T.C

BEYKENT ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANA BİLİM DALI

UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

DEKOMPOZİSYON METODUNUN UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tezi Hazırlayan:

Necmettin TAMER

Öğrenci no:

080860007

Tez Danışman:

Doç. Dr. Afgan ASLANOV

İSTANBUL, 2011

YEMİN METNİ

Sunduğum Yüksek Lisans Tezimi Akademik Etik İlkelerine bağlı kalarak, hiç kimseden akademik ilkelere aykırı bir yardım almaksızın bizzat kendimin hazırladığına and içerim. 14.02.2011

Necmettin TAMER

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZ SAVUNMA SINAVI SONUÇ TUTANAĞI

Beykent Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

Aşağıda tez adı belirtilen yüksek lisans öğrencisi .....080860007..... no'lu ...Necmettin TAMER.......'ın 08/04/11 tarihinde yapılan tez savunma sınavı[1] sonucunda ...45...dakika süreyle sunduğu ve savunduğu tezi hakkında[2] oybirliğiyle/~~oyçokluğuyla~~, Kabul/~~Red/Düzeltme~~(........ay içinde) kararı verilmiştir.

Bilgilerinize saygılarımızla arz ederiz.

Anabilim Dalı	:	Matematik – Bilgisayar
Programı	:	Uygulamalı Matematik
Tez Başlığı[3]	:	Dekompozisyon Metodunun Uygulamaları

Tez Sınav Jürisi		**Öğretim Üyesi**	**İmza**
Danışman	:	Doç. Dr. Afgan ASLANOV	
Üye	:	Yar. Doç. Dr. Talat FIRLAR	
Üye	:	Prof. Dr. Mahir RESULOV	

---

[1] Jüri üyeleri söz konusu tezin kendilerine teslim edildiği tarihten itibaren en geç bir ay içinde toplanarak öğrenciyi tez savunma sınavına alır. Belirlenen günde yapılamayan jüri toplantısı, katılanların hazırladığı bir tutanakla enstitü yönetimine bildirilir. Bu durumda jüri en geç onbeş gün içinde toplanarak adayı tez savunma sınavına alır. Tez savunma sınav süresi en az 45 dakikadır. Yüksek lisans tez savunma sınavı, tez çalışmasının sunulması ve bunu izleyen soru-yanıt bölümlerinden oluşur ve dinleyiciye açıktır. (Beykent Lisansüstü eğitim ve Öğretim Yönetmeliği-Madde30-3)

[2] Tez sınavının tamamlanmasından sonra jüri, tez hakkında "kabul", "düzeltme" veya "red" kararı verir. Jüri başkanı, jüri üyelerince imzalanmış sınav tutanağını, tez sınavını izleyen üç gün içinde ilgili enstitü yönetimine teslim eder. Tezi başarısız bulunan öğrencinin Enstitü ile ilişiği kesilir. Tezi hakkında düzeltme kararı verilen öğrenci en geç üç ay içinde gerekli düzeltmeleri yaparak ve yönetmelikte belirtilen usullere uygun olarak tezini aynı jüri önünde yeniden savunur. Bu savunma sınavında da tezi kabul edilmeyen öğrencinin enstitü ile ilişiği kesilir. (Beykent Lisansüstü eğitim ve Öğretim Yönetmeliği-Madde30-4)

[3] İleride doğabilecek aksaklıkların engellenmesi için tezin başlığının yazılması gerekmektedir.

ÖZET

Bu tezde öncelikle Dekompozisyon metoduna genel bir bakış yapılmış ve amacından bahsedilmiştir. Adomian Dekompozisyon metodu bizim buradaki konumuz olacaktır. Bu metodun ortaya çıkması ve gelişimi anlatılmıştır. Lineer olmayan diferansiyel denklemin integrallenmesi veya analitik çözümünün olması için Adomian Dekompozisyon metodu ile ilgili bilgiler verilmiştir, Adomian polinomlarının elde edilme yöntemleri ayrıntılı bir şekilde anlatılmıştır. Burada elde edilen Adomian polinomların seri şeklinde çözümleri gösterilmiştir.

Son olarak Adomian Dekompozisyon metoduyla ilgili örneklerin çözümleri yapılmıştır.

Anahtar kelimeler: Dekompozisyon metodu, Adomian Dekompozisyon metodu, Adomian polinomları, seri çözümü

ABSTRACT

We consider different applications of Adomian Decomposition Method. The Decomposition method will be applied fort he solution of Ordinary and Partial Differential Equations. We consider the Linear and Non-linear differential equations. The solution received will be infinite series solution and terms of the series easily can be calculated. First we classify the Decomposition Method and then explain some properties of so-called Adomian polynoials. At the end we solve some problems related with the application of Adomian Decomposition Method.

Keywords: Adomian Decomposi

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

L	: Diferansiyel operatör
L^{-1}	: İntegral operatörü
A_n	: Adomian Polinomu
$u(x,t)$	: Çözüm Fonksiyonu
Φ_n	: n- terim yaklaşımı
Nu	: Lineer olmayan terim

1. ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ AYRIŞTIRMA METODU

1.1. GENEL BAKIŞ

Öncü bilim ve teknolojide karşılaşılan en kritik problem diferansiyel yada kısmen diferansiyel denklemler tarafından modellenen, doğrusal olmayan ya da stokasftik sistemlerin fiziksel olarak doğru çözümüdür.

Ayrıştırma metodunun amacı, olağan modelleme olmadan ve "kolay işlenebilirliği" başarmak için çözüm uzlaşısına girmeden, kompleks sistemlerin fiziksel gerçek çözümlerini bulmaktır. Bu, esasında adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin alanını birleştiren şeydir. Bu bölümde, metodu özetleyecek ve kısaca uygulamalarını göstereceğiz.

Lineer olmayan diferansiyel denklemin, integrallenmesi veya analitik çözümünün olması için Adomian Decomposition Metodu bizim buradaki konumuz olacak. Bu metodun uygulanması oldukça kolaydır. Elde edilen terimler sonsuz seri şeklinde olup bu terimler kolayca hesaplana bilmektedir. Buradaki çözüm sonsuz bir seri şeklinde olur.

Biz burada Adomian Ayrışım metodunu kısaca özetleyecek, Adomion polinomlarının elde edilişi ve bazı örneklerini göstereceğiz. Son olarak ayrışım metodunun seri yakınsaklığını ve bununla ilgili bazı örneklerin çözümünü yapacağız.

1.2. YÖNTEMİN ORTAYA ÇIKMASI VE GELİŞİMİ

1981'de G.A Adomian tarafından ortaya atılan daha sonra Yves Cherruault ve arkadaşları tarafından geliştirilen ayrışım metodu özel tip polinomların (Adomian polinomlarının) kullanılmasıyla terimleri indirgenerek oluşturulan bir seri çözümünün bilinmeyen fonksiyonunun ayrışımına dayanır. Bu yöntem lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlere, fark denklemleri, integral, integro-diferansiyel denklemlere ve sistemlere uygulanabilir. (Adomian ve Rach, 1992; Wazwaz, 1997). Birçok yöntemle ortak yanları vardır. Adi diferansiyel denklemler, integral denklemler, cebirsel denklemler, kısmi türevli denklemler, vs. bunlardan birkaç tanedir.

Adomian ayrışım yöntemi için A. M. Wazwaz tarafından bir düzeltme yapıldı ve bazı örneklerde Adomian polinomlarını kullanmadan sadece iki iterasyonla çözüme ulaşmayı başarmıştır.

2001 yılında A. M. Wazwaz ve S. M. El-Sayed tarafından ikinci bir düzeltme yapılmıştır.

2004 yılında E. Babolian ve S. Javadi tarafından bir operatör tanımlandı ve Adomian polinomlarını bu operatörle hesapladı.

Bu yöntemin en büyük avantajı çözümlerde çok hızlı bir yaklaşım göstermesidir.

2. ADOMİAN POLİNOMLARININ ELDE EDİLİŞİ

Bu yöntem bir seri çözüm yöntemidir. Seri yöntemiyle ayrışım ilerde gösterilecektir. Lineer ve lineer olmayan cebirsel diferansiyel denklemlere uygulanabilir (Adomian 1990). Bu yöntem bir seri çözüm yöntemi olduğu için öncelikle F(x) lineer olmayan teriminin x_0 *daki Taylor seri açılımını yapalım*

$$F(x) = F(x_0) + F'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}F''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!}F'''(x_0)(x-x_0)^3 + \ldots \quad (2.1.1)$$

yazılır,

$$x = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots \quad \text{bura dan} \quad x - x_0 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots \quad (2.1.2)$$

elde edilir ve bu değer (2.1.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$F(x) = F(x_0) + F'(x_0)(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots) + \frac{1}{2!}F''(x_0)(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots)^2 +$$
$$\frac{1}{3!}F'''(x_0)(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots)^3 + \frac{1}{4!}F^{(4)}(x_0)(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots)^4 \quad (2.1.3)$$

elde edilir.

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1x_3 + x_3^2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_4 + \ldots$$

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots)^3 = x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3 + 6x_1x_2x_3 + 3x_1x_3^2 + \ldots \quad (2.1.4)$$

Eşitlikleri (2.1.3) denkleminde yerine yazılırsa ve gerekli işlemler yapılırsa

$F(x) = F(x_0) + F`(x_0)x_1 + F`(x_0)x_2 + F`(x_0)x_3 + \frac{1}{2!}F``(x_0)x_1^2 + \frac{1}{2!}F``(x_0)x_2^2 + \frac{1}{3!}F```(x_0)\, x_1^3 +$
$\frac{1}{3!}F```(x_0 x_2^3) + \frac{1}{3!}F```(x_0)\, x_1^2 3x_3 + \ldots$ (2.1.5)

elde edilir. İndis toplamları 0 olan terimler A_0 polinomunu, toplamı 1 olan terimler ise A_1 polinomunu, indis toplamı 2 olan terimler A_2 polinomunu ve bu şekilde indis toplamı n olan terimler A_n polinomu olarak ifade edersek,

$$A_0 = F(x_0)$$

$$A_1 = x_1 F'(x_0)$$

$$A_2 = x_2 F'(x_0) + \frac{1}{2!} x_1^2 F''(x_0)$$

$$A_3 = x_3 F'(x_0) + x_1 x_2 F''(x_0) + \frac{1}{3!} x_1^3 F'''(x_0)$$

$$A_4 = x_4 F'(x_0) + (\frac{1}{2!} x_2^2 + x_1 x_3) F''(x_0) + \frac{1}{2!} x_1^2 x_2 F'''(x_0) + \frac{1}{4!} x_1^4 F^{(4)}(x_0)$$

$$A_5 = x_5 F'(x_0) + (x_2 x_3 + x_1 x_4) F''(x_0) + \frac{1}{2!}(x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3) F'''(x_0)$$
$$+ \frac{1}{3!} x_1^2 x2 F^{(4)}(x_0) + \frac{1}{5!} x_1^5 F^{(5)}(x_0)$$

$$A_6 = x_6 F'(x_0) + (\frac{1}{2!} x_2^3 + x_2 x_4 + x_1 x_5) F''(x_0) + \frac{1}{3!} x_3^2 + x_1 x_2 x_3 + \frac{1}{2!} x_1^2 x4) F'''(x_0)$$
$$+ (\frac{1}{2!} x_1^2 \frac{1}{2!} x_2^2 + \frac{1}{3!} x_1^3 x_3)\, F^{(4))}(\, x_0) + \frac{1}{4!} x_1^4 x_2 F^{(5)} x_0) + \frac{1}{6!} x_1^6 F^{(6)}\,(\, x_0)$$

$$A_7 = x_7 F'(x_0) + (x_3 x_4 + x_2 x_5 + x_1 x_6) F''(x_0) + (\frac{1}{2!}\, x_2^2 x_3 + \frac{1}{2!} x_1 x_3^2 + x_1 x_2 x_4$$

$+ \frac{1}{2!} x_1^2 x_5) F'''(x_0) + \left(\frac{1}{3!} x_1 x_3^2 + \frac{1}{2!} x_1^2 x_2 x_3 + \frac{1}{3!} x_1^3 x_4\right) F^{(4)}(x_0) + \left(\frac{1}{3!} x_1^3 \frac{1}{2!} x_2^2 + \frac{1}{4!} x_1^4 x_3\right) F^{(5)}(x_0) + \frac{1}{5!} x_1^5 x_2 F^{(6)})(x_0) + \frac{1}{7!} x_1^7 F^{(7)}(x_0)$

$$A_8 = F'(x_0)x_8 + F''\left(\frac{1}{2!}x_4^2 + x_3x_5 + x_2x_6 + x_1x_7\right)$$

$$+F'''(x_0)\left(x_2x_3\frac{1}{2!} + \frac{1}{2!}x_2^4x_4 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_5 + \frac{1}{2!}x_1^2x_6\right)$$

$$+F^{(4)}(x_0)\left(\frac{1}{2!}x_1^4 + \frac{1}{2!}x_2^2x_3x_1 + \frac{1}{2!}x_1^2\frac{1}{2!}x_3^2 + \frac{1}{2!}x_1^2x_2x_4 + \frac{1}{3!}x_1^3\right)$$

$$+F^{(5)}(x_0)\left(\frac{1}{2!}x_1^2\frac{1}{3!}x_2^3 + \frac{1}{3!}x_1^3x_2x_3 + \frac{1}{2!}x_1^4x_4\right)$$

$$+F^{(6)}(x_0)\left(\frac{1}{4!}x_1^4\frac{1}{2!}x_2^2 + \frac{1}{5!}x_1^5x_3\right) + F^{(7)}(x_0)\left(\frac{1}{6!}x_1^6x_2\right)$$

$$+F^{(8)}(x_0)\left(\frac{1}{8!}x_1^8\right)$$

$$\vdots$$

(2.1.6)

olacak biçimde Adomian polinomları elde edilir.

t ∈ IR bir parametre olsun

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} t^k A_k$$

çözüm serisi

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} t^k x_k$$

ve lineer olmayan terim

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k A_k$$

olarak yazılabilir. $t \in IR$ noktasında $F(x)$

fonksiyonu analitik olmak üzere (2.1.6) da elde edilen Adomian polinomları

$$A_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{dt^n}F\left(\sum_{k=0}^{\infty} t^k x_k\right)\right]_{t=0} \tag{2.1.7}$$

formülüyle genel olarak elde edilir. Bu durumda istenildiği kadar Adomian polinomu elde edilir. Aynı şekilde, $F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_n)$ nonlineerliğin Adomian polinomları

$$A_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{dt^n}F\left(\sum_{k=0}^{\infty} t^k x_{1k}, \sum_{k=0}^{\infty} t^k x_{2k}, \sum_{k=0}^{\infty} t^k x_{3k}, \dots, \sum_{k=0}^{\infty} t^k x_{ik}, \dots, \sum_{k=0}^{\infty} t^k x_{nk}\right)\right]_{=0}$$

$$n \geq 0 \tag{2.1.8}$$

şeklinde hesaplanabilir.

3.Adomian polinomlarının elde edilmesiyle ilgili örnekler

Örnek 3..1 $F(x) = x^3$ non lineer terimi için Adomian polinomlarını hesaplayalım:

Daha önce genel olarak elde ettiğimiz Adomian polinomlarını (2.1.6) da yerine yazarsak

$F(x_0) = x_0^3$ olmak üzere,

$A_0 = x_0^3$

$A_1 = 3x_1x_0^2$

$A_2 = 3x_2x_0^2 + 3x_1^2x_0$

$A_3 = 3x_3x_0^2 + 6x_1x_2x_0 + x_1^3$

$A_4 = 3x_4x_0^2 + 3x_2^3x_0 + 6x_1x_3x_0 + 3x_1^2x_2$

$A_5 = 3x_5x_0 + 6x_3x_2x_0 + 6x_1x_4x_0 + 3x_1x_2^2 + 3x_1^2x_3$

$\vdots$

şeklinde Adomian polinomları elde edilir. Burada dikkat edilirse hem katsayılar ve hem de polinom numaraları için önemli bir kural vardır. x_m için her bir terim m faktörünün bir ürünüdür. A_n her bir terimin 3 faktörü vardır-üst simgelerin toplamı m'dir. (Bu durumda 3 oluyor) alt simgelerin toplamı ise m dir. Mesela A_4 ün 3. terimin katsayısı $\frac{3!}{(1!)(1!)(1!)} = 6$ olur. Benzer şekilde A_5 in 4. terimi $\frac{3!}{(1!)(2!)} = 3$ olur. İndisler toplamının da polinom numarasını verdiğini tekrar hatırlatalım.

Örnek 3.2. $F(x) = \sinh(\frac{x}{4})$

$A_0 = \sinh(\frac{x_0}{4})$

$A_1 = \frac{1}{2!} x_1 \cosh(\frac{x_0}{4})$

$A_2 = x_2 \frac{1}{4} \cosh(\frac{x_0}{4}) - \frac{1}{2} x_1^2 \frac{1}{16} \sinh(\frac{x_0}{4})$

$A_3 = x_3 \frac{1}{4} \cosh(\frac{x_0}{4}) - x_1 x_2 \frac{1}{16} \sinh(\frac{x_0}{4}) - \frac{1}{3!} x_1^3 \frac{1}{64} \cosh(\frac{x_0}{4})$

$\vdots$

Örnek 3.3. $F(x) = x^{-n}$, $n > 0$ Adomian polinomlarını bulalım.

$A_0 = x_0^{-n}$

$A_1 = -n x_0^{-(n+1)} x_1$

$A_2 = \frac{1}{2!} n(n + 1) - (n + 2) x_1^2 - n x_0^{-(n+1)} x_2$

$A_3 = -\frac{1}{6} n(n + 1)(n + 2) x_0^{-(n+3)} x_3^1 + n(n + 1) x_0^{-(n+2)} x_1 x_2 - n x_0^{-(n+1)} x_3$

$\vdots$

Örnek 3.4. $F(x) = x^t$, t ondalıklı bir sayı olsun.

$A_0 = x_0^t$

$A1 = t x_0^{t-1} x_1$

$$A_2 = tx_0^{t-1}x_2 + \frac{1}{2}\, t(t-1)x_0^{t-2}x_1^2$$

$$A_3 = tx_0^{t-1}x_3 + t(t-1)\, x_0^{t-2}x_1x_2 + \frac{1}{6}\, t(t - 1)(t-2)\, x_0^{t-3}x_1^3$$

$$A_4 = tx_0^{t-1}x_4 + t(t-1)\, x_0^{t-2}(\frac{1}{2}x_2^2 + x_1x_3)\, \frac{1}{2}t(t-1)(t-2)\, x_0^{t-3}x_1^2x_2 +$$
$$\frac{1}{24}\, t(t-1)(t - 2)\, x_0^{t-4}x_1^4$$

Örnek 3.5. $F(x) = e^{-x}$

$$A_0 = e^{-x_0} \ ,$$

$$A_1 = -\, x_1e^{-x_0} \ ,$$

$$A_2 = (-\, x_2 + \frac{1}{2!}\, x_1^2\,)\, e^{-x_0} \ ,$$

$$A_3 = (-\, x_3 + x_1x_2 - \frac{1}{3!}\, x_1^3\,)\, e^{-x_0} \ ,$$

$$A_4 = (-\, x_4 + x_1x_3 + \frac{1}{2!}\, x_2^2 - \frac{1}{2!}\, x_1^2x_2 + \frac{1}{4!}\, x_1^4)\, e^{-x_0}$$

$$\vdots$$

Örnek 3.6. $F(x) = e^x$ nonlineer terimi için Adomian polinomlarının hesaplanması:

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} t^k x_{1k} = x_0 + tx_1 + t^2x_2 + \dots$$

$$A_0 = e^{x_0} \ ,$$

$$A_1 = x_1e^{x_0} \ ,$$

$$A_2 = (x_2 + \frac{1}{2!}\, x_1^2\,)\, e^{x_0} \ ,$$

$$A_3 = (x_3 + x_1x_2 + \frac{1}{3!}x_1^3)\, e^{x_0} \quad ,$$

$$A_4 = (x_4 + x_1x_3 + \frac{1}{2!}x_2^2 + \frac{1}{2!}x_1^2x_2 + \frac{1}{4!}x_1^4)\, e^{x_0}$$

$$\vdots$$

Örnek 3.7. $F(x) = cosx$ nonlineer terimi için Adomian polinomlarının hesaplanması:

$A_0 = cos(x_0)$,

$A_1 = -\,x_1 sin(x_0)$,

$A_2 = -\,x_2 sin(x_0) - \frac{1}{2!}x_1^2 cos(x_0)$,

$A_3 = -\,x_3 sin(x_0) - x_1x_2\, cos(x_0) + \frac{1}{3!}x_1^3\, sin(x_0)$,

$A_4 = -\,x_4\, sin(x_0) - \frac{1}{2!}x_1^2)cos(x_0) - \frac{1}{2!}x_1^2x_2\, sin(x_0) + \frac{1}{4!}x_1^4 cos(x_0)$

$\vdots$

Doğrusal adi diferansiyel denklemi düşünelim $\frac{d^2u}{dx^2} - kx^pu = g$ ile beraber $u(1) = u(-1) = 0$. $L = \frac{d^2u}{dx^2}$ yazılır ve $Lu = g + kx^pu$ yazılır ve lineer operatörün tersi olan L^{-1} ile işleme girince, $L^{-1}Lu = L^{-1}g + L^{-1}kx^p u$ olur.

$$u = c_1 + c_2x + g\frac{x^2}{2} + L^{-1}kx^pu\, ,$$

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \text{ ile } u_0 = c_1 + c_2x + g\frac{x^2}{2} \quad u_{m+1} = \mathrm{L} - 1\, kx^p\, u_m\, , \qquad m \geq 0\, ,$$

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} (L^{-1}kx^p)^m u_0 \,,$$

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} (L^{-1}kx^p)^m c_1 + \sum_{m=0}^{\infty} (L^{-1}kx^p)^m c_2 x + \sum_{m=0}^{\infty} (L^{-1}kx^p)^m g \,\frac{x^2}{2} \,,$$

$$u = c_1 \emptyset_1(x) + c_2 \emptyset_2(x) + \tau(x) \,,$$

$$\emptyset_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} k^m x^{mp+2m} \,/ (mp + 2m - 1)(mp + 2m) \,,$$

$$\emptyset_2(x) = \sum_{m=0}^{\infty} k^m x^{mp+2m+1} \,/ (mp + 2m - 1)(mp + 2m) \,,$$

$$\tau(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right) g k^m x^{mp+2m+2} \,/ (mp + 2m + 1)(mp + 2m + 1) \,.$$

Burada

$u(1) = u(-1) = 0$ olduğundan,

$c_1\emptyset_1(1) + c_2\emptyset_2(1) + \tau(1) = 0$ ve

$c_1\emptyset_1(-1) + c_2\emptyset_2(-1) + \tau(-1) = 0$

olur. Bu yüzden c_1 ve c_2 belirlidir.

Yukarıdaki örneği düşünelim, $k = 40,\ p = 1,\ g = 2$ diyelim. Bu yüzden $\frac{d^2u}{dx^2} - 40xu = 2$ ile beraber u(-1) = u(1) = 0 denklemini düşünelim. Bu eliptik denklemin $\nabla^2 u = F(x,y,z) + k(x,y,z)u$ fizik ve mühendislik problemlerinden doğan bir boyutlu durumu olur. Burada $L = d^2/dx^2$ ve $Lu = 2 + 40xu$ elimizde var. L^{-1} ile işleme girince $u + A + Bx + L^{-1}(2) + L^{-1}(40xu)$, u ları üretiyor. $u_0 + A + Bx + L^{-1}(2) = A + Bx + x^2$ olsun ve $u = \sum_{n=o}^{\infty} u_n$ olur ve böylelikle toplam "u" olsun. $u_{n+1} = L^{-1}(40xu_n)$ olarak görürüz. Sonra tüm bileşenler şöyle belirlenebilir; örneğin,

$$u_1 = \frac{20}{3} Ax^3 + \frac{20}{3} Bx^4 + 2x^5$$

$$u_2 = \frac{80}{9} Ax^6 + \frac{200}{63} Bx^7 + \frac{10}{7} x^8$$

$$\vdots$$

n-terimi yaklaştırması n = 12 ile birlikte $\emptyset_n = \sum_{i=o}^{n-1} u_i$ ile x = 0.2 için -0.135649, x = 0.4 için -0.113969, x = 0.6 için -0.083321, x = 0.8 için -0.050944,ve x = 1.0 için tabi ki 0. Bu kolaylıkla elde edilen sonuçlar 7 basamağa kadar doğru. Görüyoruz ki daha iyi bir sonuç elde ediliyor ve hem de varyasyonel metodlardan daha kolay bir şekilde. Çözüm, doğrusal olmayan versiyonlar için de lineerizasyon olmadan kolaylıkla bulunabiliyor.

4. 1 Adomian Ayrışım Metodu (ADM)

Daha öncede bahsettiğimiz gibi bu yöntem bir seri çözüm yöntemidir. F lineer ve lineer olmayan terimleri içeren adi diferansiyel olan bir operatör olmak üzere

$$Fu(x) = g(x) \tag{2.1.9}$$

(2.1.19) denkleminde, $N-$ diferansiyel denklemde lineer olmayan terimi, $R-$ lineer operatörden kalan kısmı ve $L-$ verilen diferansiyel denklemin en yüksek mertebeden türevini göstersin

$$Lu + Ru + Nu = g \tag{2.1.20}$$

biçiminde yazılsın. Burada Lu 'yu yalnız bırakırsak

$$Lu = g - Ru - Nu \tag{2.1.21}$$

elde ederiz. Eşitliğin her iki tarafına L^{-1} operatörü sol taraftan uygulanırsa,

$$L^{-1}\text{Lu} = L^{-1}\text{g} - L^{-1}\text{Ru} - L^{-1}\text{Nu} \tag{2.1.22}$$

elde edilir.

L ikinci mertebeden ve terside mevcut olan lineer operatör olduğu kabul edilirse ve (2.1.22) eşitliğinde gerekli işlemler yapılırsa

$$u = u(0) + tu(0) - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \tag{2.1.23}$$

fonksiyonu bulunur, (2.1.23) eşitliğinde Nu lineer olmayan bir terim ve

$$Nu = \sum_{k=0}^{\infty} A_k$$

olacak şekilde ifade ederiz. Burada A_k polinomları özel polinomlardır. (2.1.23) ifadesindeki u ayrıştırılmış bir seri çözüm fonksiyonudur. Verilen seri çözüm fonksiyonunun birinci terimi olan u_0, başlangıç değeri ve denklemin sağ taraf fonksiyonun integrali alınırsa

$$u_0 = a + bt - L^{-1}g \qquad (2.1.24)$$

olarak elde edilir. Seri çözümün birinci terimi olan u_0 terimini kullanılırsa $u_1,u_2,u_3,\ldots$ terimleri de elde edilir. Böylece seri çözüm fonksiyonunu

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x,t) \qquad (2.1.25)$$

elde edilir. Bu serinin yakınsak olduğu düşünülmelidir. Seri çözümünü kullanarak (2.1.22) eşitliği yazılırsa

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = u_0 - L^{-1}R \sum_{k=0}^{\infty} u_k - L^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} A_k \qquad (2.1.26)$$

şeklinde genel seri çözümü elde edilir. Buradan

$u_1 = - L^{-1} Ru_0 - L^{-1}A_0$

$u_2 = - L^{-1} Ru_1 - L^{-1}A_1$

...

$$u_{k+1} = L^{-1}Ru_k - L^{-1}u_k, \qquad n \geq 0 \qquad (2.1.27)$$

olacak biçimde yazılabilir.

A_k polinomları lineer olmayan her bir terim için genelleştirilebilir. Genelleştirme yapılırken A_0 sadece u_0'a, A_1 sadece u_0 ve u_1'e, A_2 ise, u_0, u_1, u_2,'ye bağlı ve böylelikle

(2.1.27) eşitliğindeki bütün A_n Adomian polinomları elde edilir. A_n Adoiman polinomlarının ayrıştırılmış hali ise kaynaklarda

$A_0 = f(u_0)$,

$A_1 = u_1(\frac{d}{du_0})\, f(u_0)$,

$A_2 = u_2(\frac{d}{du_0})f(u_0) + \frac{u_1^2}{2!}\,(\frac{d^2}{du_0^2})\, f(u_0)$,

$A_3 = u_3(\frac{d}{du_0})f(u_0) + (\frac{u_1^2}{2!})(\frac{d^2}{du_0^2})\, f(u_0) + (\frac{u_1^3}{3!})(\frac{d^3}{du_0^3})\, f(u_0)$,

$$\vdots \qquad (2.1.28)$$

olarak yer almaktadır. (Adoiman ,1994) Ayrıştırılmış polinomların genel durumu,

$$A_n = \frac{1}{n!}[\frac{d^n}{dt^n}\Phi(\sum_{m=0}^{\infty} t^k u_k)],\ n > 0 \qquad (2.1.29)$$

olacak şekilde formülize edilir. Adomian (1994), Seng ve arkadaşları (1996) tarafından kaynaklara kazandırılmıştır. Adomian polinomlarını elde etmek için ise Wazwaz, (1999) tarafından geliştirildi. Bazı problemlerin daha hassas olması istenildiği durumlarda ayrışım serisi için çok sayıda terimin hesaplanması gerekir. Böyle durumlarda (2.1.29) genel formülün kullanılması istenildiği sayıda (2.1.25) ayrıştırma serisin terimlerini bulmamızda kolaylıklar sağlar.

4.2.ADOMİAN AYRIŞIM METODONUN SERİ ÇÖZÜMÜ VE YAKINSAKLIĞI

u(x,t) kapalı çözüm fonksiyonu ve bu fonksiyonun sayısal çözümlerin elde edilmesi için ayrışım metodunu kullanalım

$$\Phi n(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} u_n(x,t),\qquad n \geq 0 \qquad (2.1.30)$$

olsun.

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n = u(x,t) \qquad (2.1.31)$$

limitini (2.1.27) de indirgeme bağıntısına bakılarak kolaylıkla hesaplanabilir. (2.1.31) ayrışım seri çözümü genel olarak fiziksel problemlerde çok hızlı bir şekilde yakınsaklık ortaya çıkarmaktadır.

Ayrışım serisinin yakınsaklığını teorik olarak Cherrualt (1989); Repaci (1990); Cherrualt ve Adomian (1993); Abbaoui ve Cherrualt(1995); Abbaoui ve arkadaşları(2001); bu yazarlar ayırışım seri yönteminin yakınsaklığını elde etmek için yeni şartlar vererek bulmuşlardır. Bu metotlar için yapılan uygulamaya benzer yöntemin uygulanması için hiper bolik tipindeki

$$u_{xx} - cu_{tt} = 0 \tag{2.1.32}$$

$$u(0,t) = 0, u(1,t) = 0 \tag{2.1.33}$$

$$u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x) \tag{2.1.34}$$

Cauchy problemini lineer operatör olarak yazarsak

$$L_{tt} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad , \qquad L_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \; ,$$

lineer operatörlerin terside mevcut olsun. Dolayısıyla bu operatörlerin tersini

$$L_{xx}^{-1} = \int_0^t \int_0^s (.)dsdt, \quad + L_{xx}^{-1} = \int_0^x \int_0^s (.)dsdx,$$

şeklinde yazabiliriz. Sınır başlangıç-şartları ve denklemi verilen

$$u_{xx} - cu_{tt} = 0 \tag{2.1.35}$$

$$u(0,t) = 0, \; u(1,t) = 0 \tag{2.1.36}$$

denklemini ele alalım.

(1.1.35) denklemini operatör formda yazarsak

$$u(x,t) = u(0,t) + xu_x(0,t) + L_{xx}^{-1} L_{tt} u(x,t)$$

olacak biçimde u(x,t) çözümü bulunur. Bu çözüm seri şeklinde bir çözüm olacağından başlangıç şartları kullanılarak

$$u_0 = 0 \tag{2.1.37}$$

şeklinde serinin ilk terimi bulunur. Serinin diğer terimlerini bulmak içn (2.1.27) bağıntısına benzer şekilde

$$u_{n+1}(x,t) = L_{xx}^{-1} L_{tt}^{-1} u_n(x,t),\ n \geq 0 \qquad (2.1.38)$$

bağıntısı yazılabilir. n ≥ 0 için başlangıç şartları kullanılırsa serinin ilk terimi, (2.1.38) indirgeme bağıntısıyla birlikte (2.1.37) şeklinde serinin ilk terimi kullanılarak ayrışım serisi ,

$$u_0 = u(0,t) + xu_x(0,t) = sint$$

$$u_1(x,t) = u(0,t) + xu_x(0,t)$$

$$L_{xx}^{-1}\,[(sint)`]`$$

$$L_{xx}^{-1}\,[(-\,sint)]$$

$$\int_0^x \int_0^x (-\,sint)dxdx$$

$$\int_0^x (-xsint)dx$$

$$= -\frac{x^2}{2!}sint$$

$$u_2 = L_{xx}^{-1} L_{tt}\,(-\frac{x^2}{2!}sint)$$

$$L_{xx}^{-1}(-\frac{x^2}{2!}cost) = L_{xx}^{-1}(\frac{x^2}{2!}sint)$$

$$\int_0^x \int_0^x \left(\frac{x^2}{2!}sint\right) dxdx = \int_0^x \left(\frac{x^3}{6}sint\right) dx = \frac{x^4}{24}sint = \frac{x^4}{4!}sint$$

$$u_3 = L_{xx}^{-1} L_{tt}(\frac{x^4}{4!}sint)' = L_{xx}^{-1}(-\frac{x^4}{4!}cost)' = L_{xx}^{-1}(-\frac{x^4}{4!}sint)$$

$$= \int_0^x \int_0^x \left(\frac{x^4}{4!}sintdx\right) dx = \int_0^x \left(-\frac{x^5}{5!}sint\right) dx = -\frac{x^6}{6!}sint \qquad (2.1.39)$$

$$\vdots$$

$$u_n = L_{xx}^{-1} L_{tt} u_{n-1} = (-1)^n(-\,\mathrm{sint}\,\frac{x^{2n}}{(2n)!})$$

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots = sint + [-\frac{x^2}{2!}sint] + [\frac{x^4}{4!}sint] + [-\frac{x^6}{6!}sint] + \ldots$$

şeklinde elde edilir. Bu terimler ayrışım serisinde yerine yazılırsa serinin açık formu,

$= sint[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots]$ (2.1.40)

olarak elde edilir ve eşitliğin parantez içindeki seri $cosx$ olduğu açıkça görülür.

(1.1.35) te verilen hiperbolik kısmi diferansiyel denkleminin kapalı formdaki çözümü,

$u(x,t) = sintcosx$ (2.1.41)

olduğu görülür. Burada başlangıç şartının sağladığı kolayca görülebilir.

ÖRNEK: $u_{tt} - u_{xx} + (\frac{\partial}{\partial t}) f(u) = g(x,t)$

$g = 2e^{-t} - sin\,x - 2e^{-t} - 2t\,sin\,x\,cos\,x$ ve $f(u) = uu_x$ olsun. İlk/sınır durumlar şunlar :

$u(x,0) = sin\,x$

$u_t(x,0) = - sin\,x$

$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$

$L_t = (\frac{\partial^2}{\partial t^2})$

$L_t\,u = g - (\frac{\partial}{\partial t}) f(u) + (\frac{\partial^2}{\partial x^2}) u$

0'dan t'ye iki-bükümlü (two-fold) integralleme L_t^{-1} ile işleme girince ve

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_t \;\; ve \;\; f(u) = \sum_{m=0}^{\infty} A_n$$

yazınca ($A_n, f(u) = uu_x$ için üretilir), ayrıştırma bileşenlerini şöyle görürüz:

$u_0 = u(x,0) + t\,u_t\,(x,0) + L_t^{-1}\,g$

$u_{m+1} = -L_t^{-1}\,(\frac{\partial}{\partial t}) A_m + L_t^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u_m\,,\; m \geq 0\; için.$

Sonra

$\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ hızlıca birleşen bir seri olduğu için, parçalı toplam $\phi_m = \sum_{i=0}^{m-1} u_i$ bizim çözüme olan yaklaştırmamız olacaktır.

Yukarıda terimleri $u_0, u_1, u_2, u_3, \dots, u_m$ deki gibi hesaplayabiliriz. Buna rağmen, yakınlaştırmaları hesapladığımız için, g'yi çifte MacLaurin serileri temsilinin bir kaç terimiyle yakınlaştırarak, integrallemeleri basitleştirebiliriz. Bunun için t^3 ve x^3 ve daha yüksek terimleri içeren terimleri çıkartıyoruz. Böylelikle

$$e^{-t} = 1 - t + \frac{t^2}{2}$$

olur.

$$sinx = x$$

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$g \approx 2(1 - t + \frac{t^2}{2})(x) - 2(1 - 2t + 2t^2)\, x\,(1 - \frac{x^2}{2})$$

daha sonra varsayılan yakınlaştırmaya $L^{-1}g \approx 0$. Böylelikle

$$u_0 = x - tx$$

$$u_0 = L_t^{-1}(\frac{\partial}{\partial t})\, A_0 + L_t^{-1}(\frac{\partial^2}{\partial x^2})\, u_0 = x\, \frac{t^2}{2}$$

olur. Bu yüzden iki-terimli yaklaştırma

$$\phi_2 = u_0 + u_1 = x - tx + x\, \frac{t^2}{2}$$

$$= (1 - t^2 + \frac{t^2}{2})\, x \approx e^{-t} \sin x$$

yaklaşık değeri olur.

Her ne kadar $m \geq 0$ için u_{m+1}'i kullanarak daha fazla terim hesaplayabilsek de,

$u = e^{-t} sinx$ doğru çözüm olur.

Tam çözümü fark etmemiz gerekiyorsa eğer, g için olan serileri daha üst bir yakınlaştırmaya taşıyabiliriz, $e^{-t} sinx$ ile olan net birleşmeyi görebilmek için.

Çözüm e^{-t}sinx olabileceğini tahmin edince, bunu doğrulayabiliriz, ya da $e^{-t} sinx + N$ 'in yerini değiştirebiliriz ve $N = 0$ olduğunu gösteririz.

4. 3 Adomian Ayrışımının Örneklere Uygulanışı

Örnek 4.1:

$u_y + u_x = xy^2 + x^2y$, $u(x,0) = 0$, $u(0,y) = 0$

$L_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $L_y = \frac{\partial}{\partial y}$, $L_x^{-1} = \int_0^x (.) dx$,

$L_x u = xy^2 + x^2y - L_y u$

x – çözümü:

$L_x^{-1} L_x u = L_x^{-1}(xy^2 + x^2y) - L_x^{-1}(L_y u)$

$u(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^3y}{3} - L_x^{-1}(L_y u) = \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{3}x^3y \quad - L_x^{-1}(L_y u)$

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k (x,y)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k (x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{3}x^3y \quad - L_x^{-1}(L_y (\sum_{k=0}^{\infty} u\, k(x,y)))$$

$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots = \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{3}x^3y \quad - L_x^{-1}(L_y(u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots)$

$f(x,y) = xy^2 + x^2y$ integre edersek

$u_0(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{3}x^3y$

$u_{k+1}(x,y) = L_x^{-1}L_y(u_k)$, $\quad k \geq 0$

$u_1(x,y) = - L_x^{-1}(L_y(u_0)) = - L_x^{-1}(L_y(\frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{3}x^3y \ )) = - L_x^{-1}(x^2y \ + \frac{1}{3}x^3)$

$= -\int_0^x(x^2y \ + \frac{1}{3}x^3)dx$

$= - (\frac{1}{3}x^3y + \frac{1}{12}x^4) = - \frac{1}{3}x^3y - \frac{1}{12}x^4$

$u_1 = - \frac{1}{3}x^3y - \frac{1}{12}x^4$

$u_2 = - L_x^{-1}L_y(u_1) = - L_x^{-1}(L_y(- \frac{1}{3}x^3y - \frac{1}{12}x^4) = - L_x^{-1}(\frac{1}{3}x^3) = -\int_0^x(- \frac{1}{3}x^3)dx$

$= - (-\frac{1}{12}x^4) = \frac{1}{12}x^4,$

$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ ... = \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{3}x^3y \ - \frac{1}{3}x^3y - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{12}x^4 + \ldots = \frac{1}{2}x^2y^2$

y- çözümü:

$u_y + u_x = xy^2 + x^2y$, $\quad u(x,0) = 0$, $\quad u(0,y) = 0$

$L_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $\quad L_y = \frac{\partial}{\partial y} \quad L_x^{-1}(.) = \int_0^x(.)dx$, $L_y^{-1}(.) = \int_0^y(.)dy$,

$L_y u = xy^2 + x^2y - L_x u$

$L_y^{-1}L_y u = L_y^{-1}(xy^2 + x^2y) - L_y^{-1}(L_x u)$

$u(x,1) = \int_0^y(x \ y^2 + \ x^2y \ )dy - L_y^{-1}(L_x u)$

$u(x,1) = \frac{1}{3}x \ y^3 + \frac{1}{2}x^2y^2 - L_y^{-1}(L_x u)$

$$(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \ (x,y)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \ (x,y) = \frac{1}{3} \ xy^3 \ + \frac{1}{2}x^2y^2 \ - \ L_y^{-1}(L_x(\sum_{k=0}^{\infty} u_k \ (x,y))$$

$(u_0 + u_1 + u_2 + \ldots) = \frac{1}{3}x \quad y^3 + \frac{1}{2}x^2y^2 \ - L_y^{-1}(L_x(u_0 + u_1 + u_2 + \ldots))$

$u_0(x,y) = \frac{1}{3}x \quad y^3 + \frac{1}{2}x^2y^2$

$u_{k+1}(x,y) = L_y^{-1}L_x(u_k), \qquad\qquad k \geq 0$

$u_1(x,y) = - L_y^{-1}L_x(u_0) = - L_y^{-1}(L_x(\frac{1}{3}x \quad y^3 + \frac{1}{2}x^2y^2)) = - L_y^{-1}(\frac{1}{3}y^3 + x \quad y^2)$

$= - \int_0^y (\frac{1}{3}y^3 + x \quad y^2)dy$

$= - (\frac{1}{12}y^4 + \frac{1}{3}y^3 \ x) = -\frac{1}{12}y^4 - \frac{1}{3}xy^3$

$u_1 = - \frac{1}{12}y^4 - \frac{1}{3}xy^3$

$u_2(x,y) = - L_y^{-1}L_x(u_1) = -L_y^{-1}L_x(-\frac{1}{12}y^4 - \frac{1}{3}xy^3) = - L_y^{-1}(-\frac{1}{3}y^3) = - \int_0^y \left(-\frac{1}{3}y^3\right) dy$

$u_2 = \frac{1}{12}y^4$

$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ \ldots = \frac{1}{3}x \quad y^3 + \frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{1}{12}y^4 - \frac{1}{3}xy^3 + \frac{1}{12}y^4 + \ldots = \frac{1}{2}x^2y^2$

Örnek 4.2

$u_x + u_y = x + y \qquad\qquad u(x,0) = x^2 \ , \ u(0,y) = y^2$

x çözümü:

$L_x \, u_x = x + y - L_y u_y$

$L_x^{-1}L_x u_x = L_x^{-1}(x + y) - L_x^{-1}(L_y u)$

$u(x,y) = \int_0^x (x + y)dx \ - L_x^{-1}(L_y u) = \frac{x^2}{2} + xy - L_x^{-1}(L_y u) = \frac{x^2}{2} + xy - L_x^{-1}(L_y u)$

$\sum_{k=0}^{\infty} u_k\,(x,y) \;=\; \frac{x^2}{2} \;+\; xy \;+\; y^2 \;-L_x^{-1}(L_y(\sum_{k=0}^{\infty} u_k\,(x,y))$

$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \;\dots = \frac{x^2}{2} + xy$ - $L_x^{-1}(L_y(u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \;\dots)$

$u_0(x,y) \;=\; \dfrac{x^2}{2} \;+\; xy \;+\; y2$

$u_{k+1} = L_x^{-1} L_x(u_k)\,, \qquad k \;\geq\; 0$

u_1= - $L_x^{-1}(L_y u_0)$ = - $L_x^{-1}(L_y(\frac{x^2}{2} + xy + y^2))$ = - $L_x^{-1}(\frac{x^2}{2} + xy + y^2)$ = - $L_x^{-1}(\, x + 2y)$

= - $\int_0^x (x+\; 2y)dx$ = - $(\frac{x^2}{2} + 2xy)$ = - $\frac{x^2}{2}$ - 2xy

u_1 = - $\frac{x^2}{2}$ - 2xy

$u_2 \;=\; -L_x^{-1}(L_y u_1) \;\;=\; -\; L_x^{-1}(L_y(-\,\frac{x^2}{2} \;-\; 2xy) \;\;=$ - $L_x^{-1}(-\,2x) = -\int_0^x(-2x)\,dx$

$= \;\; -(-\,\frac{2x^2}{2}) = x^2$

$u_2 = x^2$

$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \;\dots = \frac{x^2}{2} + xy \;+ y^2 - \frac{x^2}{2} \;-\; 2xy \;+ y^2 = x^2 + y^2 - xy$

y – çözümü:

$L_y u \;= x \;+ y \;- L_x u$

$L_y^{-1} L_y u \;= L_y^{-1}(x \;+\; y) - L_y^{-1}(L_x)$

$u(x,y) = \int_0^y (x+y)dy$ - $L_y^{-1}(L_x u)$ = $xy + \frac{y^2}{2}$ - $L_y^{-1}(L_x u)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k\,(x,y)) = x^2 + xy + \frac{y^2}{2} - L_y^{-1}(L_x(\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x,y)))$$

$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \;\dots = x^2 \;+\; xy \;+\; \frac{y^2}{2} \;-\; L_y^{-1}(L_x\,(u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \;\dots))$

$u_0 = x^2 + xy + \frac{y^2}{2}$, $u_{k+1} = L_y^{-1} L_x(u_k)$, $k \geq 0$

$u_1 = -L_y^{-1} L_x(u_0) = -L_y^{-1}(L_x\left(x^2 + xy + \frac{y^2}{2}\right)) L_y^{-1}(2x$

$= -\int_0^y (2x + y)\, dy$

$u_1 = -(2xy + \frac{y^2}{2}) = -2xy - \frac{y^2}{2}$

$u_2 = -L_y^{-1}(L_x(-2xy - \frac{y^2}{2})) = -L_y^{-1}(-2y) = -\int_0^y (2y)\, dy = -(-\frac{2y^2}{2}) = y^2$

$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots = x^2 + xy + \frac{y^2}{2} - 2xy - \frac{y^2}{2} + y^2 = x^2 + y^2 - xy$

Örnek 4.3: Genel denklemi

$u'' - \pi^2 e^u = 0, \quad 0 < x < 1,$

$u(0) = u(1) = 0,$

şeklinde olan Bratu tipi problemin Adomian polinomlarını ve ayrışımını bulalım.

Burada $\lambda = -\pi^2 < 0$ olsun. Ancak,

$\lambda > 0.$

Olarak incelersek ve operatör formda yazarsak

$Lu = \pi^2 e^u$,

$u(0) = u(1) = 0,$

diferansiyel operatör L

$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$

olur. Bu operatörün tersi olan L^{-1} 'i çift integral formda yazarsak

$L^{-1}(.) = \int_0^x \int_0^x (.)\, dx\, dx$.

elde edilir.

$u(0) = 0$

$u(x) = ax + L^{-1}(\pi^2 e^u),$

$a = u'(0) \neq (0)$, sınır şartıyla

$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = ax + L^{-1}(\pi^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_n)$,

burada A_n Adomian polinomlarını göstermektedir. Başlangıç değer sıfırıncı bileşen $u_0(x)$ tarafından ax, kalan bileşenler $u_n(x)$, $n \geq 1$ referans kullanılarak aralarındaki ilişki tespit edilebilir.

$u_0(x) = ax$,

$u_{k+1}(x) = \pi^2 L^{-1}(A_k)$, $k \geq 0$,

burada A_k lar Adomian polinomlarını temsil etmektedir. Nonlineer terim olan e^u ile birlikte

$A_0 = e^{u_0}$,

$A_1 = u_1 e^{u_0}$,

$A_2 = (u_2 + \frac{1}{2}u_1^2)\, e^{u_0}$,

$A_3 = (u_3 + u_1 u_2 + \frac{1}{6} u_1^3)\, e^{u_0}$,

$A_3 = (u_4 + u_1 u_3 + \frac{1}{2} u_2^2 + \frac{1}{2}u_1^2 u_2 + \frac{1}{24} u_1^4)\, e^{u_0}$,

...

olur. Buradan

$u_0(x) = ax$,

$u_1(x) = -\frac{\pi^2}{a^2}(-e^{ax} + ax + 1)$,

$u_2(x) = -\frac{\pi^2}{4a^4}(-e^{2ax} + 4axe^{ax} - 4e^{ax} + 2ax + 5)$,

$u_3(x) = \frac{\pi^6}{12a^6}(e^{3ax} + 6e^{2ax}(1 - ax) + 3e^{ax}(2a^2x^2 - 6ax + 5) - 6ax - 22)$,

...

olur. Bunları seri toplamı biçimde yazarsak

$$u(x) = ax - \frac{\pi^2}{a^2}(-e^{ax} + ax + 1) - \frac{\pi^2}{4a^4}(-e^{2ax} + 4axe^{ax} - 4e^{ax} + 2ax + 5) + \frac{\pi^6}{12a^6}(e^{3ax} + 6e^{2ax}(1 - ax) + 3e^{ax}(2a^2x^2 - 6ax + 5) - 6ax - 22) + \cdots$$

elde edilir.

$$u(x) = ax + \frac{\pi^2}{2!}x^2 + \frac{\pi^2 a}{3!}x^3 + \left(\frac{\pi^2 a + \pi^4}{4!}\right)x^4 + \left(\frac{\pi^2 a^3 + 4\pi^4 a}{5!}\right)x^5$$

$$+\left(\frac{11\pi^4a^2 + \pi^2a^4 + 4\pi^6}{6!}\right)x^6 + \left(\frac{26\pi^4a^3 + \pi^2a^5 + 34\pi^6a}{6!}\right)x^7 \cdots,$$

daha önceden $u(1) = 0$ olduğu biliniyor ve $a = \pi$ olur. Sonuç olarak

$$u(x) = -\ln\left(1 + cos\left(\left(\frac{1}{2} + x\right)\pi\right)\right).$$

elde edilir.

Örnek 4.4: $u'' - \pi^2e^{-u} = 0, \quad 0 < x < 1,$

$u(0) = u(1) = 0,$

şeklinde olan Bratu tipi problemin Adomian polinomlarını bulalım.

$Lu = \pi^2e^{-u}$,

$u(0) = u(1) = 0$,

diferansiyel operatör L dir.

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

olur. Bu operatörün tersi L^{-1} çift integral formda yazarsak

$$L^{-1}(.) = \int_0^x \int_0^x (.)\, dx\, dx.$$

elde edilir.

$u(0) = 0$

$u(x) = (\pi^2e^{-u})$,

$a = u'(0) \neq (0)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = ax - L^{-1}(\pi^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_n),$$

burada A_n Adomian polinomlarını göstermektedir. Başlangıç değer $u_0(x)$, ax olacaktır.

$n \geq 1$ için,

$u_0(x) = ax$,

$u_{k+1}(x) = -\pi^2L^{-1}(A_k)$, $k \geq 0$, burada A_k lar Adomian polinomlarını temsil etmektedir. Nonlineer terim olan e^{-u} ile birlikte

$$A_0 = e^{-u_0} ,$$

$$A_1 = -u_1 e^{-u_0} ,$$

$$A_2 = (-u_2 + \frac{1}{2}u_1^2)\, e^{-u_0} ,$$

$$A_3 = (-u_3 + u_1 u_2 - \frac{1}{6}\, u_1^3)\, e^{-u_0} ,$$

$$A_3 = (-u_4 + u_1 u_3 + \frac{1}{2}\, u_2^2 - \frac{1}{2} u_1^2 u_2 + \frac{1}{24}\, u_1^4)\, e^{-u_0} ,$$

...

buradan

$$u_0(x) = ax ,$$

$$u_1(x) = -\frac{\pi^2}{a^2}(e^{-ax} + ax + 1) ,$$

$$u_2(x) = -\frac{\pi^2}{4a^4}(e^{2ax} + 4axe^{-ax} - 4e^{-ax} + 2ax - 5) ,$$

$$u_3(x) = -\frac{\pi^6}{12a^6}(e^{-3ax} + 6e^{-2ax}(1 + ax) + 3e^{-ax}(2a^2x^2 + 6ax + 5) + 6ax - 22) ,$$

...

$$\mathrm{u(x)} = ax - \frac{\pi^2}{a^2}(e^{-ax} + ax + 1) - \frac{\pi^2}{4a^4}(e^{2ax} + 4axe^{-ax} - 4e^{-ax} + 2ax - 5)$$

$$-\frac{\pi^6}{12a^6}(e^{-3ax} + 6e^{-2ax}(1 + ax) + 3e^{-ax}(2a^2x^2 + 6ax + 5) + 6ax - 22) + \cdots$$

$$\mathrm{u(x)} = ax - \frac{\pi^2}{2!}x^2 + \frac{\pi^2 a}{3!}x^3 - \left(\frac{\pi^2 a + \pi^4}{4!}\right)x^4 + \left(\frac{\pi^2 a^3 + 4\,\pi^4 a}{5!}\right)x^5$$

$$-\left(\frac{11\pi^4 a^2 + \pi^2 a^4 + 4\pi^6}{6!}\right)x^6 + \left(\frac{26\pi^4 a^3 + \pi^2 a^5 + 34\pi^6 a}{6!}\right)x^7 \cdots ,$$

daha önceden $u(1) = 0$ olduğu biliniyor ve $a = \pi$ olur. Sonuç olarak

$$u(x) = ln\,(1 + sin\,(1 + \pi x))$$

elde edilir.

Örnek 4.5: : $u'' - 2\pi^2 , \quad 0 < x < 1,$

$$u(0) = u'(1) = 0 ,$$

şeklinde olan Bratu tipi problemin Adomian polinomlarını bulalım.

$Lu = 2e^u$,

$u(0) = u(1) = 0$,

diferansiyel operatör L dir.

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

olur. Bu operatörün tersi L^{-1} çift integral formda yazarsak

$$L^{-1}(.) = \int_0^x \int_0^x (.)\, dx\, dx .$$

elde edilir. u(0) = u'(0) = 0

$$u(x) = 2L^{-1}(e^u) ,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = 2L^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right),$$

$u_0(x)$ in sıfır olduğu açıktır $n \geq 1$

$$u_0(x) = 0 ,$$

$$u_{k+1}(x) = 2L^{-1}(A_k) , \quad k \geq 0$$

bunu açarsak

$$u_0(x) = 0 ,$$

$$u_1(x) = x^2 ,$$

$$u_2(x) = \frac{1}{6}x^4 ,$$

$$u_3(x) = \frac{2}{45}x^6 ,$$

$$u_4(x) = \frac{17}{1260}x^8 ,$$

$$u_5(x) = \frac{62}{14175}x^{10} ,$$

$$u_6(x) = \frac{691}{467775}x^{12} ,$$

$\cdots$.

Buradan polinomları seri toplamı şeklinde yazarsak

$u(x) = x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{2}{45}x^6 + \frac{17}{1260}x^8 + \frac{62}{14175}x^{10} + \frac{691}{467775}x^{12} + \cdots$,

$u(x) = -2(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + \frac{17}{2520}x^8 - \frac{31}{14175}x^{10} - \frac{691}{935550}x^{12} + \cdots)$.

$u(x) = -2\ln(\cos(x))$. $0 \leq x \leq 1$

Örnek 4.6: $u'' + \frac{2}{x}u' + e^u = 0,$

$u(0) = u'(0) = 0$.

lineer operatör L olmak uzere

$L_u - e^u$,

olur. Bu operatörün tersi

$u = -L^{-1}(e^u)$

$u_0(x) = 0$

$u_{k+1} = -L^{-1}(A_k)$, $k \geq 0$.

nonlineer terim olan e^{-u} 'nun Adomian polinomlarını bulacak olursak

$A_0 = e^{u_0}$,

$A_1 = u_1 e^{u_0}$,

$A_2 = (u_2 + \frac{u_1^2}{2!})e^{u_0}$,

$A_3 = (u_3 + u_1 u_2 + \frac{u_1^3}{3!})e^{u_0}$,

$A_4 = (u_4 + u_1 u_3 + \frac{u_2^2}{2!} \frac{1}{2} u_1^2 u_2 + \frac{1}{4} u_1^4)e^{u_0}$,

başlangıç koşulu

$u_0 = 0$,

$u_1 = -L^{-1}(A_0) = -\frac{1}{6}x^2$,

$u_2 = -L^{-1}(A_1) = \frac{1}{5.4!}x^4$,

$u_3 = -L^{-1}(A_2) = -\frac{8}{21.6!}x^6$,

$$u_4 = -L^{-1}(A_3) = \frac{122}{81.8!}x^8,$$

$$u_5 = -L^{-1}(A_4) = -\frac{4087}{495.10!}x^{10},$$

$\cdots .$

olur. Buradan seri toplamı şeklinde yazarsak

$$u(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{5.4!}x^4 - \frac{8}{21.6!}x^6 + \frac{122}{81.8!}x^8 - \frac{61.67}{495.10!}x^{10} + \cdots$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

[1] Adomian G. (1994), Solving Frontier Problems of Physics: Decomposition Method, Kluwer, Academic Publisher, Boston,

[2] Adomian G. (1986) Nonlineer stochastic operator equations, Academic pres San Diego,

[3] Adomian G.(1988) , A review of the decomposition method in applied mathematics, Journal of Mathematical Analysis and Application (135) 501-544.

[4] Karakoç S. B. G (Haziran 2006) Cebirsel denklem sistemlerinin Adomian ayrışım yöntemi ile çözümü, Yayınlanmamış yüksek lisans tezi, İnönü üniversitesi

[5] Narlı M.(Şubat 2007) Adomian ayrışım metodu ile kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri, Yayınlanmamış yüksek lisans tezi, Kahramanmaraş sütçü imam üniversitesi

[6] Wazwaz A.M.(2002) Partial Differential Equations: Methods and Applications, Balkema Publishers, The Netherlands,

[7] Wazwaz A.M.(2002) A new method for solving singuler initial value problems in the second order differential equations, Applied Mathematics and Computation (128) 47 – 57.

[8] Wazwaz A.M.(1997) A First Course in Integral Equations, World Scientific, Singapore.

[9] Wazwaz A.M.(1999) , Analytical approximations and Pade approximations for Volterra's population model, Applied Mathematics and Computation (100) 13-25.

[10] Wazwaz A.M. (2000) , A new algorithm for calculating Adomian polynomials for nonlnear operators, Applied Mathematics and Computation (111) 53-69

ÖZGEÇMİŞ

Necmettin TAMER, 1980 yılında Adıyaman'ın Kahta ilçesine bağlı Dut köyünde doğdu. İlk öğrenimini Dut köyü ilk öğretim okulunda, 8.sınıftan itibaren Kahta T.P.A.O Atatürk ilköğretim okulunda, Kahta lisesinde orta öğretimini tamamladı. İnönü ünüversitesi Fen – Edebiyat fakultesi Matematik bölümünü 2004 yılında bitirdi.Askerliğini 1. mühümat depo komutanlığı İstanbu/Hadım köyde yaptı. Öğretmenlik görevini özel bir kuruluşta devam ettirmektedir. 2009 yılında Beykent üniversitesi Uygulamalı Matematik Bilim dalında yüksek lisansa başladı. .

Evli ve bir çocuk babasıdır. Yabancı dili İngilizcedir.