak,

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} m!(v+1)(v+2)....(v+m)} \qquad (m = 1, 2, 3, ...)\,. \tag{4.19}$$

$v = n$ Tamsayısı için Bessel Fonksiyonu $J_v(x)$:

$v = n$ tamsayısı için,

$$a_0 = \frac{1}{2^n n!}$$

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+n} m!n!(n+1)(n+2)......(n+m)} \qquad m = 1, 2, 3, ...$$

$r_1 = v = n$ tamsayısı için, (4.14)'ün özel bir çözümünü bulduk, bu çözüm $J_n(x)$ diye gösterilir ve

$$J_n(x) = x^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+n} m!(n+m)!} \tag{4.20}$$

ifadesine ***n.* mertebeden birinci tür Bessel Fonksiyonu** denir

Herhangi bir $v \geq 0$ için Bessel Fonksiyonu $J_v(x)$.

4.2.1. Gamma Fonksiyonu:

Gamma fonksiyonu $\Gamma(v)$ diye gösterilir ve

$$\Gamma(v) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{v-1} dt \qquad (v > 0) \text{ dır.} \tag{4.21}$$

$$\Gamma(v+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{v} dt = -e^{-t} t^{v} \Big|_0^{\infty} + v \int_0^{\infty} e^{-t} t^{v-1} dt = v\Gamma(v) \tag{4.22}$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{\infty} = 1$$

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1), \qquad \Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2!, \ldots \qquad \Gamma(n+1) = n!. \tag{4.23}$$

$a_0 = \dfrac{1}{2^v \Gamma(v+1)}$ olarak seçersek, (4.19) denklemi

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m+v} m! \Gamma(v+m+1)} \tag{4.24}$$

şeklinde olur.

Bundan dolayı $r = r_1 = v$ için,

$$J_v(x) = x^v \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+v} m! \Gamma(m+v+1)} \text{ olur.} \tag{4.25}$$

Bessel Fonksiyonun $J_{-v}(x)$ çözümü:

$v = -v$ yazdığımızda,

$$J_{-v}(x) = x^{-v} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m-v} m! \Gamma(m-v+1)} \tag{4.26}$$

Teorem 1 (Bessel Denkleminin Genel Çözümü):

Eğer *v* bir tamsayı değil ise her $x \neq 0$ için Bessel denkleminin genel çözümü aşağıdaki eşitlik ile bulunur.

$$y(x) = c_1 J_v(x) + c_2 J_{-v}(x) \tag{4.27}$$

ama *v* tamsayı olursa (4.27)’nin çözümü genel çözüm olmaz.

Teorem 2 ($J_n(x)$ ve $J_{-n}(x)$ Bessel Denkleminin Doğrusal Bağımlılığı):

$v = n$ tamsayısı için Bessel Denklemi $J_n(x)$ ve $J_{-n}(x)$ doğrusal bağımlıdır, çünkü

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \qquad (n = 1, 2, 3, ...) . \tag{4.28}$$

4.3 İkinci Tür Bessel Fonksiyonu (Neumann Fonksiyonu):

İkinci tür Bessel fonksiyonları Neumann fonksiyonları olarak bilinir ve birinci tür Bessel fonksiyonların doğrusal bir bileşimi olarak oluşturulmuş tarif:

$$N_v(x) = \frac{\cos v\pi J_v(x) - J_{-v}(x)}{\sin v\pi} \tag{4.29}$$

şeklindedir.

v integral değerleri için, $N_v(x)$ ifadesi belirsiz bir formu vardır ve

$N_v(x)\big|_{x=0} = \mp\infty$, dur. Yine de v'nin herhangi bir değeri için $x \neq 0$ olması durumunda bu fonksiyonun limiti $N_v(x)$ ifadesi için geçerlidir. Buradan Bessel Denkleminin genel çözümü şu şekilde yazılır:

$$y = AJ_v(x) + BN_v(x). \tag{4.30}$$

Burada A ve B sınır koşullarına göre belirlenecek keyfi sabitlerdir.

5.BÖLÜM
CHEBYSHEV FONKSİYONU

5.1 Tanım: Aşağıdaki bağıntıyla tanımlanan $T_n(x)$ polinomuna n dereceli x e bağlı **birinci tür Chebyshev Polinomu** denir.

$$T_n(x) = cosn\theta\,, \qquad x = cos\theta \tag{5.1}$$

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)\,. \tag{5.1'}$$

Eğer x değişkeninin aralığı $[-1,1]$ ise o zaman θ değişkenine göre aralık $[0,\pi]$ aralığı olur. Bu aralık karşılıklı olarak sağlanan bir aralıktır, çünkü $\theta=\pi$ e göre $x=-1$ ve $\theta=0$ a göre $x=1$ dir. Burada $cosn\theta$, $cos\theta$ a bağlı n dereceli bir polinomdur.

$$\begin{aligned}
&cos0\theta = 1,\\
&cos1\theta = cos\theta,\\
&cos2\theta = 2cos^2\theta - 1,\\
&cos3\theta = 4cos^3\theta - 3cos\theta,\\
&cos4\theta = 8cos^4\theta - 8cos^2\theta + 1, \ldots
\end{aligned}$$

Burada (5.1) den birinci çeşit Chebyshev Polinomları elde edebiliriz.

$$\begin{aligned}
&T_0(x) = 1,\\
&T_1(x) = x,\\
&T_2(x) = 2x^2 - 1,\\
&T_3(x) = 4x^3 - 3x,\\
&T_4(x) = 8x^4 - 8x + 1, \ldots
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Fakat bu metot pratikte pek kullanışlı değil. Aşağıdaki trigonometrik özdeşliği kullanılması daha çok tercih ediliyor.

$$cosn\theta + cos(n-2)\theta = 2cos\theta.cos(n-1)\theta$$

(5.1) deki tanım gereği buradan rekürans başlangıç koşulu,

$$T_0(x) = 1, \qquad T_1(x) = x, \quad \text{olan} \tag{5.3.a}$$

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \qquad n = 2,3,4,\ldots \tag{5.3.b}$$

bağıntısını elde ederiz.

5.2 Tanım: Aşağıdaki bağıntıyla tanımlanan $U_n(x)$ polinomuna n dereceli x e bağlı **ikinci tür Chebyshev Polinomu** denir.

$$U_n(x) = \frac{sin(n+1)\theta}{sin\theta}, \qquad x = cos\theta, \tag{5.4}$$

θ ve x'in aralığı aynı $T_n(x)$ 'inki gibidir. Biliyoruz ki,

$$\begin{aligned}
&sin1\theta = sin\theta,\\
&sin2\theta = 2sin\theta.cos\theta,\\
&sin3\theta = sin\theta(4cos^2\theta - 1),\\
&sin4\theta = sin\theta(8cos^3\theta - 4cos\theta),...
\end{aligned}$$

Buradan,

$$\begin{aligned}
&U_0(x) = 1,\\
&U_1(x) = 2x,\\
&U_2(x) = 4x^2 - 1,\\
&U_3(x) = 8x^3 - 4x,...
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Eğer ifadeyi aşağıdaki trigonometrik özdeşlik ile birleştirirsek,

$$sin(n+1)\theta + sin(n-1)\theta = 2cos\theta.sin(n\theta) .$$

Buradan başlangıç koşulu,

$$U_0(x) = 1, \qquad U_1(x) = 2x, \quad \text{olan} \tag{5.6a}$$

reccurence bağıntısını elde ederiz.

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x), \qquad n = 2,3,4,... \tag{5.6b}$$

Benzer trigonometrik özdeşlik kullanırsak,

$$sin(n+1)\theta - sin(n-1)\theta = 2sin\theta.cos(n\theta).$$

Birinci ve ikinci çeşit polinomlar arasında bir bağıntı elde ederiz.

$$U_n(x) - U_{n-2}(x) = 2T_n(x), \qquad n = 2,3,4,... \tag{5.7}$$

6. BÖLÜM

ORTOGONALLİK

6.1 Sturm Liouville Teoremi:

Aşağıdaki ikinci derece fonksiyonu göz önüne alalım.

$$K(y)=\int_a^b\left[P(x)y^2+R(x)y'^2\right]dx. \tag{6.1}$$

Euler denklemi iyi bilinen Jacobi denklemi şu şekildedir.

$$Py-\frac{d}{dx}(Ry')=0. \tag{6.2}$$

Aşağıdaki (6.3) eşitliğini dikkate alarak *K*'nın sabit çözümünü bulalım.

$$\int_a^b y^2dx=1. \tag{6.3}$$

Çarpan metodu, problemin sabit çözümünü bulmaya yardımcı olur.

$$\int_a^b (Ry'^2+Py^2-\lambda y^2)\ dx.$$

Bu Euler denklemine göre

$$Py-\frac{d}{dx}(Ry')=\lambda y. \tag{6.4}$$

(6.4) denklemine **Sturm Liouville Denklemi** denir.

Şimdi denklemi sınır koşulları ile alalım.

$$y(a)=y(b)=0. \tag{6.5}$$

Farz edelim ki $R(x)$ ve $P(x)$, C^1 fonksiyonları olsun ve $a\le x\le b$ için $R(x)>0$ olsun.

Şimdi *L* notasyonunu kullanalım

$$L(y)=Py-\frac{d}{dx}(Ry'). \tag{6.6}$$

O zaman (6.2) ve (6.4) denklemleri şu şekilde gösterilebilir.

$$L(y)=0,\qquad L(y)=\lambda y.$$

C^2 fonksiyonları y_1, y_2 için operatör lineerdir ve α herhangi bir sabit olmak üzere,

$$L(y_1+y_2)=L(y_1)+L(y_2),$$
$$L(\alpha y)=\alpha L(y).$$

Şimdi *K'* ı iki değişkenli tanımlayalım.

$$K(y,z) = \int_a^b (Ry'z' + Pyz)dx. \tag{6.7}$$

Burada $y = y(x)$ ve $z = z(x)$ tir.

Eğer $y = z$ alırsak,

$$K(y,y) = K(y) \text{ elde ederiz.}$$

(6.5) de verilen sınır koşullarını kullanırsak,

$$\int_a^b Ry'z'dx = -\int_a^b \left(\frac{d}{dx} Ry'\right) zdx = -\int_a^b \left(\frac{d}{dx} Rz'\right) ydx.$$

Böylece (6.7) şu şekilde yazılabilir,

$$K(y,z) = \int_a^b L(y)zdx. \tag{6.8}$$

Ayrıca şu şekilde de yazabiliriz,

$$K(y,z) = \int_a^b L(z)ydx.$$

Bunun için,

$$\int_a^b L(y)zdx = \int_a^b L(z)ydx. \tag{6.9}$$

Özel olarak $y = z$ alınırsa,

$$K(y,y) = \int_a^b L(y)ydx. \tag{6.10}$$

elde edilir.

Hatırlatalım ki, $y_1(x), y_2(x)$ fonksiyonları $\rho(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre $[a,b]$ aralığında dik olurlar eğer,

$$\int_a^b \rho(x)y_1(x)y_2(x)dx = 0.$$

$y_1(x)$ fonksiyonu, $\rho(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre normalize edilmiş denir eğer,

$$\int_a^b \rho(x)y_1^2(x)dx = 1.$$

$y_i(x)$ fonksiyonlar dizisine, $\rho(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortonormal denir eğer

$$\int_a^b \rho(x)y_i(x)y_j(x)dx = \begin{cases} 0 & i \neq j, \\ 1 & i = j. \end{cases}$$

Herhangi bir reel veya karmaşık λ için, (6.4) denklemi (6.5) koşulu altında $y(x)\equiv 0$ bir çözüme sahiptir. Ama bazı λ değerleri için sistem $y(x)\neq 0$ çözümü olmayabiliyor. Bu λ değerlerine L operatörünün **öz değeri**, fonksiyonlara da $L(y)$ nin **öz fonksiyonu** denir.

6.2 Parseval Eşitliği: $e_1, e_2, \ldots$, V sonsuz boyutlu Euclide uzayında vektörlerin ortonormal kümesi olsun ve x, V içinde keyfi bir vektör olsun. $e_1, e_2, \ldots$, V için bir tabandır ancak ve ancak

$$\sum_{k=1}^{\infty}(x.e_k)^2=\|x\|^2.$$

İspat:

$$\left\|x-\sum_{k=1}^{n}(x.e_k)e_k\right\|^2=\left(x-\sum_{k=1}^{n}(x.e_k)e_k\right)\left(x-\sum_{k=1}^{n}(x.e_k)e_k\right)$$

$$\left\|x-\sum_{k=1}^{n}(x.e_k)e_k\right\|^2=(x.x)-2\sum_{k=1}^{n}(x.e_k)(x.e_k)+\left(\left(\sum_{j=1}^{n}(x.e_j)e_j\right),\left(\sum_{k=1}^{n}(x.e_k)e_k\right)\right).$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n}(x.e_j)e_j\right).\left(\sum_{k=1}^{n}(x.e_k)e_k\right)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(x.e_j)(x.e_k)(e_j.e_k)=\sum_{k=1}^{n}(x.e_k)^2,$$

böylece,

$$\left\|x-\sum_{k=1}^{n}(x.e_k)e_k\right\|^2=\|x\|^2-\sum_{k=1}^{n}(x.e_k)^2.$$

Farz edelim ki $e_1, e_2, \ldots, V$ için ortonormal bir tabandır. Biliyoruz ki

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}(x.e_k)e_k.$$

Bundan dolayı,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x-\sum_{k=1}^{n}(x.e_k)e_k\right\|^2=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\|x\|^2-\sum_{k=1}^{n}(x.e_k)^2\right)=0,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(x.e_k)^2=\|x\|^2.$$

7.BÖLÜM
ÖZEL FONKSİYONLARIN BAZI UYGULAMALARI

7.1 Bir silindirik Kuyuda Schroedinger'in Denklem Çözümü:

Bir diskin içinde potansiyeli sıfır olan ve dışında potansiyeli sonsuz olan iki boyutlu potansiyel içinde *m* kütleli bir parçacık düşünelim. Polar koordinatlarda r,ϕ değişkenlerini kullanarak sistemi gösteren Laplace denklemini şöyle yazabiliriz:

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}. \tag{7.1}$$

Sistem içindeki Schroedinger'in denklemini de şöyle gösterebiliriz:

$$-\frac{h^2}{2m}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\right]=E\psi. \tag{7.2}$$

Çözüm için **(7.2)** denkleminde $\psi = R(r)T(\phi)$ seçerek değişkenlerine ayırma metodunu kullanırsak,

$$-\frac{h^2}{2m}\left[T(\phi)\frac{1}{R(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}R(r)\frac{\partial^2 T(\phi)}{\partial\phi^2}\right]=ER(r)T(\phi). \tag{7.3}$$

Eşitliğin her iki tarafını $\psi = R(r)T(\phi)$, ile bölersek,

$$\left[\frac{1}{r}\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{1}{T}\frac{\partial^2 T}{\partial\phi^2}\right]=-\frac{2mE}{h^2}. \tag{7.4}$$

$\frac{2mE}{h^2}=k^2.$ alırsak ve eşitliğin her iki tarafını r^2 ile çarparsak, olduğu gibi r,ϕ cinsinden değişkenlerine ayrılmış aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$\left[\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+k^2r^2+\frac{1}{T}\frac{d^2T}{d\phi^2}\right]=0. \tag{7.5}$$

Denklemin ϕ'e bağımlı kısmını çözmek için $-m^2$ seçilirse $T(\phi)$ de osilatör harmonik denklemi verimli çözüm sunar. Burada *A* bir sabit olmak üzere,

$$T(\phi)=Ae^{im\phi}. \tag{7.6}$$

$$\int_0^{2\pi} A^2T(\phi)T(\phi)d\phi = 1 \Rightarrow A=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}. \tag{7.7}$$

Buradan,

$$T(\phi)=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}e^{im\phi} \text{ bulunur.}$$

Denklemin *r*'e bağımlı kısmını çözmek için **(7.5)** denklemini *r* ile çarpıp m^2 'e eşitliyelim.

$$\frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{r}{R}\frac{dR}{dr}+k^2r^2=m^2. \tag{7.8}$$

Eğer bu denklemi düzenlersek,

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}+r\frac{dR}{dr}+(k^2r^2-m^2)=0. \tag{7.9}$$

Böylece standart Bessel denklemi elde edilmiş olur. Bessel denkleminin genel çözümü,

$$R(r)=AJ_m(kr)+BN_m(kr). \tag{7.10}$$

Burada $J_m(kr)$ ve $N_m(kr)$ m.inci dereceden birinci ve ikinci tür Bessel fonksiyonları, *A* ve *B* sınır koşullarına göre belirlenen keyfi sabitlerdir. $x=0$ da çözüm sonsuz olmak zorunda olduğundan yani $N_m(kr)\rightarrow 0$ iken $x\rightarrow 0$ olmalı. Buradan çıkan sonuç $N_m(kr)$'nin katsayısı olan $B=0$ olmasıdır. Böylece elimizde kalan ifade şu şekilde olur:

$$R(r)=AJ_m(kr). \tag{7.11}$$

Sınır koşullarını kullanırsak disk üzerinde $\psi=0$ olmasından dolayı $J_m(kr_b)=0$ elde ederiz. Bessel fonksiyonunun sıfır olması dolaylı olarak J_m argümanını gerektirir. Bessel fonksiyonu *m*.inci dereceden *n*.inci sıfır iken $kr_b=\alpha_{m,n}$ gerektirmesi ortaya çıkar. Sistemin enerjisi *k*'ı $\alpha_{m,n}$ cinsinden ifade edilerek çözülür.

$k=\sqrt{\dfrac{2mE}{h^2}}$ olduğuna göre aşağıdaki ifadeye ulaşılır.

$$E_{m,n}=\frac{\alpha_{m,n}h^2}{2mr_b^2}h. \tag{7.12}$$

Böylece ψ için tam çözüm şu şekilde olur:

$$\psi_m(r,\phi)=AJ_m\left(\frac{\alpha_{m,n}r}{r_b}\right)e^{im\phi}. \tag{7.13}$$

A'nın standart bir değerini belirleyebilmek için keyfi bir *m* derecesi seçelim. Yarıçapı $r=5{,}13562$ olan çember üzerinde sıfır olacak şekilde $m=2$ alalım. Burada $m=2,\ n=1$ için normalizasyonu bulalım.

$$\int_{0}^{r_{sınır}} A^2 J_2\left(\frac{\alpha_{2,1} r}{r_b}\right) J_2\left(\frac{\alpha_{2,1} r}{r_b}\right) dr = 1. \tag{7.14}$$

Burada $r = 5{,}13562$ iken nümerik integrasyon kullanılarak $A = \sqrt{\frac{1}{0{,}510377}}$ nın değeri elde edilir. Böylece $m = 2$ değeri için tam sonucu yazabiliriz.

$$\psi(r,\phi) = \sqrt{\frac{1}{0{,}510377}}\sqrt{\frac{1}{2\pi}} J_2\left(\frac{\alpha_{2,1} r}{r_b}\right) e^{im\phi}. \tag{7.15}$$

Özellikle $\alpha_{m,n} = r_b$ seçilirse, aşağıdaki eşitlik elde edilir

$$\psi(r,\phi) = \sqrt{\frac{1}{0{,}510377}}\sqrt{\frac{1}{2\pi}} J_2(r) e^{im\phi}. \tag{7.16}$$

Bu çalışma bize sınır koşullarını kullanıp özel çözümler oluşturarak Bessel fonksiyonunun sıfırları ile çalışmanın önemini gösterir.

7.2 Legendre Fonksiyonunu Kullanarak Eşit Olmayan Aralıklı Anten Dizilimlerinin Bir Sentezi

Özet—Kablosuz iletişim sistemlerinde, dizilim antenlerinin kullanım amacı istenmeyen müdahaleleri süzgeçten geçirerek istenen sinyalleri almaktır. Kenar lob seviyesi ve yönlülük anlamında optimizasyon ve sentez için yeni metotlar geliştirilmekte. Dizilim örüntüsünün optimizasyonu için, anten elementlerinin hem konumlandırılmasının hem de çıkışlarının ayarlanması önerilir. Optimal çıkışın ve konumlandırmanın belirlenmesi polinomsal bir problem olarak gösterilir: bu durum çok boyutlu dizilim geometrilerinin düzlemsel olmayan optimizasyonuna birleşik matematiksel yaklaşım olarak ifade edilir. Bu yaklaşım, bahsedilen dizilim geometrisi tarafından belirtilen Legendre fonksiyonlarının sınırlandırıcı özelliklerinin bir sınıfını kullanır.

7.2.1. Giriş

Son yıllarda kablosuz teknoloji müthiş bir oranda büyüme gösteriyor. Bunun sonucu olarak abonelerin sayısında bir artış meydana geldi ve sistemin kalitesi daha iyi hale geldi. Bu soruna sunulabilecek en önemli çözüm uzamsal işleme kullanmaktır [1]. Uzamsal işleme akıllı anten teknolojisinin merkez fikridir. Bir akıllı antenler sistemi dizilim anteni ve antenin her bir elementi ile ilgili olan işleme ile oluşturulmaktadır.

Bu işleme süreci ile her bir kullanıcının yerinin tespiti ve bir sabit yer filtreleme oluşturmak mümkündür.

Bir dizilim antenleri sisteminde, açık problem yüksek yönlülük özelliğine sahip, asgari yan loblar ve radyo kanalına adapte edilebilen ışınma örüntüsünün sentezidir. Işınma örüntüsünün sentezinde, bir dizilim oluşturan antenin elementlerinin genişlik eksidasyonunun belirlenmesi, dizilimin radyasyonunun özelliklerini geliştiren dizilim yapısında da olduğu gibi, kablosuz iletişimde akılı antenlerin teknolojisi içerisinde en çok dikkati çeken konulardan bir tanesidir. Yan lob seviye azaltma üzerinde geniş çalışmalar yapılmıştır [1,2]. Bu teknikleri çoğu yan lob seviyesini azaltmak için doğru elementleri bulmaya çalışır, [3] ve [4]`te belirtilen diğer teknikler düzensiz konumlandırma kullanılarak yan lob seviyesini azaltmak için geliştirilmiştir. Son zamanlarda, genetik algoritma (GA) ve diferansiyel gelişim (DE) ([5] ve [6]`da belirtilmektedir) ışınma örüntüsünün sentezi problemini çözmek için kullanıldı. Bu çalışmada Legendre fonksiyonlarını [7,8] kullanma temelinde birleşik matematiksel yaklaşımların kullanımını maksimum kazanım ve yan lobların küçük genişliği anlamında ışınım örüntüsü sentezini optimize etmek için göz önünde bulundurduk. Matematiksel model jenerik bir model olarak ek bir avantaja sahip ve değişik anten dizilim geometri tiplerine uygulanabilir.

Bu çalışmada vurgulanan, yönelme, yan lob seviyesi tepki zamanını geliştiren algoritmanın hesaplama zamanını optimize etmeye çalışan dizilimli antenlerin bir modelini geliştirmektir.

Çalışma şu şekilde organize edildi: Bölüm 7.2.2 Legendre polinomları bazında doğrusal ve düzlemsel dizilimli antenleri açıklamak için problem formülasyonunu gösterir. Bölüm 7.2.3 yönelme, zaman hesaplaması ve yan lob seviyesinin sayısal sonuçlarını gösterir. Son olarak, Bölüm 7.2.4 bu çalışmanın sonucunu açıklar.

Terimler

$k = 2\pi / \lambda$: Boş alan dalgası,

d_n : Elemanın pozisyonu,

I_n : Eleman uyarımı,

ε_n : Elemanın sarsım pozisyonu,

Δu : Örnekleme aralığı,

M : Örneklenmiş noktalar,

α_n, β_n : Dönüşüm vektörleri,

$P_{m-1/2}(\cos\alpha)$: Kesir dereceli Legendre fonksiyonu,

ϕ : Artan oranlı faz,

θ_d : Ana lobun yönü.

7.2.2. Problem Formulasyonu

7.2.2.1. Legendre Fonksiyonları Kullanan Doğrusal Dizilim Sentezi

Bu çalışmada bahsedilen doğrusal anten dizilimi Şekil 2`de gösterilen $2N + 1$ elemanlarının simetrik doğrusal dizilimidir.

Dizilim faktörünün özelikleri ve dizilimin alanı elemanlar arasındaki uyarım ve ayrışmayı değiştirerek kontrol edilebilir. Dizilim faktörü aşağıdaki gibidir [1]

$$AF = E(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n I_n cos(kd_n u), \tag{7.17}$$

$$0 \le \theta \le \pi \text{ limitinde iken } u = \cos(\theta) + \varphi,$$

Dizilim faktörünü Legendre polinomları terimleri cinsinden kurmak için $[7]$ de tanımlandığı gibi istenen dizilim örüntüsü göz önüne alınır.

$$E_d(u), -1 \le u \le 1, \tag{7.18}$$

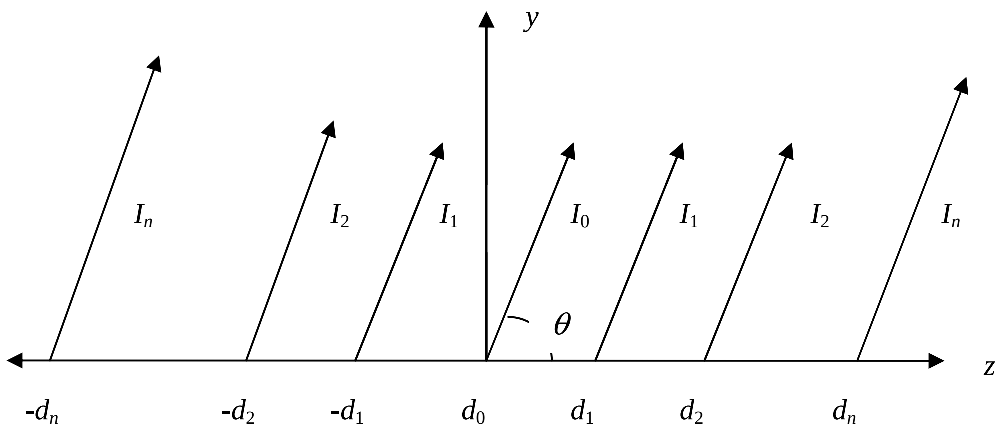
aralığında Şekil 2`e göre, dizilim faktörü simetriktir, bunun anlamı $E(-u) = E(u)$ [4], ve bu sebeple sentez problemini $0 \le u \le 1$ aralığı içerisinde farz ederiz. $0 \le u \le 1$ aralığında M noktasında tepkiyi belirlemek için

$$\Delta u = \frac{1}{M-1},\ u_m = m\Delta u,\ \varphi_n = kd_n \cos(\theta_d),\ \beta_n = kd_n \cos\Delta u. \text{ iken}$$

$$E(u_m) = \sum_{n=0}^{N} \varepsilon_n I_n cos(m\beta_n - \varphi_n); \tag{7.19}$$

$$m = 0,1,2,3,\ldots,M-1.$$

Aşağıdaki adım Legendre dönüşümünü uygulamak içindir.



Şekil 2. Periyodik simetrik doğrusal dizilimde değil iken 2*N* + 1 elemanın geometrisi

Dizilim faktörüne $F(\alpha_p)$ dönüşümü, denklemlerin üçgensel bir setini elde etmek için uygulanır ve sonuçta elde edilecek ifade;

$$\varepsilon_m = 1,\ \ m = 0;\ \varepsilon_m = 2,\ \ m > 0;\ \text{iken}$$

$$F(\alpha_p) = \sum_{m=0}^{M-1} \varepsilon_m E_d(u_m) P_{m-1/2}(\cos\alpha_p); \qquad (7.20)$$

$$p = 0,1,2,...,N\ .$$

İstenilen $E_d(u)$ dizilim örüntüsünün Legendre dönüşümü, aşağıda kesir dereceli Legendre Polinomu için [9] sınırlı ilişkisi ile oluşturulur:

$$f(\alpha,\beta) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m P_{m-1/2}(\cos\alpha)(\cos m\beta) = \begin{cases} \left[2/(\cos\beta - \cos\alpha)\right]^{1/2}, & 0 \le \beta < \alpha \\ 0, & \alpha < \beta < \pi \end{cases} \qquad (7.21)$$

(7.20) ve **(7.21)** değerlendirerek, eşitliklerin aşağıdaki üçgensel sistemini elde ederiz:

$$F(\alpha_p) = \sum_{n=0}^{p} I_n f(\alpha_p, \beta_n); \qquad (7.22)$$

(7.22)’dan yola çıkarak, bu sistem mevcut *p*.inci elemanının ve ilk elemanının değerini elde etmek için tersine çevrilebilir.

$$I_0 = F(\alpha_0) / f(\alpha_0, \beta_0),$$

$$I_0 = \frac{F(\alpha_p) - \sum_{n=0}^{p} I_n f(\alpha_p, \beta_n)}{f(\alpha_p, \beta_p)}; \tag{7.23}$$
$$p = 0,1,2,...,N;$$

Yukarıdaki parametre (I) ile, daha hızlı ve basit bir şekilde doğrusal anten dizilimlerinin ışınım örüntüsünü sentezlemek mümkündür.

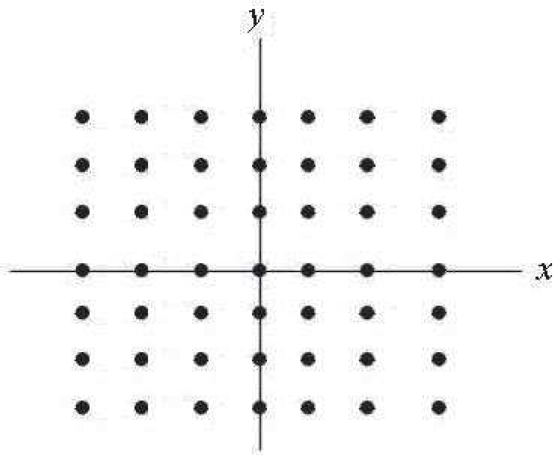
7.2.2.2. Legendre Fonksiyonlarını Kullanarak Düzlemsel Dizilim Sentezi

Şekil 3`de gösterildiği gibi, $N_1 \times N_2$ elemanlarının simetrik bir düzlemsel dizilimini düşünün.

İstenilen bir 2-D dizilim örüntüsü aşağıda açıklandığı gibidir [8]:

$$0 \le \theta \le \pi,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi, \text{sınırlarında,}$$
$$u = \sin\theta\cos\varphi,\ \ v = \sin\theta\sin\varphi,\ \ \text{iken}$$
$$E_d(u,v),\ \ -1 \le u \le 1,\ -1 \le v \le 1, \tag{7.24}$$

aralığındadır.



Şekil 3. $N_1 \times N_2$ elemanlı düzlemsel dizilim geometrisi.

$$\beta_{n1} = kd_{n1}\Delta u;\ \beta_{n2} = kd_{n2}\Delta v;\ \ \text{iken,}$$

örnekleme aralığı

$$\Delta u = 1/(M_1 - 1);\ \Delta v = 1/(M_2 - 1);$$

$I_{n1}I_{n2}$ dizilimin mevcut dağılımıdır ve (d_{n1}, d_{n2}) dizilimdeki elemanın (x, y) pozisyonunu gösterir.

$$E(u_{m1}, v_{m2}) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \varepsilon_{n1n2} I_{n1n2} cos(m_1 \beta_{n1}) \cos(m_2 \beta_{n2}); \tag{7.25}$$

$$m_1 = 0, 1, 2, ..., M_1 - 1;$$

$$m_2 = 0, 1, 2, ..., M_2 - 1;$$

durumunu elde etmek için, $0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 1,$ aralığında istenilen örnek $M_1 \times M_2$ noktaları $(M_1, M_2 >> 1)$ olarak örneklendirilmektedir. $u - v$ Uzayının her bir bölgede dizilim faktörünün simetrik olması nedeniyle, bunun anlamı $E(u,v) = E(-u,v) = E(u,-v) = E(-u,-v)$ [4] olmasıdır, sentez problemi sadece, örneğin, $0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 1,$ tek bir bölgede düşünülür. Bundan sonraki adım $F(\alpha_{p1}, \alpha_{p2})$ Legendre dönüşümünü düzlemsel dizilimle aşağıda anlatılan şekilde uygulamaktır.

$$F(\alpha_{p1}, \alpha_{p2}) = \sum_{m_1=0}^{M_1-1} \varepsilon_{m1} \sum_{m_2=0}^{M_2-1} \varepsilon_{m2} E(u_{m1}, u_{m2}) \times P_{m1-\frac{1}{2}}(\cos \alpha_{p1}) P_{m2-\frac{1}{2}}(\cos \alpha_{p2}); \tag{7.26}$$

$$p_1 = 0, 1, 2, ..., N_1 - 1; \quad p_2 = 0, 1, 2, ..., N_2 - 1;$$

$\varepsilon_m = 1,\ m = 0;\ \varepsilon_m = 2,\ m > 0;$ iken, düzlemsel dizilim faktörü $E(u,v)$ `nin bu dönüşümü **(7.26)** da gösterilen kesir dereceli Legendre polinomu için ilişkiyi sınırlandırarak oluşturulur. [10] ve [5] in uygulanması eşitliklerin aşağıdaki üçgensel sistemini ortaya çıkarır.

$$F(\alpha_{p1}, \alpha_{p2}) = \sum_{n_1=0}^{N_1} \sum_{n_2=0}^{N_2} I_{n1n2} f(\alpha_{p1}, \beta_{n2}) f(\alpha_{p2}, \beta_{n1}); \tag{7.27}$$

(7.27)'den, ilk p.inci ve q.uncu elemanın akımını belirleyebiliriz.

$$I_{00} = \frac{F(\alpha_0, \alpha_0)}{f(\alpha_0, \beta_0) f(\alpha_0, \beta_0)}; \tag{7.28}$$

$$I_{pq} f(\alpha_q, \beta_q) f(\alpha_p, \beta_p) = F(\alpha_p, \alpha_q) - \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{q-1} I_{ij} f(\alpha_p, \beta_i) f(\alpha_q, \beta_j); \tag{7.29}$$

Bir düzlemsel dizilimdeki düzenli ya da düzensiz aralıklarda simulasyon sonuçları bundan sonraki bölümde verilmektedir.

7.2.3. Simülasyon ve Sonuçlar

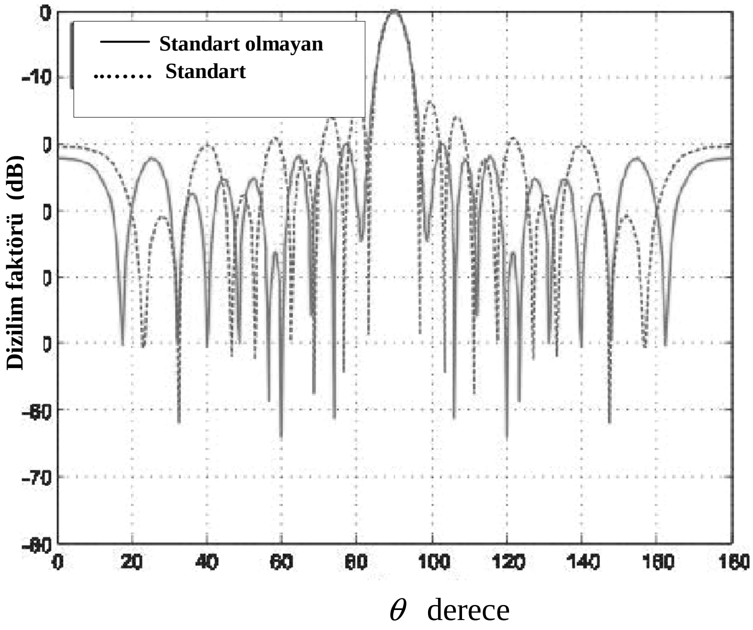
Aşağıdaki bölüm önceki bölümde anlatılan doğrusal ve düzlemsel geometrilerin simülasyon sonuçlarını göstermektedir.

7.2.3.1 Doğrusal dizilim

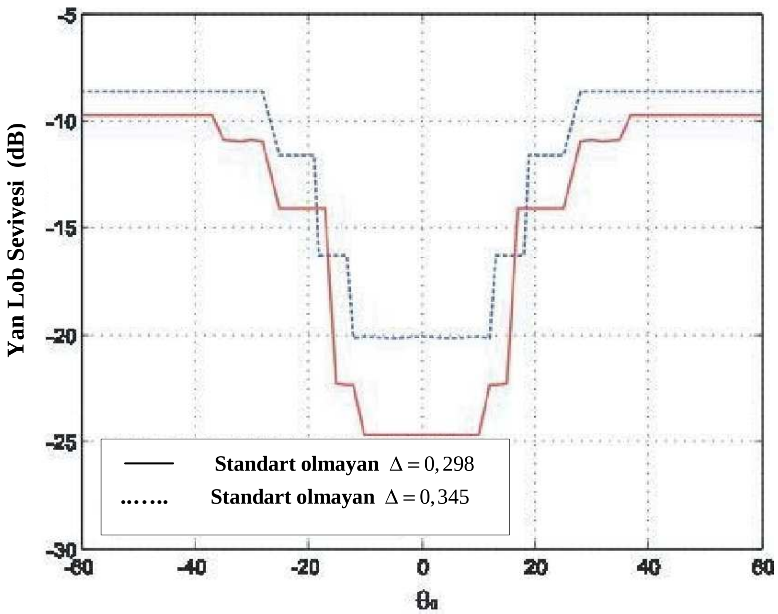
Bu bölümün amacı, Legendre fonksiyonları ile sentezlenen doğrusal bir dizilimin performansını değerlendirmektir. İlk olarak, karşılaştırma amacıyla, doğrusal dizilimin elemanlarının sayısı 17 olarak belirlenmiştir ve [7]`de belirtilen sonuçlardan sonra ana lob 90 derece yapılmıştır. Şekil 4 doğrusal dizilimdeki düzenli ya da düzensiz dizilim örüntüsünün sonuç karşılaştırmalarını göstermektedir. Bu sonuçlardan elde edildiği kadarıyla, düzenli dizilimle kıyaslandığında (−13.89 dB), düzenli olmayan dizilimde (−20.13 dB) ~ 6 dB`lik bir gelişim yan lob seviyesi (YLS) artışı görmekteyiz.

Diğer tarafta, tekniğin odak noktasının YLS`yi asgari seviyeye indirmek olması nedeniyle, yarım güç ışın genişliği (YGIG) 3% ($\sim 0.18^{\circ}$)`lük küçük bir artış göstermektedir. Bu gelişmelerle beraber, düzenli olmayan dizilimlerde YLS ve YGIG`de daha iyi performans aldığımızı gösteren [5]`i tekrar doğrularız. Dizilimlerin performanslarının genişletilmiş bir değerlendirmesini rapor etmek için, ana lob düzenli olmayan bir aralıkta kullanıldığında $-60^{0} \leq \theta_{0} \leq 60^{0}$`lik açılarla yöneltildiğinde Şekil 5 YLS`i gösterir.

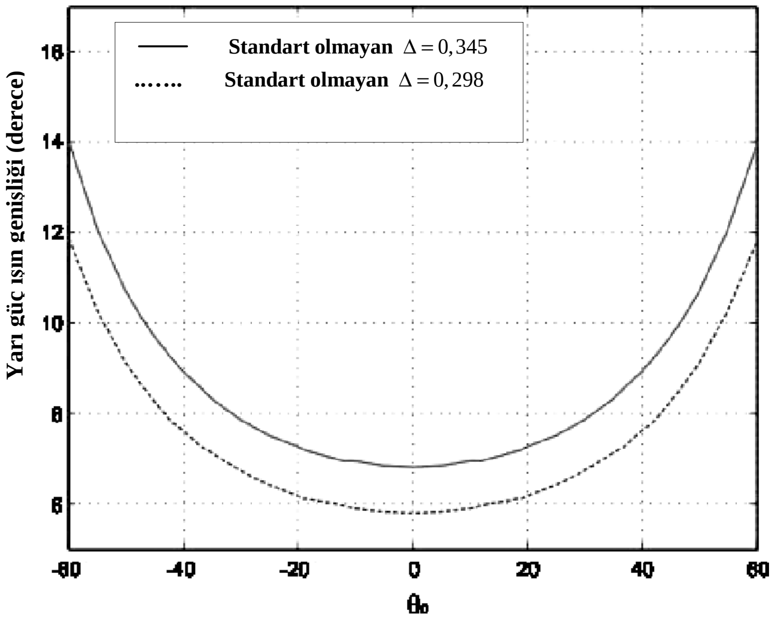
Aynı prosedürle, YGIG Şekil 5`te değerlendirilmiş ve gösterilmiştir. Analitik teknik aralık genişletme faktörü $(\Delta)$`nü düzenleyerek YLS`i değiştirebilecek bir özelliğe sahiptir. Bu faktör [7]`den seçilmiştir. Her iki durum da Legendre fonksiyonlarının performansını gösterir ama değişik aralık ayarlama faktörleriyle (Δ).



Şekil 4. Bir 17 elemanın diziliminin düzenli olmayan (dolu çizgi) ve düzenli olan (kesik çizgi) ile olan Legendre fonksiyonlarının dizilim örüntüsü. Dizilim



Şekil 5. Yan lob düzenli olmayan bir aralık kullanıldığında $-60^0 \le \theta_0 \le 60^0$ ``lik açılarla yöneltildiğinde (17 elemanın diziliminde)



Şekil 6. Değişik aralık genişletme faktörleri için bir 17 elemanın diziliminde düz olmayan aralık ile ana lob $-60^0 \le \theta_0 \le 60^{0\,\circ}$ iken YGIG

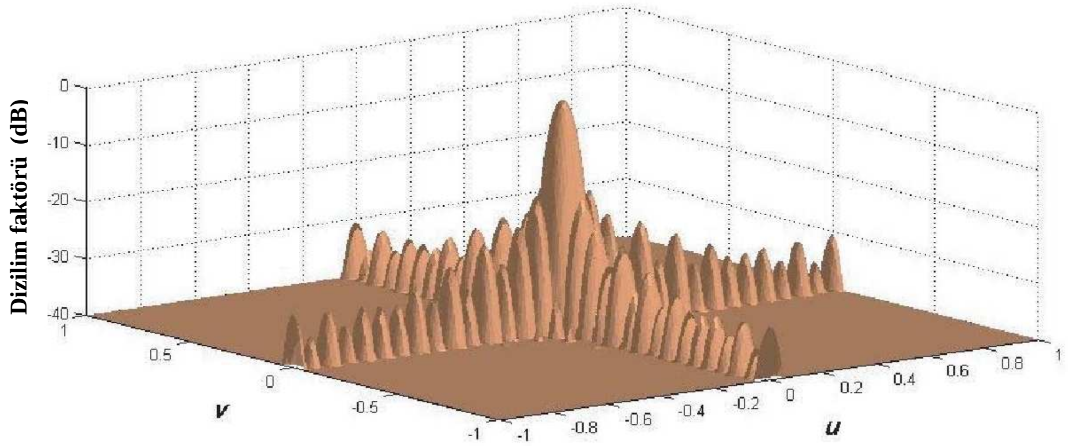
$|\theta_0| \le 12.29^0$`de, YLS, de 1.13 dB`lik bir azalma ve 0.345 faktörü için YGIG`de $0.16^{\circ}$`lik bir artış oluyor.

Fakat açısal bölge $|\theta_0| \le 15.8^0$, 5.7dB üzerinde değerlendirilirse, YLS içerisindeki Db azalımı ve YGIG`de maksimum 0.29° luk bir artış 0.298 faktörü için gösterilir. Bu sonuçlar diferansiyel evrim [6] ile karşılaştırılırsa bir dezavantajımız olur çünkü açılama %47.33 (28.40°) oranında azalır. Fakat Legendre fonksiyonlarını kullanmanın ana avantajı daha dar ışın genişliği elde etmemizdir.

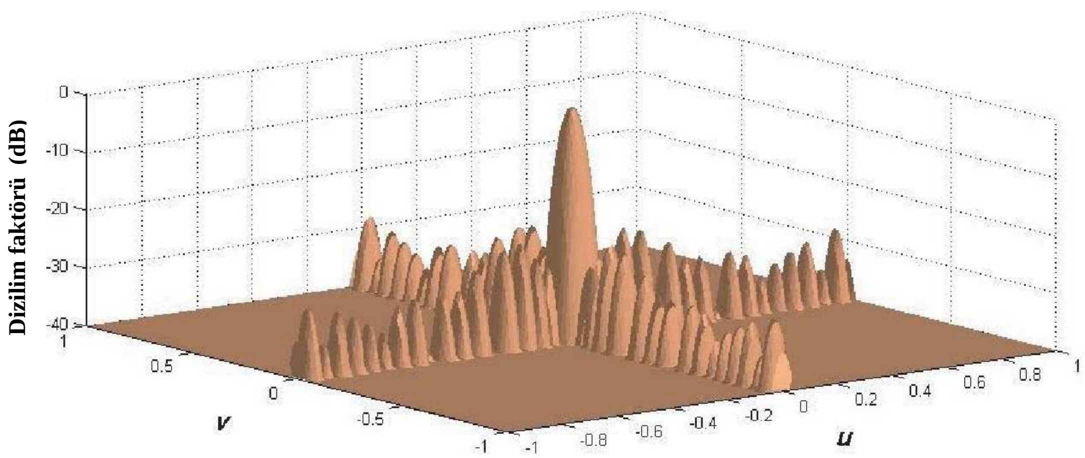
7.2.3.2. Düzlemsel Dizilim

Karşılaştırma amacıyla, bir 31 eleman simetrik doğrusal dizilim seçilir ve bu nedenle hesaplanacak değişkenlerin sayısı test optimizasyonu algoritmalarında [5, 6] tipik bir sayı olan 15 olur. Bölüm 7.2.2`de gösterildiği üzere, Legendre fonksiyonları simetrik doğrusal dizilimin 15 elementinin pozisyonunu sentezlemek için uygulanır. Şekil 6 düzenli aralıklar $(\lambda/2)$ ile Legendre fonksiyonlarını kullanmak için elde edilen dizilim faktörünü gösterir.

Bu durumda, düzlemsel dizilimde -16dB`lik bir YLS elde edilir. YLS içerisinde daha iyi bir sonuca sahip olan tek parametre. Dizilim faktörü için daha iyi bir performans elde etmek için anten elemanları arasında düzenli olmayan bir aralıklandırma kullanmak durumundayız.



Şekil 7. Düzlemsel dizilimi aralıklandırmak için 31x31 düzenli eleman için dizilim faktörü

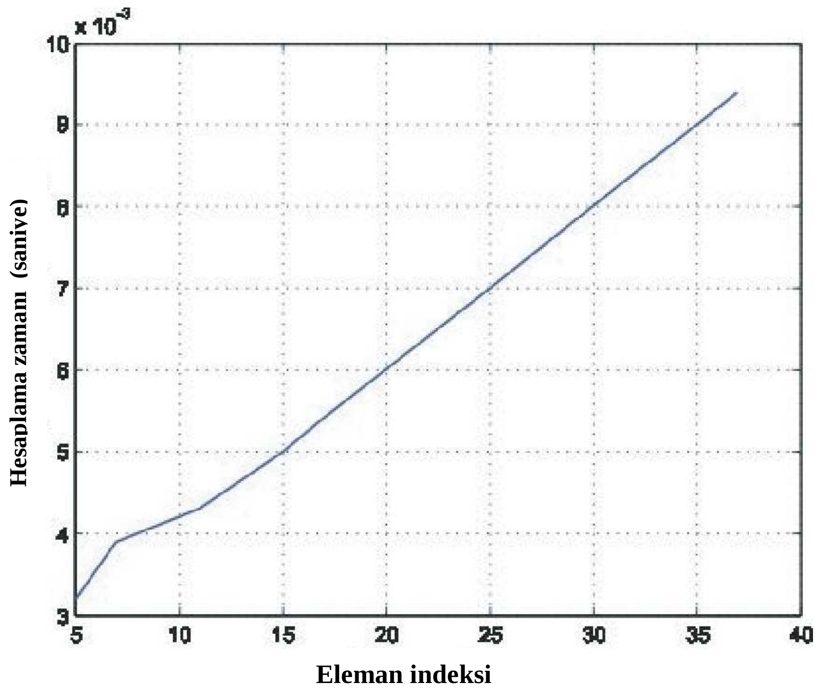


Şekil 8. 31x31 düzenli olmayan eleman aralıklandırma için dizilim faktörü

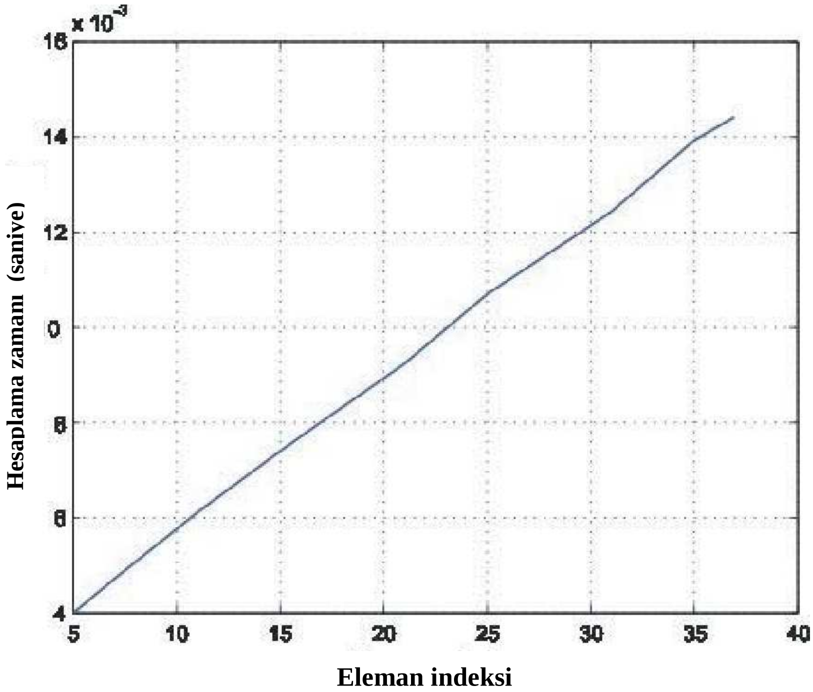
Düzenli olmayan aralıklandırma ile 31 elemanın düzlemsel dizilimin elde edilen dizilim faktörü Şekil 7`de gösterilmiştir. Düzenli olmayan aralıklandırma ile elde edilen YLS $-22$ dB`dir. Ek olarak, yönlülüğün 35.05 dB`sini ve $3.18^{\circ}\times3.18^{\circ}$`lik YGIG elde ettik. Bu sonuçlarla YLS`de %27.27 (6 dB)`lik bir azalma elde ettik. YGIG anlamında ise, %8.36 (0.29°)`lık bir azalmayla yönlendirme de %2.14 (0.75 dB)`lik artış gözlemledik.

7.2.3.3. Hesaplama Zamanı

Doğrusal bir dizilimin hesaplama zamanını bilmek için, anten elementleri 5`den 37 elemana kadar değişmek üzere ortalama 1000 sıklık bir zaman kullandık.



Şekil 9. Legendre fonksiyonları kullanılan doğrusal dizilim için hesaplama zamanı



Şekil 10. Legendre fonksiyonları kullanılan düzlemsel dizilim için hesaplama zamanı

Şekil. 8 bulgusal tekniklerle [5, 6] kıyaslandığında Legendre fonksiyonlarının kullanımında zamanın çok hızlı olduğu durumda doğrusal dizilimin hesaplama zamanını gösterir.

Legendre fonksiyonlarını uygulayarak antenin 37 elemanını kullanarak 9,5 milisaniye maksimum değeri elde ettik.

Şekil 10 Legendre fonksiyonlarını kullanan düzlemsel dizilim sonuçlarını göstermektedir: Algoritmanın hesaplama zamanı 14,5`lik maksimum değeri gösteriyor. Düzlemsel dizilimi kullanarak benzer bir sonuç elde ettik.

Her iki durumun sonuçları da bu analitik tekniğin hesaplama zamanlarının diğer tekniklerle kıyaslandığında [6] daha hızlı olduklarını göstermektedir. Bu parametrenin değerlendirilmesi önemlidir çünkü Legendre fonksiyonlarını kullanmanın en önemli avantajının hesaplama zamanı olduğunu bulduk.

7.2.4. Sonuçlar

Simulasyonda elde edilen bilgilere göre, düzenli olmayan dizilimlerde Legendre fonksiyonların kullanımı (doğrusal ya da düzlemsel) yan lob seviyesinde (YLS) ve YGIG`de ciddi gelişmeler elde etti. Bu tekniğin dezavantajı da yönlendirme sıralamasıdır çünkü doğrusal bir dizilimin değişiği ile karşılaştırıldığında $\sim 28.4^{\circ}$`lik bir azalma gösteriyor ama bu teknik diferansiyel evrim ile kıyaslandığında iki önemli avantaj sağlıyor. Bunlardan birincisi YLS`i etkilemeden daha dar bir ışın genişliği sunuyor ve diğer de hesaplama zamanıdır.

7.3.Ek A.

A.1. Legendre Fonksiyonları

Dizilim faktörlerini Legendre polinomları bazında oluşturduğumuzda ikinci dereceden diferansiyel denklem [9] ile başlamalıyız.

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0; \quad n = 0,1,2,...; \qquad (7.3.A1)$$

Bu denklemin çözümleri Legendre fonksiyonları olarak adlandırılmaktadırlar. *n* sıfır ya da pozitif tamsayı ise, bu fonksiyonlar Legendre polinomları olurlar. Operatör sembol D^n`nin *n*.inci türevini gösterdiğinde:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} D^n\left[(x^2-1)^n\right]; \qquad (7.3.A2)$$

Denklem yineleme dizisi tanımlandığında Legendre polinomları yineleme ilişkisine sahiptir.

$$(n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x) = (2n+1)xP_n(x); \qquad n = 1,2,3,...; \qquad (7.3.A3)$$

A.2. Kesir Dereceli Legendre Fonksiyonları

Bu çalışmada, kesir dereceli $P_{m-1/2}$`nin Legendre fonksiyonunu kullanıyoruz ve bu fonksiyonu elde etmek için bir yineleme ilişkisi gerekmektedir. Bu ilişki kesir dereceli Legendre polinomlarına sahiptir. Yineleme ilişkisi $m \geq 2$ ve $n \geq 3$ değerleri için verilmiştir.

$$(n_1+0.5)P_n(x)=2n_1xP_{n-1}(x)-(n_1-0.5)P_{n-2}(x); \qquad (7.3.A4)$$

$P_{m-1/2}$ fonksiyonunun $n=1,\ m=0;$ değerleri için $P_{-1/2}$ 'ye eşit olacaktır ve bu sebeple onun değeri $[9]$:

$$P_n(x)=P_{m-1/2}(x)=\frac{2}{\pi}K\left[\left(\frac{1-x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]; \qquad (7.3.A5)$$

olur.

Legendre [11]`in açık ifadesine göre $x=\cos(\theta)$ ve birinci dereceden eliptik entegrallerindeki Legendre polinominalda özdeşlikleri kullanarak:

$$K\left[sen\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]=\int_0^{\pi/2}\left[1-\left(sen\frac{\theta}{2}\right)\sin^2\theta\right]^{-1/2}d\theta,\ \text{iken}$$

$$P_{-1/2}(\cos\theta)=\frac{2}{\pi}K\left[sen(\frac{\theta}{2})\right].\ \text{olur} \qquad (7.3.A6)$$

Aynı şekilde $m=1,$ ve $n=2,$ değerleri için , $P_{m-1/2}$ fonksiyonu $P_{1/2}$ `ye eşit olacaktır ve bu sebeple birinci ve ikinci derece ($K\left[sen(\theta/2)\right]$ ve $E\left[sen(\theta/2)\right]$) için eliptik entegrallerdeki değeri

$$E\left[sen\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]=\int_0^{\pi/2}\left[1-\left(sen\frac{\theta}{2}\right)\sin^2\theta\right]^{-1/2}d\theta,$$

$$K\left[sen\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]=\int_0^{\pi/2}\left[1-\left(sen\frac{\theta}{2}\right)\sin^2\theta\right]^{-1/2}d\theta,\ \text{iken}$$

$$P_{1/2}(\cos\theta)=\frac{2}{\pi}\left\{2E\left[sen\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]-K\left[sen\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\}. \qquad (7.3.A7)$$

olur.

Bu iki Legendre polinomu ve yineleme ilişkisini kullanarak polinomların aşağıdaki değerlerini elde etmek daha basit olacak. $n_1=n-2,$ iken eşitlik (A4)`ten $m\geq 2$ ve $n\geq 3$ için şunu elde ettik.

$$P_n(x)=P_{m-1/2}(x)=\frac{2n_1xP_{n-1}(x)-(n_1-0.5)P_{n-2}(x)}{(n_1+0.5)}; \qquad (7.3.A8)$$

$$P_n(\cos\theta)=P_{m-1/2}(\cos\theta)=\frac{2n_1\cos\theta P_{n-1}(\cos\theta)-(n_1-0.5)P_{n-2}(\cos\theta)}{(n_1+0.5)}. \qquad (7.3.A9)$$

KAYNAKLAR

[1] Balanis, C. A., *Antenna Theory Analysis and Design*, John Wiley& Sons, Ch. 6, New Jersey, 2005.

[2] Milligan, T. A., *Modern Antenna Design*, John Wiley & Sons,Ch. 3, New Jersey, 2005.

[3] Unz, H., "Linear arrays with arbitrary distributed elements,"*IEEE Trans. Antennas Propag.*, Vol. 8, No. 2, 222–223, Mar. 1960.

[4] Skolnik, M. I., G. Nemhauser, and J. W. Sherman, "Dynamic programming applied to unequally spaced arrays," *IIEEE Trans.Antennas Propag.*, Vol. 12, 35–43, Jan. 1964.

[5] Panduro, M. A., D. H. Covarrubias, C. A. Brizuela, and F. R. Marante, "A multi-objective approach in the linear antenna array design," *Int. J. Electron. Commun (AE ¨ U)*, Vol. 59, 205–212,Jun. 2005.

[5] Rocha, C., D. H. Covarrubias, C. A. Brizuela, and M. A. Panduro, "Differential evolution algorithm applied to sidelobe level reduction on a planar array," *Int. J. Electron. Commun (AE ¨ U)*, Vol. 61, 286–290, 2006.

[6] Kumar, B. P. and G. R. Branner, "Design of unequally spaced arrays for performance improvement," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, Vol. 47, No. 3, 511–523, Mar. 1999.

[7] Kumar, B. P. and G. R. Branner, "Generalized analytical technique for the synthesis of unequally spaced arrays with linear, planar, cylindrical or spherical geometry," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, Vol. 53, No. 2, 621–634, Feb. 2005.

[8] Mangulis, V., *Handbook of Series for Scientists and Engineers*, Part. III, 129, Academic, New York, 1965.

[9] Math 456 Lecture Notes: Vladimir Zakharov

[10] S. D. Conte and Carl de Boor. Elementary Numerical Analysis. McGraw-Hill, Inc.2nd edition,1972.

[11] M. Erdmann. Lecture notes for 16-811 Mathematical Fundamentals for Robotics. The Robotics Institute, Carnegie Mellon University, 1998.

[12] Jannette Van Iseghem. Universit des et Technologies de Lille U.F.R de Mathmatiques

[13] Special Functions and Theır Applications N. N. Lebedev

[14] Physico-Technical Institute Academy of Sciences, U.S.S.R. Revised English Edition Translated and Edited by Richard A. Silverman

[15] Jennifer Nied ziela_University of Tennessee – Knoxville (Dated: October 29, 2008)

[16] J. J. O' Connor and R. E. F., Friedrich Wilhelm Bessel (School of Mathematics and Statistics University of St Andrews Scotland, 1997).

[17] F. E. Relton, Applied Bessel Functions (Blackie and Son Limited, 1946).

[18] H. J. Arfken, G. B., Weber, Mathematical Methods for Physicists (Elsevier Academic Press, 2005).

[19] E. W. Weissten, Modi_ed Bessel Function of the Second Kind (Eric Weisstein's World of Physics, 2008).

[20] M. Boas, Mathematical Methods for the Physical Sciences (Wiley, 1983).

[21] P. F. Newhouse and K. C. McGill, Journal of Chemical Education 81, 424 (2004).

ÖZGEÇMİŞ

20.05.1973 tarihinde İstanbul'da doğdum. İlk ve orta tahsilimi sırasıyla Defterdar Mehmet Bey İlkokulu, Anadoluhisarı Orta Okulu ve lise eğitimimi de Haydarpaşa Teknik Lisesi Elektronik Bölümünü tamamlayıp Marmara Üniversitesi Eğitim Fakültesi İngilizce Matematik Öğretmenliğini Bölümünden 1997 yılında mezun oldum. 1997 yılından beri Milli Eğitim Bakanlığına bağlı özel kurumlarda Matematik öğretmeni olarak çalışmaktayım. Beykent Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Uygulamalı Matematik Programına Eylül 2008 tarihinde yüksek lisans öğrencisi olarak kaydoldum.