T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANA BİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

SERBEST SINIRLI BÖLGELERDE SINIR DEĞER PROBLEMİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Hazırlayan:

Barış BAHÇECİ

İSTANBUL, 2010

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANA BİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

SERBEST SINIRLI BÖLGELERDE SINIR DEĞER PROBLEMİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Hazırlayan:

Barış BAHÇECİ

Öğrenci No:

080862005

Tez Danışmanı:

Yrd.Doç.Dr. Bahaddin SİNSOYSAL

İSTANBUL, 2010

YEMİN METNİ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum,“SERBEST SINIRLI BÖLGELERDE SINIR DEĞER PROBLEMİ ” başlıklı bu çalışmanın, bilimsel ahlak ve geleneklere uygun şekilde tarafımdan yazıldığını, yararlandığım eserlerin tamamının kaynaklarda gösterildiğini ve çalışmamın içinde kullanıldıkları her yerde bunlara atıf yapıldığını belirtir ve bunu onurumla doğrularım. ...../...../2010

Barış BAHÇECİ

SERBEST SINIRLI BÖLGELERDE SINIR DEĞER PROBLEMİ

Hazırlayan: Barış BAHÇECİ

Özet

Tezde serbest sınıra sahip bölgede nonlineer ısı denkleminin genelleştirilmiş fonksiyonlar sınıfında gerçek ve sayısal çözümleri incelenmiştir

Tezin ilk bölümünde adi diferansiyel denklemler için Green fonksiyonu irdelenmiştir.

İkinci bölümde Green fonksiyonunu kullanılarak hareket eden ve bilinen sınıra sahip bölgede lineer ısı denklemi için yazılmış birinci sınır değer probleminin çözümü bulunmuştur.

Sonuncu bölümde ise sıfır başlangıç koşullu nonlineer ısı denklemi sağ yarım eksende incelenmiştir. Problemin koşan dalga şeklinde çözümü elde edilmiş ve çözümün diferansiyellenebilme özellikleri incelenmiştir. Gösterilmiştir ki, çözüm hareket eden, fakat bilinmeyen ön cephe noktalarında dejenere olur.

Bilinmeyen ön cephe ile birlikte zayıf çözümün bulunması için bazı avantajlara sahip yardımcı problem önerilmiştir. Yardımcı problemi kullanarak problemin zayıf çözümü elde edilmiştir. Ayrıca yardımcı problemin avantajlarını kullanarak zayıf çözümün bulunması için etkin nümerik algoritmalar da önerilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Green Fonksiyonu,Nonlineer Isı Denklemi,Koşan Dalga,Zayıf Çözüm

BOUNDARY VALUE PROBLEM IN THE FREE BOUNDARY DOMAIN

Presented by: Barış BAHÇECİ

Abstract

In this thesis, the exact and numerical solutions of the nonlinear heat equation in a free boundary domain is investigated.

In the first section, the Green's function for ordinary differential equations is analyzed.

In the second section, using the Green's function the solution of the linear heat equation in domain with given and moving boundary is obtained.

In the last section, the nonlinear heat equation with zero initial condition in right half space is investigated. The solution in the form traveling wave is found and the differentiable properties of the problem is also analyzed. It is shown that the solution of this problem on the moving boundary which is unknown beforehand is degenerated.

In order to find both the weak solution and unknown front, the auxiliary problem which has some advantages over the main problem is introduced. The weak solution of the problem is obtained by referring to the auxiliary problem. Using the advantages of this auxiliary problem the essential algorithms for obtaining the numerical solution are also suggested.

Key Words: Green Function, Nonlineer Heat Equation , Traveling Wave, Weak Solution

ŞEKİLLER LİSTESİ

TEŞEKKÜR

Serbest sınırlı bölgede lineer ve nonlineer ısı dağılım denklemleri için yazılmış başlangıç ve sınır değer problemlerini ele aldığım tezimin hazırlanmasında her türlü yardım ve desteklerini esirgemeyen tez danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Bahaddin SİNSOYSAL ve yüksek lisans hocam Sayın Prof. Dr. Mahir RESULOV'a,

Yüksek lisans eğitimim süresince bilgilerinden faydalandığım değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Mehmet ERDOĞAN ile Sayın Doç. Dr. Afgan ASLANOV'a,

Ayrıca bana desteklerini hiç esirgemeyen sevgili babam Prof. Dr. İdris BAHÇECİ, annem Nazmiye BAHÇECİ ve kardeşim Pınar BAHÇECİ'ye teşekkür ederim.

İstanbul-2010 Barış BAHÇECİ

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Bilindiği gibi diferansiyel denklemler için sınır değer probleminin çözümünün bulunması başlangıç değer probleminin çözümünün bulunmasından daha zor olmaktadır. Sınır değer problemlerinin çözümlerinin bulunmasında etkin yöntemlerden birisinin temelini Green fonksiyonu oluşturmaktadır. Bu nedenle tezin bu bölümünde Green fonksiyonunun tanımı verilecek ve Green fonksiyonunun elde edilmesi yöntemi incelenecektir.

1.1 Lineer Denklemler İçin Sınır Değer Problemi

Adi diferansiyel denklem için yazılmış Cauchy probleminden farklı olarak, sınır değer probleminde bilinmeyen fonksiyonun veya onun türevlerinin tanım bölgesinin en az iki noktasındaki değerleri verilir ve tüm tanım bölgesinde çözümün bulunması gerekir.

Aşağıdaki sınır değer problemini göz önüne alalım

$$\ell(y) = a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x), \quad a \le x \le b \tag{1.1}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha y(a) + \beta y'(a) = 0, \\ \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

(1.1), (1.2) problemini çözmek için, önce (1.1) denkleminin genel çözümünü bulmak ve sonra (1.2) sınır koşullarını korumak şartıyla genel çözümün içerdiği sabitleri seçmek gerekir.

Örnek 1.1 Aşağıdaki problemin çözümünü bulunuz

$$y'' - y = 0$$

$$y(0) = 3, \;\; y(1) - y'(1) = 1.$$

Çözüm. Gözönüne alınan denkleme karşılık gelen $k^2 - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri $k_{1,2} = \mp 1$ olduğundan, genel çözümü

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$$

şeklindedir. Burada c_1 *ve* c_2 keyfi sabitlerdir ve söz konusu bu sabitler sınır koşulları kullanılarak

$$c_1 + c_2 = 3$$

$$2c_2 e^{-1} = 1$$

sisteminden

$$c_1 = \frac{6-e}{2}, \qquad c_2 = \frac{e}{2}$$

olarak hesaplanılır. Bulunan sabitler genel çözümün ifadesinde yerine konulursa ele alınan problemin çözümü

$$y(x) = \frac{6-e}{2} e^x + \frac{e}{2} e^{-x}$$

olarak elde edilir.

Örnek 1.2 Aşağıdaki problemin çözümünü bulunuz

$$y'' - y' = 0$$

$$y(0) = 3, \quad y(1) - y'(1) = 1.$$

Çözüm. Denkleme karşılık gelen $k^2 - k = 0$ şeklinde olan karakteristik denkleminin kökleri $k_1 = 0$ ve $k_2 = 1$ olduğundan, genel çözümü

$$y(x) = c_1 + c_2 e^x$$

olarak yazabiliriz. Buradaki c_1 ve c_2 sabitlerini sınır koşulları altında

$$c_1 + c_2 = 3$$

$$c_1 + c_2 e - c_2 e = 1$$

eşitliklerinden $c_1 = 1$ ve $c_2 = 2$ olarak buluruz. O halde problemin genel çözümü

$$y = 1 + 2e^x$$

olur.

Örnek 1.3 Aşağıdaki problemin çözümünü bulunuz

$$x^2 y'' - 2y = 0$$

$$y(1) = 1, \quad \lim_{x \to \infty} y'(x) = 0.$$

Çözüm. Gözönüne aldığımız denklem Euler denklemi olduğundan denklemin çözümünü $y = x^k$ cinsinden arayacağız. Karakteristik denklemi $k^2 - k - 2 = 0$ olup kökleri $k_1 = 2$ ve $k_2 = -1$ dir. O halde problemin genel çözümü,

$$y(x) = c_1 x^2 + c_2 \frac{1}{x}$$

şeklinde yazılabilir. c_1 ve c_2 sabitlerini sınır koşullarını koruyacak şekilde seçmeliyiz. İkinci sınır koşulunun sağlanması için, yani $\lim_{x \to \infty} y'(x) = 0$ olması için $c_1 = 0$ olmak zorundadır. Birinci sınır koşulundan ise $1 = c_1 + c_2$ dir ve buradan $c_2 = 1$ olarak bulunur. Elde edilen sabitleri genel çözümün ifadesinde yerine yazarsak, problemin çözümünü $y = \frac{1}{x}$ olarak elde ederiz.

1.2 Green Fonksiyonu ve Uygulamalar

Şimdi (1.1), (1.2) probleminin çözümünü Green fonksiyonu yardımıyla elde edelim. Bunun için önce Green fonksiyonunun tanımını verelim.

Herhangi bir $s \in (a,b)$ için aşağıdaki özelliklere sahip olan $G(x,\xi)$, $x \in [a,b]$, $\xi \in (a,b)$ fonksiyonuna (1.1), (1.2) probleminin Green fonksiyonu denir.

1. $x \neq \xi$ olduğunda $G(x,\xi)$

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \qquad (1.3)$$

homojen denklemini korur.

2. $x=a$ ve $x=b$ olduğunda $G(x,\xi)$ (1.2) sınır koşulunu korur.

3. $x=\xi$ olduğunda $G(x,\xi)$, x e göre sürekli olup, türevi ise birinci tür sıçrayışa sahip olur. Ayrıca sıçrayışın değeri $\frac{1}{a(x)}$ e eşit olur, yani aşağıdaki ifadeler sağlanır

$$G(s+0,0)=G(s-0,0),$$

$$G'_x\left(s+0,0\right)-G'_x\left(s-0,0\right)=\frac{1}{a(x)}. \tag{1.4}$$

$y_1(x)$ ve $y_2(x)$ (1.3) denklemini sağlayan, ayrıca sırasıyla birinci ve ikinci sınır koşullarını koruyan çözümler olsun. $y_1(x)$ aynı anda her iki sınır koşulunu sağlamasa bile $G(x,s)$ fonksiyonu mevcuttur ve onu,

$$G(x,s)=\begin{cases}\varphi(s)y_1(x), & a\le x\le s\\ \psi(s)\,y_2(x), & s\le x\le b\end{cases} \tag{1.5}$$

şeklinde arayacağız. Buradaki $\varphi(s)$ ve $\psi(s)$ fonksiyonlarını, (1.5) ifadesi (1.4) koşullarını koruyacak şekilde aşağıdaki gibi

$$\begin{cases}\psi(s)y_2(s)=\varphi(s)y_1(s)\\ \psi(s)y_2'(s)-\varphi(s)y_1'(s)=\dfrac{1}{a(s)}\end{cases}$$

seçmek gerekir. Buradan $\varphi(s)$ ve $\psi(s)$ fonksiyonlarını,

$$\varphi(s)=\frac{y_2(s)}{a(s)\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}} \tag{1.6}$$

$$\psi(s)=\frac{y_1(s)}{a(s)\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}} \tag{1.7}$$

olarak elde ederiz. (1.6) ve (1.7) ifadeleri (1.5) de yerine konulursa Green fonksiyonu için

$$G(x,s)=\begin{cases}\dfrac{y_2(s)y_1(x)}{a(s)\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}}, & a\le x\le s\\[2ex] \dfrac{y_1(s)y_2(x)}{a(s)\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}}, & s\le x\le b\end{cases} \tag{1.8}$$

ifadesini buluruz. $G(x,s)$ fonksiyonu (1.1), (1.2) probleminin Green fonksiyonu olduğu taktirde, hesaplamalar yoluyla (1.1), (1.2) probleminin çözümünün

$$y(x)=\int_a^b G(x,s)\,f(s)\,ds$$

şeklinde olduğunu gösterebiliriz.

Örnek 1.4 Aşağıdaki problemin çözümünü Green fonksiyonu yardımıyla bulunuz

$$y''=f(x)$$

$$y(0)=0,\quad y(1)=0\,.$$

Çözüm. Homojen denklemin genel çözümü $y=c_1+c_2x$ olduğundan birinci koşulu sağlayan çözümü $y_1=x$, ikinci koşulu sağlayan çözümü ise $y_2=1-x$ olarak gösterebiliriz. Bu taktirde Green fonksiyonunu,

$$G(x,s)=\begin{cases}\varphi(s)x, & 0\le x\le s\\ \psi(s)\,(1-x), & s\le x\le 1\end{cases}$$

şeklinde arayalım. $\varphi(s)$ ve $\psi(s)$ fonksiyonlarını

$$\begin{cases}\psi(s)(1-s)-\varphi(s)s=0\\ -\psi(s)-\varphi(s)=1\end{cases}$$

denklemler sisteminden

$$\varphi(s)=s-1 \text{ ve } \psi(s)=-s$$

olarak elde ederiz. Bulduğumuz bu fonksiyonlar (1.5) ifadesinde yerine konulursa Green fonksiyonunu,

$$G(x,s) = \begin{cases} x(s-1), & 0 \le x \le s \\ s(x-1), & s \le x \le 1 \end{cases}$$

olarak buluruz. Problemin çözümünü ise

$$y(x) = \int_0^1 G(x,\xi) f(\xi) d\xi$$

şeklinde ifade edebiliriz.

Örnek 1.5 Aşağıdaki problemin çözümünü bulunuz

$$x^2 y'' + 2xy' = f(x)$$

$$y(1) = 0, \quad y'(3) = 0.$$

Çözüm. Önce $x^2 y'' + 2xy' = 0$ homojen denklemini gözönüne alalım ve çözümünü, $y = x^k$ cinsinden arayalım. Bilinmeyen k sayısını, $k^2 + k = 0$ karakteristik denkleminin çözümünden $k_1 = 0$ ve $k_2 = -1$ olarak buluruz. Böylelikle homojen denklemin genel çözümü, $y(x) = c_1 + \frac{c_2}{x}$ olur. Genel çözümün yapısını dikkate alarak birinci sınır koşulunu koruyan çözümü $y_1(x) = \frac{1}{x} - 1$, ikinci sınır koşulunu sağlayan çözümü ise $y_2 = 1$ olarak seçelim. Bu durumda Green fonksiyonu,

$$G(x,s) = \begin{cases} \varphi(s)\left(\frac{1}{x} - 1\right), & 1 \le x \le s \\ \psi(s), & s \le x \le 3 \end{cases}$$

şeklinde olmaktadır. Bilinmeyen $\varphi(s)$ ve $\psi(s)$ fonksiyonlarını

$$\begin{cases} \psi(s) - \varphi(s)\left(\frac{1}{s} - 1\right) = 0, \\ \\ -\varphi(s)\left(-\frac{1}{s^2}\right) = \frac{1}{s^2} \end{cases}$$

denklemler sisteminden $\varphi(s)=1$ ve $\psi(s)=\frac{1}{s}-1$ olarak elde ederiz. Bu durum için Green fonksiyonu

$$G(x,s)=\begin{cases}\frac{1}{x}-1, & 1\le x\le s\\ \frac{1}{s}-1, & s\le x\le 3\end{cases}$$

dır. Problemin çözümü ise,

$$y(x)=\int_1^3 G(x,s)f(s)ds$$

olur.

Örnek 1.6 $xy''-y'=f(x)$ probleminin $y'(1)=0$, $y(2)=0$ koşulları dahilinde çözümünü yazınız.

Çözüm. Önce $xy''-y'=0$ homojen denklemini göz önüne alalım. Bu denklemi çözmek için $y'=z$ değişken dönüşümünü yapalım. Bu taktirde ana denklem

$$x\frac{dz}{dx}-z=0$$

olur. Buradan $z=c_1x$ ve $y=c_1x^2+c_2$ olarak elde ederiz. Birinci ve ikinci koşulları sağlayan çözümleri sırasıyla $y_1=1$ ve $y_2=x^2-4$ olarak seçebiliriz. Bu durumda Green fonksiyonunu

$$G(x,s)=\begin{cases}\varphi(s) & 1\le x\le s\\ \psi(s)(x^2-4) & s\le x\le 2\end{cases}$$

şeklinde yazalım. Bilinmeyen $\varphi(s)$ ve $\psi(s)$ fonksiyonlarını

$$\begin{cases}\psi(s)(s^2-4)-\varphi(s)=0\\ \psi(s)2s=\frac{1}{s}\end{cases}$$

cebirsel denklemler sisteminden

$$\psi(s)=\frac{1}{2s^2} \text{ ve } \varphi(s)=\frac{s^2-4}{2s^2}$$

olarak elde edilir. O halde, gözönüne aldığımız problemin Green fonksiyonu

$$G(x,s)=\begin{cases}\dfrac{s^2-4}{2s^2}, & 1\le x\le s\\ \dfrac{x^2-4}{2s^2}, & s\le x\le 2\end{cases}$$

dır ve çözümü ise

$$y(x)=\int_1^2 G(x,\xi)f(\xi)d\xi$$

olur.

Örnek 1.7 Aşağıdaki problemin Green fonksiyonunu ve çözümünü bulunuz

$$x^2y''+2xy'=m(m+1)x^m,\quad m>0$$

$$y(1)=y'(1)\ \text{ve}\ x\to 0\ \text{iken, y sınırlıdır.}$$

Çözüm. Denklemin Green fonksiyonunu bulmak için önce $x^2y''+2xy'=0$ homojen denklemini gözönüne alalım. Denklem Euler denklemi olduğu için çözümü $y=x^k$ şeklinde arayalım. $k^2+k=0$ karakteristik denkleminden $k_1=0$ ve $k_2=1$ olarak buluruz. Bu durumda $y_1=1,\ \ y_2=x^{-1}$ özel çözümler ve $y(x)=c_1+\dfrac{c_2}{x}$ genel çözüm olur. Birinci ve ikinci sınır koşullarını koruyan çözümleri sırasıyla, $y_2(x)=2-\dfrac{1}{x}$ ve $y_1(x)=1$ olarak alabiliriz. Bu taktirde Green fonksiyonunu

$$G(x,s)=\begin{cases}\varphi(s), & 0\le x\le s\\ \psi(s)\left(2-\dfrac{1}{x}\right), & s\le x\le 1\end{cases}$$

şeklinde yazabiliriz. Bilinmeyen $\psi(s)$ ve $\varphi(s)$ fonksiyonları,

$$\begin{cases} \psi(s)\left(2-\frac{1}{s}\right)-\varphi(s)=0 \\ \psi(s)\frac{1}{s^2}=\frac{1}{s^2} \end{cases}$$

denklemler sisteminden $\psi(s)=1$ ve $\varphi(s)=2-\frac{1}{s}$ olarak elde edilir. Son olarak Green fonksiyonu için

$$G(x,s)=\begin{cases} 2-\frac{1}{s}, & 0\le x\le s \\ \\ 2-\frac{1}{x}, & s\le x\le 1 \end{cases}$$

ifadesini buluruz. Problemin çözümü

$$y(x)=\int_0^1 G(x,s)m(m+1)s^m ds$$

$$=m(m+1)\int_0^x\left(2-\frac{1}{x}\right)s^m ds+m(m+1)\int_x^1\left(2-\frac{1}{s}\right)s^m ds$$

$$=m(m+1)\left(2-\frac{1}{x}\right)\int_0^x s^m ds+m(m+1)\int_x^1\left(2-\frac{1}{s}\right)s^m ds$$

$$=m(m+1)\left[\left(2-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{m+1}s^{m+1}\Big|_0^x+\left(\frac{2}{m+1}s^{m+1}-\frac{1}{m}s^m\right)\Big|_x^1\right]$$

$$=x^m+m-1$$

şeklinde olur.

1.3 Özdeğerlerin Bulunması

Önce aşağıdaki problemi göz önüne alalım

$$y''=\lambda y \tag{1.9}$$

$$y(0)=y(\ell)=0,\ \ell>0. \tag{1.10}$$

Burada λ herhangi bir parametre olmaktadır. (1.9), (1.10) probleminin λ parametresinin hangi değerlerinde trivial olmayan çözümün olup olmadığını araştıralım.

1. $\lambda = 0$ olduğunda denklem $y'' = 0$ şekline dönüşür ve (1.9) un genel çözümü $y = c_1 x + c_2$ olur. (1.10) sınır koşullarını dikkate alırsak problemin çözümü için $y \equiv 0$ alırız.

2. $\lambda > 0$ olduğunda problemin genel çözümü $y = c_1 e^{\sqrt{\lambda} x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda} x}$ olur. Sınır koşullarını dikkate alırsak, yine $y \equiv 0$ elde ederiz.

3. $\lambda < 0$ durumunda ise genel çözüm $y = c_1 \sin\sqrt{-\lambda} x + c_2 \cos\sqrt{-\lambda} x$ olur. Sınır koşullarını kullanırsak, $c_2 = 0$ ve $c_1 \sin\sqrt{-\lambda}\,\ell = 0$ buluruz. Son eşitliğin korunması için

$$\sqrt{-\lambda}\,\ell = k\pi, \quad (k = 1, 2, ...)$$

olmak zorundadır. Buradan

$$\lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2$$

elde ederiz. Buradaki λ_k değerlerine özdeğerler denir. λ_k lara karşılık gelen

$$y_k(x) = c_k \sin\frac{k\pi x}{\ell}$$

fonksiyonlarına ise özfonksiyonlar denir.

Şimdi daha genel olarak aşağıdaki problemi ele alalım

$$\ell(y) \equiv y'' + c^2 y = f(x), \qquad (1.11)$$

$$\ell_1(y) \equiv y(a) = y_a, \qquad (1.12)$$

$$\ell_2(y) \equiv y(b) = y_b. \qquad (1.13)$$

Burada $f(x)$ bilinen bir fonksiyon a, b ve c ise sabitler olmaktadır.

(1.11) denkleminin genel çözümünü elde edebilmek için önce (1.11) denklemine karşılık gelen homojen denklemin çözümünü bulalım. Bu amaçla (1.11) denklemine karşılık gelen

$$y'' + c^2 y = 0 \tag{1.14}$$

homojen denkleminin çözümünü $y = e^{kx}$ şeklinde arayalım. (1.14) ün karakteristik denklemi $k^2 + c^2 = 0$ olup, bu denklemin kökleri $k_1 = ci$ ve $k_2 = -ci$ olmaktadır. Bu durumda (1.14) denkleminin fundamental çözümleri $y_1 = \sin cx$ ve $y_2 = \cos cx$ dir ve denklemin genel çözümü

$$y = c_1 \sin cx + c_2 \cos cx \tag{1.15}$$

olarak yazılır.

Şimdi, homojen olmayan (1.11) denkleminin genel çözümünü bulalım. Bunun için sabitin varyasyonu yöntemini uygulayalım. (1.15) den

$$y'(x) = c_1' \sin cx + cc_1 \cos cx + c_2' \cos cx - cc_2 \sin cx$$

alırız. c_1 ve c_2 sabitlerini öyle seçelim ki,

$$c_1' \sin cx + c_2' \cos cx = 0 \tag{1.16}$$

olsun. (1.16) yı dikkate alarak

$$y''(x) = cc_1' \cos cx - c^2 c_1 \sin cx - cc_2' \sin cx - c^2 c_2 \cos cx \tag{1.17}$$

olarak buluruz. (1.17) ifadesi (1.11) de yerine konulursa

$$cc_1' \cos cx - c^2 c_1 \sin cx - cc_2' \sin cx - c^2 c_2 \cos cx + c^2 c_1 \sin cx + c^2 c_2 \cos cx = f(x)$$

elde ederiz. Buradan

$$cc_1' \cos cx - cc_2' \sin cx = f(x) \tag{1.18}$$

buluruz. (1.16) ve (1.18) denklemlerini birlikte çözerek c_1 ve c_2 sabitlerini elde edebiliriz.

$$\begin{cases} c_1' \sin cx + c_2' \cos cx = 0 \\ c_1' \cos cx - c_2' \sin cx = \dfrac{f(x)}{c} \end{cases} \tag{1.19}$$

cebirsel denklemler sisteminin tek bir çözümü olması için katsayılar determinantının

$$\begin{vmatrix} \sin cx & \cos cx \\ \cos cx & -\sin cx \end{vmatrix} = \sin^2 cx + \cos^2 cx = 1 \neq 0$$

olması gerekli ve yeterli koşuldur. Cramer yöntemini kullanarak (1.19) dan

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \cos cx \\ \dfrac{f(x)}{c} & -\sin cx \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin cx & \cos cx \\ \cos cx & -\sin cx \end{vmatrix}} = -\frac{1}{c} f(x) \cos cx \,, \tag{1.20}$$

ve

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \sin cx & 0 \\ \cos cx & \dfrac{f(x)}{c} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin cx & \cos cx \\ \cos cx & -\sin cx \end{vmatrix}} = \frac{1}{c} f(x) \sin cx \tag{1.21}$$

elde ederiz. Şimdi (1.20) ve (1.21) ifadelerini a dan x e kadar integrallersek

$$c_1(x) = c_1(a) - \frac{1}{c}\int_a^x f(\xi)\cos c\xi d\xi \,, \tag{1.22}$$

$$c_2(x) = c_2(a) + \frac{1}{c}\int_a^x f(\xi)\sin c\xi d\xi \tag{1.23}$$

alırız. (1.22) ve (1.23) ifadelerini (1.15) de yerine yazalım

$$y(x) = c_1(a)\sin cx - \frac{1}{c}\int_a^x f(\xi)\cos c\xi \sin cx d\xi + c_2(a)\cos cx + \frac{1}{c}\int_a^x f(\xi)\cos cx \sin c\xi d\xi$$

$$= c_1(a)\sin cx + c_2(a)\cos cx + \frac{1}{c}\int_a^x \left[\cos c\xi \sin cx - \cos cx \sin c\xi\right] f(\xi) d\xi \,. \tag{1.24}$$

Bu kez (1.20) ve (1.21) ifadelerini b den x e kadar integrallersek

$$y(x) = c_1(b)\sin cx - \frac{1}{c}\int_b^x f(\xi)\cos c\xi \sin cx d\xi + c_2(b)\cos cx + \frac{1}{c}\int_b^x f(\xi)\cos cx \sin c\xi d\xi$$

$$= c_1(b)\sin cx + c_2(b)\cos cx - \frac{1}{c}\int_b^x [\cos c\xi \sin cx - \cos cx \sin c\xi] f(\xi)d\xi \qquad (1.25)$$

buluruz. (1.24) ve (1.25) i toplayıp ikiye bölersek

$$y(x) = c_1 \sin cx + c_2 \cos cx + \frac{1}{2c}\int_a^x [\cos c\xi \sin cx - \cos cx \sin c\xi] f(\xi)d\xi$$

$$-\frac{1}{2c}\int_b^x [\cos c\xi \sin cx - \cos cx \sin c\xi] f(\xi)d\xi \qquad (1.26)$$

elde ederiz. Burada

$$c_1 = \frac{c_1(a) + c_1(b)}{2}, \qquad c_2 = \frac{c_2(a) + c_2(b)}{2}$$

dir. (1.26) ifadesini

$$y(x) = c_1 \sin cx + c_2 \cos cx + \int_a^b g(x,\xi) f(\xi)d\xi \qquad (1.27)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada

$$g(x,\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2c}[\sin cx \cos c\xi - \sin c\xi \cos cx], & \xi \le x \\ -\frac{1}{2c}[\sin cx \cos c\xi - \sin c\xi \cos cx], & x \le \xi \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2c}\sin c(x-\xi), & \xi \le x \\ -\frac{1}{2c}\sin c(x-\xi), & x \le \xi \end{cases} \qquad (1.28)$$

olmaktadır. (1.27) ifadesindeki c_1 ve c_2 sabitlerini sınır koşullarından elde edebiliriz

$$y(a) = y_a = c_1 \sin ca + c_2 \cos ca + \int_a^b g(a,\xi) f(\xi)d\xi,$$

$$y(b) = y_b = c_1 \sin cb + c_2 \cos cb + \int_a^b g(b,\xi) f(\xi) d\xi.$$

Son ifadedeki c_1 ve c_2 bilinmeyenler olarak kabul edilirse, elde edilen sistem homojen olmayan lineer cebirsel denklemler sistemi oluşturur. Sistemin çözümünün olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin ca & \cos ca \\ \sin cb & \cos cb \end{vmatrix} = \sin c(a-b)$$

determinantının sıfırdan farklı olmasıdır. $a \neq b$ olduğundan $\Delta \neq 0$ olmaktadır. O halde Cramer kuralına göre

$$c_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} y_a - \int_a^b g(a,\xi) f(\xi) d\xi & \cos ca \\ y_b - \int_a^b g(b,\xi) f(\xi) d\xi & \cos cb \end{vmatrix}, \tag{1.29}$$

$$c_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \sin ca & y_a - \int_a^b g(a,\xi) f(\xi) d\xi \\ \sin cb & y_b - \int_a^b g(b,\xi) f(\xi) d\xi \end{vmatrix} \tag{1.30}$$

olur. (1.29) ve (1.30) ifadelerini (1.27) de yerine yazarsak

$$y(x) = \frac{\sin cx}{\Delta} \begin{vmatrix} y_a - \int_a^b g(a,\xi) f(\xi) d\xi & \cos ca \\ y_b - \int_a^b g(b,\xi) f(\xi) d\xi & \cos cb \end{vmatrix}$$

$$+ \frac{\cos cx}{\Delta} \begin{vmatrix} \sin ca & y_a - \int_a^b g(a,\xi) f(\xi) d\xi \\ \sin cb & y_b - \int_a^b g(b,\xi) f(\xi) d\xi \end{vmatrix} + \int_a^b g(x,\xi) f(\xi) d\xi$$

$$y(x)=\frac{\sin cx}{\Delta}\begin{vmatrix} y_a & \cos ca \\ y_b & \cos cb \end{vmatrix}+\frac{\cos cx}{\Delta}\begin{vmatrix} \sin ca & y_a \\ \sin cb & y_b \end{vmatrix}$$

$$+\frac{\sin cx}{\Delta}\begin{vmatrix} -\int_a^b g(a,\xi)f(\xi)d\xi & \cos ca \\ -\int_a^b g(b,\xi)f(\xi)d\xi & \cos cb \end{vmatrix}+\frac{\cos cx}{\Delta}\begin{vmatrix} \sin ca & -\int_a^b g(a,\xi)f(\xi)d\xi \\ \sin cb & -\int_a^b g(b,\xi)f(\xi)d\xi \end{vmatrix}$$

$$+\int_a^b g(x,\xi)f(\xi)d\xi$$

$$=\int_a^b \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} g(x,\xi) & \sin cx & \cos cx \\ g(a,\xi) & \sin ca & \cos ca \\ g(b,\xi) & \sin cb & \cos cb \end{vmatrix} f(\xi)d\xi+\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & \sin cx & \cos cx \\ y_a & \sin ca & \cos ca \\ y_b & \sin cb & \cos cb \end{vmatrix}.$$

Aşağıdaki notasyonları içerirsek

$$\Delta(x,\xi)=\begin{vmatrix} g(x,\xi) & \sin cx & \cos cx \\ g(a,\xi) & \sin ca & \cos ca \\ g(b,\xi) & \sin cb & \cos cb \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1(x)=\begin{vmatrix} 0 & \sin cx & \cos cx \\ y_a & \sin ca & \cos ca \\ y_b & \sin cb & \cos cb \end{vmatrix},$$

$$G(x,\xi)=\frac{\Delta(x,\xi)}{\Delta}$$

bu notasyonlar dahilinde problemin çözümünü

$$y(x)=\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi+\frac{\Delta_1(x)}{\Delta} \tag{1.31}$$

şeklinde elde ederiz. Buradaki $G(x,\xi)$ fonksiyonuna (1.11)-(1.13) probleminin Green fonksiyonu denir. $g(x,\xi)$ fonksiyonu ise Green fonksiyonunun baş kısmı olarak adlandırılır. (1.31) ifadesini (1.12) ve (1.13) sınır koşullarındaki operatörleri kullanarak

$$G(x,\xi)=\begin{vmatrix} g(x,\xi) & y_1(x) & y_2(x) \\ \ell_1\left(g(x,\xi)\right) & \ell_1\left(y_1(x)\right) & \ell_1\left(y_2(x)\right) \\ \ell_2\left(g(x,\xi)\right) & \ell_2\left(y_1(x)\right) & \ell_2\left(y_2(x)\right) \end{vmatrix}, \tag{1.32}$$

$$\Delta(x)=\begin{vmatrix} 0 & y_1(x) & y_2(x) \\ y_a & \ell_1\left(y_1(x)\right) & \ell_1\left(y_2(x)\right) \\ y_b & \ell_2\left(y_1(x)\right) & \ell_2\left(y_2(x)\right) \end{vmatrix} \tag{1.33}$$

şeklinde yazabiliriz.

Örnek 1.8 Aşağıdaki probleminin çözümünü bulunuz

$$y''-y=2x, \tag{1.34}$$

$$y(0)=0, \quad y(1)=-1. \tag{1.35}$$

Çözüm. Önce $y''-y=0$ homojen denkleminin genel çözümünü bulalım. Özel çözümler $y_1=e^x, \quad y_2=e^{-x}$ olmak üzere genel çözümü

$$y(x)=c_1e^x+c_2e^{-x} \tag{1.36}$$

olmaktadır. (1.36) nın türevinden elde edilen

$$y'=c_1'e^x+c_1e^x+c_2'e^{-x}-c_2e^{-x}$$

ifadesindeki c_1 ve c_2 fonksiyonlarını öyle seçelim ki,

$$c_1'e^x+c_2'e^{-x}=0 \tag{1.37}$$

olsun. Bu durumda $y'=c_1e^x-c_2e^{-x}$ olur ve tekrar türevlenmesiyle

$$y''=c_1'e^x+c_1e^x-c_2'e^{-x}+c_2e^{-x} \tag{1.38}$$

alırız. (1.36) ve (1.38) ifadelerini (1.34) denkleminde yerine koyarsak

$$c_1'e^x+c_1e^x-c_2'e^{-x}+c_2e^{-x}-c_1e^x-c_2e^{-x}=2x$$

veya

$$c_1'e^x - c_2'e^{-x} = 2x \tag{1.39}$$

elde ederiz. (1.37) ve (1.39) denklemlerinden c_1 ve c_2 yi bulabilmek için

$$\begin{cases} c_1'e^x + c_2'e^{-x} = 0 \\ c_1'e^x - c_2'e^{-x} = 2x \end{cases}$$

denklem sisteminden öncelikle c_1' ve c_2' yi sırasıyla

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \\ 2x & -e^{-x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix}} = \frac{-2xe^{-x}}{-2} = xe^{-x}, \tag{1.40}$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e & -e^{-x} \end{vmatrix}} = \frac{2xe^x}{-2} = -xe^x \tag{1.41}$$

şeklinde hesaplarız. (1.140) ve (1.141) den

$$c_1(x) = \int xe^{-x}dx + c_1 = c_1 - xe^{-x} - e^{-x},$$

$$c_2(x) = -\int xe^x dx + c_2 = c_2 - xe^x + e^x$$

bulunur. Bu ifadeler (1.36) da yerine konulursa,

$$y(x) = e^x\left[c_1 - xe^x - e^{-x}\right] + e^{-x}\left[c_2 - xe^x + e^x\right]$$

$$= c_1e^x + c_2e^{-x} - 2x \tag{1.42}$$

elde edilir. (1.42) ifadesindeki c_1 ve c_2 sabitlerini sınır koşullarından bulalım.

$$\begin{cases} 0 = c_1 + c_2 \\ 1 = c_1e^1 + c_2e^{-1} \end{cases} \tag{1.43}$$

denklem sisteminden Cramer metoduna göre

$$c_1=\frac{\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & e^{-1}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ e & e^{-1}\end{vmatrix}}=\frac{-1}{e^{-1}-e}$$

$$c_2=\frac{\begin{vmatrix}1 & 0\\ e & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ e & e^{-1}\end{vmatrix}}=\frac{1}{e^{-1}-e}$$

elde edilir. Bulunan ifadeler (1.42) ifadesinde yerine konulursa problemin çözümü

$$y(x)=e^{x}\,\frac{-1}{e^{-1}-e}+e^{-x}\,\frac{1}{e^{-1}-e}-2x=\frac{1}{e^{-1}-e}\left(e^{-x}-e^{x}\right)-2x$$

$$=\frac{1}{-2\left(\dfrac{e-e^{-1}}{2}\right)}\left[-2\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)\right]-2x$$

veya

$$y(x)=\frac{1}{sh1}shx-2x \tag{1.44}$$

şeklinde ifade edilir.

Şimdi aynı problemi Green fonksiyonu yardımıyla çözelim. Bunun için yine homojen denklemin

$$y(x)=c_1e^{x}+c_2e^{-x}$$

(1.36) çözümünü yazalım ve sabitin varyasyonu yöntemini uygulayarak homojen olmayan denklemin çözümünü bulalım.

(1.40) ve (1.41) ifadelerini 0 dan x e kadar integralleyelim.

$$c_1(x)=c_1(0)+\int_0^x xe^{-x}dx=c_1(0)+\left[-xe^{-x}-e^{-x}\right]\Big|_0^x=c_1(0)-xe^{-x}-e^{-x}+1$$

$$c_2(x)=c_2(0)-\int_0^x xe^{x}dx=c_2(0)-\left[\left(xe^{x}-e^{x}\right)\right]\Big|_0^x=c_2(0)-xe^{x}+e^{x}-1$$

Bu ifadeleri (1.36) da yerine yazarsak

$$y(x) = e^{x}\left[c_1(0) - xe^{x} - e^{-x} + 1\right] + e^{-x}\left[c_2(0) - xe^{x} + e^{x} - 1\right]$$

$$= c_1(0)e^{x} + c_2(0)e^{-x} - 2x + e^{x} - e^{-x} \tag{1.45}$$

elde edilir. Bu kez (1.40) ve (1.41) ifadelerini 1 den x e kadar integralleyelim. Buradan

$$c_1(x) = c_1(1) + \int_1^x xe^{-x}dx = c_1(1) + \left[-xe^{-x} - e^{-x}\right]\Big|_1^x = c_1(1) - xe^{-x} - e^{-x} + 2e^{-1}$$

$$c_2(x) = c_2(1) - \int_1^x xe^{x}dx = c_2(1) - \left[\left(xe^{x} - e^{x}\right)\right]\Big|_1^x = c_2(1) - xe^{x} + e^{x}$$

Yine bu ifadeler (1.36) da yerine konulursa

$$y(x) = e^{x}\left[c_1(1) - xe^{-x} - e^{-x}\right] + e^{-x}\left[c_2(1) - xe^{x} + e^{x}\right]$$

$$= c_1(1)e^{x} + c_2(1)e^{-x} - 2x + 2e^{x-1} \tag{1.46}$$

bulunur. (1.45) ve (1.46) ifadelerini toplayıp ikiye bölersek,

$$y(x) = c_1e^{x} + c_2e^{-x} + \frac{1}{2}\left[-2x - 2x\right] + \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} + \frac{2e^{x-1}}{2} = c_1e^{x} + c_2e^{-x} + \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} + e^{x-1} - 2x$$

elde edilir.

Şimdi $G(x,\xi)$ ve $\Delta_1(x)$ determinantlarını hesaplayalım.

$$G(x,\xi) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} g(x,\xi) & e^{x} & e^{-x} \\ g(0,\xi) & 1 & 1 \\ g(1,\xi) & e & e^{-1} \end{vmatrix} \tag{1.47}$$

Burada

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e & e^{-1} \end{vmatrix} = e^{-1} - e, \tag{1.48}$$

$$g(x,\xi)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[e^{x}e^{-\xi}-e^{\xi}e^{-x}\right], & \xi\le x\\ -\frac{1}{2}\left[e^{x}e^{-\xi}-e^{\xi}e^{-x}\right], & x\le \xi\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[e^{x-\xi}-e^{-(x-\xi)}\right], & \xi\le x\\ -\frac{1}{2}\left[e^{x-\xi}-e^{-(x-\xi)}\right], & x\le \xi\end{cases}$$

$$=\begin{cases}sh(x-\xi)\,, & \xi\le x\\ -sh(x-\xi)\,, & x\le \xi\end{cases} \tag{1.49}$$

dır. (1.48) ve (1.49) değerleri (1.47) de yerine konulursa

$$G(x,\xi)=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} g(x,\xi) & e^{x} & e^{-x}\\ -sh(-\xi) & 1 & 1\\ sh(1-\xi) & e & e^{-1}\end{vmatrix}$$

$$=g(x,\xi)-\frac{e^{x}}{\Delta}\begin{vmatrix}-sh(-\xi) & 1\\ sh(1-\xi) & e^{-1}\end{vmatrix}+\frac{e^{-x}}{\Delta}\begin{vmatrix}-sh(-\xi) & 1\\ sh(1-\xi) & e\end{vmatrix}$$

$$=g(x,\xi)-\frac{e^{x}}{\Delta}\left[-e^{-1}sh(-\xi)-sh(1-\xi)\right]+\frac{e^{-x}}{\Delta}\left[-e\,sh(-\xi)-sh(1-\xi)\right]$$

elde edilir. O halde

$$y(x)=\int_0^1 G(x,\xi)\,2\xi\,d\xi$$

$$y(x)=\int_0^1 g(x,\xi)\,2\xi\,d\xi-\frac{e^{x}}{\Delta}\int_0^1\left[-e^{-1}sh(-\xi)-sh(1-\xi)\right]2\xi d\xi+\frac{e^{-x}}{\Delta}\int_0^1\left[-esh(-\xi)-sh(1-\xi)\right]2\xi d\xi$$

$$y(x)=\int_0^x 2\xi sh(x-\xi)d\xi+\int_x^1 -2\xi sh(x-\xi)d\xi-\frac{e^{x}}{\Delta}\int_0^1\left[-e^{-1}sh(-\xi)-sh(1-\xi)\right]2\xi d\xi$$

$$+\frac{e^{-x}}{\Delta}\int_0^1\left[-esh(-\xi)-sh(1-\xi)\right]2\xi d\xi=-4x+2\sinh x+2\cosh(x-1)+2\sinh(x-1)$$

$$-\frac{e^{x}}{\Delta}\left[2e^{-1}\cosh(1)-2e^{-1}\sinh(1)+2-2\sinh(1)\right]+\frac{e^{-x}}{\Delta}\left[2e\cosh(1)-2e\ \sinh(1)+2-2\sinh(1)\right]$$

$$=\frac{1}{sh1}shx-2x$$

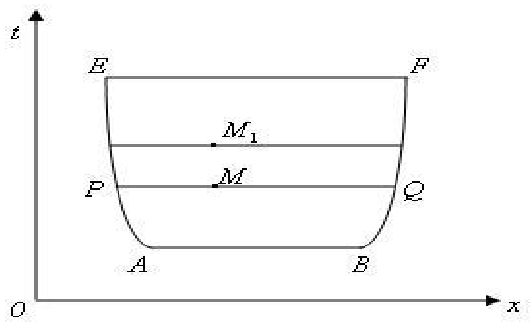
elde edilir. Bu ise daha önce elde ettiğimiz (1.44) sonucu ile aynı olmaktadır.

2. SERBEST SINIRLI BÖLGEDE LİNEER ISI DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

2.1 Isı Denklemi İçin Green Formülü ve Kaynak Fonksiyonu

Bu kısımda, ısı denklemi için serbest sınırlı bölgede sınır değer problemini ele alacağız. Bölgenin sınırlarını zamana göre değişen fonksiyonlar olarak varsayacağız. Kolaylık için, yer değişkenleri sayısı bir olan aşağıdaki denklem göz önüne alalım

$$\Im(u) = a^2 u_{xx} - u_t = 0 \tag{2.1}$$



Şekil 2.1

Şekil 2.1 de gösterildiği gibi *AB* ve *EF* karakteristikleri ile $x = \chi_1(t)$, (*AE* nin denklemi) ve $x = \chi_2(t)$, (*BF* nin denklemi) eğrileriyle sınırlanan *BAEF* bölgesini göz önüne alalım. Söz konusu bölgede lineer ısı denklemi için birinci sınır değer problemi

$$\left.\begin{array}{c} u = \varphi(x), \quad (AB \text{ de}) \\ u\big|_{x=\chi_1(t)} = \mu_1(t), \ u\big|_{x=\chi_2(t)} = \mu_2(t) \end{array}\right\} \tag{2.2}$$

şeklinde yazılır. Maksimum prensibine göre (2.1), (2.2) probleminin tek bir çözümü vardır. Şimdi, (2.1) denklemi için Green formülünü ve çözümün integral gösterimini ifade edelim.

$$M(v) = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial t} \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanmış bir operatör olsun.

$$\psi\,\Im(\varphi)-\varphi M(\psi)=a^2\left(\psi\varphi_x-\varphi\psi_x\right)_x-\left(\varphi\psi\right)_t$$

denklemini Şekil 1 de gösterilen *PABQ* bölgesi üzerinden integralleyelim. Burada φ ve ψ keyfi mertebeden diferansiyellenebilen fonksiyonlardır. Green formülünü kullanırsak,

$$\iint\left[\psi\,\Im(\varphi)-\varphi M(\psi)\right]dxdt=\oint\left[\varphi\psi\,dx+a^2\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dt\right]$$

elde ederiz. Bu ifadenin sağ tarafındaki integral kapalı *PABQ* çevresi üzerinden gerçekleşmektedir. Eğer $\Im(\varphi)=0$ ve $M(\psi)=0$ olsaydı, sağ taraftaki integrali açık şekilde

$$\int_{PQ}\varphi\psi\,dx=\int_{AB}\varphi\psi\,dx+\int_{BQ}\left[\varphi\psi\,dx+a^2\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dt\right]-$$

$$-\int_{AP}\left[\varphi\psi\,dx+a^2\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dt\right] \qquad (2.4)$$

olarak yazabilirdik.

$u(x,t)$, $\Im(u)=0$ ısı denkleminin herhangi bir çözümü olmak üzere $\varphi(x,t)=u(x,t)$ ve $G_0(x,t,\xi,\tau)$, ısı denkleminin

$$G_0(x,t,\xi,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \qquad (2.5)$$

şeklinde verilmiş kaynak fonksiyonu olmak üzere $\psi=G_0(x,t,\xi,\tau)$ olsun. Burada $G_0(x,t,\xi,\tau)$ lineer ısı denkleminin fundamental çözümü olmaktadır ve x, t değişkenlerine göre $\Im(G_0)=0$ denklemini; ξ, τ değişkenlerine göre ise adjoint olan $M(G_0)=0$ denklemini korumaktadır.

$M(x,t)$, $u(x,t)$ fonksiyonunun bulunması istenilen *BAEF* bölgesinin herhangi bir iç noktası olsun. $h>0$ olmak üzere $(x,\ t+h)$ ile M_1 noktasını gösterelim. *PQ* karakteristiğinin *M* noktasından geçtiğini varsayalım. (2.4) formülünde x i ξ ye, t yi τ ya dönüştürerek bu eşitliği *ABQP* bölgesi ve

$$\varphi = u(\xi,\tau), \qquad \psi(\xi,\tau) = G_0(x,t+h,\xi,\tau) \tag{2.6}$$

fonksiyonları için uygularsak

$$\int_{PQ} \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 h}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 h}} u(\xi,t)\,d\xi =$$

$$= \int_{PABQ} u(\xi,\tau) G_0(x,t+h,\xi,\tau)\,d\xi + a^2\left(G_0\frac{\partial u}{\partial \xi} - u\frac{\partial G_0}{\partial \xi}\right)d\tau \tag{2.7}$$

elde ederiz. $G_0(x,t+h,\xi,\tau)$ ve $\frac{\partial G_0}{\partial \xi}$ fonksiyonlarının *PABQ* bölgesinde h göre sürekli olduğunu ve

$$\lim_{h\to 0}\int_{PQ} \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 h}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 h}} u(\xi,t)\,d\xi = u(x,t) \tag{2.8}$$

ifadesini dikkate alarak $h \to 0$ iken limite geçelim. Eğer (x,t) PQ doğrusu üzerinde ise ısı denkleminin çözümünün

$$u(x,t) = \int_{PABQ} u(\xi,\tau) G_0(x,t,\xi,\tau)\,d\xi + \int_{BQ+PA} a^2\left(G_0\frac{\partial u}{\partial \xi} - u\frac{\partial G_0}{\partial \xi}\right)d\tau \tag{2.9}$$

şeklinde integral gösterimini elde ederiz. (2.9) formülünü daha açık şekilde yazarsak

$$u(x,t) = \int_{PABQ} \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 (t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} u(\xi,\tau)\,d\xi + a^2 \int_{BQ+PA} \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 (t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \frac{\partial u}{\partial \xi}\,d\tau -$$

$$-a^2 \int_{BQ+PA} u(\xi,\tau)\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 (t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right)d\tau \tag{2.9′}$$

ifadesini elde ederiz. Fakat bu formül sınır değer probleminin çözümünü vermemektedir. Çünkü (2.9′) nün sağ tarafını hesaplarken yalnız u fonksiyonunun *AE* ve *BF* yayları üzerindeki değerinin değil bunun yanı sıra $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ nin de bilinmesi gerekir.

Laplace denklemi için kaynak fonksiyonunu elde ederken uygulanan yönteme benzer dönüşümler yaparak $\dfrac{\partial u}{\partial \xi}$ türevini aradan çıkartmak mümkündür. v, $M(v)=0$ denkleminin PQ üzerinde sıfıra eşit olan çözümü, u ise $\Im(u)=0$ denkleminin çözümü olsun. (2.4) formülünü u ve v fonksiyonları için $PABQ$ bölgesinde uygularsak

$$0=\int_{PABQ}\left[u(\xi,\tau)v(\xi,\tau)\,d\xi+a^2\left(v\frac{\partial u}{\partial \xi}-u\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)d\tau\right] \tag{2.10}$$

denklemini alırız. (2.9) dan (2.10) u çıkarırsak

$$u(x,t)=\int_{PABQ}\left[u(\xi,\tau)G(x,t,\xi,\tau)\,d\xi+a^2\left(G\frac{\partial u}{\partial \xi}-u\frac{\partial G}{\partial \xi}\right)d\tau\right] \tag{2.11}$$

denklemini elde ederiz. Burada

$$G(x,t,\xi,\tau)=G_0(x,t,\xi,\tau)-v \tag{2.12}$$

dir.

v fonksiyonunu öyle seçelim ki, PA ve BQ üzerinde $G=0$ olsun. Bu taktirde, $u(x,t)$ çözümünün integral gösterimi

$$u(x,t)=\int_{AB}u(\xi,\tau)G(x,t,\xi,\tau)\,d\xi+a^2\int_{AP}u\frac{\partial G}{\partial \xi}d\tau-a^2\int_{BQ}u\frac{\partial G}{\partial \xi}d\tau \tag{2.13}$$

şeklinde yazılır. Eğer u fonksiyonu AP, BQ ve AB eğrileri üzerinde verilirse, (2.13) ile ifade edilen $u(x,t)$ fonksiyonu (2.1), (2.2) probleminin çözümü olur.

Şimdi, G fonksiyonunu detaylı olarak inceleyelim. Bu fonksiyon (2.12) yardımıyla tanımlanır. Buradaki $v(\xi,\tau)$ fonksiyonu aşağıdaki özelliklere tabi olmaktadır:

1. $v(\xi,\tau)$ fonksiyonu $PABQ$ bölgesinde tanımlı ve $\tau<t$ için $M(v)=0$ adjoint denklemini korumaktadır.
2. Eğer $\tau=t$ ise PQ doğrusu üzerinde $v=0$ olur.
3. PA ve QB üzerinde $v(\xi,\tau)=-G_0(x,t,\xi,\tau)$ olur.

Bu koşullar çerçevesinde $v=v(x,t,\xi,\tau)$ fonksiyonu x, t değişkenlerine de bağlıdır ve söz konusu fonksiyonu bulmak için $M(v)=0$ sınır değer probleminin çözülmesi gerekir; aynı zamanda bu (2.2) cinsinden sınır değer probleminin çözümüne de denk olmaktadır. Böylelikle, $u(x,t)$ fonksiyonunun (2.11) şeklindeki ifadesi (2.2) sınır değer probleminin çözümünü vermektedir. Burada esas sorun $v(x,t,\xi,\tau)$ fonksiyonunun bulunmasıdır.

Aşağıdaki koşulları koruyan $\overline{v}(x,t,\xi,\tau)$ fonksiyonunu göz önüne alalım.

1. $\overline{v}(x,t,\xi,\tau)$, $PABQ$ bölgesinde $\tau > t$ olduğu taktirde tanımlıdır. Ayrıca $\Im(v) = 0$ ısı denklemini korumaktadır.

2. $\tau = t$ da yani AB doğrusu üzerinde $\overline{v} = 0$ olmaktadır.

3. PA ve QB doğruları üzerinde $\overline{v} = -G_0$ olmaktadır.

Şimdi, $v(x,t,\xi,\tau) = \overline{v}(x,t,\xi,\tau)$ olduğunu ispatlayalım. Bunun için, $\overline{G}(x,t,\xi,\tau) = G_0 + \overline{v}$ olduğunu varsayalım. Açıktır ki, $M(u) = 0$ denkleminin herhangi bir $\overline{u}$ çözümü için (2.9) formülü, yani

$$\overline{u}(\xi,\tau) = \int_{BQPA} \overline{u} G_0 \, dx + a^2 \left(\overline{u} \frac{\partial G_0}{\partial x} - G_0 \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} \right) dt \tag{2.9$''$}$$

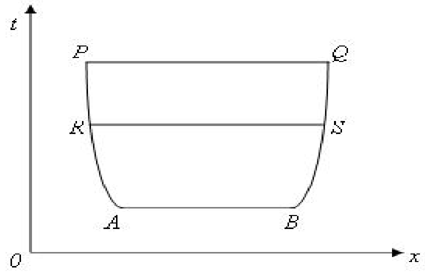
ve (2.13) e benzeyen

$$\overline{u}(\xi,\tau) = \int_{PQ} \overline{u}\overline{G} \, dx + a^2 \int_{BQ} \overline{u} \frac{\partial \overline{G}}{\partial x} dt - a^2 \int_{AP} \overline{u} \frac{\partial \overline{G}_0}{\partial x} dt \tag{2.13$'$}$$

formülleri geçerlidir. (2.9´´) ve (2.13´) formülleri (2.9) ve (2.13) ifadelerinden τ nun işareti değiştirilerek elde edilebilir. Çünkü, bu taktirde $M = 0$ denklemi $\Im = 0$ denklemine dönüşür. (2.13) formülünü $t > \theta > \tau$ koşulunu koruyan θ koordinatına karşılık gelen *RS* olmak üzere *PQRS* bölgesi ve söz konusu bölgede $\Im(u) = 0$ ın çözümü olan sürekli $u(x,t) = \overline{G}(x,t,\xi,\tau)$ fonksiyonu için uygularsak

$$\overline{G}(x,t,\xi,\tau) = \int_{RS} \overline{G}(x',\theta,\xi,\tau) G(x,t,x',\theta) \, dx'$$

elde ederiz. Çünkü, *RP* ve *SQ* üzerinden integraller sıfıra eşit olmaktadır.



Şekil 2.2

(2.13′) formülünü $ARSB$ bölgesi ve $M(u)=0$ denkleminin $u(\xi,\tau)=G(x,t,\xi,\tau)$ sürekli çözümü için uygularsak, burada da BS ve AR üzerinden integraller sıfıra eşit olduğundan

$$G(x,t,\xi,\eta)=\int_{RS} G(x,t,x',\theta)\,\overline{G}(x',\theta,\xi,\tau)\;dx'$$

elde ederiz. Elde ettiğimiz iki formülü kıyasladığımızda

$$G(x,t,\xi,\tau)\equiv\overline{G}(x,t,\xi,\tau)$$

olduğunu görmüş oluruz. Bu eşitlikten, G nin x, t nin fonksiyonu olmak üzere $t=\tau$ ve $x=\xi$ noktalarında kaynak fonksiyonuna has olan özelliklere sahip olduğu görülür; $t=\tau$ ve $x\neq\xi$ de sıfıra çevrilir. Bunun yanı sıra, $\Im_{x,t}(G)=0$ denklemini $APQB$ bölgesinde korur ve AP ve BQ üzerinde sıfıra eşit olur. Doğal olarak bu tür fonksiyonları $APQB$ bölgesinde ısı denklemi için kaynak fonksiyonu olarak adlandırmak gerekir. Böylelikle, ısı denkleminin herhangi bir çözümünü (2.13) kaynak fonksiyonu yardımıyla ifade etmek mümkündür. Eğer $\Im(u)=f(x,t)$ homojen olmayan denklemi verilirse, (2.13) formülünde sağ tarafa

$$\iint_S G(x,t,\xi,\tau)\,f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau$$

integralini eklemek gerekir.

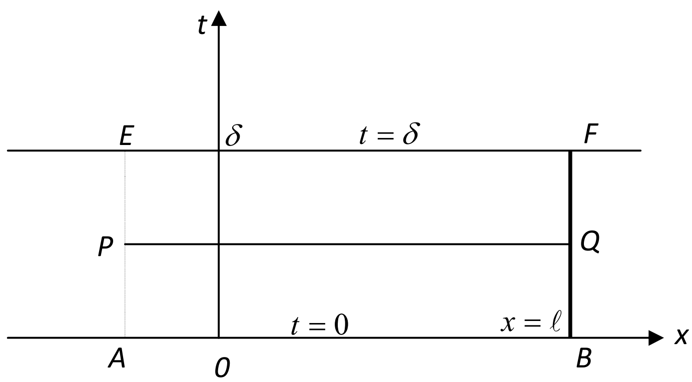
2.2 Sınır Değer Probleminin Çözümü

Yukarıda elde ettiğimiz (2.13) formülü serbest sınıra sahip bölgede ısı denkleminin çözümünü ifade etmektedir. Eğer *AB* parçasının uç noktaları sabit ise yani hareket etmediği taktirde *AE* ve *BF* yayları *ot*-eksenine paralel doğrulara dönüşür. Bu durumda *S* bölgesi kenarları koordinat eksenlerine paralel olan dikdörtgen bölgeye dönüşür. Genel şekilde yazılmış (2.11) formülünden limit alma yoluyla bilinen ısı denklemi için yazılmış birinci başlangıç-sınır değer probleminin çözümü için Poisson formülünü elde edebiliriz.

Şekil 2.3 deki *A* ve *E* noktalarından geçen $t=0$ ve $t=\delta$ karakteristikleri ile sınırlanan şeritte *u* ve u_x in aşağıdaki

$$|u(x,t)|e^{-Kx^2} < N \quad \text{ve} \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| e^{-Kx^2} < N \tag{2.14}$$

eşitlikleri koruduğunu varsayalım. Burada $K>0$ ve $N>0$ keyfi sabitlerdir.



Şekil 2.3

BQ yayının yerine $x=\ell$ doğrusunu dikkate alalım. Burada ℓ pozitif bir sayıdır ve ileride bu sayıyı sonsuz büyüteceğiz, yani sonsuzluğa yaklaştıracağız. Bu durumda aşağıdaki formülü

$$u(x,t) = \int_{PABQ} \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \left[u(\xi,\tau)d\xi + a^2 \frac{\partial u}{\partial \xi} d\tau - u(\xi,\tau)\frac{x-\xi}{2(t-\tau)} d\tau \right].$$

kullanacağız. Şimdi de, *BQ* üzerinden integrali göz önüne alalım

$$\int_{BQ} \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 (t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \left[a^2 \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \Bigg|_{\xi=\ell} - u(\ell,\tau) \frac{x-\ell}{2(t-\tau)} \right] d\tau =$$

$$= \int_0^t a^2 \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \Bigg|_{\xi=\ell} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi a^2 (t-\tau)}} d\tau - \int_0^t u(\ell,\tau) \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} (x-\ell) d\tau}{4\sqrt{\pi a^2 (t-\tau)}(t-\tau)} = I_1 + I_2$$

ve $\ell \to \infty$ iken bu integralin sıfıra yaklaştığını gösterelim. Önce ℓ nin büyük değerlerinde I_1 i değerlendirelim. Eğer $x < \frac{1}{2}$ ve $(t-\tau) < \delta$ koşulu korunursa

$$|I_1| \le \frac{Na^2}{2\sqrt{\pi a^2}} e^{K\ell^2 - \frac{\ell^2}{16a^2\delta}} \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{t-\tau}}$$

Buradan $\ell \to \infty$ iken $|I_1| \to 0$ görülür. Çünkü, N sabittir ve δ ise $K < \frac{1}{16a^2\delta}$ eşitsizliğini koruyacak şekilde seçilebilir. Benzer yolla, $\ell \to \infty$ iken $|I_2| \to 0$ olduğu kanıtlanabilir.

Eğer $u(x,t)$ ve onun $\frac{\partial u}{\partial x}$ türevi için (2.14) koşulu negatif x ler için de korunduğu taktirde AE eğrisi olarak $x = -\ell$ doğrusunu alabiliriz. Benzer yolla gösterilebilir ki (9) formülündeki PA üzere olan integral de sıfıra yaklaşmaktadır. Sonuç olarak literatürde Poisson formülü olarak bilinen

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}}{\sqrt{t}} u(\xi,0) d\xi$$

formülünü elde ederiz. Yarı sonsuz bölgeyi göze alarak ve $G(x,t,\xi,\tau)$ Green fonksiyonu için de (2.14) koşulunun korunduğunu varsayarsak

$$u(x,t) = -\int_{PA} a^2 \mu(\tau) \frac{\partial G}{\partial \xi} \Bigg|_{\xi = x_A} d\tau + \int_{x_A}^{\infty} \varphi(\xi) G(x,t,\xi,0) d\xi \tag{2.15}$$

lde edilir. Burada

$$\mu(t) = u(x_A, t) \qquad \varphi(x) = u(x,0)$$

dir. Gerçekten de yarı sonsuz $x \ge 0$ doğrusu üzerinde kaynak fonksiyonunu yansıtma metoduyla

$$G(x,t,\xi,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2(t-\tau)}}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]$$

şeklinde elde edebiliriz öyle ki (2.12) şeklinde ifade edilmiş kaynak fonksiyonu x, t değişkenlerine göre ısı denklemini sağlar ve $x=0$ olduğunda ise

$$G(0,t,\xi,\tau)=0$$

olur. Aşağıdaki türevi hesaplayalım

$$\left.\frac{\partial G}{\partial \xi}\right|_{\xi=0}=\frac{x}{2\sqrt{\pi}\left[a^2(t-\tau)\right]^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}$$

ve elde edilen bu ifadeyi (2.15) de yerine yazarsak

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{a^2t}}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right]\varphi(\xi)\,d\xi+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{t}\frac{a^2x}{\left[a^2(t-\tau)\right]^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}\mu(\tau)\,d\tau$$

formülünü elde ederiz. Elde ettiğimiz $u(x,t)$ fonksiyonu

$$u_t=a^2u_{xx}\qquad(0<x<\infty,\ t>0)$$

ve

$$u(x,0)=\varphi(x)\qquad(0<x<\infty)$$

$$u(0,t)=\mu(t)$$

başlangıç-sınır koşullarını korumaktadır.

3. NONLİNEER ISI DENKLEMİ İÇİN STEFAN PROBLEMİ

Hidrodinamik, jeofizik, ısı teknolojileri vs. gibi bilim dallarında pratik problemlerin bir çoğu aynı zamanda "düz" ve "ters" olmak üzere iki tür problem doğurmaktadır. Matematiksel fiziğin nonlineer denklemleriyle izah edilen yeni tür problemlerden biri de hareket eden sınır problemidir. Bu tür problemlere "serbest" sınır problemi de denir. Bu durumda bölgenin hareket eden sınırı veya sınırın bir kısmı, problemin çözümü ile birlikte bulunmak zorundadır. Varyasyon yaklaşım uygulanabilen problemlerde, zayıf anlamda çözümün varlığı kolayca ispatlanabilir. Serbest sınır problemlerinin yaklaşık çözümünün bulunması için çeşitli yöntemler uygulanmaktadır. Bu yöntemlerden birisi de sonlu farklar ve varyasyon-sonlu farklar metodu olmaktadır. Diğer bir nümerik çözüm yöntemi, uygun değişken dönüşümü yapılarak gerçekleştirilebilen metottur. Bu durumda öyle bir değişken dönüşümü yapılır ki, $x = l(t)$ serbest sınırına sahip bölge normal bölgeye dönüşür, fakat bilinmeyen serbest sınır bu kez denklemin katsayısına girer.

Bu bölümde $R_+^2 = \{(x,t) \mid (x,t) \in [0,\infty) \times [0,T)\}$ bölgesinde nonlineer ısı dağılım denklemi için yazılmış sıfır başlangıç koşullu sınır değer probleminin çözümünün bazı özelliklerini inceleyeceğiz.

3.1 Esas Problem ve Stasyoner Çözüm

Aşağıdaki denklemi R_+^2 de

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi(u)}{\partial x^2} \tag{3.1}$$

aşağıda verilen başlangıç ve sınır koşulları çerçevesinde göz önüne alalım

$$u(x,0) = u_0(x) = 0, \tag{3.2}$$

$$u(0,t) = u_1(t) = u_0 t^n . \tag{3.3}$$

Burada, u_0 bilinen bir sabit, n ise reel bir sabit olmaktadır. (3.1)-(3.3) problemini esas problem olarak adlandıracağız. Bu tür problemlerle politrop gazların stasyoner olmayan akış problemlerini modellerken karşılaşılmaktadır [1].

$\varphi(u)$ fonksiyonunun aşağıdaki koşulları koruduğunu varsayalım:

1. $\phi(u) \in C^2(R_+^2)$ dır ve sınırlı u lar için sınırlıdır,

2. $u \geq 0$ olduğu durumlarda $\varphi'(u) \geq 0$ dır,

3. $\varphi''(u)$ işaret değiştiren fonksiyondur.

Bilindiği üzere, $\Phi(u) = \int_0^u \frac{\varphi'(\eta)}{\eta} d\eta < \infty$ koşulu çerçevesinde (3.1)-(3.3) problemi

$$u(x,t) = \begin{cases} \Phi^{-1}(D(Dt - x)), & x < Dt \\ \\ 0, & x \geq Dt \end{cases} \tag{3.4}$$

koşan dalga şeklinde çözüme sahiptir. Burada Φ^{-1} fonksiyonu Φ nin tersini göstermektedir. Dolayısıyla, (3.1) denkleminde de heyecanlanmış bölgenin ön sınırı sonlu hızla hareket eder.

Görüldüğü gibi (3.1) denklemi $u(x,t) > 0$ olduğunda parabolik türden, $u(x,t) = 0$ olduğunda ise 1.basamaktan denkleme dejenere olur. Problemin fiziksel yapısına göre $\varphi_x(u)$ nun sürekli fonksiyon olduğu kolayca ispatlanabilir. Diğer bir özellik de, (3.1) denkleminin dejenere olduğu noktaların sonlu hızla sağa doğru hareket etmesidir. Bu özellikten dolayı (3.1)-(3.3) probleminin çözümünü elde etmek için sonlu farklar yöntemini direkt uygulamak mümkün değildir. Çünkü denklemin dejenere olduğu noktalarda u_x ve u_{xx} türevleri mevcut olmayabilir.

Özel durumda $\varphi(u) = u^\sigma$, $(\sigma \geq 2)$ olduğunda (3.1)-(3.3) probleminin koşan dalga şeklindeki çözümü

$$u(x,t) = \begin{cases} \left(D\frac{\sigma - 1}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}} (Dt - x)^{\frac{1}{\sigma-1}}, & 0 < x < Dt, \\ \\ 0, & x \geq Dt \end{cases} \tag{3.5}$$

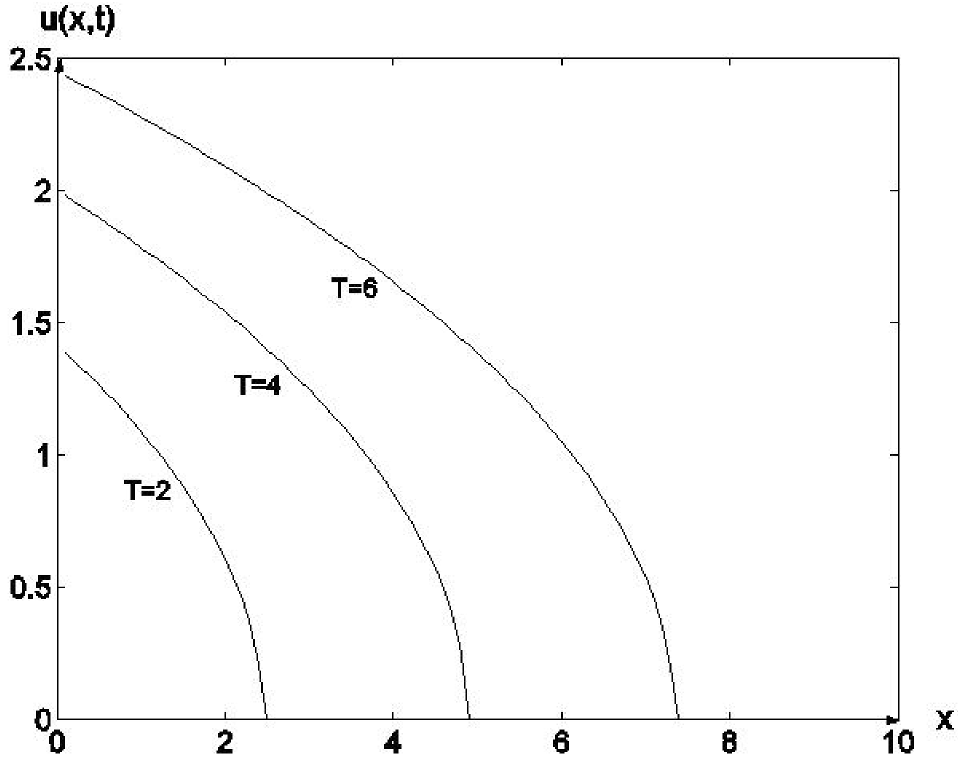
dır. Bu tür çözümlere stasyoner çözümler de denir. Burada D koşan dalganın hızını göstermektedir. (3.5) fonksiyonunun grafiği Şekil 3.1 de gösterilmiştir. (3.5) den basit hesaplamalarla

$$w(x,t) \equiv -\frac{\partial u^{\sigma}}{\partial x} = Du(x,t) \tag{3.6}$$

elde edilir. Ayrıca, (3.5) formülünden, u_t ve u_x türevlerinin $\sigma > 2$ olduğunda mevcut olmadığını, $\sigma = 2$ olduğunda sonlu olduğunu ve $1 < \sigma < \frac{3}{2}$ olduğunda tüm türevlerin mevcut olduğunu, $\frac{3}{2} < \sigma < 2$ olduğunda u_t, u_x in mevcut, fakat u_{xx} in ise mevcut olmadığını görmek zor değildir. Dolayısıyla $\sigma > 2$ olduğunda (3.1)-(3.3) probleminin yalnız zayıf çözümünün varlığı söz konusu olmaktadır. Eğer, $n = \frac{1}{\sigma - 1}$ olursa koşan dalganın hızı için

$$D = \sqrt{\frac{\sigma}{\sigma - 1} u_0^{\sigma - 1}} \tag{3.7}$$

ifadesini elde ederiz.



Şekil 3.1: Esas problemin çözümü

(3.7) formülünden $\sigma \neq 1$ olduğunda koşan dalganın D hızının sabit olduğu görülmektedir. Bu da heyecanlanmış bölgenin ön sınırının sonlu hızla hareket ettiğini göstermektedir. Dolayısıyla, hareket eden $x = l(t)$ sınırı sonlu t zaman zarfında, sonlu mesafeye ulaşır; yani $\operatorname{supp} u(x,t) \subset D_{l(t)}$ dır. Burada $D_{l(t)} = \{(x,t) \mid 0 \leq x \leq l(t), T > 0\}$ serbest sınıra sahip bölgeyi göstermektedir. Lineer denklemler için, yani $\sigma = 1$ durumunda $D = \infty$ olmaktadır, bu ise fiziksel açıdan gerçeği yansıtmamaktadır.

(3.4) (veya(3.5)) den görüldüğü gibi $u(x,t)$ çözümü $t > 0$ değerlerinde ön cephe üzerinde, yani $x = l(t)$ de sıfıra eşit olmaktadır, yani

$$u(l(t),t) = 0 \tag{3.8}$$

dır. Serbest sınır problemi derken (3.1)-(3.3) ve (3.8) denklemlerinden sırasıyla $u(x,t)$ ve $x = l(t)$ çözümlerinin her ikisinin birlikte bulunması problemi kastedilmektedir.

Genel durumda $x = l(t)$ serbest sınırını bulmak için (3.8) denklemini kullanarak

$$\frac{dl(t)}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x} \ln \varphi_x \Big|_{x=l(t)} \tag{3.9}$$

elde ederiz. Özel durumda, yani $\varphi(u) = u^{\sigma}$ olduğunda, $\dfrac{dl(t)}{dt} = D$ olmaktadır.

Tanım 3.1 Negatif olmayan, (3.2) ve (3.3) koşullarını sağlayan ve temel fonksiyonlar sınıfından $f(x,T) = 0$ özelliğine sahip keyfi $f(x,t) \in \overset{o}{C}_{1,1}(D_{l(t)})$ fonksiyonları için

$$\int_0^T \int_0^{l(t)} \{ u f_t - \varphi_x(u) f_x \} \, dx \, dt = 0 \tag{3.10}$$

integral eşitliğini koruyan, $u(x,t)$ fonksiyonuna (3.1)-(3.3) probleminin zayıf çözümü denir.

3.2 Yardımcı Problem ve Çözümü

$L(.)$ ile $A = \dfrac{\partial .}{\partial x}$ ve $B = \dfrac{\partial .}{\partial x}$ nin bileşimi olarak tanımlanan

$$L(.)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial .}{\partial x}\right)$$

operatörü gösterelim. (3.1) denklemini bu gösterime göre

$$\frac{\partial u}{\partial t}=AB\varphi(u)$$

şeklinde yazabiliriz. A nın inversi olarak A^{-1} i son denklemin her iki tarafına uygularsak

$$\frac{\partial}{\partial t}A^{-1}u=B\varphi(u) \tag{3.11}$$

elde ederiz. Aşağıdaki dönüşümü göz önüne alırsak

$$A^{-1}u=v(x,t) \tag{3.12}$$

olup, bu notasyon dahilinde

$$\frac{\partial v}{\partial t}=B\varphi(u) \tag{3.13}$$

olur. (3.12) ifadesinden

$$u(x,t)=Av(x,t)$$

alırız. Bu son bağıntıyı (3.13) de yerine koyarsak,

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\varphi\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{3.14}$$

elde ederiz. (3.14) için başlangıç ve sınır değer koşulları

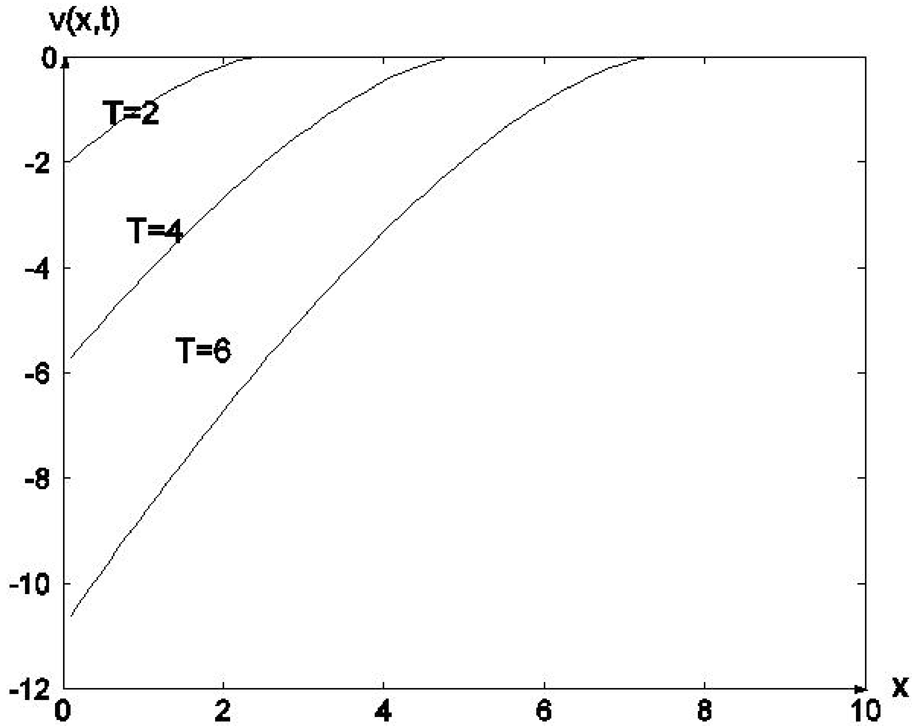
$$v(x,0)=v_0(x), \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial v(0,t)}{\partial x}=u_0t^n \tag{3.16}$$

olmaktadır. Burada, $v_0(x)$ fonksiyonu $\frac{dv_0}{dx}=0$ denkleminin herhangi bir çözümü olmaktadır. İleride (3.14)-(3.16) problemini yardımcı problem olarak adlandıracağız. $\varphi(u)=u^\sigma$ durumunda (3.14)-(3.16) probleminin çözümü

$$
v(x,t)=\begin{cases} -D^{\frac{1}{\sigma-1}}\left(\dfrac{\sigma-1}{\sigma}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}(Dt-x)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}, & x<Dt, \\ 0, & x\geq Dt \end{cases} \tag{3.17}
$$

olmaktadır. (3.17) formülü ile elde edilen fonksiyonun grafiği Şekil 3.2 de gösterilmiştir.

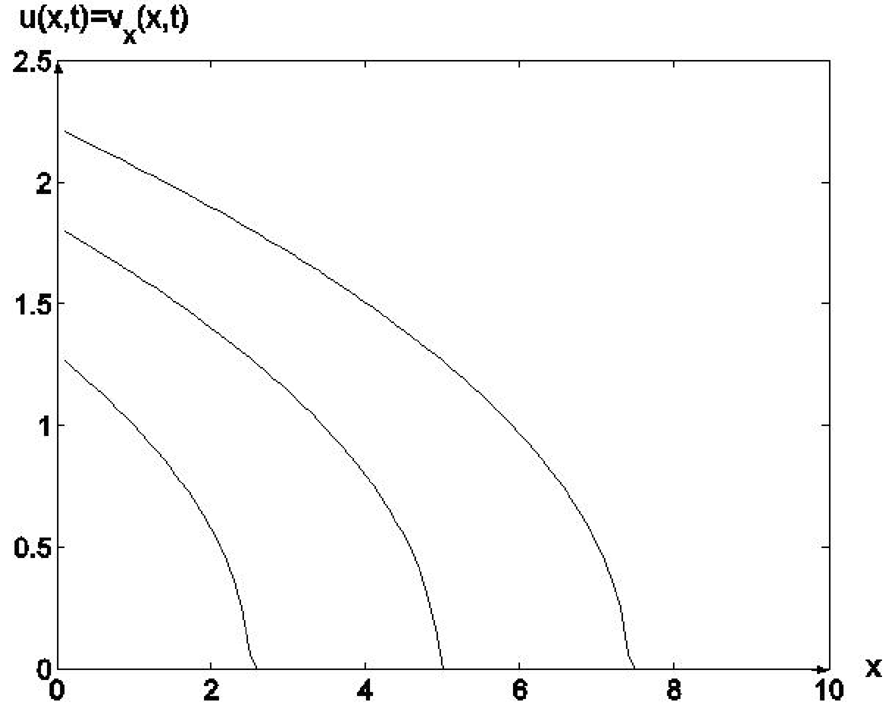


Şekil 3.2: İkinci tip yardımcı problemin çözümü

Basit hesaplamalarla

$$
u(x,t)=\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}
$$

elde ederiz. Yardımcı problemin çözümü ile bulunan $u(x,t)$ fonksiyonunun grafiği Şekil 3.3 de gösterilmiştir.



Şekil 3.3: $u(x,t) = \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial x}$ fonksiyonu

(3.5) ve (3.17) den görüldüğü üzere $u(x,t)$ çözümünün x değişkenine göre diferansiyellenebilme mertebesi $v(x,t)$ fonksiyonunun diferansiyellenebilme mertebesinden daha düşüktür.

(3.1)-(3.3) probleminin zayıf çözümünü bulmak için (3.1) denkleminin x değişkenine göre sıfırdan x e kadar integralini alırsak

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x} - \psi_1(t), \tag{3.18}$$

$$v(x,0) = v_0(x) \tag{3.19}$$

elde ederiz [3]. Burada, $\psi_1(t) = \dfrac{\partial \varphi(u(0,t))}{\partial x}$ dır ve $v_0(x)$ fonksiyonu

$$\frac{dv_0(x)}{dx} = u_0(x)$$

denkleminin herhangi bir sürekli çözümü olmaktadır. (3.18),(3.19) problemini birinci tip yardımcı problem olarak adlandıracağız.

Teorem 3.1 Eğer $v(x,t)$ fonksiyonu (3.18),(3.19) yardımcı probleminin çözümü ise

$$u(x,t)=\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}$$

eşitliği ile bulunan $u(x,t)$ fonksiyonu (3.10) anlamında (3.1)-(3.3) esas probleminin zayıf çözümü olmaktadır.

Teorem 3.1 den $v(x,t)$ fonksiyonunu aşağıdaki formülle elde ederiz

$$v(x,t)=\int_0^x u(\xi,t)d\xi. \tag{3.20}$$

Önerilen yardımcı problem aşağıdaki avantajlara sahiptir:

1. $v(x,t)$ fonksiyonunun diferansiyellenebilme özelliği $u(x,t)$ fonksiyonunun diferansiyellenebilme özelliğinden bir mertebe daha fazladır,
2. $v(x,t)$ mutlak sürekli fonksiyondur,
3. $u(x,t)$ fonksiyonu hesaplanırken $\varphi_{xx}(u)$ ifadesini kullanmaya gerek yoktur; zaten bu türev hareketli $x=l(t)$ sınırında mevcut değildir. Ayrıca, bu durumda $u(x,t)$ fonksiyonu süreksiz de olabilir.

$\frac{\partial\varphi(u)}{\partial x}$ pürüzsüz değilse, (3.18) denklemini sıfırdan x e kadar integrallersek

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^x v(\xi,t)d\xi=\varphi(u(x,t))-x\psi_1(t)-\varphi(u(0,t)). \tag{3.21}$$

elde ederiz. (3.21) integro-differansiyel denklemi için başlangıç koşulu (3.19) dur. (3.21),(3.19) problemini ikinci tip yardımcı problem olarak adlandıracağız. (3.21),(3.19) probleminin, birinci tip yardımcı problemin sahip olduğundan başka bir avantajı daha vardır; $\varphi(u)$ hal fonksiyonu süreksiz de olabilir. Önemle belirtelim ki, bu çözüm sıvıların esnek-plastik ortamlardaki akışınının filtrasyon teorisinde ortaya çıkmaktadır. Bu durumda $u(x,t)$ fonksiyonunun pürüzsüzlüğü bozulur ve ayrıca $\frac{\partial\varphi(u)}{\partial x}$ genelde mevcut olmayabilir. Bu gibi durumlarda esas problemin zayıf çözümünü bulmak için (3.18) denklemini kullanmak yanlış sonuçlara yol açabilir.

(3.21) denklemini diğer bir yolla da elde edebiliriz. (3.12) yi dikkate alarak, (3.18) denklemini

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A\phi(u) - \psi_1(t) \tag{3.22}$$

şeklinde yazabiliriz. (3.22) denkleminin her iki tarafına A^{-1} i uygularsak, (3.21) denklemini elde ederiz.

3.3 Gerçek Çözümün Diferansiyellenebilme Özellikleri

Şimdi, $w(x,t)$ ile aşağıdaki integral ifadesini gösterelim

$$w(x,t) = \int_0^x \int_0^x u(\xi,t) d\xi dt \,. \tag{3.23}$$

(3.23) e Cauchy formülünü uygularsak

$$w(x,t) = \frac{1}{\Gamma(0)} \int_0^x (x-\xi) u(\xi,t) d\xi, \tag{3.24}$$

yazabiliriz. Burada, $\Gamma(x)$ 2.tür Euler fonksiyonu olmaktadır.

Yukarıda elde edilen sonuçlardan açıkça görüldüğü üzere, $\dfrac{\partial \varphi(u)}{\partial x}$ fonksiyonunun sürekli olduğu durumda birinci tip yardımcı problemin çözümü $v(x,t)$ mutlak sürekli bir fonksiyon olmaktadır. $\dfrac{\partial \varphi(u)}{\partial x}$ nin mevcut olmadığı durumda $u(x,t)$ fonksiyonunun diferansiyellenebilme mertebesi birden küçük olmaktadır.

$w(x,t)$ fonksiyonunun diferansiyellenebilme özellikleri $u(x,t)$ nin diferansiyellenebilme özelliklerine bağlı olmaktadır. $u(x,t)$ fonksiyonunun iki kez x e göre diferansiyellenebilen fonksiyon olduğu taktirde hemen-hemen her yerde $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ olmaktadır. Beklenildiği gibi $u(x,t)$ fonksiyonunun diferalsiyellenebilme mertebesi $0 < \alpha < 1$ olmaktadır. Diğer bir deyimle, $u(x,t)$ fonksiyonunun x ve t ye göre türevleri kesir mertebeden aşağıdaki şekilde yorumlanabilir

$$D_t^{\alpha}u(x,t)=\frac{\partial^{\alpha}u(x,t)}{\partial t^{\alpha}}=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{-\alpha}\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial \tau}d\tau, \quad 0<\alpha<1 \tag{3.25}$$

$$D_x^{\beta}u(x,t)=\frac{\partial^{\beta}u(x,t)}{\partial x^{\beta}}=\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^x (x-\xi)^{-\beta}\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial \xi}d\xi, \quad 0<\beta<1. \tag{3.26}$$

Burada $D_t^{\alpha}u(x,t)$ ve $D_x^{\beta}u(x,t)$, $u(x,t)$ fonksiyonunun aşağıdaki şekilde tanımlanan Caputo anlamında kesir mertebeden türevlerini göstermektedir.

Tanım 3.2 $f(x)$ fonksiyonunun Caputo anlamında kesir türevi aşağıdaki şekilde tanımlanır

$$D_{\text{å}}^{\alpha}f(x)=I^{m-\alpha}D^m f(x)=\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1}f^m(t)dt,$$

$m-1<\alpha<m$, $m\in N$, $x>0$, $f\in C_{-1}^m$. Burada I^{α} Riemann-Liouville anlamında

$$I^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt, \ \alpha>0, \ x>0,$$

$$I^0 f(x)=f(x)$$

kesir mertebeden integrali göstermektedir.

3.4 Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Sonlu Farklar Şeması

Literatürden bilindiği ve yukarıda ispatlandığı gibi (3.1) cinsinden olan denklemlerin çözümlerinde lokalleşme, yani, heyecanlanmış bölgenin ön cephesinin sonlu hızla dağılma hususu mevcut olmaktadır. Diğer bir deyişle, $u(x,t)$ fonksiyonu herhangi bir $t\in[0,T)$ için sonlu taşıyıcıya sahip olmaktadır. Lokalleşme özelliğinin varlığı ve denklemdeki nonlineerlik, problemin gerçek çözümünün bulunmasında çoğu zaman engel çıkarır. Diğer taraftan da, sağ sınırı değişken bölgelerde herhangi bir $k.$ zaman katından $(k+1).$ zaman katına geçtiğimizde $\frac{\partial u}{\partial t}$ türevini eğimi bilinmeyen doğru üzerinde sonlu farklara ayrıklaştırmak zorunda kalıyoruz. Böyle durumlarda problemin çözümü için özel nümerik çözüm yöntemlerine ihtiyaç vardır. Diğer taraftan da çözümdeki bu özellik onu direkt olarak diskretleştirmeye imkan vermemektedir. Çünkü, denklemin içerdiği u_x ve u_{xx} türevleri $x=\ell(t)$ noktalarının civarında mevcut da olmayabilirler. Bu nedenlerden dolayı, bu tür problemler için özel ve hassas sonlu fark yöntemlerinin geliştirilmesi zorunluluğu ortaya çıkar.

Bu kısımda (3.1) denklemi için yazılmış başlangıç-sınır değer problemleri için sonlu farklar yöntemi geliştirilecektir. Bundan dolayı R_+^2 bölgesini düzgün

$$\omega_{h\tau}=\{x_i=ih,\, t_k=k\tau,\, k=0,1,2,...,\, i=1,2,..,\, h>0,\, \tau>0\}$$

ağı ile örtelim. Burada h ve τ sırasıyla x ve t ye göre $\omega_{h\tau}$ ağının adımları olmaktadır.

Bilindiği gibi bu ve diğer diferansiyel problemler için nümerik yöntemleri uygularken çözümden yüksek mertebeden türevlenebilme özelliği talep edilmektedir. Yukarıda belirtildiği üzere serbest sınıra sahip problemleri direkt sonlu farklara ayrıklaştırmak genelde yanlış sonuçlara yol açar. Bu tür problemlerin sayısal çözümlerinin bulunması için literatürde homojen algoritmalar mevcut olmaktadır. Diğer mevcut olan algoritmalar değişken sınırlı bölgeyi sınırları değişmeyen bölgeye indirgeyebilen dönüşümler yardımı ile gerçekleştirilir.

Şimdi, esas problemin sayısal çözümünü bulmak için (3.20) ifadesini dikkate alarak (3.18), (3.19) yardımcı problemine yaklaşım kuralım. (3.18) denklemini sonlu farklara ayrıklaştırmak için önce denklemdeki t ye göre türevin altındaki integral için dikdörtgenler yöntemini kullanarak aşağıdaki kuadratik

$$\int_0^x u(\xi,t)d\xi = h\sum_{j=1}^{i} U_{j,k} \tag{3.27}$$

ifadeyi yazalım.

Söz konusu bu denklem için iki tür sonlu fark karşılığı yazalım:

a) Açık şema:

$$\hat{U}_i = U_i + \frac{\tau}{h^2}\left[\varphi(U_{i+1})-\varphi(U_i)\right] - \frac{\tau}{h}\psi_1(t_k) - \sum_{j=1}^{i-1}(\hat{U}_j - U_j) \tag{3.28}$$

$$U_{i,0}=0. \tag{3.29}$$

Burada $U_{i,k}=U_i$ ve $U_{i,k+1}=\hat{U}_i$ olup; $U_{i,k}$, $u(x,t)$ fonksiyonunun herhangi bir (x_i,t_k) noktasındaki yaklaşık değerlerini göstermektedir. Ağın adımları üzerine koyulması gereken

CFL (Courant-Friedrichs-Levy) koşulunun korunması kaydıyla, τ ya göre yeterince küçük adımlı bu algoritmadan (3.1)-(3.3) probleminin çözümü hesaplanabilir.

b) Kapalı şema:

$$\hat{U}_i = U_i + \frac{\tau}{h^2}\left[\varphi(\hat{U}_i) - \varphi(\hat{U}_{i-1})\right] - \frac{\tau}{h}\psi_1(t_k) - \sum_{j=1}^{i-1}(\hat{U}_j - U_j). \tag{3.30}$$

(3.30) ifadesi $\hat{U}_i$ bilinmeyenine göre nonlineer cebirsel denklemler sistemi oluşturur. Bu sistemin çözümü için iki yöntem önerelim:

1) Sade iterasyon yöntemi:

$$\hat{U}_i^{(\rho+1)} = U_i + \frac{\tau}{h^2}\left[\varphi(\hat{U}_i^{(\rho)}) - \varphi(\hat{U}_{i-1}^{(\rho)})\right] - \frac{\tau}{h}\psi_1(t_k) - \sum_{j=1}^{i-1}(\hat{U}_j^{(\rho+1)} - U_j) \tag{3.31}$$

$$(\rho = 0,1,2,...).$$

2) Newton iterasyon yöntemi:

$$\hat{U}_i^{(\rho+1)} = U_i + \frac{\tau}{h^2}\left[\varphi(\hat{U}_i^{(\rho+1)}) - \varphi(\hat{U}_{i-1}^{(\rho+1)})\right] - \frac{\tau}{h}\psi_1(t_k) - \sum_{j=1}^{i-1}(\hat{U}_j^{(\rho+1)} - U_j). \tag{3.32}$$

(3.32) nonlineer cebirsel denklemler sisteminin çözümünü elde edebilmek için $\hat{U}_i^{(\rho+1)}$ ifadesini

$$\hat{U}_i^{(\rho+1)} = \hat{U}_i^{(\rho)} + \delta\hat{U}_i^{(\rho)}$$

şeklinde gösterelim. Bilinmeyen $\delta\hat{U}_i^{(\rho)}$ ekini bulmak için aşağıdaki

$$A_i\delta\hat{V}_i^{(\rho)} - B_i\delta\hat{V}_{i-1}^{(\rho)} = F_i \tag{3.33}$$

iki noktalı sisteme indirgemek mümkündür. Burada

$$A_i = \frac{\tau}{h^2}\varphi'(\hat{U}_i^{(\rho)}) - 1,$$

$$B_i = \frac{\tau}{h^2}\varphi'(\hat{U}_{i-1}^{(\rho)}),$$

$$F_i = \sum_{j=1}^{i}(\hat{U}_j^{(\rho)} - U_j) + \frac{\tau}{h}\psi_1(t_k) + \sum_{j=1}^{i-1}\delta\hat{U}_j^{(\rho)} - \frac{\tau}{h^2}\left[\varphi(\hat{U}_i^{(\rho)}) - \varphi(\hat{U}_{i-1}^{(\rho)})\right]$$

olmaktadır.

Şimdi $\varphi_x(u)$ türevinin pürüzsüzlüğü bozulduğu durumda (3.1),(3.3) probleminin sayısal çözümünü elde etmek için bir algoritma oluşturalım. Bu amaçla (3.21) denklemini aşağıdaki gibi sonlu farklara ayrıklaştıralım

$$\hat{V}_i = V_i + \frac{\tau}{h}\varphi(U_{i,k}) - x_i \frac{\tau}{h^2}\psi_1(t_k) - \frac{\tau}{h}\varphi(u_1(t_k)) - \sum_{j=1}^{i-1}(\hat{V}_j - V_j). \tag{3.34}$$

(3.34) için başlangıç koşulu

$$V_{i,0} = v_0(x_i) \tag{3.35}$$

olmaktadır.

Teorem 3.2 Eğer $V_{i,k}$ (3.34),(3.35) cebirsel denklemler sisteminin sayısal çözümü ise

$$U_{i,k} = V_{\bar{x}} \tag{3.36}$$

eşitliği ile tanımlanan $U_{i,k}$ ağ fonksiyonu da esas problemin sayısal çözümü olmaktadır.

Yukarıda olduğu gibi, ağın adımlarını gereken boyutta seçerek, (3.34),(3.35) algoritmasından 2. tür yardımcı problemin sayısal çözümünü elde edebiliriz. Sonra Teorem 2 yi kullanarak esas problemin sayısal çözümünü bulabiliriz.

Şimdi, (3.21) denklemini

$$\hat{V}_i = V_i + \frac{\tau}{h}\varphi(U_i) - x_i \frac{\tau}{h}\psi_1(t_{k+1}) - \varphi(u_1(t_{k+1})) - \sum_{j=1}^{i-1}(\hat{V}_j - V_j) \tag{3.37}$$

şeklinde sonlu farklara ayrıklaştıralım. (3.37) cebirsel denklemler sistemi $\hat{V}_i$ ye göre nonlineerdir. Onun çözümü için Newton iterasyon yöntemini kullanalım

$$\hat{V}_i^{(\rho+1)} = V_i + \frac{\tau}{h}\varphi\left(\frac{\hat{V}_i^{(\rho+1)} - \hat{V}_{i-1}^{(\rho+1)}}{h}\right) - x_i \frac{\tau}{h}\psi_1(t_{k+1}) - \frac{\tau}{h}\varphi(u_1(t_{k+1})) - \sum_{j=1}^{i-1}(\hat{V}_j^{(\rho+1)} - V_j).$$

Elde ettiğimiz nonlineer cebirsel denklemler sistemini çözmek için, $\hat{V}_i^{(\rho+1)} = \hat{V}^{(\rho)} + \delta\hat{V}^{(\rho)}$ şeklinde ifade ederek ve söz konusu sistemde yerine yazarak, bilinmeyen $\delta\hat{V}_i^{(\rho)}$ eki için

$$A_i \delta \hat{V}_i^{(\rho)} - B_i \delta \hat{V}_i^{(\rho)} = F_i \tag{3.38}$$

iki noktalı lineer cebirsel denklemler sistemini elde ederiz. Burada

$$A_i = 1 + \frac{\tau}{h^2} \varphi' \left(\frac{\hat{V}_i^{(\rho)} - \hat{V}_{i-1}^{(\rho)}}{h} \right),$$

$$B_i = \frac{\tau}{h^2} \varphi' \left(\frac{\hat{V}_i^{(\rho)} - \hat{V}_{i-1}^{(\rho)}}{h} \right),$$

$$F_i = V_i - \hat{V}_i^{(\rho)} - \frac{\tau}{h} \varphi \left(\frac{\hat{V}_i^{(\rho)} - \hat{V}_{i-1}^{(\rho)}}{h} \right) - x_i \frac{\tau}{h} \psi_1(t_{k+1}) - \frac{\tau}{h} \varphi(u_1(t_{k+1})) - \sum_{j=1}^{i-1} (\hat{V}_j^{(\rho)} - V_j)$$

olmaktadır.

(3.38) denklemler sistemi iki noktalı sistem olduğundan onun çözümü kolayca hesaplanır. $\hat{V}_i^{(\rho)}$, $(i = 0,1,...)$ ler bulunduktan sonra Teorem 2 kullanılarak, (3.1),(3.3) probleminin sayısal çözümü elde edilir.

4. SONUÇLAR

Elde edilen sonuçları üç maddede sıralayabiliriz:

1. Tezin esas amacını gerçekleştirebilmek açısından önce lineer denklem için bilinen ve hareket eden sınırlı bölgelerde ısı dağılım denklemi için yazılmış birinci sınır değer probleminin Green fonksiyonu yardımı ile çözümü elde edilmiştir. Bunun için önce Green fonksiyonunun tanımı ve uygulamaları incelenmiştir.

2. Hareket eden sınırlara sahip sonlu ve yarı sonlu bölgelerde ısı denklemi için yazılmış problemin çözümünün varlığı ispatlanmıştır.

3. Bilinmeyen serbest sınıra sahip bölgede dejenere olan nonlineer ısı dağılım denklemi için genelleştirilmiş fonksiyonlar sınıfında çözümü elde etmek için bir yöntem önerilmiştir. Önerilen yöntemi gerçekleştirmek için

a) Çözümün diferansiyellenebilme özelliği gözönüne alınan esas problemin çözümünün diferansiyellenebilme özelliğinden yüksek olan ve özel yolla inşa edilmiş yardımcı problem önerilmiş,

b) Yardımcı problemle esas problem arasındaki bağlantı gösterilmiş,

c) Önerilen yardımcı problemin avantajları kullanılarak fiziksel problemin yapısını düzgün aksettirebilen nümerik algoritmalar kurulmuştur.

5. KAYNAKLAR

[1] Collins, P., Fluids Flow in Porous Materials, 1964.

[2] Friedman, A., Remarks on Stefan-type free boundary problems for parabolic equations, J. Math. Mech., 9 (1960), 885-903.

[3] Rasulov, M. A., A Numerical Method of Solving a Parabolic Equation with Degeneration,Dif. Equations, Vol. 18, No.8, pp. 1418-1427, 1992.

[4] Sinsoysal, B., A New Numerical Method for Stefan-Type Problems in a Class of Unsmooth Functions, Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol.5, No.27, (2010) 1323-1335.

[5] Tikhonov, A.N., and Samarskii, A.A, Equations of Mathematical Physics, (Translated by A.R.M. Rabson and P. Basu), New York, Dover Publications, 1990.

ÖZGEÇMİŞ

02.11.1975 tarihinde Samsun ilinin Bafra ilçesinde doğdu. İlk ve orta ve lise eğitimlerini sırasıyla Konya Barbaros İlkokulu, Meram Ortaokulu ve Konya Gazi Lisesi'nde tamamladıktan sonra 2001 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. Eylül 2008'den itibaren Beykent Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Uygulamalı Matematik programında Yüksek Lisans öğrencisi olarak eğitimini sürdürmektedir.

2004 yılından itibaren çeşitli dershanelerde Matematik Öğretmenliği yaptıktan sonra halen Birey Dershaneleri Mimaroba Şubesi'nde Matematik Öğretmenliği yapmaktadır.